Modelación con ecuaciones diferenciales

Situación problema: Concentración Salina

Profesor: Dra. Dámaris Arizhay Dávila Soria

Arif Morán Velázquez — A01234442

Alberto Anaya Velasco — A01252512

Monterrey, Nuevo León

25 de noviembre de 2022

Contenido

Introducción

Los lagos de agua salada o salinos, o los lagos salobres, por lo general se forman en áreas hidrográficamente más bajas de ambientes áridos dentro de cuencas cerradas. Para que sea considerado salino, el lago debe de contener al menos 5 partes por mil (‰) de soluto disuelto. Para ser considerado un lago de agua salobre, éste debe de contener entre 0.5 y 30 partes por mil. La mayoría de los hábitats de este tipo ocurren cuando el agua salada se encuentra con agua salada, mayormente en esteros, donde un río se encuentra con el mar. Por lo general éstos sirven de zona de transición entre ecosistemas de agua dulce y salada para algunas especies que migran como el salmón y algunos tipos de anguila. Sin embargo, la mayoría de las especies son únicamente de agua salobre o agua dulce como algunos tipos de carpa, leu]cisco y perca (Boyd, 2019).

En este trabajo se modela y realizan estimaciones sobre la concentración salina que posee un conjunto de lagos, el primero salado y el segundo inicialmente de agua dulce y luego salobre, recientemente conectados entre sí por un río. Es decir, el cauce de dicho río va primeramente al lago salado y posteriormente desemboca en un lago de agua dulce.

Utilizando datos reales, se toman las condiciones iniciales del problema y, además de modelar la salinidad de los lagos a lo largo del tiempo al solucionar un sistema de dos ecuaciones diferenciales, el modelo permite encontrar ciertos datos de interés como el tiempo crítico de máxima concentración salina del lago de agua dulce o predecir el tiempo en que el lago puede alcanzar un nivel de concentración de sal aceptable para introducir especies acuícolas.

Métodos para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales

Este fenómeno de la salinidad de los lagos se puede modelar utilizando un sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales, el cual se define más adelante. Entre los métodos más relevantes y sencillos para hacerlo está el método de valores y vectores propios y, de manera muy similar, el método de determinantes u operadores

Método de valores y vectores propios

El método de valores y vectores propios puede resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes, es decir, sistemas de n ecuaciones desconocidas con n incógnitas con coeficientes constantes. Si A es la matriz de coeficientes y X la de las incógnitas, entonces podemos proponer el sistema homogéneo

$$X' = AX$$

Y se esperaría que la solución del problema sea de la forma:

$$X(t) = e^{At}X_0$$

Si A es diagonalizable entonces existe una matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ donde D es una matriz diagonal. Podemos observar que:

$$A = PDP^{-1}$$

Si A es diagonalizable entonces existe una matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ donde D es una matriz diagonal. Podemos observar que:

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

Y sustituyendo:

$$X(t) = Pe^{Dt}P^{-1}X_0$$

Ejemplo.

$$x'(t) = 2x - 3y$$

$$y'(t) = -x + 4y$$

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 5;\ \ \lambda_2 = 1$$

Sustituyendo el primer valor propio en la diagonal:

$$\lambda_1 = 5$$

Si $\vec{v}$ es el vector propio, entonces,

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0\,.$$

Y sustituimos el primer valor propio:

$$\begin{bmatrix} 2-5 & -3 \\ -1 & 4-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$-3x - 3y = 0$$
$$-x - y = 0$$

$$x = -y$$

$$y = 1$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el segundo valor propio:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -3 \\ -1 & 4-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$x - 3y = 0$$
$$-x + 3y = 0$$

$$x = 3y$$

$$y = 1$$

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y encontramos D con la matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$D = PAP^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = Pe^{Dt}P^{-1}X_0$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} X_0$$

