Fundamentación de la Electrodinámica

Julio César Gutiérrez Vega

Segundo mini-proyecto
Propagación de ondas en espacio libre

Fecha límite de entrega: Lunes 19 de junio de 2023 antes de las 8AM

`[30 puntos]`

Objetivo y antecedentes

El objetivo de esta actividad es simular la propagación libre de ondas electromagnéticas. Con la idea de comparar nuestras rutinas contra resultados teóricos conocidos, tomaremos como ejemplo el clásico experimento de Young unidimensional. Una vez que estemos seguros que nuestras rutinas funcionan adecuadamente podremos propagar frentes de luz más complicados y que no tengan solución analítica exacta.
Considera el clásico experimento de Young de la doble rendija mostrado en la Fig. 1(a). El ancho de cada rendija es b y están separadas por una distancia h. Si una onda plana monocromática de longitud de onda λ incide frontalmente sobre la pantalla el patrón de difracción de Fraunhofer para el caso unidimensional tiene una distribución de intensidad proporcional a

$$I \propto \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\gamma, \tag{1}$$

donde $\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta$, $\gamma = \frac{1}{2}kh\sin\theta$, y, finalmente, $k = 2\pi/\lambda$ es la constante de propagación. Los detalles de la derivación de la Ec. (1) pueden consultarse en muchas referencias, p. ej. [1, Sect. 10.2.2].

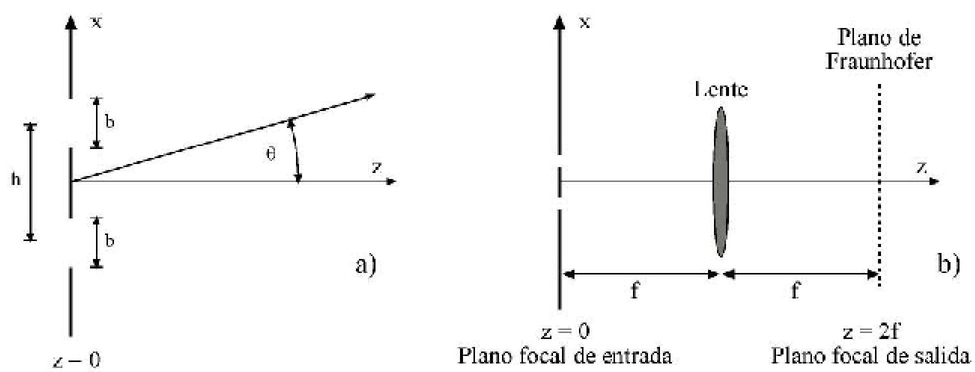

Figura 1: Geometría del experimento de Young

El factor $(\sin\beta/\beta)^2$ en la Ec. (1) corresponde al patrón de intensidad para una rendija única. Aquí este factor contribuye como una envolvente para las franjas de interferencia de Young dadas por el término $\cos^2\gamma$. Franjas brillantes ocurren para $\gamma = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$. La separación angular entre franjas está dada por $\Delta\gamma = \pi$, o aproximadamente en la región paraxial, en términos del ángulo θ

$$\Delta\theta \approx \frac{2\pi}{kh} = \frac{\lambda}{h} \tag{2}$$

La propagación libre de la onda electromagnética se calcula solucionando la ecuación escalar de onda que en el régimen paraxial toma la forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mathrm{i}2k\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

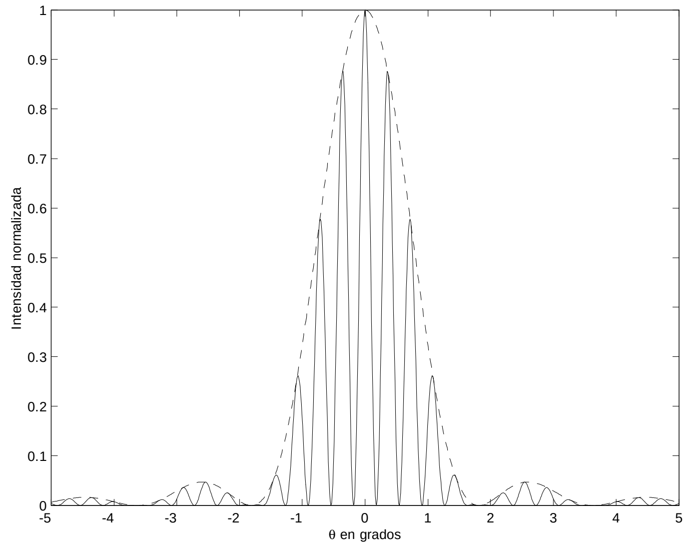

Figura 2: Gráfica de la intensidad relativa $I(\theta)$ dada por la Ec. (1) correspondiente a un experimento de Young. La línea punteada es la envolvente sinc de la variación cosenoidal. Para esta gráfica $\lambda = 632.8$ nm, $h = 1$ mm y $b = 0.2$ mm

donde $U(x, z)$ es la amplitud del campo eléctrico de la onda, i es el número imaginario $\sqrt{-1}$. Observa que la ecuación paraxial de onda tiene la estructura de una ecuación de difusión unidimensional con la variable z en vez de la variable t, ver Ref. [2].

