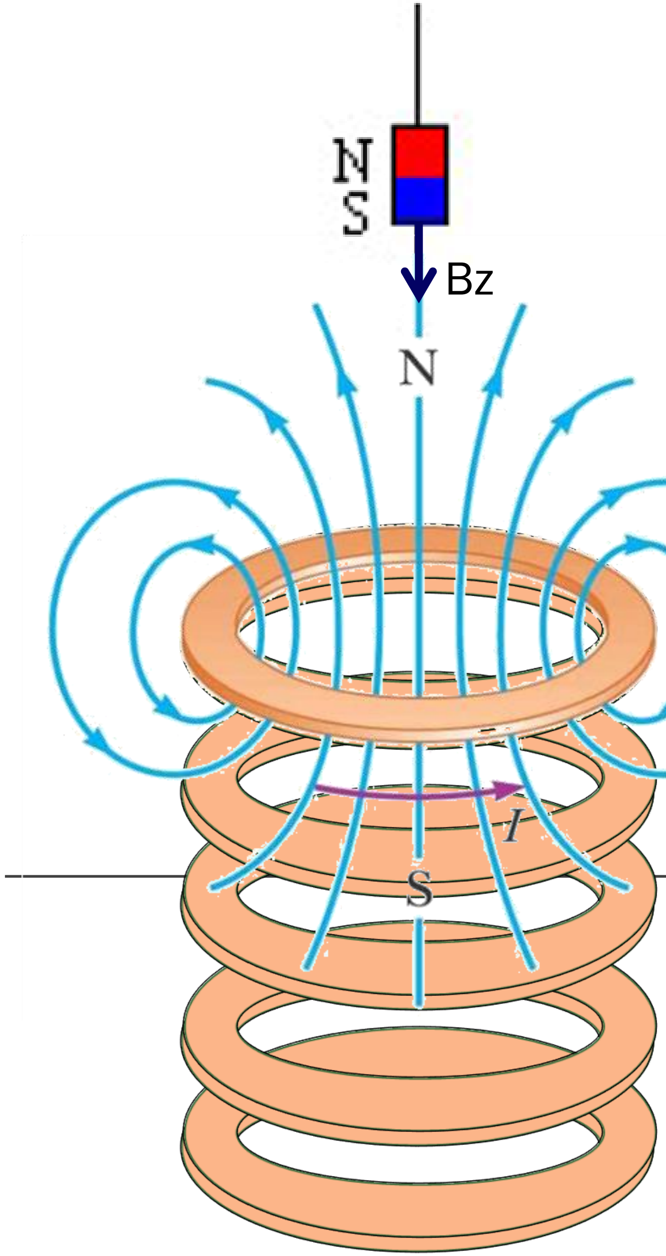


F1014B

Modelación computacional de sistemas electromagnéticos

Reto: Entregable 2 (Final)

GRAFICAR LA POSICIÓN VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DEL DIPOLO EN FUNCIÓN DEL TIEMPO.

TECNOLÓGICO DE MONTERREY

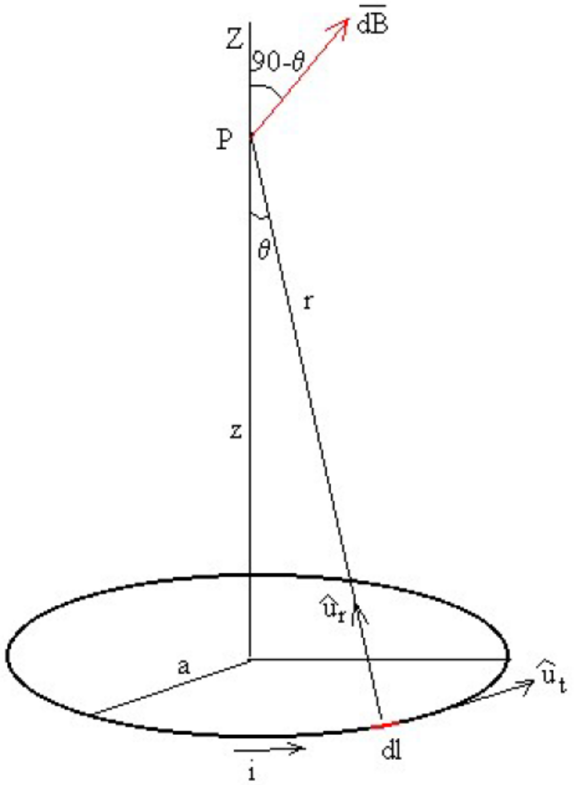
Entregable final

- Graficar la posición en función del tiempo (1D) de la caída de un dipolo magnético frenado por un anillo de corriente

