Actividad 1 - El proceso de Wiener

Arif Morán Velázquez/A01234442

En clase definimos el proceso de Wiener como:

$$W(t) = \int_0^t dW$$

donde dW es una variable aleatoria con distribución Gausiana, $\langle dW \rangle = 0$ y $\langle dW^2 \rangle = dt$

Simulando el proceso de Wiener numéricamente en un intervalo de 100 segundos. Es decir, Dividiremos el espacio del tiempo en N intervalos dt.

In [2]:
```
import numpy as np
import random
from matplotlib import pyplot as plt
```

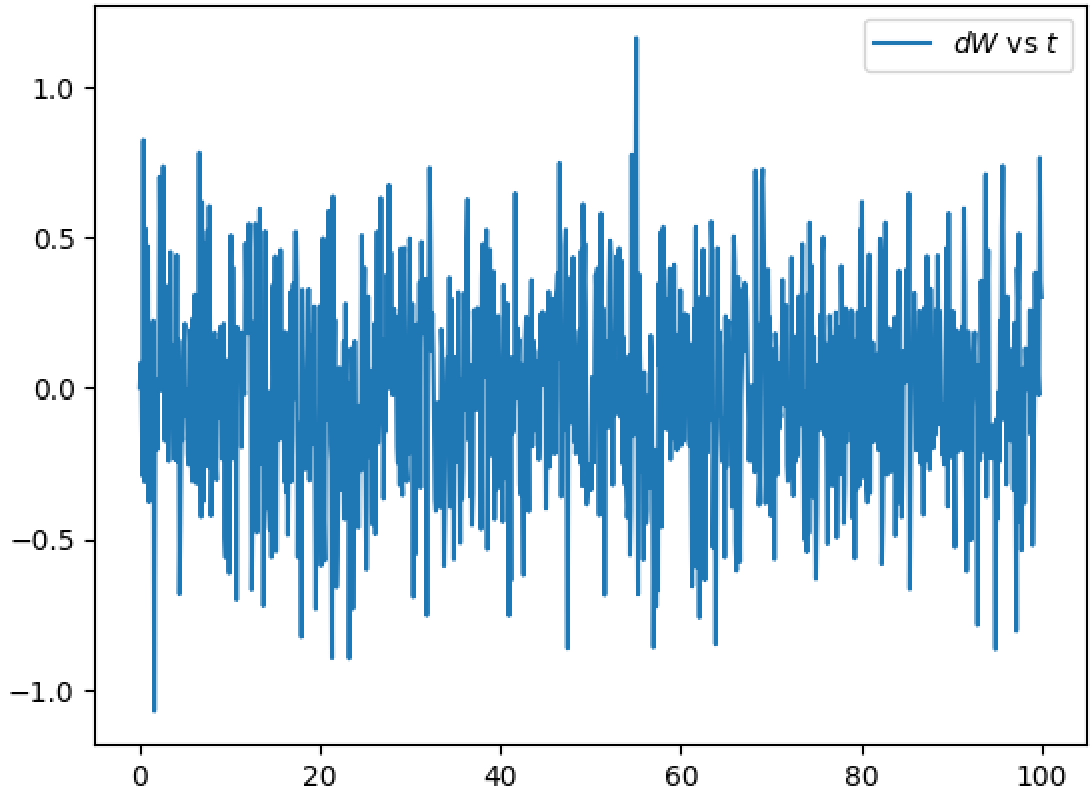
1. Utiliza un generador de números aleatorios para simular los incrementos dW .Asegurandose que la varianza de dW es igual a dt y grafica dW

In [3]:
```
def weiner(N,tf,qq):
    dt=tf/N
    ts=np.linspace(0,tf,N)
    if qq==1:
        variance=np.sqrt(dt)
    else:
        variance=dt
    dW=np.random.normal(0, variance, size=N)
    dW[0]=0

    W=np.ones(N)
    ########################Integral####################
    for i in range(0,N):
        W[i]=sum(dW[0:i+1])
    return ts,dW,W
```

In [104…
```
ts,dW,W=weiner(1000,100,1)
plt.plot(ts,dW,label='$dW$ vs $t$')
plt.legend()
```

Out[104]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x1e01babfeb0>
```



2. Realiza una suma acumulada de los incrementos para obtener los valores del proceso $W(t)$ como función del tiempo t. Grafica $W(t)$ vs t

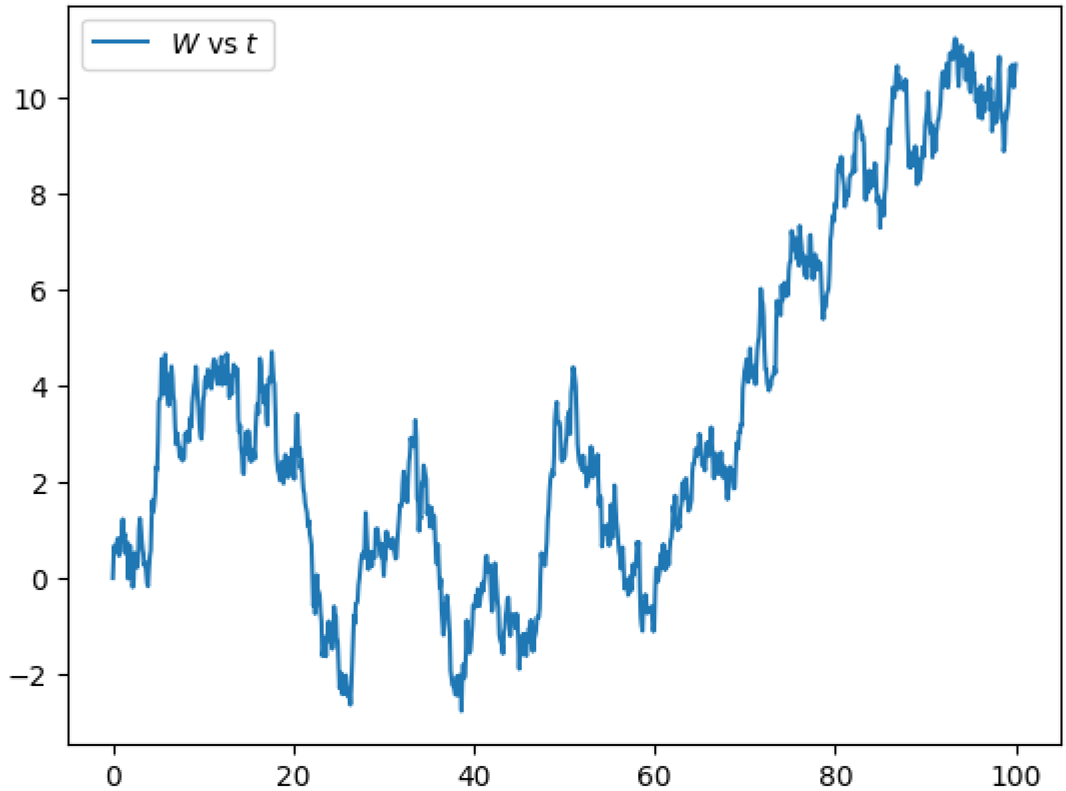
Integral $W(t)$

$$W(t) = \int_0^t dW$$

$$\sigma_(dW)^2 = dt$$

In [4]:
```
plt.plot(ts,W,label='$W$ vs $t$')
plt.legend()
```

Out[4]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x1e000305f70>
```