Finalmente, tenemos la solución general

$$\boldsymbol{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

$$x(t) = -C_1 e^{5t} + 3C_2 e^{t}$$

$$y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{t}$$

Método de determinantes u operadores

$$x'(t) = 2x - 3y$$

$$y'(t) = -x + 4y$$

Despejando:

$$Dx = 2x - 3y$$

$$Dx - 2x + 3y = 0$$

$$Dy = -x + 4y$$

$$Dy + x - 4y = 0$$

Factorizando:

$$(D-2)x + 3y = 0$$

$$(D-4)y + x = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-2 & 3 \\ 1 & D-4 \end{vmatrix} = (D-2)(D-4) - 3 = 0$$

$$D^2 - 6D + 5 = 0$$

$$D_1 = 5; D_2 = 1$$

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

Por lo que la solución toma la forma:

$$x = C_1e^{5t} + C_2e^t$$

$$y = B_1e^{5t} + B_2e^t$$

Derivamos las funciones:

$$x' = 5C_1e^{5t} + C_2e^t$$

$$y' = 5B_1e^{5t} + B_2e^t$$

Se sustituyen en la función original:

$$x'(t) = 2x - 3y$$

$$5C_1e^{5t} + C_2e^t = 2(C_1e^{5t} + C_2e^t) - 3(B_1e^{5t} + B_2e^t)$$

$$5C_1 = 2C_1 - 3B_1$$

$$B_1 = -C_1$$

$$C_2 = 2C_2 - 3B_2$$

$$B_2 = \frac{C_2}{3}$$

Sustituyendo en las soluciones generales:

$$x = C_1e^{5t} + C_2e^t$$

$$y = -C_1e^{5t} + \frac{C_2}{3}e^t$$

(MateFacil, 2017).

Modelación del fenómeno

Se asume un volumen estacionario en ambos lagos, así como un flujo $f_0[m^3/s]$ del río también estacionario —esto es, el volumen de agua que transporta el río por unidad de tiempo es el mismo en todo su cauce. Inicialmente el lago de agua dulce (lago D) no contiene concentración salina y se conoce la concentración salina inicial del otro lago (lago S) C_0. Se busca describir así, la concentración de ambos lagos, $C(t)$ y $c(t)$, en función del tiempo y analizar los parámetros respectivos de posible interés. Dichas concentraciones se calculan a través del planteamiento de dos ecuaciones diferenciales.

En ambos lagos, el cambio instantáneo de sal estará dado por la diferencia entre la razón de entrada y la de salida de sal instantáneas para cada lago. Si $A(t)$ denota la cantidad de sal en el lago en el tiempo *t*, entonces la tasa neta a la que cambia $A(t)$ es:

$$\frac{dA}{dt} = (razón\ de\ entrada\ de\ sal) - (razón\ de\ salida\ de\ sal) = R_{entrada} - R_{salida} \quad (1)$$

La razón de entrada a la que se introduce la sal al lago salado es de cero, ya que el río, en fines prácticos no añade sal al lago. Dado a que el problema plantea que el agua sale a la misma razón que entra, debido a que el flujo del río es constante en sus diferentes etapas, el número de galones de agua en el lago en el tiempo *t* es constante. Por tanto, la concentración de sal en el lago, así como en la salida del lago es de $c(t) = A(t)/V\ (kg/m\text{^}3\ )$.

$$R_{salida} = \left(\frac{A(t)}{V}\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right) \cdot \left(f_0\left[\frac{m^3}{s}\right]\right) = \left(\frac{A(t)}{V} \cdot f_0\right)\left[\frac{kg}{s}\right] \quad (2)$$

