

# Formula lui Taylor

Radu Trîmbițaș

7 martie 2024

## 1 Formula lui Taylor

- $I$  interval,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă de  $n$  ori în punctul  $a \in I$ .  
Polinomul lui Taylor de gradul  $n$ , atașat funcției  $f$  în punctul  $a$ :

$$(T_n f)(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

- *Restul* de ordinul  $n$  al formulei lui Taylor în punctul  $x$

$$(R_n f)(x) = f(x) - (T_n f)(x)$$

- *Formula lui Taylor* de ordinul  $n$  pentru funcția  $f$  în vecinătatea punctului  $a$ :

$$f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x)$$

sau

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (R_n f)(x)$$

## 2 Restul

- Are loc

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} \omega(x), \text{ cu } \lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0.$$

- Dacă  $f \in C^{n+1}(I)$ , atunci  $\exists \theta \in (0, 1)$  astfel încât

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}$$

(restul în forma Lagrange)

$$(R_n f)(x) = \frac{(x-a)^{n+1} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{n!}$$

(restul în forma Cauchy)

$$(R_n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

(restul în formă integrală)

### 3 Formula lui Maclaurin

- Dacă în formula lui Taylor se ia  $a = 0$ , se obține formula lui Maclaurin

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + (R_n f)(x),$$

unde

$$(R_n f)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad \theta \in (0, 1).$$

- Exemple de dezvoltări uzuale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x); \quad (1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x); \quad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x); \quad (3)$$

- Alte dezvoltări uzuale

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(x); \quad (4)$$

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \dots + \binom{k}{n}x^n + R_n(x), \quad (5)$$

unde

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}.$$

### 4 Aplicații

**Problema 1.** Să se scrie formula lui Maclaurin pentru funcția  $f : [-a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{a+x}$ ,  $a > 0$ .

**Soluție.** Scriem  $f(x) = \sqrt{a+x} = \sqrt{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ ; se obține

$$f(x) = \sqrt{a} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a} + (-1)^1 \frac{1}{2^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + (-1)^2 \frac{1}{2^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{n! 2^n} \left(\frac{x}{a}\right)^n + (R_n f)(x) \right].$$

■

**Problema 2.** Să se determine numărul natural  $n$ , astfel ca pentru  $a = 0$  și  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$   $T_n f$  să aproximeze  $f$  în  $[-1, 1]$  cu trei zecimale exacte.

**Soluție.** Impunem condiția  $|(R_n f)(x)| = \left| \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!} \right| < 10^{-3}$ . Deoarece  $\theta x < 1$ ,  $e^{\theta x} < e < 3$ , avem

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6.$$

În particular, luând  $x = 1$ , obținem

$$e - \left( 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{6!} \right) < \frac{1}{1000}.$$

■

**Problema 3.** Să se aproximeze  $\sqrt[3]{999}$  cu 12 zecimale exacte.

**Soluție.** Avem

$$\sqrt[3]{999} = 10 \left( 1 - \frac{1}{1000} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Folosim formula (??) pentru  $k = 1/3$ ,  $x = -\frac{1}{1000}$ . Într-o serie alternată modulul erorii este mai mic decât modulul primului termen neglijat.

$$|(R_n f)(x)| < \left| \binom{\frac{1}{3}}{n} 10^{-3n} \right|.$$

Pentru  $n = 4$ , avem  $|(R_n f)(x)| < \frac{10}{243} 10^{-12} = \frac{1}{24300000000000} = 4.1152 \times 10^{-14}$ .

■

## 5 Probleme propuse

**Problema 4.** Dezvoltați funcția eroare

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

în serie utilizând seria pentru exponențială și integrând. Calculați seria Taylor a lui  $\operatorname{erf}(x)$  în jurul lui zero direct. Sunt cele două serii identice? Evaluați  $\operatorname{erf}(1)$  adunând patru termeni ai seriei și comparați cu valoarea  $\operatorname{erf}(1) \approx 0.8427$ , care este dată cu patru zecimale corecte. *Indicație:* Din teorema fundamentală a calculului integral rezultă că

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x).$$

**Problema 5.** Deduceți seria Taylor pentru  $\ln(1+x)$  și aproximați  $\ln 2$  folosind primii 8 termeni. Câți termeni sunt necesari pentru a obține  $\ln 2$  cu 5 zecimale corecte? La fel pentru  $\ln \frac{1+x}{1-x}$ .

**Problema 6.** Deduceți seria Taylor pentru arctangentă. Câți termeni sunt necesari pentru a obține  $\pi/4$  cu 5 zecimale corecte.

**Problema 7** (Aproximare cu serii MacLaurin). O funcție  $f \in C^n[a, b]$  se poate aproxima, utilizând seria Maclaurin trunchiată, printr-un polinom de grad  $n$

$$f(x) \approx T_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i,$$

unde  $c_i = f^{(i)}(0)/i!$ .