Procedimiento de la actividad

1. `[15 puntos]` Programa el método de Crank-Nicolson para resolver la Ec. (3) y simular la propagación de la luz en un experimento de Young. Las notas describiendo el método las puedes encontrar en el Canvas.
   Toma como campo inicial en $z = 0$ la luz que sale justo después de la pantalla con la doble rendija. Para fines numéricos toma $\lambda = 632.8$ nm que corresponde a la longitud de onda de la luz de un láser de He-Ne. Toma los siguientes valores:

   - Rango transversal: -6 mm $\leq x \leq 6$ mm
   - Total de puntos transversales: $n_x = 511$. El número es impar para asegurar tener un punto el origen $x = 0$.
   - Rango de propagación: $0 \leq z \leq 1.5$ m
   - Total de pasos longitudinales: $n_z = 200$.
   - Datos de la pantalla para el experimento de Young: $h = 1$ mm y $b = 0.2$ mm. La onda plana incidente tiene una amplitud unitaria.

   a) Grafica la propagación de la onda en el plano (x, z). Esta es una gráfica bidimensional, por lo que para cada iteración tendrás que almacenar la forma de la onda en una matriz de resultados.

   b) En muchas simulaciones, el monitoreo constante de cantidades que se conservan sirve para checar la estabilidad de la simulación, usa este hecho para estar seguro que la simulación está evolucionando correctamente. Grafica el error relativo de la energía del frente de onda en función de la distancia de propagación z. Para cada iteración (posición z) calcula la energía del haz usando

$$Energía\,(z) \propto \int U^2 \mathrm{d}x \approx \sum_j \left[\mathrm{abs}\,(U_j)\right]^2 \Delta x, \tag{4}$$

donde j es el contador de puntos transversales. Recuerda que $U(x)$ es una cantidad compleja por lo que la densidad de energía es proporcional al cuadrado del valor absoluto de $U(x)$. El error relativo porcentual se calcula usando

$$ERP\,(z) = 100 * \left| \frac{E_{inicial} - Energía\,(z)}{E_{inicial}} \right|. \tag{5}$$

Lo recomedable es que el ERP no sobrepase el valor de 0.001.

c) Empalma las gráficas unidimensionales de la intensidad del campo para diferentes valores de z, p. ej. $z = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25$ y 1.5 m.

d) Corrobora tus resultados numéricos por medio de la predicciones teóricas dadas por las Ecs. (1) y (2).

2. `[15 puntos]` Veamos el efecto de colocar una lente convergente a mitad de la distancia de propagación, ver la Fig. 1(b). Para esto propaga el campo como se hizo en el Prob. 1 pero ahora hasta $z = 0.75$ m. En ese lugar multiplica el campo por la transmitancia de una lente convergente

$$T_L\,(x) = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{k}{2f}x^2\right), \tag{6}$$

donde f es la distancia focal de la lente. Para nuestro caso selecciona $f = 0.75$ m, de tal forma que la pantalla quede en el plano focal de la lente. Ahora contínua propagando libremente hasta $z = 1.5$ m, de tal forma que la última iteración muestre el segundo plano focal, lo que equivale al plano de Fraunhofer [1].

a) Grafica la propagación de la onda en el plano (x, z).

b) Grafica el error relativo de la energía del frente de onda en función de la distancia de propagación z.

c) Empalma las gráficas unidimensionales de la intensidad del campo para diferentes valores de z, p. ej. $z = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25$ y 1.5 m.

3. `[10 puntos]` Seleccionen otra pantalla con una transmitancia diferente y repite los incisos correspondientes al Prob. 2. Propongan un campo inicial interesante. Busquen diferentes opciones. Este ejercicio es libre, entonces no espero ver el mismo ejemplo en diferentes equipos!!!

Comentarios técnicos generales

- Noten que el campo $U\,(x)$ debe ser prácticamente cero en las fronteras transversales de la simulación. Tomen en cuenta esto cuando escojan la pantalla para el Prob. 3.
- Diseñen sus rutinas de forma que puedan cambiar fácilmente los parámetros físicos del campo de entrada.
- Para realizar esta simulación es recomendable que primero selecciones valores de las constantes físicas que generen resultados que puedas verificar sin dificultad.

Discusión final `[5 puntos]`

Esta parte no es en equipo, es individual. Responda:

1. Argumenten las principales diferencias observadas si cambian las condiciones iniciales del problema 1 y 2. ¿Cuáles fueron las principales dificultades?
2. ¿Cuáles conceptos aprendimos con este proyecto? ¿Cuáles habilidades técnicas desarrollamos con el desarrollo del proyecto?

Entregables

1. Archivo pdf único que incluya:

   a) Portada con los nombres y matrículas de los integrantes del equipo.

   b) Desarrollos, resultados, gráficas solicitados en los diversos incisos. En el mismo orden que están solicitados.

   c) Apéndice con los códigos computacionales implementados.

   d) El reporte debe hacerse con un procesador de texto (latex, word, o cualquier otro). El formato del documento es libre, pero les pido orden y estructura.

Sobre la entrega

1. Subir el reporte al espacio de Canvas que les habilitaré para la entrega. **No comprimir los archivos.**
2. Enviar el documento como un attachment al correo xhactul@gmail.com
3. **IMPORTANTE**: Aunque el proyecto puede ser en equipo, cada estudiante debe subir el reporte individualmente. Recuerden que la Sección de Discusión Final es individual.

Consideraciones generales

- El proyecto se entregará en equipos de una o dos personas. En caso de hacerlo en pareja, es la misma calificación para ambos miembros.
- Los equipos deben ser iguales que en el primer mini-proyecto.
- **OBSERVACION IMPORTANTE:** Noten que la suma da 45 puntos, cuando originalmente la actividad era de 30. Estos 15 puntos extras corresponden a 5 puntos semestrales efectivos y se toman a cuenta de los puntos extra pendientes por los dos primeros parciales.

Referencias

[1] E. Hetch, *Optics,* Addison Wesley, 3rd. ed., 1998

[2] J.C. Gutiérrez-Vega, "Notes on the Numerical Solution of the Diffusion Equation with the Finite Difference Method", June 2023.