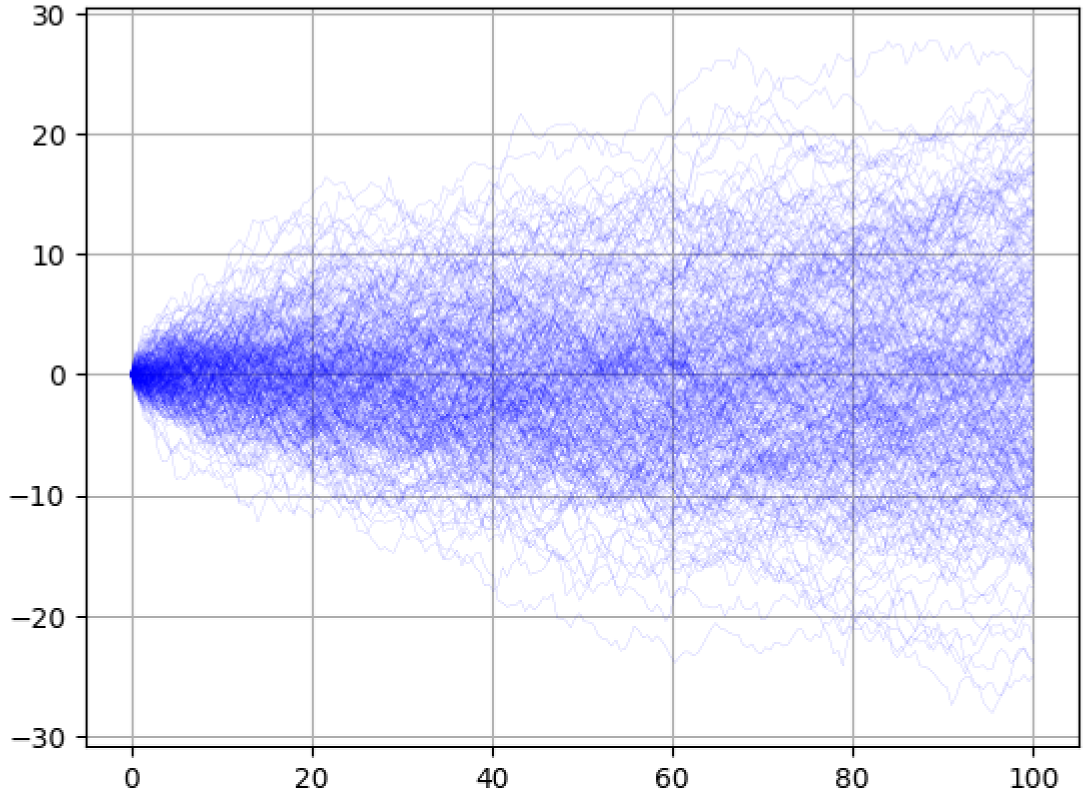


In [5]:
```
def its(N,tf,NN,graf,qq):###Varias iteraciones el experimento de Weiner
    M=np.zeros((NN,N))#Base datos
    M2=M*0
    for i in range(0,NN):
        ts,dW,W=weiner(N,tf,qq);
        M[i,:]=W
        M2[i,:]=dW
    T,Y=np.meshgrid(ts,np.zeros(NN))
    fig1=plt.figure()
    if graf==True:
        for j in  range(NN):
            plt.plot(T[j,:],M[j,:],color='blue',lw=0.2,alpha=0.3,label='$W$ vs $t$'
        #plt.legend()
        plt.grid('on')
        plt.show()
    return fig1,M,M2,T
```

In [6]:
```
Matrix={}##Matriz donde se guardan las diferentes trayectorias
```

3. Realiza el proceso un mínimo de 300 veces. Muestra en una sola gráfica todas las realizaciones de $W(t)$

In [135…
```
N=200
tf=100
NN=300 ### Numero de experimentos
graf=True
fig,Ws,dWs,T=its(N,tf,NN,graf,1)
Matrix[1]=Ws
Matrix[2]=T
```



Varianza

4.Grafica la varianza $W(t)$, $\sigma^2\langle W(t)\rangle = \langle W(t)^2\rangle - \langle W(t)\rangle^2$ conforme pasa el tiempo. ¿Es lo que esperas obtener?

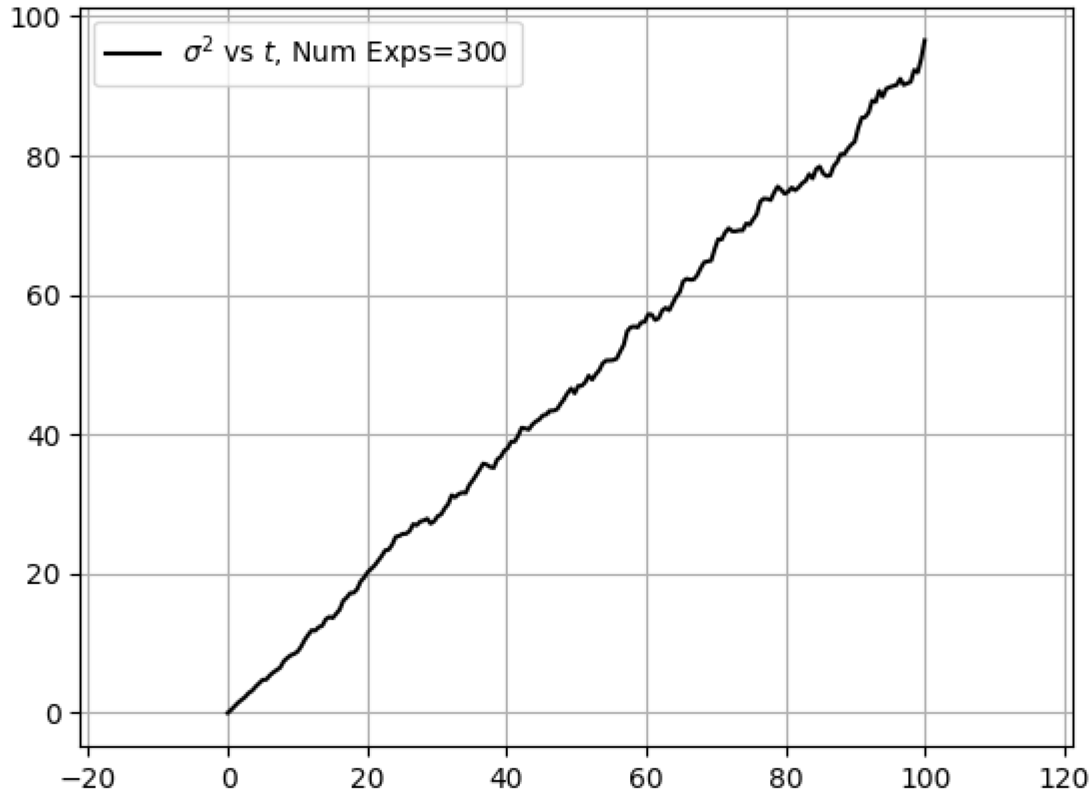
$$\sigma^2(W(t)) = \langle W(t)^2\rangle - \langle W(t)\rangle^2$$