- Graficar la velocidad en función del tiempo (1D) de la caída de un imán frenado por un anillo de corriente

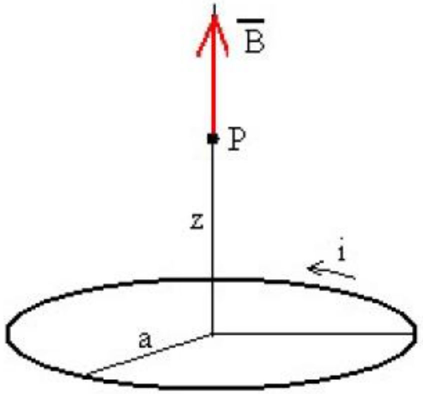
- Graficar la fuerza (aceleración entre masa) en función del tiempo (1D) de la caída de un imán frenado por un anillo de corriente

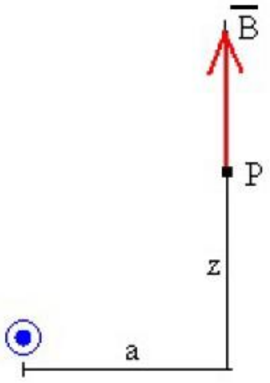
Campo sobre el eje de una espira



En la figura, se muestra una espira circular de radio a, recorrida por una corriente de intensidad i. El punto P está sobre el eje de la espira a una distancia z de su centro.

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\mathbf{u_t}\times\mathbf{u_r}}{r^2}dl \qquad dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2}$$





Los vectores unitarios son perpendiculares entre sí. Las componentes del campo perpendiculares al eje, por simetría, se anulan.

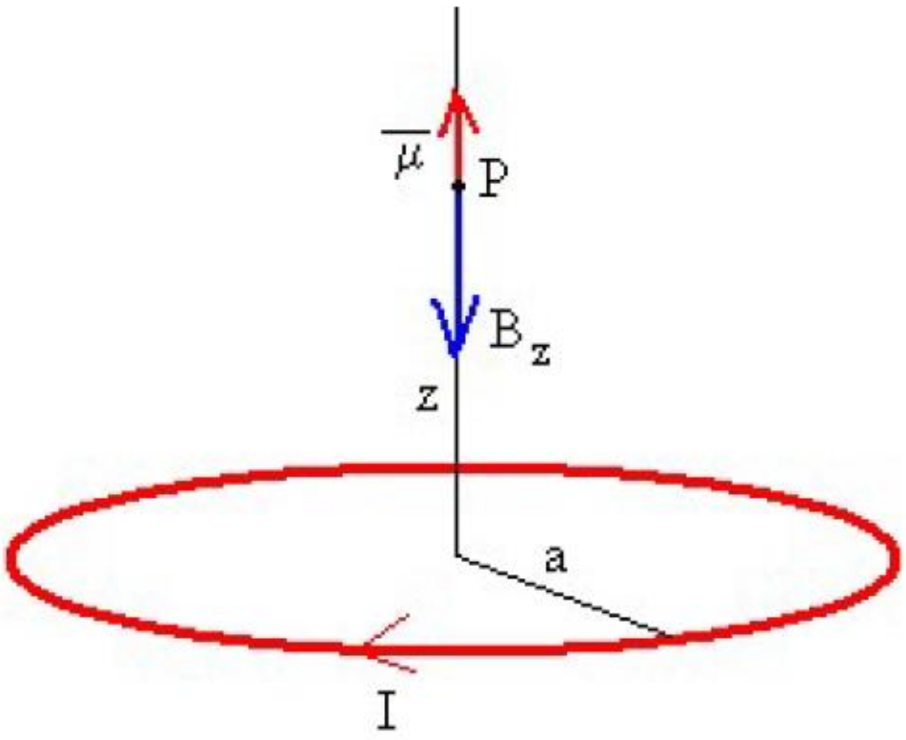
$$B = \int dB\cdot\cos(90-\theta) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2}\sin\theta\oint dl = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2}2\pi a\sin\theta = \frac{\mu_0 i a^2}{2\left(\sqrt{z^2+a^2}\right)^3}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Campo producido por una espira

