F2003B: “MODELACIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS FÍSICOS DETERMINÍSTICOS"

Sesión 11 – Reto

3 de marzo del 2023

Dr. Servando López Aguayo

Contenido de la sesión

- Método de Crank Nicolson

- Pero este tema es opcional y posiblemente sólo veamos en clase un repaso de los anteriores aplicados a la NLSE.

El método de Crank Nicolson

- Método de segundo orden
- Incondicionalmente estable!
- Implícito!

Para aplicarlo: La ecuación del calor

- Es una ecuación del "tipo parabólico":

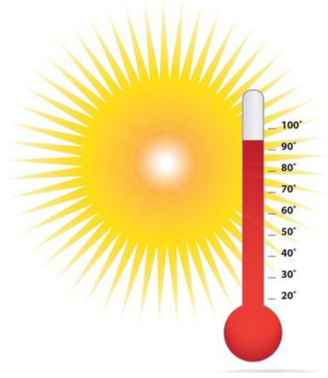
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{for} \quad 0 \leq t < \infty$$

- Con condiciones de frontera:

$$u(0,t) = c_1, \quad u(1,t) = c_2 \quad \text{for} \quad 0 \leq t < \infty$$

- Y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = f(x), \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1\,.$$



Solución (posible)

- Podríamos utilizar el método de diferencias finitas:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}$$

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)\, u_{i,j} + r\,(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$$

$$r = \alpha^2 k/h^2$$

$$0 \leq r \leq 1/2$$

Método de Crank-Nicholson

Sin embargo, utilizaremos un esquema "implícito":

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\alpha^2 \left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2} \right)$$

$$-ru_{i-1,j+1} + 2(1+r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = 2(1-r)u_{i,j} + r\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right)$$

for $r = 1$ $$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j}$$

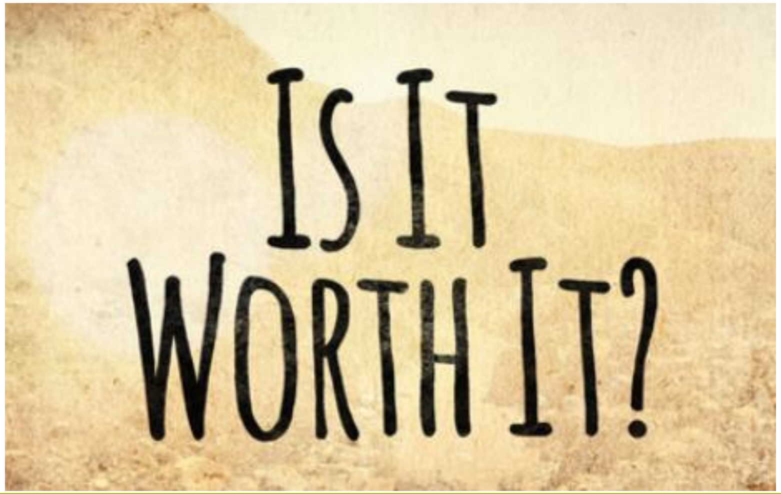
Método de Crank-Nicholson

- Y ahora, sólo hay que resolver:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \dots \\ u_{k,j+1} \\ \dots \\ u_{n-2,j+1} \\ u_{n-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + u_{3,j} \\ u_{2,j} + u_{4,j} \\ \dots \\ u_{k-1,j} + u_{k+1,j} \\ \dots \\ u_{n-3,j} + u_{n-1,j} \\ u_{n-2,j} + 2c_2 \end{pmatrix}$$

Una ventajas “curiosa” de Crank-Nicholson

- Es incondicionalmente estable! (Aunque eso no implique que siempre nos dará el resultado correcto)



Desventajas del método de Crank Nicolson

- Tal vez no es tan directo de entender.

- La inversión de la matriz, numéricamente puede ser de alto costo computacional.

Crank Nicolson es un método implícito

- El método de Euler es explícito

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^n \left(u,\ x,\ t,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \qquad \text{(forward Euler)}$$

- Mientras que Crank Nicolson es implicito

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[F_i^{n+1}\left(u,\ x,\ t,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + F_i^n\left(u,\ x,\ t,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right]$$

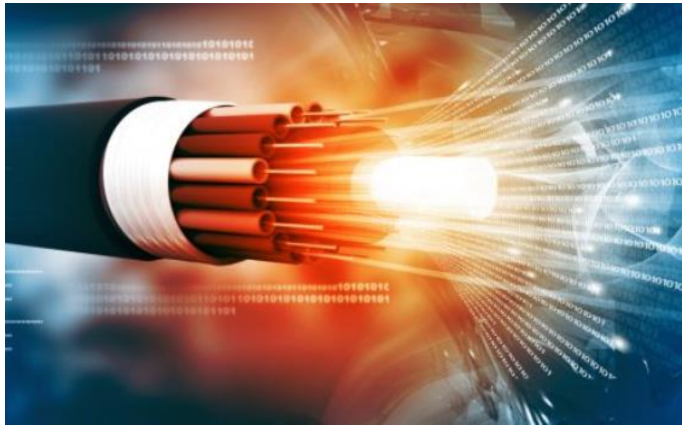
Tiempo de break

Actividad:

- Así es! Vamos a simulando el sistema de comunicaciones ópticas usando Crank Nicolson.

- Vamos a hacer interacción entre pulsos ópticos

- $U(x)=\mathrm{sech}(x-to)+\mathrm{sech}(x+to)$



Conclusiones

- Repasamos y profundizamos un poco en el método de Crank Nicolson.

- Revisamos la interacción entre pulsos ópticos.

- Tenemos herramientas suficientes para simular nuestro modelo. Bueno, aún falta conocer "la joya de la corona" ☺

- **"Fallas el 100% de los tiros que no haces."**

Wayne Gretzky