In [136…

```
def vari(M,NN,graf,ts):
    var=np.sum(M**2,0)/NN
    mean=(np.sum(M,0)/NN)**2
    sigma=var-mean
    if graf==True:
        fig=plt.figure()
        plt.plot(ts,sigma,color='black',label='$\sigma^2$ vs $t$, '+'Num Exps='+str
        plt.grid('on')
        plt.axis('equal')
        plt.legend()
    return fig,sigma
```

In [137…

```
fig,v=vari(Ws,NN,True,T[0,:])
```

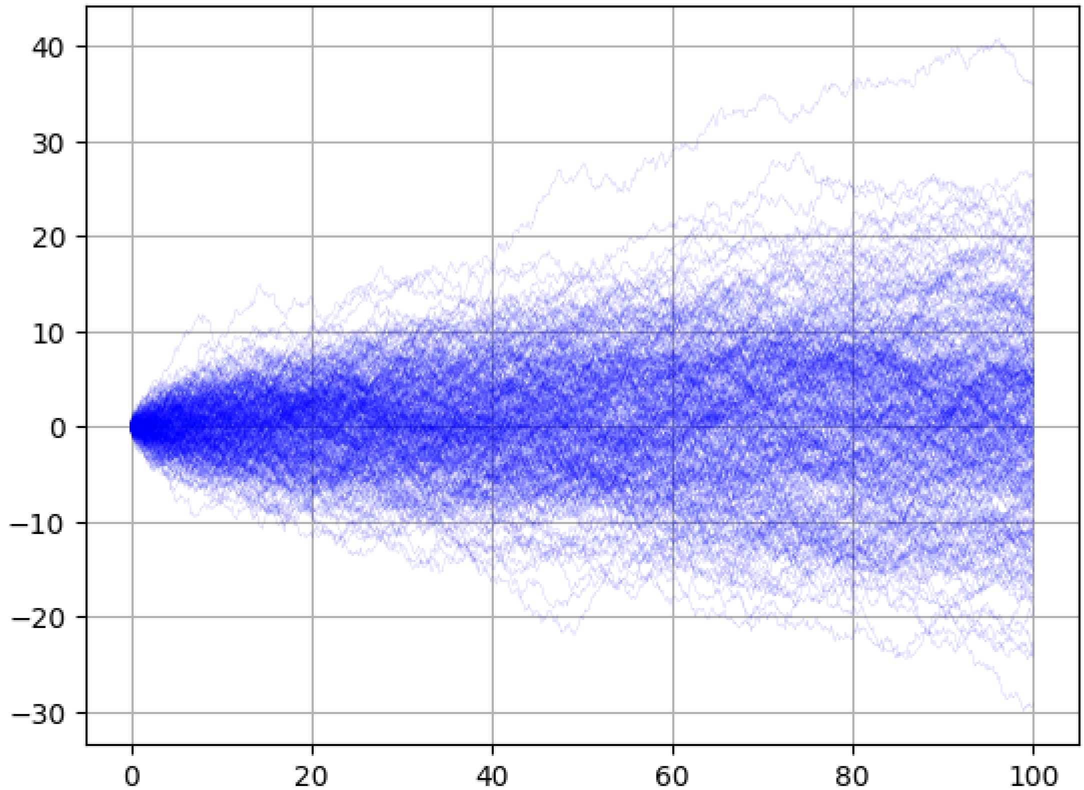


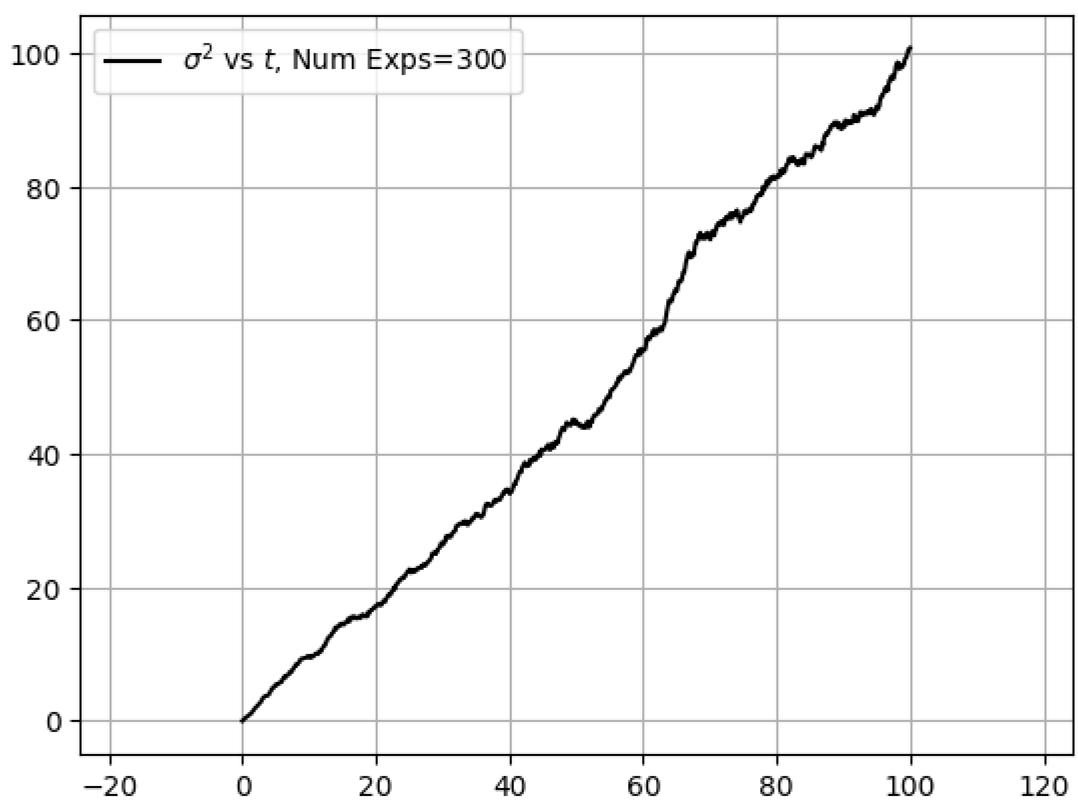
5. Realiza los puntos 3 y 4 con un tamaño de paso dt más pequeño. Compara tus resultados

$$N = 1000$$

In [138…

```
N=1000
tf=100
NN=300
graf=True
fig,Ws,dWs,T=its(N,tf,NN,graf,1)
Matrix[3]=Ws
Matrix[4]=T
fig,v=vari(Ws,NN,True,ts)
```





6. Ahora haz que la varianza de los intervalos sea $\langle dW \rangle = dt$. Al igual que en el caso anterior, compara el análisis hecho con varios tamaños de paso dt.