La tasa neta del lago salado, denotando la cantidad de sal como A_s, se convierte entonces en

$$\frac{dA_S}{dt} = -\frac{A_S}{V} \cdot f_0 \quad (3)$$

La razón de entrada a la que se introduce la sal que viene del primer lago al lago de agua dulce es el producto de la concentración y el flujo de agua saliente del primer lago (la concentración y flujo de entrada al segundo lago):

$$R_{entrada} = -\left(-\frac{A_S}{V} \cdot f_0\right) = -\frac{dA_S}{dt}$$

De nuevo se establece que la tasa de entrada y salida de volumen de agua es el mismo y, por tanto, el volumen de agua en el lago es constante a través del tiempo. Entonces la concentración tanto en el lago de agua dulce como en la salida está dada nuevamente por $c(t) = A(t)/V\ (kg/m\text{^}3\,)$, y por la ecuación (2) anterior, sólo que sustituyendo los datos por los del segundo lago:

$$R_{salida} = \frac{A_D}{V_D} \cdot f_0$$

Finalmente, utilizamos la ecuación (1) para calcular la cantidad de sal en el lago de agua dulce:

$$\frac{dA_D}{dt} = -\frac{dA_S}{dt} - \frac{A_D}{V_D} \cdot f_0 \quad .$$

En términos de concentración quedaría

$$\frac{dA_S}{dt} = -C_s \cdot f_0$$

como tasa de cambio de cantidad de sal en el primer lago, y

$$\frac{dA_D}{dt} = (C_S - C_D) \cdot f_0 \quad ,$$

para el segundo lago.

Finalmente, dividiendo entre el volumen del lago de agua dulce, tenemos,

$$\frac{dC_D}{dt} = C_D' = (C_S - C_D) \cdot \frac{f_0}{V_D} \quad .$$

Solución analítica

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales de las ecuaciones 1 y 2 —lago salado y salobre, respectivamente—, procederemos a resolverlo por el método de valores y vectores propios.

Por la definición de valores y vectores propios, tenemos

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0;\ \vec{x} \neq 0$$

$$X' = AX$$

Entonces $\det(A - \lambda I)$ debe de ser igual a 0. Igualando el determinante, obtenemos los valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\frac{f_0}{V_1} - \lambda & 0 \\ \frac{f_0}{V_2} & -\frac{f_0}{V_2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{f_0}{V_1} - \lambda\right)\left(-\frac{f_0}{V_2} - \lambda\right) = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{f_0}{V_1}$$

(1)

$$\lambda_2 = -\frac{f_0}{V_2}$$

+(2)

Calculamos el primer vector propio.

$$\left(A + \frac{f_0}{V_1}\right)\overrightarrow{v_1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{f_0}{V_1} + \frac{f_0}{V_1} & 0 \\ \frac{f_0}{V_2} & -\frac{f_0}{V_2} + \frac{f_0}{V_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{f_0 C}{V_2} - f_0\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)c = 0$$

$$C = \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)c$$

$$c = 1$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \dfrac{\boldsymbol{V_2}}{\boldsymbol{V_1}} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

(3)

Calculamos el segundo vector propio.

$$\left(A + \frac{f_0}{V_2}\right)\overrightarrow{v_2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{f_0}{V_1} + \dfrac{f_0}{V_2} & 0 \\ \dfrac{f_0}{V_2} & -\dfrac{f_0}{V_2} + \dfrac{f_0}{V_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

(4)

Y obtenemos la solución general del sistema, dada como la combinación lineal

$$\boldsymbol{X} = C_1 \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{V_2}{V_1} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{f_0}{V_1}t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{f_0}{V_2}t} \ .$$

(5)

Ahora tomamos como parámetros para el primer lago la salinidad y volumen medio del Gran Lago Salado de Norteamérica (*Great Salt Lake*), convirtiéndolos a las unidades de interés:

$$C_{L-Salt\ lake}(0) \approx 17\% = \frac{17g}{100\ ml} = \frac{170g}{1000ml} = 170\ \frac{kg}{m^3}$$

$$V_1 \approx 4.55mi^3 = 1.9 \times 10^{10}m^3$$

(Utah Geological Service, 2022).

