INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY

Campus Monterrey

Arif Morán Velázquez #A01234442

Franco Mendoza Muraira #A01383399

Luis Fernando Sandoval Silva #A01742322

Modelación de sistemas con ecuaciones diferenciales

Actividad 1: Modelo SIR

11 de noviembre del 2022

Monterrey, Nuevo León

El modelo SIR

Consideremos un modelo para describir la dinámica de un grupo de individuos de una población con exposición a una enfermedad que puede contagiarse entre los miembros de la población. Esto puede modelarse como un sistema dinámico denominado SIR para una población de N individuos en la que se considera la interacción entre un conjunto de S individuos susceptibles de contraer la enfermedad, un conjunto I de individuos infectados y uno conjunto R de individuos recuperados de la enfermedad.

Este modelo tiene los siguientes supuestos:

- las probabilidades de infectarse son iguales para todos los individuos de la población;
- la población es homogénea, es decir, que los riesgos de infectarse son iguales para todos los susceptibles y que los tiempos para recuperarse son iguales para todos los infectados; y el tamaño N de la población es constante.

El modelo maneja los diferentes conjuntos S, I y R como si fueran compartimentos bien separados y considera que los individuos pueden pasar de uno a otro en el caso de que se enfermen (cambio S →I) o que una vez enfermos se recuperen (cambio I →). Además, se asume que un individuo no puede pasar del conjunto de susceptibles directamente al conjunto de recuperados.

Con estos supuestos y consideraciones, las ecuaciones diferenciales del modelo SIR son:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta I}{N}S$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta I}{N}S - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

N=S+R+I

•la cantidad $\frac{\beta I}{N}$ representa la razón con que las personas salen del compartimento S (se infectan);

- en la primera ecuación dS representa el cambio debido a las personas que salen del compartimento S (el signo negativo se debe a que las personas salen)
- en la segunda ecuación dI representa el cambio debido a las personas que salen del compartimento I(una parte se debe a las personas que del compartimento S pasan al compartimento I, y otra parte se debe a las personas que salen del compartimento I porque se recuperan);
- la cantidad γ representa la razón con que las personas se recuperan.

Pregunta 1

Analizando el dataframe “output” encuentre el día en que el número de contagios es máximo (el pico de la curva verde). ¿Después de cuántos días del inicio ocurre el máximo? Usando las ecuaciones diferenciales del modelo, encuentre una relación entre los parámetros del modelo válida para el valor de t correspondiente al máximo de la curva de infección.

De acuerdo a los datos obtenidos del dataframe de salida, se calculó el tiempo máximo a través del tiempo en el que los contagios comienzan a disminuir luego del día 18.

$$t_{output} \approx 18\, dias$$

Por otro lado, de manera analítica se llegó a la solución:

$$\frac{dS}{dt} =- \beta\frac{I}{N}S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{I}{N}S - \gamma$$

Se dividen las expresiones anteriores

$$\frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} = \frac{dI}{dS} = \frac{\beta\frac{I}{N}S - \gamma I}{-\beta\frac{I}{N}S} = \left(- 1 + \frac{\gamma N}{\beta S}\right)$$

Definimos $1/q$:

$$\frac{1}{q} = \frac{\gamma N}{\beta}$$

$$\frac{dI}{dS} = \left(- 1 + \frac{1}{qS}\right)$$

$$dI = \left(- 1 + \frac{1}{qS}\right)dS$$

$$\int_0^I dI = \int_0^S\left(- 1 + \frac{1}{qS}\right)dS$$

$$I =- S + \frac{\ln|S|}{q}$$

$$I + S - \frac{\ln|S|}{q} = I_0 + S_0 - \frac{1}{q}\ln\left|S_0\right|$$

$$I =- S + \frac{\ln\left|S/s_0\right|}{q} + I_0 + S_0$$

La derivada se hace 0 cuando $S = 1/q$

$$I_m + \frac{1}{q} - \frac{\ln\left|\frac{1}{q}\right|}{q} = I_0 + S_0 - \frac{1}{q}ln|S_0|$$

$$I_m = I_0 + S_0 - \frac{1}{q}(1 + ln(S_0q))$$

$$I_m = 66,9741.5907\, infectados$$

Para conocer el tiempo de dicho valor se integra la primera ecuación sustituyendo los valores de la ecuación inversa de la original.