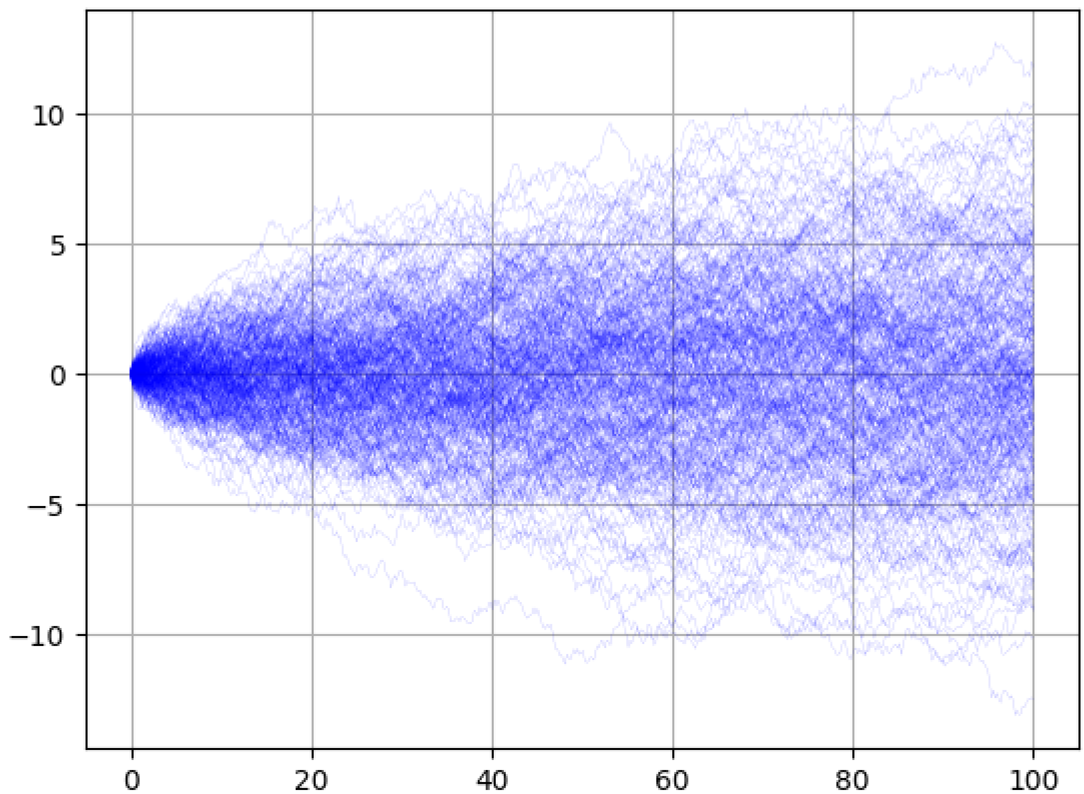
Ahora la varianza es:

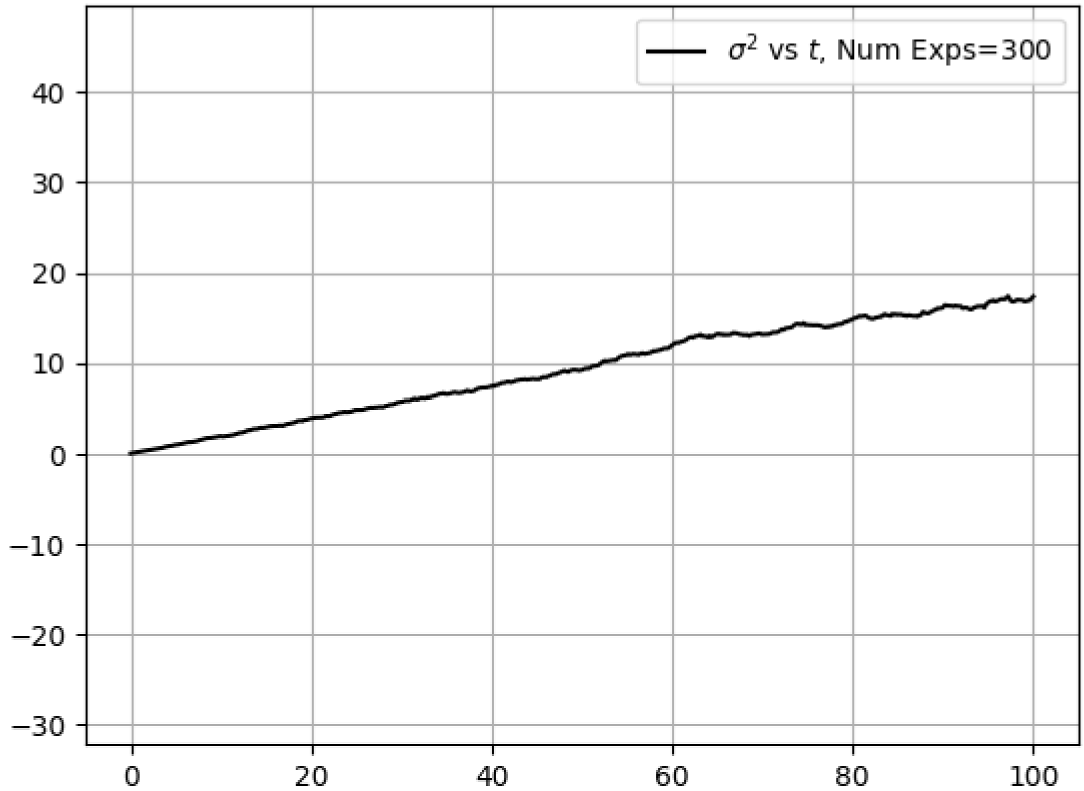
$$\langle dW^2 \rangle = dt^2$$

$$N = 500$$

In [139…

```
N=500
tf=100
NN=300
graf=True
fig,Ws,dWs,T=its(N,tf,NN,graf,2) ### El ultimo valor(2) , cambia el valor de la Var
Matrix[5]=Ws
Matrix[6]=T
fig,v=vari(Ws,NN,True,T[0,:])
```