Para el volumen segundo lago V_2, tomamos el volumen promedio de agua del Lago Bear en la región fronteriza de los estados Idaho y Utah en Estados Unidos; y para el flujo promedio del río f_0, tomamos como referencia aquel del desvío del Río Bear que drena al Lago Bear, realizando la conversión a las unidades de interés.

$$V_2 \approx 1.75 \times 10^9 m^3$$

$$f_0 = 0.5 \frac{m^3}{s} = 0.5 * 3600 * 24 * 365 = 3.224 \times 10^{12} \frac{m^3}{año}$$

(Bear River Watershed, 2017).

Sustituyendo con estos parámetros calculamos las constantes C_1 y C_2.

$$C(0) = 170 \frac{Kg}{m^3}$$

$$C(t) = C_1 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) e^{-\frac{f_0}{V_1}t}; \quad C_1 = C_1 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) \therefore C(t) = C_1 e^{-\frac{f_0}{V_1}t}$$

$$C(t) = 170 e^{-\frac{1,971}{2,370,625}t} \tag{6}$$

$$c(t) = C_1 e^{-\frac{f_0}{V_1}t} + C_2 e^{-\frac{f_0}{V_2}t} \tag{7}$$

$$c(0) = 0 \frac{Kg}{m^3}$$

Y sustituimos en la ecuación general calculada

(8)

$$c(t) = \frac{644810}{3443} e^{-\frac{1,971}{2,370,625}t} - \frac{644810}{3443} e^{-\frac{1,971}{218750}t} \tag{9}$$

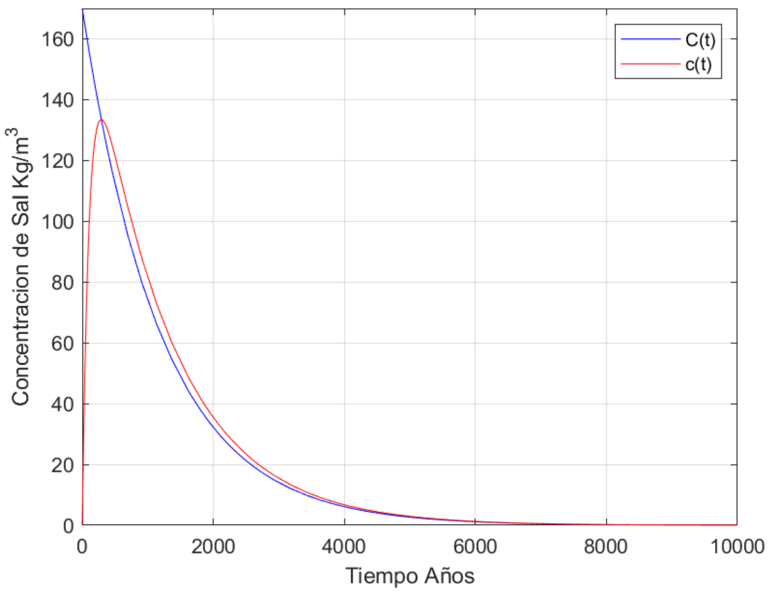

Ilustración 1. Solución analítica de concentración de sal en ambos lagos.

Solución Numérica

Por medio del método numérico de Runge-Kutta de 4to orden en Matlab, se obtuvo la concentración de los dos lagos a partir de los mismos. Empleando un tamaño de paso $h = 0.1$, con los mismos parámetros y condiciones iniciales.

