Analiză matricială și condiționarea unui sistem liniar

Norme, convergență, condiționare

Radu Trîmbițaș

UBB

12 martie 2025

Elemente de analiză matricială

- $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, A^T transpusa lui A, A^* transpusa conjugată a lui A

Elemente de analiză matricială

- $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, A^T transpusa lui A, A^* transpusa conjugată a lui A
- polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomul caracteristic al lui A; rădăcinile lui se numesc *valori proprii* ale lui A

Elemente de analiză matricială

- $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, A^T transpusa lui A, A^* transpusa conjugată a lui A
- polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomul caracteristic al lui A; rădăcinile lui se numesc *valori proprii* ale lui A
- $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie, $x \neq 0$ *vector propriu* corespunzător valorii proprii λ

Elemente de analiză matricială

- $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, A^T transpusa lui A, A^* transpusa conjugată a lui A
- polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomul caracteristic al lui A; rădăcinile lui se numesc *valori proprii* ale lui A
- $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie, $x \neq 0$ *vector propriu* corespunzător valorii proprii λ
- Valoarea $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda$ valoare proprie a lui $A\}$ — raza spectrală a matricei A.

Matrice speciale

- O matrice se numește

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$
  - ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I$, A reală

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$
  - ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I$, A reală
  - hermitiană, dacă $A^* = A$

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$
  - ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I$, A reală
  - hermitiană, dacă $A^* = A$
  - simetrică, dacă $A^T = A$, A reală

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$
  - ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I$, A reală
  - hermitiană, dacă $A^* = A$
  - simetrică, dacă $A^T = A$, A reală
- O normă matricială este o aplicație $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathbb{R}$, care pentru orice matrice A, B și orice scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ verifică

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$
  - ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I$, A reală
  - hermitiană, dacă $A^* = A$
  - simetrică, dacă $A^T = A$, A reală
- O normă matricială este o aplicație $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathbb{R}$, care pentru orice matrice A, B și orice scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ verifică

(NM1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$
  - ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I$, A reală
  - hermitiană, dacă $A^* = A$
  - simetrică, dacă $A^T = A$, A reală
- O normă matricială este o aplicație $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathbb{R}$, care pentru orice matrice A, B și orice scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ verifică

(NM1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(NM2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$
  - ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I$, A reală
  - hermitiană, dacă $A^* = A$
  - simetrică, dacă $A^T = A$, A reală
- O normă matricială este o aplicație $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathbb{R}$, care pentru orice matrice A, B și orice scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ verifică

(NM1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(NM2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$

(NM3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Matrice speciale

- O matrice se numește
  - normală, dacă $AA^* = A^*A$
  - unitară, dacă $AA^* = A^*A = I$
  - ortogonală, dacă $AA^T = A^TA = I$, A reală
  - hermitiană, dacă $A^* = A$
  - simetrică, dacă $A^T = A$, A reală
- O normă matricială este o aplicație $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathbb{R}$, care pentru orice matrice A, B și orice scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ verifică

(NM1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(NM2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$

(NM3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(NM4) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

Norme matriciale - exemple

- fiind dată o normă vectorială $\|\cdot\|$ pe $\mathbb{C}^n$, aplicația $\|\|:\mathbb{C}^{m\times n}\to\mathbb{R}$

$$\|A\| = \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n\\ v\neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n\\ \|v\|\leq 1}} \|Av\| = \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n\\ \|v\|=1}} \|Av\|$$

  este o normă matricială numita normă matricială subordonată (normei vectoriale date) sau normă indusă (de norma vectorială) sau normă naturală.
- Orice normă subordonată verifică $\|I\| = 1$
- Un exemplu important de normă nesubordonată (neindusă) este norma Frobenius

$$\|A\|_F = \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(tr\left(A^*A\right)\right)^{1/2}.$$

- $\|I\|_F = \sqrt{n}$, deci norma Frobenius nu este subordonată

Norme induse clasice

Teoremă

Fie $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Atunci

$$\|A\|_1 = \sup_{v\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{v\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sup_{v\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2$$

Norma $\|\cdot\|_2$ este invariantă la transformările unitare, adică

$$UU^* = I \Rightarrow \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2.$$

Dacă A este normală ($AA^* = A^*A$), atunci $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Demonstrație I

Pentru orice vector v avem

$$\|Av\|_1 = \sum_i \left|\sum_j a_{ij} v_j\right| \leq \sum_j |v_j| \sum_i |a_{ij}| \leq$$
$$\leq \left(\max_j \sum_i |a_{ij}|\right) \|v\|_1.$$

Pentru a arăta că $\max_j \sum_i |a_{ij}|$ este efectiv cel mai mic număr α pentru care are loc $\|Av\|_1 \leq \alpha\|v\|_1,\ \forall\ v \in \mathbb{C}^n$, să construim un vector u (care depinde de A) astfel încât

$$\|Au\|_1 = \left\{\max_j \sum_i |a_{ij}|\right\} \|u\|_1.$$

Dacă j_0 este un indice ce verifică

$$\max_j \sum_i |a_{ij}| = \sum_i |a_{ij_0}|,$$

Demonstrație II

atunci vectorul u are componentele $u_i = 0$ pentru $i \neq j_0$, $u_{j_0} = 1$.
La fel

$$\|Av\|_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{ij} v_j\right| \leq \left(\max_i \sum_j |a_{ij}|\right) \|v\|_\infty.$$