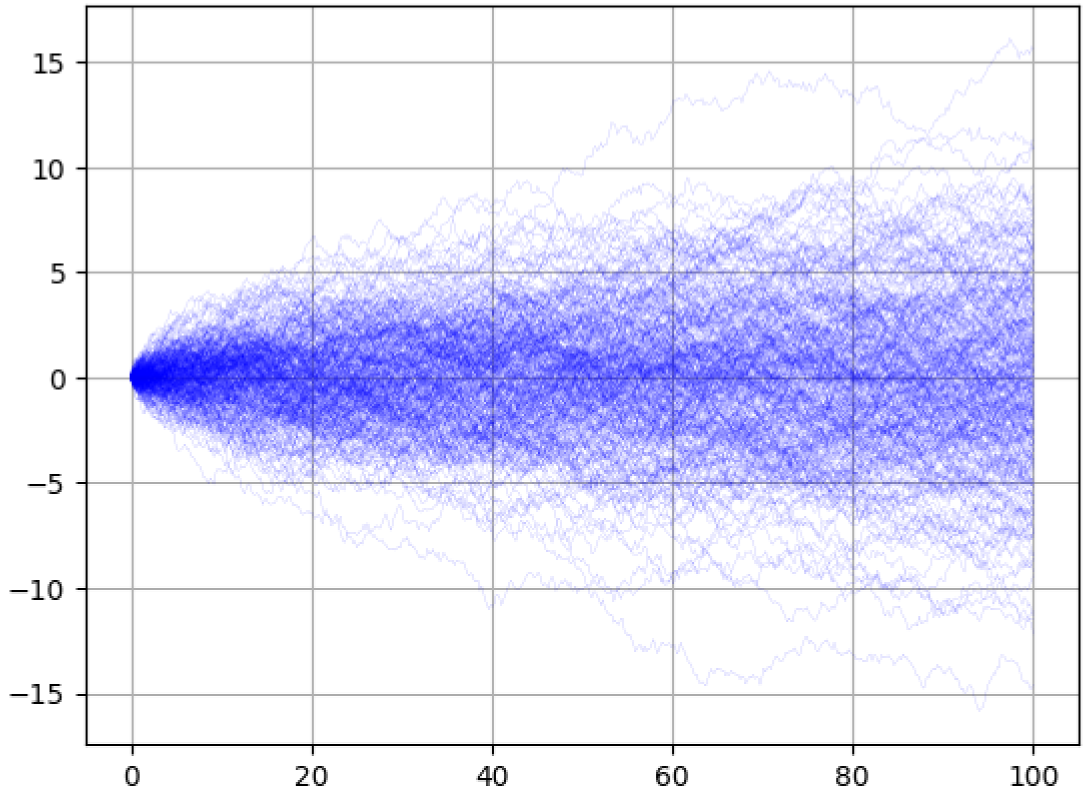


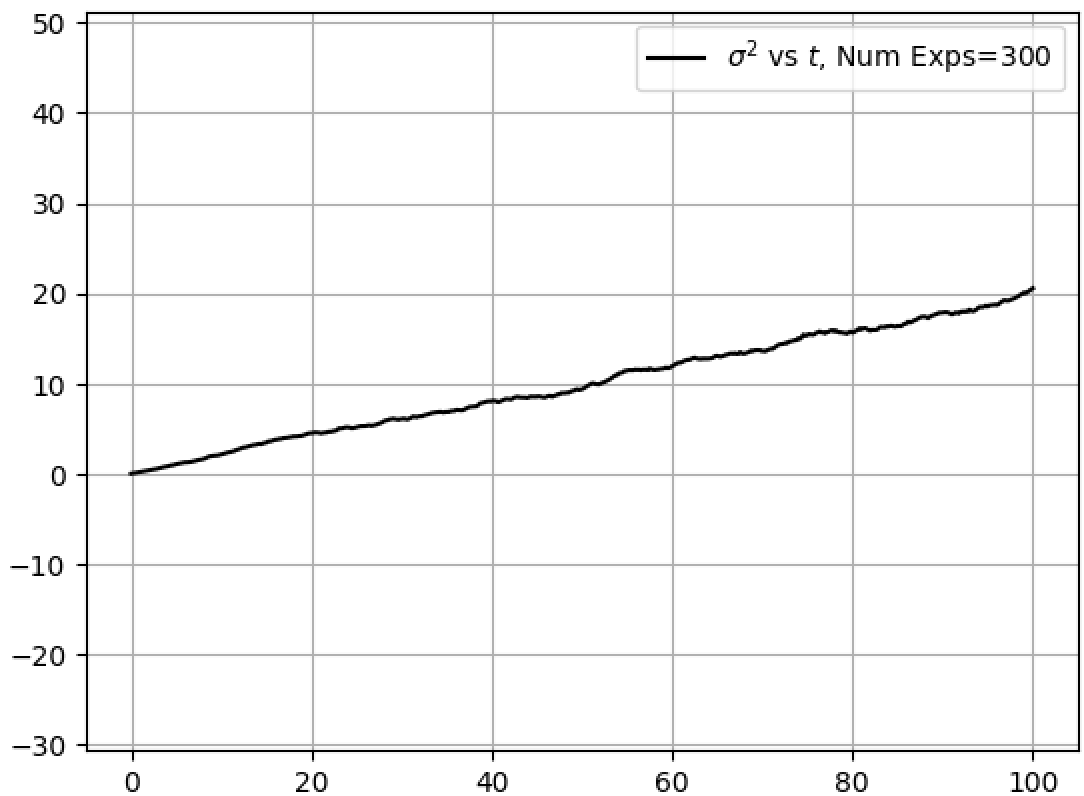
$$\langle dW^2 \rangle = dt^2$$

$$N = 1000$$

In [140…

```
N=500
tf=100
NN=300
graf=True
fig,Ws,dWs,T=its(N,tf,NN,graf,2) ### El ultimo valor(2) , cambia el valor de la Var
Matrix[5]=Ws
Matrix[6]=T
fig,v=vari(Ws,NN,True,T[0,:])
```





Al observar los resultados , observamos que el comportamiento de la varianza $\sigma^2(W(t))$, es lineal e independiente del Numero de pasos N. Sin embargo, depende de la relacion entre $\langle dW \rangle^2$ y dt