$$\frac{dt}{dI} =- \frac{N}{\beta SI}$$

$$\int dt = -\int \frac{N}{\beta S(-S+\frac{\ln\left|S/s_0\right|}{q}+I_0+S_0)} dS$$

$$t_{Imax} = \frac{N}{\beta}\int_0^{\frac{1}{q}} \frac{1}{S\left(S-\frac{\ln\left|\frac{S}{S_0}\right|}{q}-I_0-S_0\right)} dS$$

Pregunta 2

Analizando el data frame "output" encuentre después de cuántos días el número de"susceptibles" se reduce a la mitad. Usando la ecuación diferencial que expresa la variación del número de susceptibles, encuentre de manera analítica una fórmula que exprese el tiempo t necesario para que el número de susceptibles sea la mitad del valor inicial en función de β.

Al observar los datos asi como la gráfica generada de manera numérica se observa un intervalo de 14 a 15 días.

$14\ dias < t_{output} < 15\ dias$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta I}{N}S$$

Resolvemos S:

$$\int \frac{dS}{S} = -\int \frac{\beta I}{N}dt$$

$$e^{\ln(S)} = e^{-\frac{\beta}{N}\int I dt}$$

$$\frac{S_0}{2} = e^{-\frac{\beta}{N}\int I dt}$$

Pregunta 3

Estudie la dinámica del contagio variando los parámetros β y gamma. Empiece con gamma = 0.1 constante

cambiando β (que representa la 'fuerza' de la infección):