El campo magnético producido por una espira de radio a por la que circula una corriente eléctrica de intensidad I, en un punto z sobre su eje es

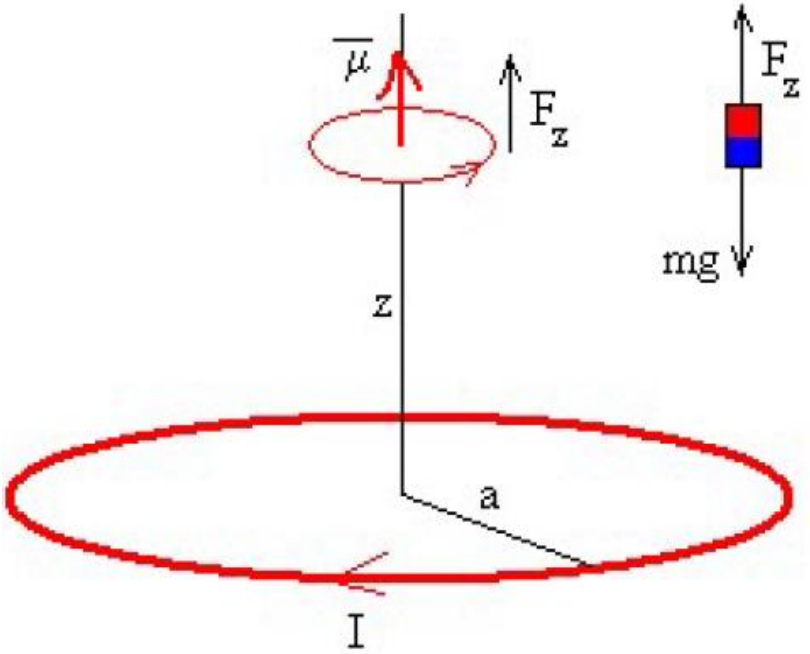
$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$



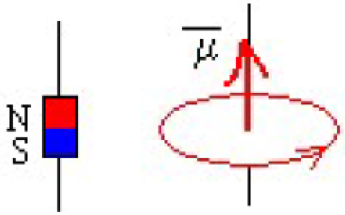
Dipolo magnético

La energía potencial *U* de un dipolo magnético ***μ*** en un campo magnético ***B*** que tiene la dirección del eje z es el producto escalar

$$U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} = -\mu\cdot B_z$$



El imán (dipolo magnético) se sitúa a cierta altura, se libera y cae bajo la acción de la gravedad hacia la espira a lo largo de su eje. Se origina una corriente inducida en la espira que modificará el movimiento de caída libre del imán



Consideramos el imán como un dipolo de momento $\boldsymbol{\mu} = \mu\mathbf{k}$

Fuerza magnética

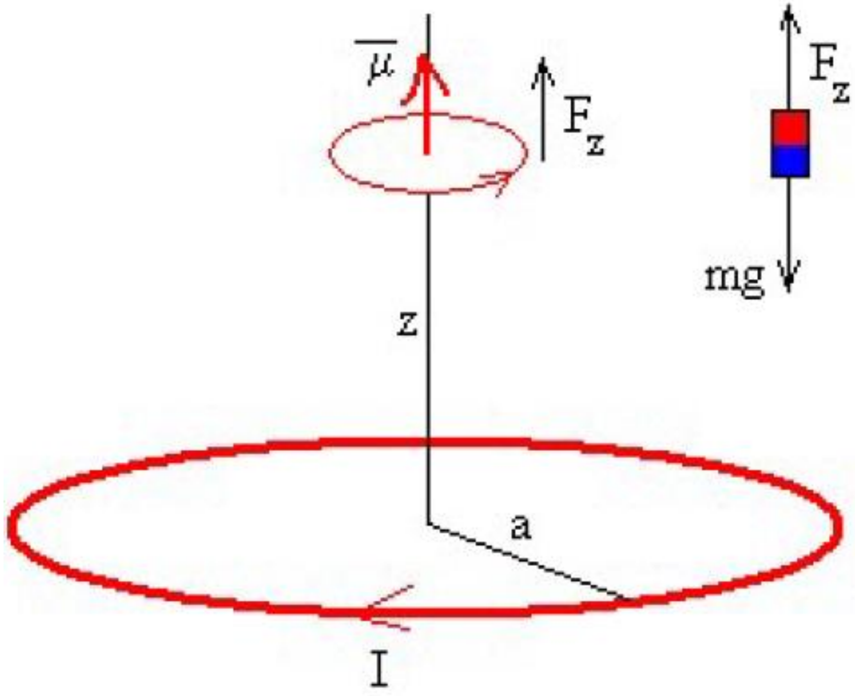
El imán (dipolo magnético) se sitúa a cierta altura, se libera y cae bajo la acción de la gravedad hacia la espira a lo largo de su eje. Se origina una corriente inducida en la espira que modificará el movimiento de caída libre del imán

