Cuadratura Gaussiana

Por Juan Francisco Hernández Rodríguez
Gilberto Rodríguez Prado
Oscar Cruz Zepeda
Franko
Arif Morán Velázquez/A01234442

¿Qué es la cuadratura Gaussiana?

La cuadratura gaussiana (en este caso de Legendre), es un método de integración numérica, utilizada para resolver una integral complicada en un intervalo ya definido. Se aproxima la función con un polinomio, dependiendo del valor de n, el nivel de aproximación:

n=2

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{2} w_i \cdot f\left(\frac{b-a}{2}z_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

*Para obtener el coeficiente de peso, se puede usar el método de Newton-Cotes o un sistema matricial si se cuenta con los nodos (calculado con las raíces del polinomio de Legendre

Ventajas/Desventajas

Aproximación de soluciones más exactas

si se busca resolver un polinomio de grado 2n+1 o menor la solución es exacta

Solo se necesitan sumas y multiplicaciones una vez que ya se calculó los nodos y los coeficientes de pesos

Gasto computacional

los polinomios de grado igual menor a 2n+1 se pueden resolver de manera analítica

$$\begin{pmatrix} w_1 + w_2 = 2 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0 \\ w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \dfrac{2}{3} \\ w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0 \end{pmatrix}$$

MATLAB

```
function I = GaussLegendre2(a,b,f)
syms x

%Definir los pesos, previamente definidos
w0 = 5/9;
w1 = 8/9;
w2 = 5/9;

%Definir los nodos previamente definidos
x0 = -sqrt(3/5);
x1 = 0;
x2 = sqrt(3/5);

%Calcular los valores de zk para cuando el intervalo no esta entre -1 y 1
z0 = ((b-a)*x0+b+a) / 2;
z1 = ((b-a)*x1+b+a) / 2;
z2 = ((b-a)*x2+b+a) / 2;

%Evaluar los valores de zk en f y calcular la integran
I = (b-a)/2 * (w0*subs(f,x,z0) + w1*subs(f,x,z1) + w2*subs(f,x,z2));
end
```

Ejemplos

$$\int_{0.2}^{1.2} e^{x^2}\,dx$$

integral numérica

ans = 1.9377855603892487787550893554702

ans = 0.00056259015756876986362533519366158

Error absoluto

$$\int_4^9 \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{2\sqrt{x}}\,dx$$

integral numérica

ans = 196.70007959803199223710338586743

ans = 0.000079598031992237103385867430988014

Error absoluto

Python

```
import sympy as sp
#Pesos
w1=1
w2=w1

#limites
b=1.2
a=0.2
x=sp.symbols('x')

#Funcion
f=sp.exp(x**2)
x1=-1/sp.sqrt(3)
x2=-x1

z1 = ((b-a)*x1+b+a) / 2;
z2 = ((b-a)*x2+b+a) / 2;

#Integral numerica
I = (b-a)/2 * ( w1*f.subs(x,z1) + w2*f.subs(x,z2));
print(round(I,9))

#Integral simbolica
Is=sp.integrate(f,(x,a,b))

print(round(abs(I-Is),9))
```

Ejemplos

$$\int_{0.2}^{1.2} e^{x^2}\, dx$$

integral numérica 1.921044641

Error absoluto 0.017303509

$$\int_{4}^{9} \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{2\sqrt{x}}\, dx$$

integral numérica 196.702808650

Error absoluto 0.002808650

Conclusiones

Este método numérico nos da aproximaciones exactas siempre y cuando los polinomios sean iguales o menores a 2n+1, el error absoluto nos indican que es un método fiable.

Referencias

José Alberto Gutiérrez Robles Miguel Ángel Olmos Gómez Juan Martín Casillas González,Analisis numerico

Alejandro Sandoval Ramos. (2020, May 14). *Integración Numérica por Cuadratura de Gauss* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=7fHyO8nfPIU

Victoria Chávez. (2019, March 14). *Cuadratura de Gauss* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=28_E5nYvEJk