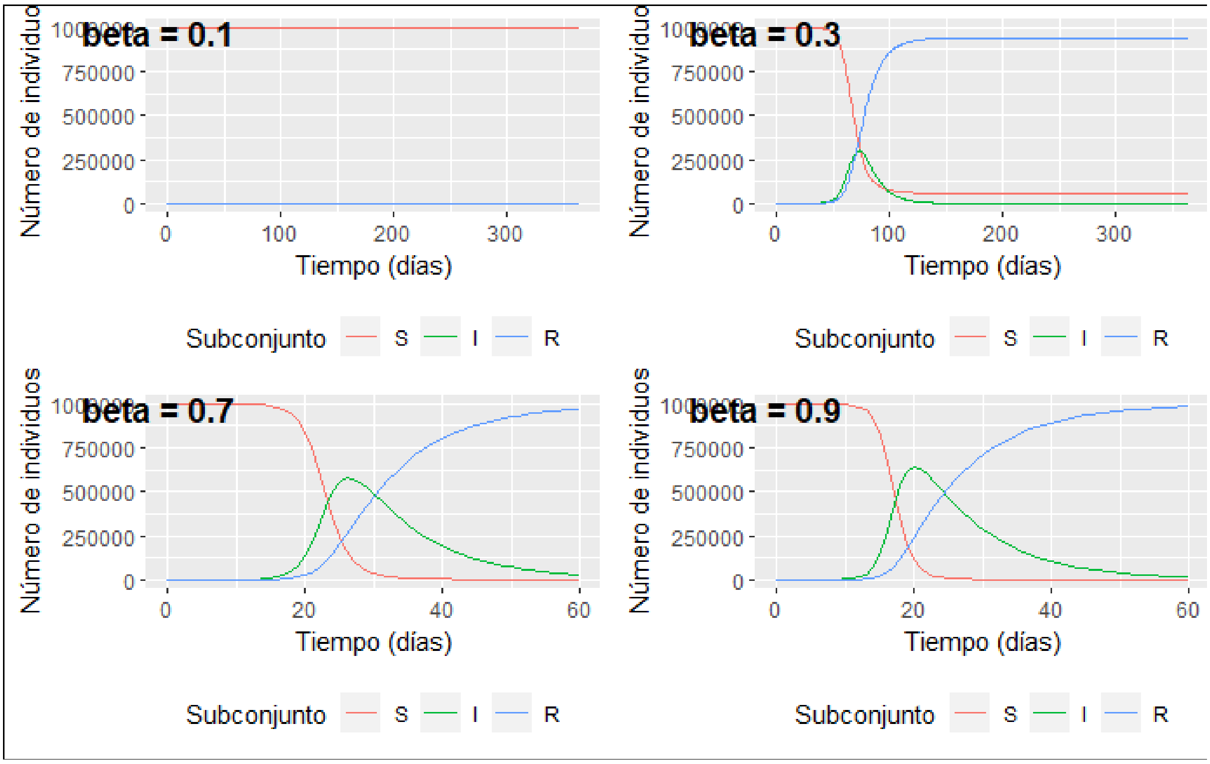
•β = 0.1 365 días

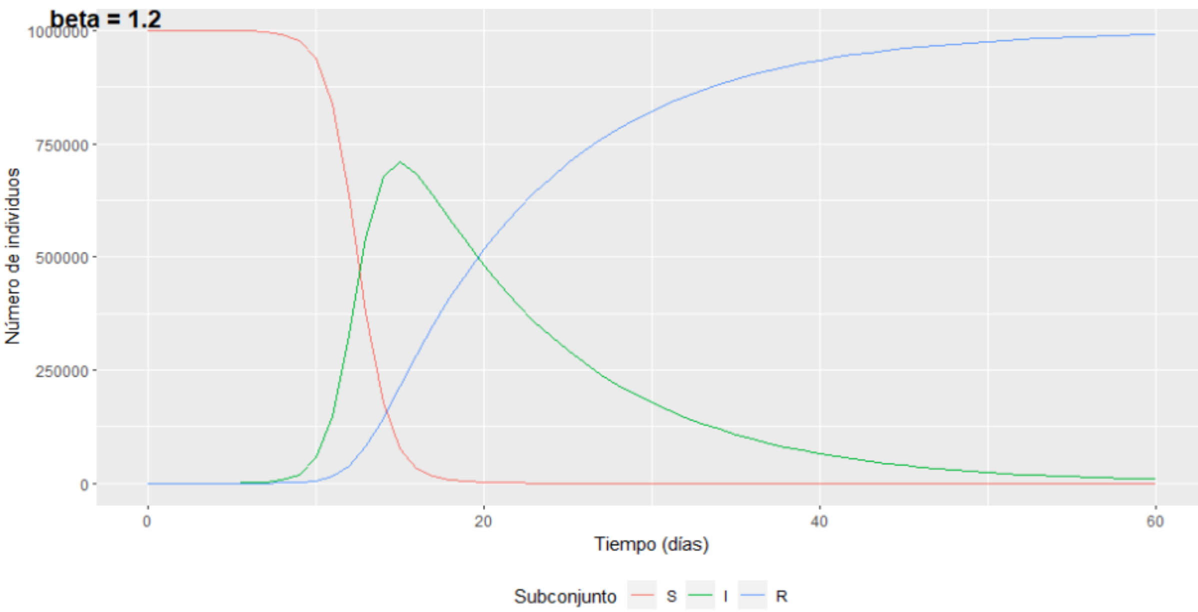
•β = 0.3 365 días

•β = 0.7 60 días

•β = 0.9 60 días

•β = 1.2 60 días

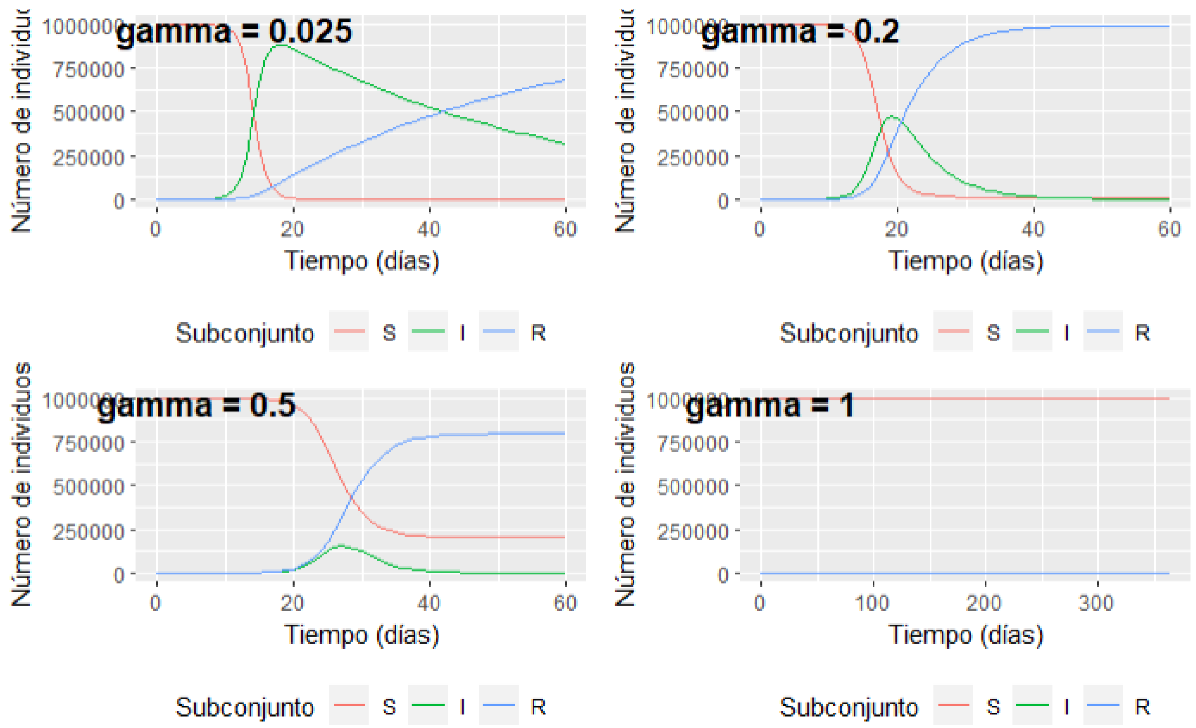




Comente acerca de los cambios que se observan en las curvas. Encuentre una relación entre β y γ necesaria para que ocurra la epidemia. Para que haya una epidemia, la fuerza de infección (β) debe ser suficientemente alta por un tiempo suficientemente largo (γ suficientemente bajo) de manera que se pueda transmitir el agente patógeno. A partir de este estudio se puede definir el coeficiente R0 de la infección.

Teniendo la beta igual al gamma hace que no haya infectados en ningún punto del tiempo, como se puede ver en la gráfica de beta = 0.1. En las otras tablas, se puede ver que debido a la creciente tasa de infección, las infecciones incrementan y el tiempo que tardan en infectarse disminuye. Esto en las tablas se ve diferente debido a los cambios en el tiempo, pero si se toma un enfoque en la cantidad de días que toman para que empiecen a aumentar las infecciones, se puede ver que es más rápido el tiempo en el que aumentan.

Pregunta 4
Después, con β = 1, varíe el valor de γ:
•γ = 0.025 60 días
•γ = 0.2 60 días
•γ = 0.5 60 días
•γ = 1 365 días