Como $\boldsymbol{B}$ es variable a lo largo del eje de la espira, el dipolo magnético experimenta una fuerza

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{3\mu\mu_0 I a^2}{2}\frac{z}{(z^2+a^2)^{5/2}}$$

Si la corriente $\boldsymbol{I}$ en la espira es negativa (dirección de la figura) la fuerza es de repulsión. Aplicamos la segunda Ley de Newton al movimiento del dipolo magnético (imán)

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - \frac{3\mu\mu_0 I a^2}{2}\frac{z}{(z^2+a^2)^{5/2}}$$



Flujo magnético

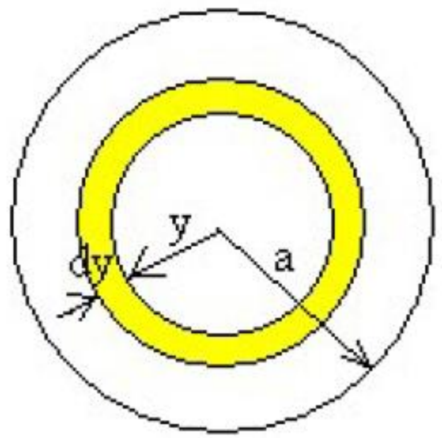
Momento magnético μ

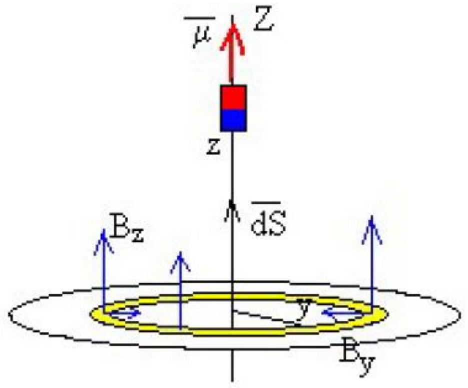
En la figura se muestran las líneas de campo magnético producido por el imán.

El flujo del campo producido por el imán a través de una espira de radio a.

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot dS\hat{\mathbf{k}} = \int_S B_z \cdot dS$$

$$\mu = i\pi a^2$$



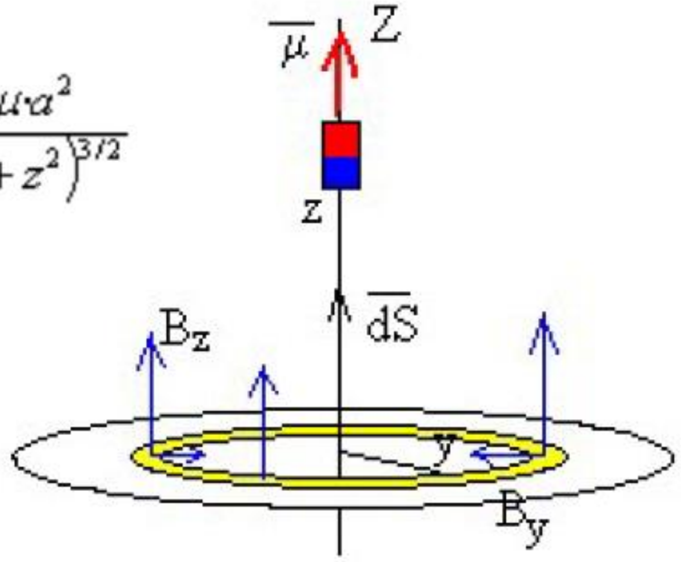


$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot dS\hat{\mathbf{k}} = \int_S B_z \cdot dS$$