In [149…

```
#fig3=plt.figure(figsize=(10,7))
```

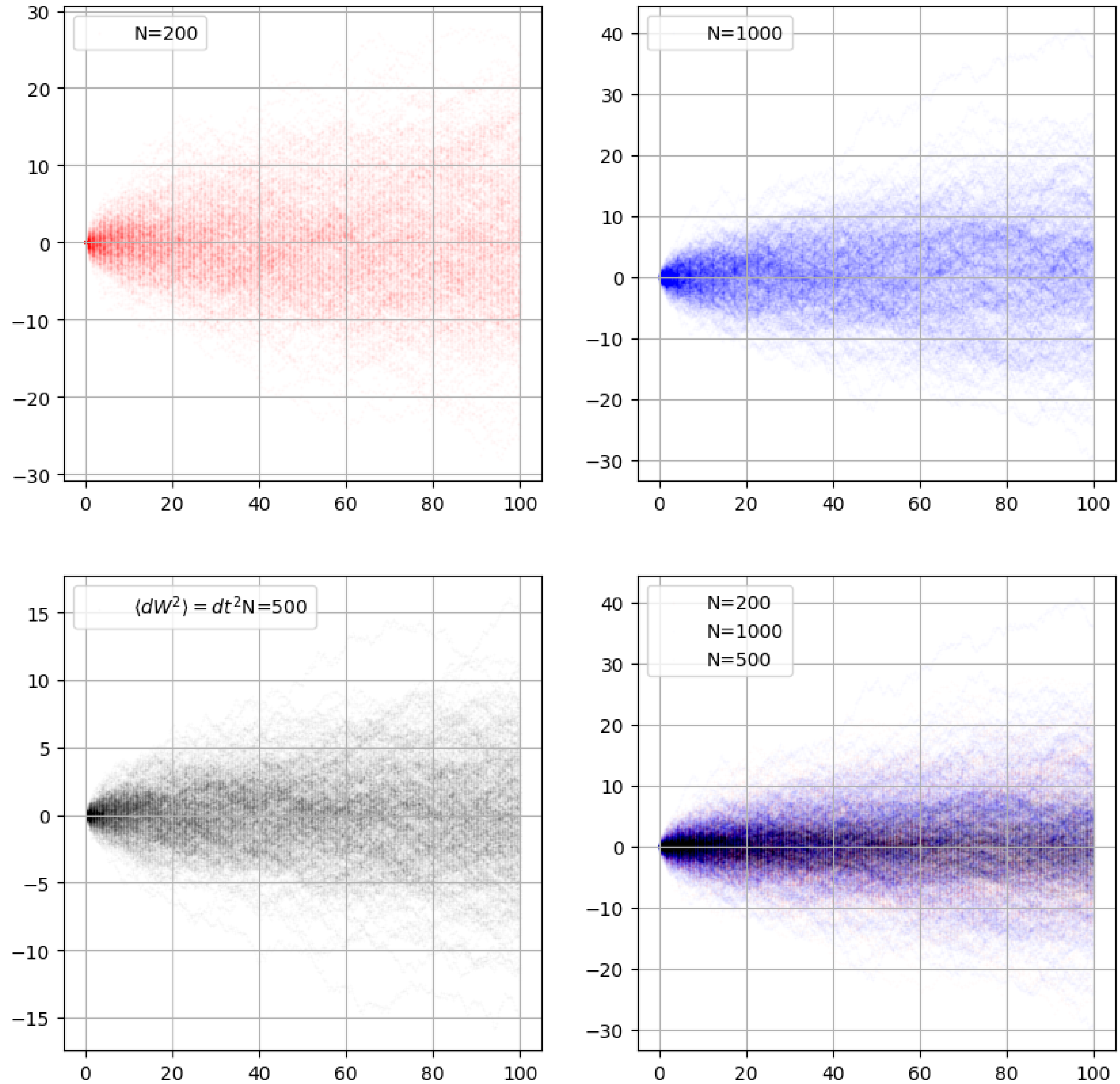
```
fig=plt.figure(figsize=(10,10))

plt.subplot(2, 2, 1)
plt.scatter(Matrix[2],Matrix[1],s=1/3,color='red',alpha=0.02,label='N='+str(len(sum
plt.legend()
plt.grid('on')

plt.subplot(2, 2, 2)
plt.scatter(Matrix[4],Matrix[3],s=1/5,color='blue',alpha=0.01,label='N='+str(len(su
plt.legend()
plt.grid('on')

plt.subplot(2, 2, 3)
plt.scatter(Matrix[6],Matrix[5],s=1/5,color='black',alpha=0.02,label='$\langle dW^2
plt.legend()
plt.grid('on')


plt.subplot(2, 2, 4)
plt.scatter(Matrix[2],Matrix[1],s=1/3,color='red',alpha=0.01,label='N='+str(len(sum
plt.scatter(Matrix[4],Matrix[3],s=1/5,color='blue',alpha=0.01,label='N='+str(len(su
plt.scatter(Matrix[6],Matrix[5],s=1/5,color='black',alpha=0.01,label='N='+str(len(s
plt.legend()
plt.grid('on')
```



7. Demuestra analíticamente que sólo cuando $\sigma^2(dW) = dt$, la suma de los intervalos $\sum_0^N dW$ es independiente del número de intervalos. En clase vimos que un proceso $x(t)$ descrito por la ecuación diferencial estocástica:

$$dx = f(x,t)dt + g(x,t)dW$$

Tiene una distribución de probabilidad $P(x,t)$ dada por la ecuación de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial [Pf]}{\partial x} + \frac{g^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$\sigma^2(x(t)) = \sum_{i=0}^{N} \Delta t^\gamma = N\Delta t^\gamma$$

$$\Delta t = (\frac{t}{N})^\gamma \therefore \sigma^2(x(t)) = t^\gamma \frac{N}{N^\gamma} = t^\gamma N^{1-\gamma}$$

Para que el proceso de Wienersirva para describir un sistema físico, es necesario que γ = 1

$$\sigma^2(x(t)) = t$$

8. Escribe la ecuación diferencial parcial que describe la distribución de probabilidad

$P(W(t), t)$ para el proceso $W(t)$ que simulaste en los puntos anteriores.

$$dx = f(x,t)dt + g(x,t)dW$$

considerando que:

$$f(x,t) = 0$$

$$g(x,t) = 1$$

, la ecuacion se convierte en la ecuacion de difusion

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

9. Grafica, en un solo panel, el histograma de los procesos $W(t)$ que simulaste

numéricamente para los tiempos $t = \{25, 50, 75, 100\}$ sec. Grafica también la solución analítica a la ecuación que escribiste en el punto 8. Compara ambos resultados.

$$P(x,t_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

In [156…
```
import sympy as sp
```

In [238…
```
M=Matrix[5]
var=np.sum(M**2,0)/NN
mean=(np.sum(M,0)/NN)**2
sigma=var-mean
```

In [239…
```
x,u,s=sp.symbols('x,mu,sigma')
```

In [209…
```
f=(1/(s*sp.sqrt(2*sp.pi)))*sp.exp(-1/2*((x-u)/s)**2)
f
```

Out[209]:

$$\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{0.5(-\mu+x)^2}{\sigma^2}}}{2\sqrt{\pi}\sigma}$$

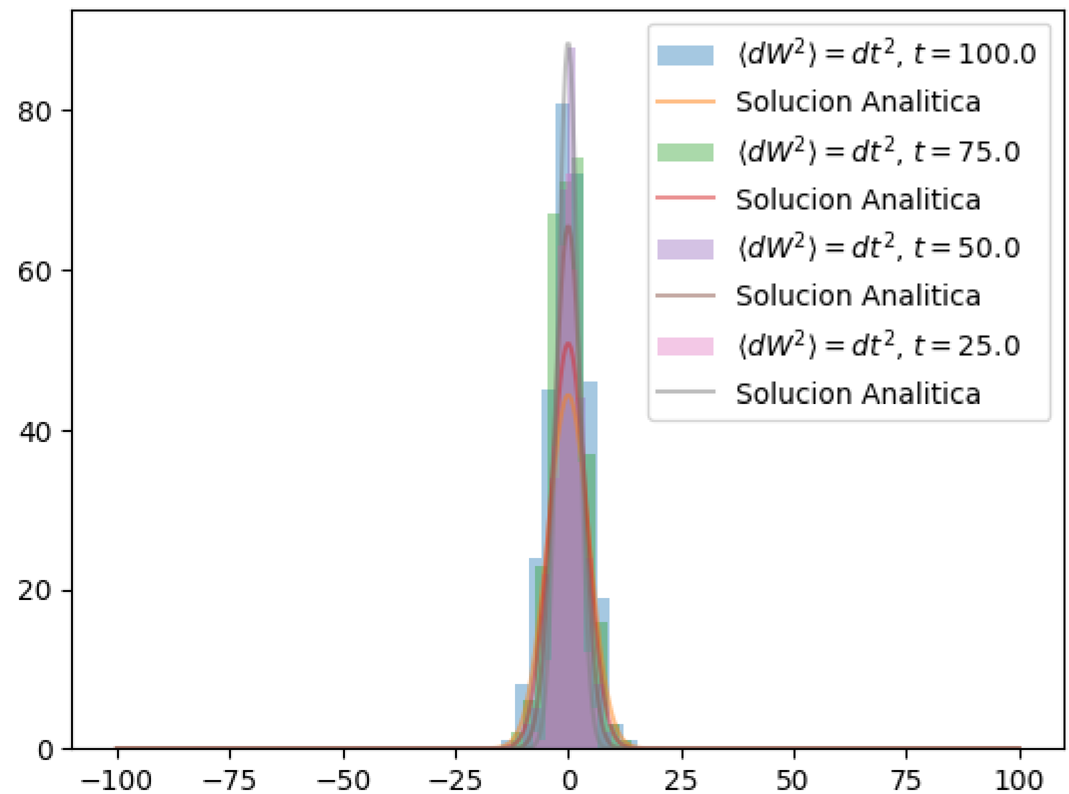
In [177…
```
f1=sp.lambdify([x,u,s],f)
```