Comente acerca de los cambios que se observan en las curvas. Encuentre una relación entre β y γ necesaria para que ocurra la epidemia. Para que haya una epidemia, la fuerza de infección (β) debe ser suficientemente alta por un tiempo suficientemente largo (γ suficientemente bajo) de manera que se pueda transmitir el agente patógeno. A partir de este estudio se puede definir el coeficiente R_0 de la infección.

A partir de la segunda ecuación obtenemos el valor para saber si la infección se va a esparcir o no.

$$\frac{dI}{dt} < I\left(\frac{\beta S_0}{N} - \gamma\right)$$

$$S_0 > \frac{\gamma N}{\beta}$$

Debido a que $\gamma < \beta$ la infección se esparcirá

Sí $R_0 = \frac{\beta S_0 N}{\gamma} > 1 \therefore$ la infección se convertirá en pandemia

En estas gráficas se puede observar como, mientras más baja sea la gama, más infectados hay debido a la cantidad de infectados al mismo tiempo que hay, con la tardanza de recuperación en los pacientes. Cuando va subiendo la gamma, se puede ver que los recuperados suben más y antes, y al mismo tiempo las curvas de infecciones son menores, ya que la cantidad de tiempo para que se recuperen los ya infectados es menor, hay menos pacientes infectados al mismo tiempo. Teniendo la beta igual a la gamma hace que no haya infectados en ningún punto del tiempo.