Flujo magnético

Dado que el plano de la espira es perpendicular al eje Z, el flujo de la componente Y del campo es nulo. El elemento diferencial de superficie dS, es el área de un anillo de radio y y de espesor dy, su valor es $dS = 2\pi y dy$

$$\Phi = \int_0^a \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4\pi r^3}\left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right) \cdot 2\pi y \cdot dy \cdot = \frac{\pi \mu_0 \cdot \mu}{4\pi}\left(3z^2 \int_0^a \frac{2ydy}{\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^5} - \int_0^a \frac{2ydy}{\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^3}\right) = \frac{\mu_0 \mu \cdot a^2}{2\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$



$$B_z = \frac{\mu_0 i \cdot a^2}{4r^3}\left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right)$$

$$r = \sqrt{z^2 + y^2}$$

Ley de Faraday

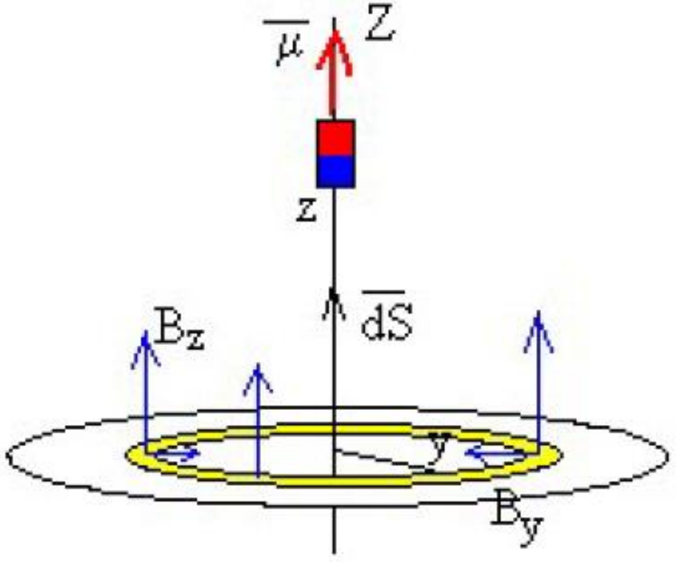
Aplicando la ley de Faraday

$$V_z = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{3\mu_0 \mu a^2}{2}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\frac{dz}{dt}$$

Usando la ley de Ohm y considerando que la espira tiene una resistencia R

$$IR = \frac{3\mu_0 \mu a^2}{2}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\frac{dz}{dt}$$

Ecuación diferencial de posición



Como ***B*** es variable a lo largo del eje de la espira, el dipolo magnético experimenta una fuerza. Sustituyendo la expresión de la corriente:

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{9(\mu\mu_0)^2 a^4}{4R}\frac{z^2}{(z^2+a^2)^5}\frac{dz}{dt}$$

Si la corriente ***I*** en la espira es negativa (dirección de la figura) la fuerza es de repulsión. Aplicamos la segunda Ley de Newton al movimiento del dipolo magnético (imán)

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - \frac{9(\mu\mu_0)^2 a^4}{4R}\frac{z^2}{(z^2+a^2)^5}\frac{dz}{dt}$$

Runge-Kutta

Como $dz/dt < 0$ (es negativo), la fuerza que ejerce sobre el imán el campo magnético producido por la corriente inducida de la espira se opone a la velocidad, es una fuerza de frenado

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - \frac{9(\mu\mu_0)^2 a^4}{4R} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^5} \frac{dz}{dt}$$

Para determinar la posición y la velocidad del imán en función del tiempo, tenemos que resolver una ecuación diferencial de segundo orden por procedimientos numéricos (como por ejemplo el de Runge-Kutta de cuarto orden) con las siguientes condiciones iniciales:

- En el instante $t = 0$: $z = z_0, dz/dt = 0$
- La caída del imán parte del reposo desde una altura z_0