In [242...

```
xs=np.linspace(-100,100,len(sigma))
```

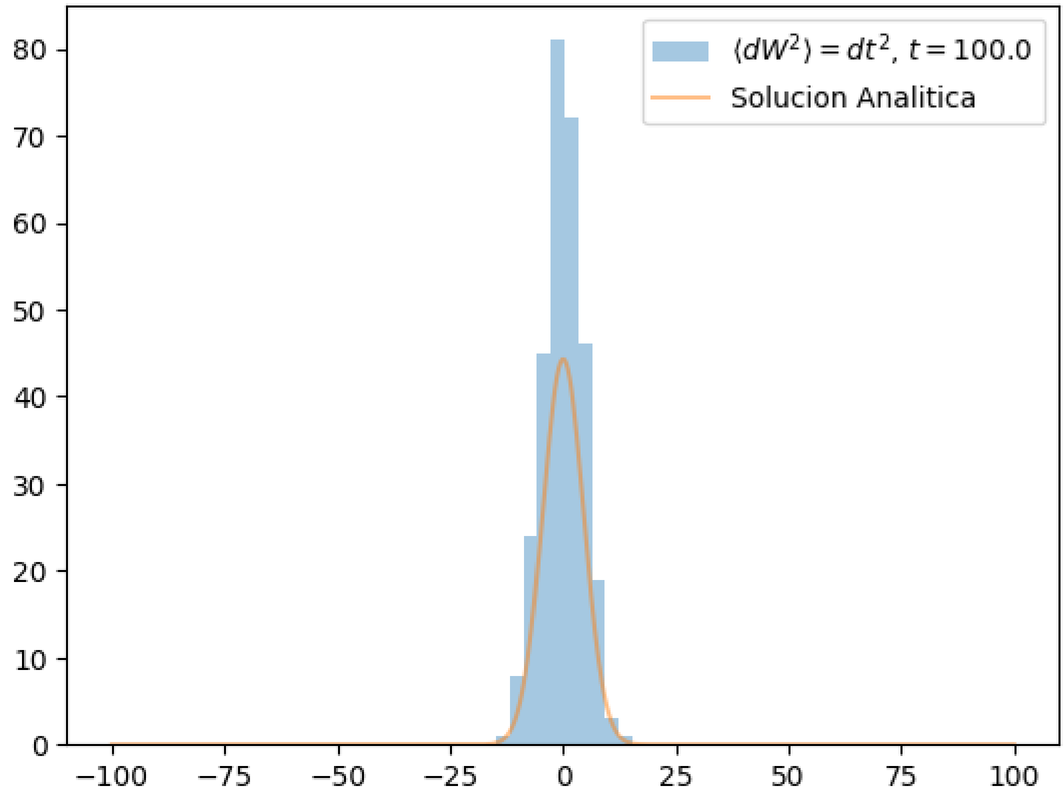
In [318...

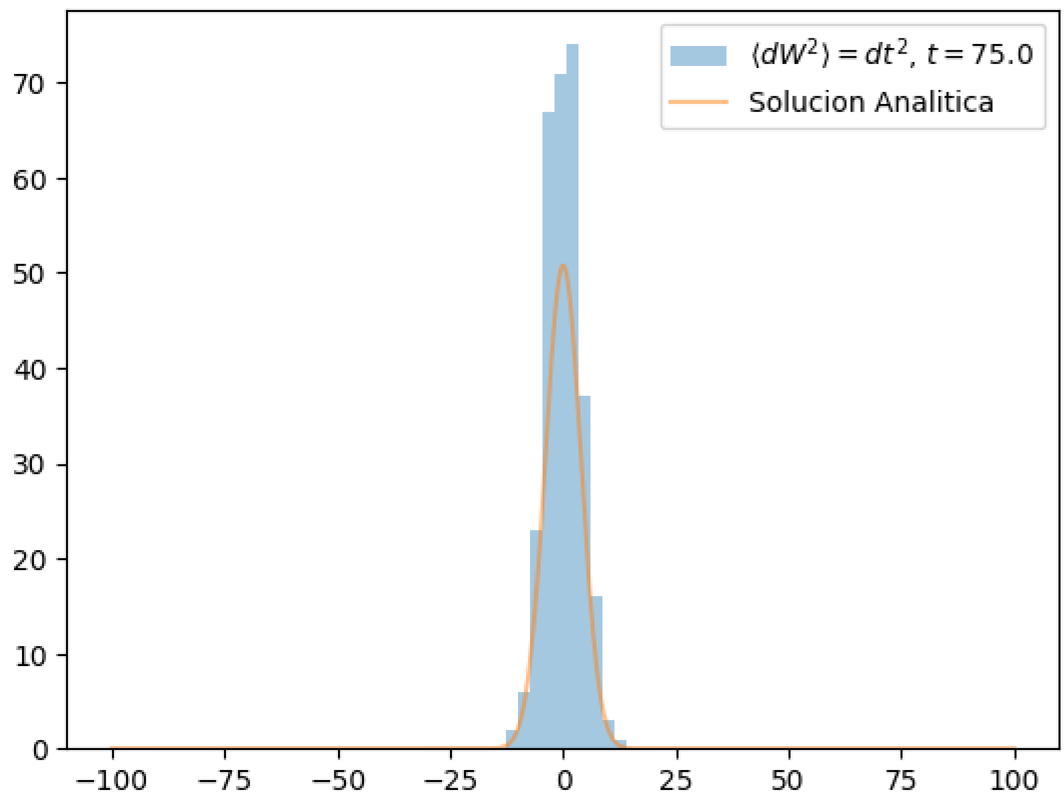
```
dd=np.array([25.,50.,75.,100.])[::-1]
for i in range(len(dd)):
    j=5
    #figure=plt.figure()
    #plt.grid('on')
    plt.hist((Matrix[j][:,np.where(np.round(Matrix[j+1][0,:],0)==dd[i])[0][0]]),lab
    plt.plot(xs,500*f1(xs,0,np.sqrt(sigma[np.where(np.round(Matrix[j+1][0,:],0)==dd
    #plt.axis('equal')
    plt.legend()
```