- (a) Reprezentați grafic și comparați graficele lui  $f(x) = e^x$  și ale polinoamelor  $(T_2 f)(x)$ ,  $(T_3 f)(x)$ ,  $(T_4 f)(x)$ ,  $(T_5 f)(x)$ . Aproximează mulțumitor polinoamele  $T_n f$  de grad mare funcția  $e^x$  pe un interval din ce în ce mai mare centrat în jurul originii?

- (b) Repetați pentru  $g(x) = \ln(1+x)$ .

**Problema 8** (Aproximare Padé rațională). *Aproximarea Padé rațională* este cea mai bună aproximare a unei funcții printr-o funcție rațională de ordin  $(m, k)$  dat. Se definește ca fiind o aproximare rațională de grad  $(m, k)$  dat care reproduce valorile funcției și derivatelor ei până la ordinul  $m+k$ . Ea dă adesea aproximări mai bune decât seriile Taylor trunchiate și uneori lucrează chiar și atunci când seria Taylor nu converge! În loc să utilizăm polinoame de grad mare, putem utiliza câțuri de polinoame de grad mic. Aceste aproximări se numesc *aproximări raționale*. Fie

$$f(x) \approx \frac{p_m(x)}{q_k(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{j=0}^k b_j x^j} = R_{m,k}(x),$$

unde  $b_0 = 1$ . Aici am normalizat prin  $b_0 \neq 0$  iar valorile lui  $m$  și  $k$  se presupun a fi modeste. Alegem cei  $k$  coeficienți  $b_j$  și cei  $m+1$  coeficienți  $a_i$  din  $R_{m,k}$  astfel încât  $R_{m,k}$  să reproducă valorile lui  $f$  și ale unui număr specificat de derivate ale ei în punctul fixat  $x = 0$ . Construim întâi seria Maclaurin trunchiată  $\sum_{i=0}^n c_i x^i$ , unde  $c_i = f^{(i)}(0)/i!$  și  $c_i = 0$  pentru  $i < 0$ . Apoi, egalăm primele  $m+k+1$  derivate ale lui  $R_{m,k}$  în raport cu  $x$  în  $x = 0$  cu primii  $m+k+1$  coeficienți  $c_i$ . Se obține sistemul:

$$\begin{bmatrix} c_m & c_{m-1} & \cdots & c_{m-(k-2)} & c_{m-(k-1)} \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m-(k-3)} & c_{m-(k-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{m+(k-2)} & c_{m+(k-3)} & \cdots & c_m & c_{m-1} \\ c_{m+(k-1)} & c_{m+(k-2)} & \cdots & c_{m+1} & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{k-1} \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{m+1} \\ -c_{m+2} \\ \vdots \\ -c_{m+(k-1)} \\ -c_{m+k} \end{bmatrix}.$$

Deoarece  $b_0 = 1$ , rezolvând acest sistem de dimensiune  $k \times k$  vom obține coeficienții  $b_1, b_2, \dots, b_k$ . Valorile lui  $a_0, a_1, \dots, a_m$  se obțin din

$$a_j = \sum_{\ell=0}^j c_{j-\ell} b_\ell \quad (j = 0, 1, \dots, m).$$

De notat că  $a_j = 0$  pentru  $j > m$  și  $b_j = 0$  pentru  $j > k$ . De asemenea, dacă  $k = 0$ , atunci  $R_{m,0}$  este seria Maclaurin trunchiată a lui  $f$ . Mai mult, aproximarea Padé poate avea singularități.

- (a) Implementați aproximarea Padé pentru  $f$ ,  $k$ ,  $m$  date.
- (b) Determinați funcțiile raționale  $R_{1,1}(x)$  și  $R_{2,2}(x)$  pentru  $f(x) = e^x$ . Reprezentați grafic și comparați graficele lui  $f(x) = e^x$ ,  $R_{1,1}$  și  $R_{2,2}$ . Sunt satisfăcătoare aceste aproximații raționale ale lui  $e^x$  pe  $[-1, 1]$ ? Cum se comportă comparativ cu seriile Maclaurin trunchiate din problemele precedente?
- (c) Repetați pentru aproximările  $R_{2,2}(x)$  și  $R_{3,1}(x)$  ale funcției  $g(x) = \ln(1 + x)$ .

**Problema 9.** Calculați dezvoltarea MacLaurin a funcției Bessel  $J_0(2x)$ . Determinați  $R_{2,2}(x)$ ,  $R_{4,3}(x)$  și  $R_{2,4}(x)$  și comparați graficele. Funcțiile Bessel  $J_n$  se definesc prin

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta.$$

**Problema 10.** Când evaluăm

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

pe calculator, se observă că avem o eroare relativă mare pentru valori  $x \approx 0$ .

1. Explicați ce se întâmplă.
2. Găsiți o metodă pentru calculul lui  $f$  pentru  $|x| < 1$  la precizia mașinii și scrieți o funcție MATLAB pentru calculul lui  $f$ .

## 6 Probleme suplimentare

**Problema 11.** Implementați formula lui Taylor cu restul în forma Lagrange, folosind un software simbolic (de exemplu, Maple, MATLAB Symbolic Math Toolbox, Maxima, etc.).