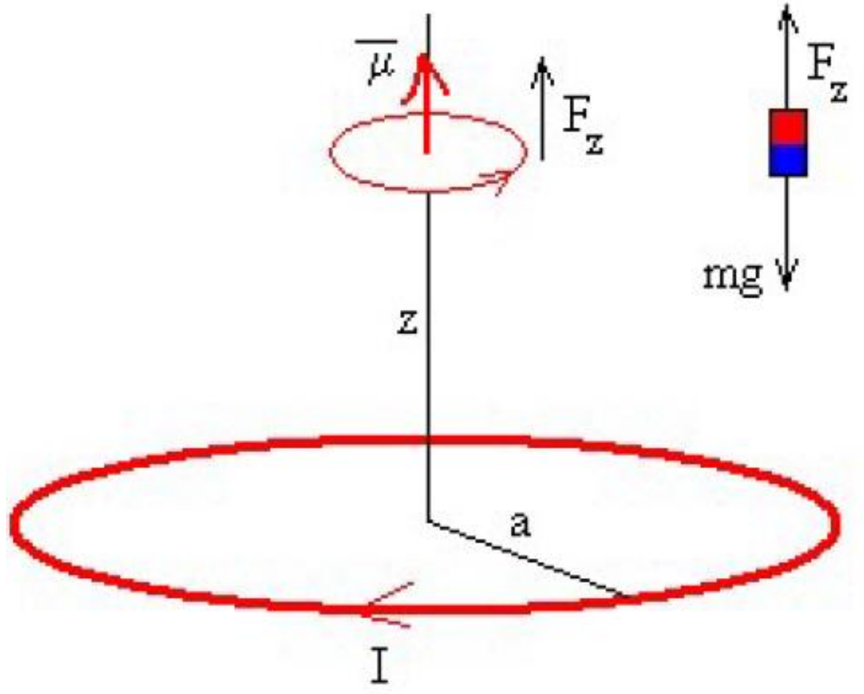
Parámetros

```
m = .01;               % Kg
g = 9.81;              % aceleration
U = 1000000;           % Max Relative dipolar moment
M = 4*pi*(10^-7);      % Vacuum permeability
a = .08;               % Meters of radio
R = .00009;            % Resistance
```

Regresión lineal

A partir de la función de posición en función del tiempo (tabla de valores) se calcula la gráfica de velocidad y de fuerza (aceleración entre masa) en función del tiempo (1D)

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - \frac{9(\mu\mu_0)^2 a^4}{4R}\frac{z^2}{(z^2+a^2)^5}\frac{dz}{dt}$$



Demo Graficar la velocidad y la fuerza en función del tiempo (1D) de la caída de un imán frenado por un anillo de corriente

Con base al material de apoyo:

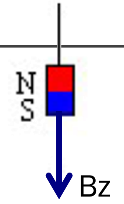
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/induccion/foucault1/foucault1.htm

Realice un análisis de las leyes y formulas descritas para determinar la posición y velocidad de un dipolo que cae a través de un tubo.

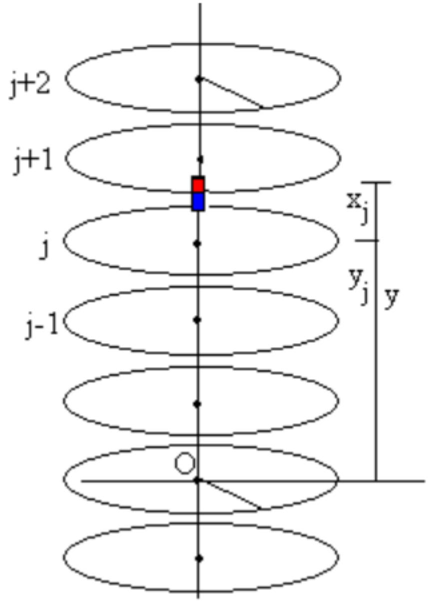
Identifique las fórmulas necesarias para aplicarlas en su proyecto y representar el movimiento posición, velocidad en función del tiempo.

Justifique la forma mas adecuada de implementarlas en su programa de Matlab.

Generé una versión complementaria de su aplicación de Matlab para implementar la solución que grafique la posición y velocidad en función del tiempo.



Efecto de un conjunto de espiras



Entregable 2

En el Entregable 2 del Reto se deberá de graficar la posición, velocidad y aceleración del dipolo a través del tiempo a lo largo de su trayectoria, después de dejarlo caer desde una posición inicial z0.

Considerar los parámetros de permeabilidad magnética del dipolo magnético de Hierro y una masa pequeña como los indicados en una filmina anterior (para visualizar el efecto de la fuerza magnética).

El LiveScript o mlapp deberá permitir modificar los parámetros z0, masa o algún otro parámetro que consideren necesario para realizar diferentes tipos de ensayos y visualizar los resultados obtenidos.

Tu aplicación de Matlab deberá mostrar el campo magnético que se genera en la espira, conjuntamente con la gráfica del cambio de posición, velocidad y aceleración del dipolo.

Configurar la aplicación de tal forma que permita simular un conjunto de espiras como si fuera un cilindro de espiras.