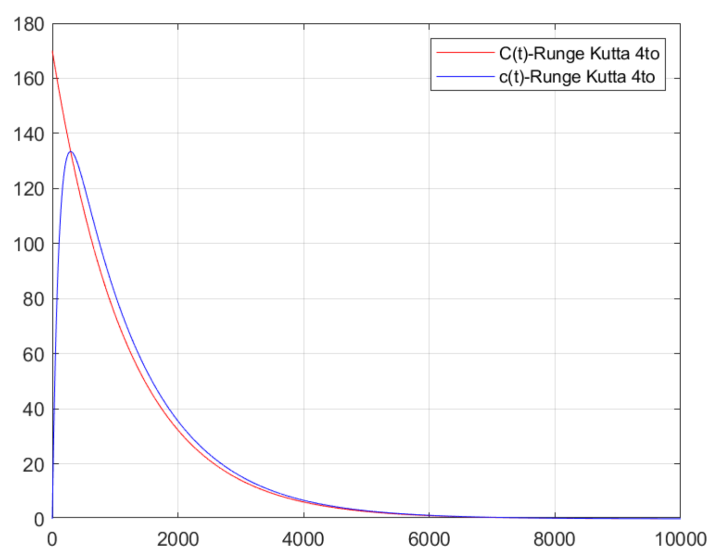

Ilustración 2. Solución Método de Runge Kutta 4to orden

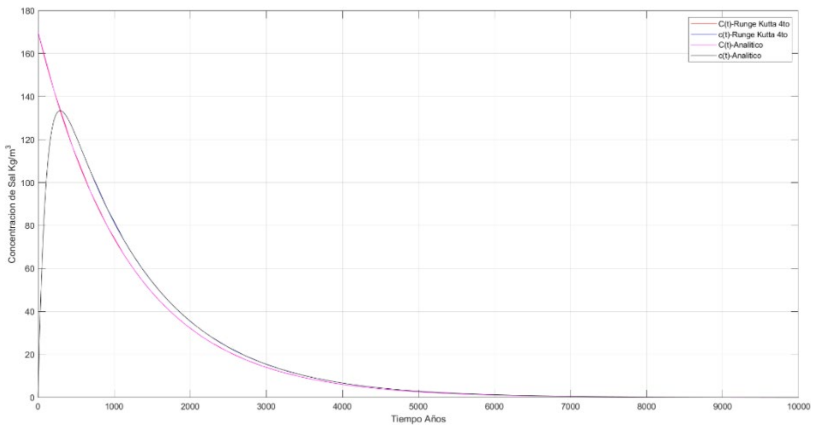

Ilustración 3. Solución analítica y numérica

Tiempo Critico de máxima Concentración

El tiempo critico de máxima concentración será en el momento en que el lago de agua dulce y el de agua salada lleguen a tener la misma concentración, ya que dicha concentración hará 0 la razón de cambio, es decir, cuando

$$c' = \frac{f_0}{V_2}(C - c) = 0 \ .$$

Método analítico

Para encontrar que la concentración máxima, la derivada debe ser 0.

$$c' = 0$$

$$c' = \frac{f_0}{V_2}(0) \therefore c = C$$

$$c'(t) = 0$$

$$c'(t) = \frac{127092051}{75315625} e^{-\frac{1{,}971}{218750}t} - \frac{67014}{430375} e^{-\frac{1{,}971}{2{,}370{,}625}t} = 0$$

(10)

$$t_{c-max} = \frac{829718750 \ \ln\left(\frac{3793}{350}\right)}{6786153} \approx 291.3584 \ años$$

$$c(t_{c-max}) = c(291.3584) \approx 133.42712 \ \frac{Kg}{m^3}$$

Método Numérico

Por medio del software de Matlab de cálculo la concentración de rio dulce $c(t)$, a partir de dichos datos, se busco el valor más grande, a partir de su posición en dicha base de datos se obtuvo el del tiempo.

$$t_{c-max} = 291.4029 \; años$$

$$c_{max} = 133.4271 \frac{Kg}{m^3}$$

Cálculo del Error

$$e_t = |t_{numerica} - t_{analitica}| = 0.044514295467411 \; años$$

$$e_c = |c_{numerica} - c_{analitica}| = 0.000000864787 \; \frac{Kg}{m^3}$$

Concentración de sal aceptable para introducir especies acuícolas

De acuerdo con Farnsworth, R. (2022, 14 marzo), un guía general para la concentración de sal para peces es de 5 g/lt.