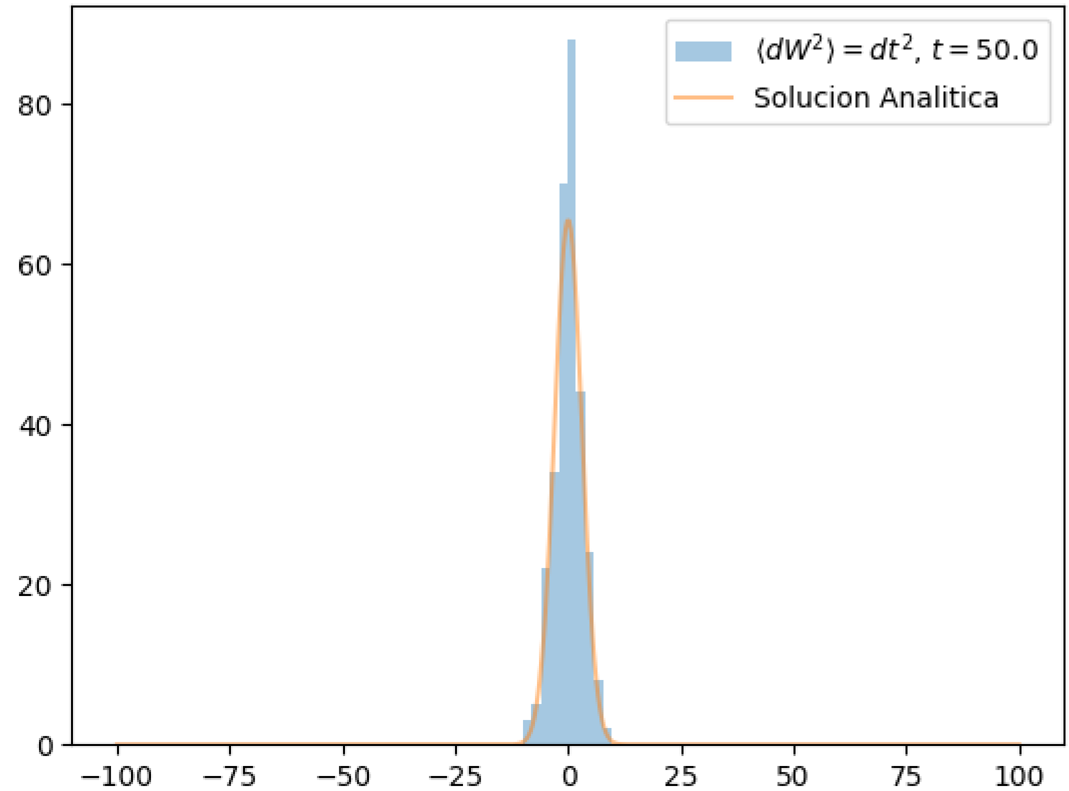


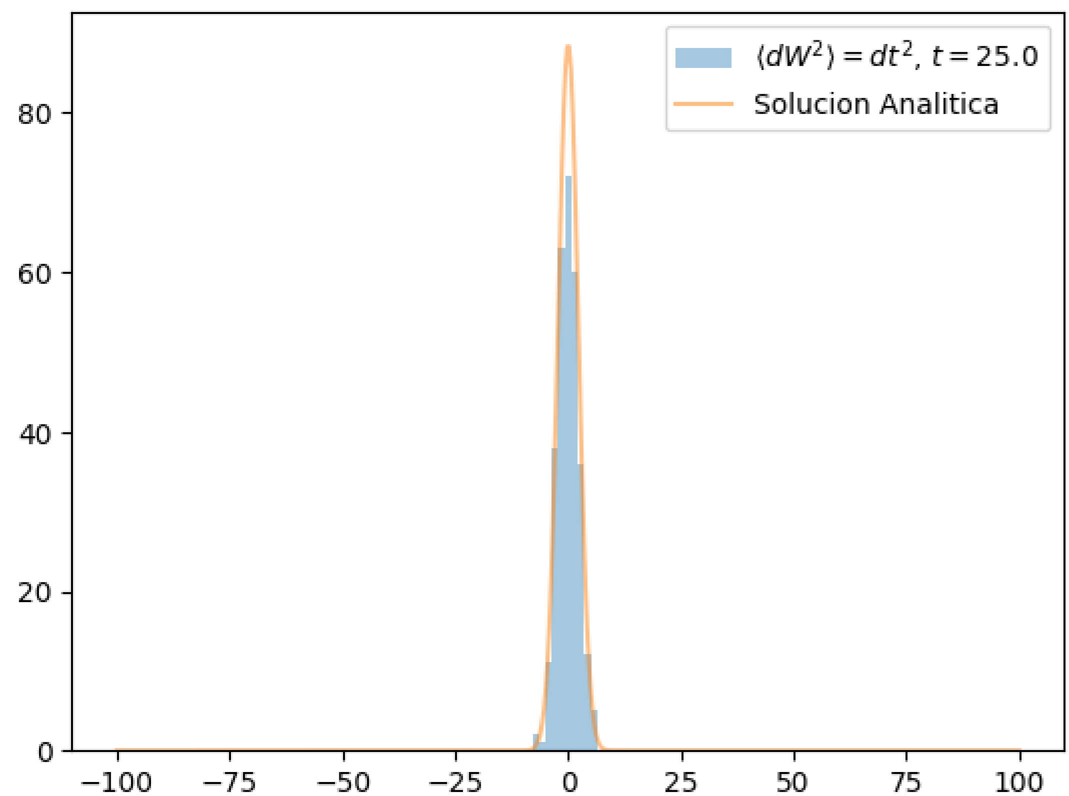
In [319...

```
dd=np.array([25.,50.,75.,100.])[::-1]
for i in range(len(dd)):
    j=5
    figure=plt.figure()
    #plt.grid('on')
    plt.hist((Matrix[j][:,np.where(np.round(Matrix[j+1][0,:],0)==dd[i])[0][0]]),lab
    plt.plot(xs,500*f1(xs,0,np.sqrt(sigma[np.where(np.round(Matrix[j+1][0,:],0)==dd
    #plt.axis('equal')
    plt.legend()
```


$\langle dW^2 \rangle = dt^2$, $t = 100.0$
Solucion Analitica
0
10
20
30
40
50
60
70
80
−100
−75
−50
−25
0
25
50
75
100


$\langle dW^2 \rangle = dt^2$, $t = 75.0$
Solucion Analitica
0
10
20
30
40
50
60
70
−100
−75
−50
−25
0
25
50
75
100





Al obtener la solucion analitica y susstituir los valores de la Varianza se obtuvio una distribucion muy parecida a la de la simulacion numerica, sin embargo esta era muiy pequeña y por lo tanto para parecerse más se escalo dicha funcion.