$$c(t)_{especies\ acuícolas} = 5 \; \frac{g}{lts} = 5 \frac{Kg}{m^3}$$

Utilizando la ecuación 10, se obtendrá el tiempo en el que el "Bear Lake" alcanzará la concentración óptima para la introducción de especies acuícolas.

$$5 = 170e^{-\frac{1,971}{2,370,625}t}$$

Despejando el tiempo

$$t = \frac{(2370625 * ln(34))}{1971} \approx 4,241.3386 \; Años \tag{11}$$

Conclusiones

En este trabajo se modelaron los cambios de concentración salina debido al paso de un río (utilizando la información del río *Bear River*, en Utah) y en un lago salado (*Salt Lake,* Utah) así mismo como un lago dulce (*Bear Lake*, Utah). Para ello se desarrolló la ecuación diferencial de la concertación de sal de cada lago en función del tiempo de cada lago, a partir de dichas ecuaciones se estableció un sistema de ecuaciones diferenciales y se resolvió en base a los parámetros de los lagos ya establecidos. Además de la solución analítica, se desarrollo un programa en Matlab, para la resolución de las ecuaciones por el método de Runge-Kutta de 4to orden. A partir de dichas soluciones se obtiene el tiempo de la concentración máxima del lago de agua dulce (Bear Lake).

Al comparar los resultados de las soluciones del método analítico, así como el numérico se observó un error bastante bueno. En cuanto al error de la concentración del rio de agua dulce que existió entre la solución numérica y la analítica se observo una diferencia sumamente pequeña. Por otro lado, la diferencia en el tiempo de ambas soluciones en comparación al de la concentración de sal, es sumamente grande. Sin embargo, ambos resultados resultaron de gran semejanza, por lo que el modelo de Runge-Kutta con el paso establecido fue optimo.

Al observar, el tiempo de espera para la implementación de especies acuícolas, vemos un valor aproximado de 4,241 años, lo cual, si bien se puede considerar como una cantidad inmensa de tiempo, hay que tomar en cuenta el flujo f_0 del río *Bear River*, específicamente la desviación de este río que fue creada para desembocar en su lago homónimo, es sumamente bajo con un valor de 0.5 m^3/s, además de la gran inmensidad del lago ubicado en Salt Lake City, Utah. A lo largo del proyecto se obtuvieron resultados satisfactorios e interesantes; sin embargo, uno de los puntos centrales a lo largo del desarrollo de la entrega consistió en el uso de Matlab, el cual en ocasiones no lograba dar el rendimiento de la manera que se hubiese requerido para la realización del proyecto.

Uno de los puntos a mejorar para mejorar la precisión consiste en cambiar el software, es decir cambiar del uso de Matlab a Python, así mismo como dedicarle más tiempo al código para la mejor optimización de los cálculos.

Referencias

Bear River Watershed Information System. (2017). *Bear Lake - Bear Rivers Watershed*. https://bearriverinfo.org/watershed-description/bear-lake/index

Farnsworth, R. (2022, 14 marzo). *How To Measure Salinity In A Saltwater Aquarium*. Bulk Reef Supply. https://www.bulkreefsupply.com/content/post/md-2014-05-how-to-measure-salinity-in-saltwater

MateFacil. (2017, November 6). *SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES, resuelto por método de determinantes* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=EbNxYmFg2uw

Saline Lake Ecosystems of the World: 59. (1986, 30 abril). Springer. https://books.google.com.mx/books?id=NOdvPFm6SyoC&q=35%E2%80%B0&redir_esc=y#v=snippet&q=35%E2%80%B0&f=false

Salinidad en la acuacultura - Responsible Seafood Advocate. (2019, 4 noviembre). Global Seafood Alliance. https://www.globalseafood.org/advocate/salinidad-en-la-acuacultura-parte-1/