Fie i_0 un indice ce verifică

$$\max_i \sum_j |a_{ij}| = \sum_j |a_{i_0 j}|.$$

Vectorul u de componente $u_j = \dfrac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|}$ dacă $a_{i_0 j} \neq 0$, $u_j = 1$ dacă $a_{i_0 j} = 0$, verifică

$$\|Au\|_\infty = \left\{\max_i \sum_j |a_{ij}|\right\} \|u\|_\infty.$$

Demonstrație III

Deoarece AA^* este hermitiană, există o descompunere proprie $AA^* = Q\Lambda Q^*$, unde Q este o matrice unitară (ale cărei coloane sunt vectori proprii) și Λ este matricea diagonală a valorilor proprii, care trebuie să fie toate reale. Dacă ar exista o valoare proprie negativă și q ar fi vectorul propriu corespunzător, am avea

$$0 \leq \|Aq\|_2^2 = q^T A^T Aq = q^T \lambda q = \lambda \|q\|_2^2,$$

contradicție.

Demonstrație IV

Deci

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \frac{(x^*A^*Ax)^{1/2}}{\|x\|_2} \\
&= \max_{x\neq 0} \frac{(x^*Q\Lambda Q^*x)^{1/2}}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \frac{((Q^*x)^*\Lambda Q^*x)^{1/2}}{\|Q^*x\|_2} \\
&= \max_{y\neq 0} \frac{(y^*\Lambda y)^{1/2}}{\|y\|_2} = \max_{y\neq 0} \sqrt{\frac{\sum \lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2}} \\
&\leq \max_{y\neq 0} \sqrt{\lambda_{\max}} \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{\sum y_i^2}} \leq \sqrt{\lambda_{\max}};
\end{aligned}$$

egalitatea are loc dacă y este o coloană convenabil aleasă a matricei identitate.
Să arătăm că $\rho(A^*A) = \rho(AA^*)$. Dacă $\rho(A^*A) > 0$, există p astfel încât $p \neq 0$, $A^*Ap = \rho(A^*A)p$ și $Ap \neq 0$ $(\rho(A^*A) > 0)$. Cum $Ap \neq 0$ și $AA^*(Ap) = \rho(A^*A)Ap$,

Demonstrație V

rezultă că $0 < \rho(A^*A) \leq \rho(AA^*)$ și deci $\rho(AA^*) = \rho(A^*A)$, căci $(A^*)^* = A$. Dacă $\rho(A^*A) = 0$, avem $\rho(AA^*) = 0$. Deci, în toate cazurile $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \rho(AA^*) = \|A^*\|_2^2$. Invarianța normei $\|\cdot\|_2$ la transformări unitare nu este decât traducerea egalităților

$$\rho(A^*A) = \rho(U^*A^*AU) = \rho(A^*U^*UA) = \rho(U^*A^*UU^*AU).$$

În fine, dacă A este normală, există o matrice U astfel încât $U^*AU = diag(\lambda_i(A)) \stackrel{def}{=} \Lambda$. În aceste condiții

$$A^*A = (U\Lambda U^*)^*U\Lambda U = U\Lambda^*\Lambda U^*,$$

ceea ce ne arată că

$$\rho(A^*A) = \rho(\Lambda^*\Lambda) = \max_i |\lambda_i(A)|^2 = (\rho(A))^2.$$

Exemple

Fie matricele

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Normele uzuale ale lui A și B vor fi

$$\|A\|_1 = 5,\ \|A\|_\infty = 6,$$
$$\|A\|_2 = \frac{\sqrt{29}+\sqrt{17}}{2} \approx 4.7541,\ \|A\|_F = \sqrt{23}$$
$$\|B\|_1 = 6,\ \|B\|_\infty = 7,$$
$$\|B\|_2 \approx 42986,\ \|B\|_F = 2\sqrt{7}.$$

Condiționarea unui sistem liniar 1

- Care este condiționarea problemei: dându-se $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ și $b \in \mathbb{C}^{m \times 1}$, să se rezolve sistemul $Ax = b$?
- Considerăm exemplul (Wilson)

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

cu soluția $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Condiționarea unui sistem liniar 2

- Perturbăm membrul drept

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \\ x_4 + \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix}$$

- soluția $\begin{bmatrix} 9.2 & -12.6 & 4.5 & -1.1 \end{bmatrix}^T$.
- o eroare (relativă) de $1/200$ în date $\longrightarrow$ eroare relativă de $10/1$ (amplificare a erorii relative de 2000 de ori)

Condiționarea unui sistem liniar 3

- Perturbăm matricea

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 9.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \\ x_4 + \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

- soluția $\begin{bmatrix} -81 & 137 & -34 & 22 \end{bmatrix}^T$.
- Din nou, o variație mică în datele de intrare modifică complet rezultatul
- Matricea are un aspect ,,bun", ea este simetrică, determinantul ei este 1, iar inversa ei este

$$\begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Estimarea numărului de condiționare

- Considerăm sistemul parametrizat, cu parametrul t

$$(A + t\Delta A)x(t) = b + t\Delta b, \qquad x(0) = x^*.$$

- A nesingulară $\Longrightarrow$ funcția x este diferențiabilă în $t = 0$ și $x'(0) = A^{-1}\left(\Delta b - \Delta A x^*\right)$.
- Dezvoltarea Taylor a lui $x(t)$ este

$$x(t) = x^* + tx'(0) + O(t^2).$$

- Estimarea erorii absolute

$$\begin{aligned}\|\Delta x(t)\| = \|x(t) - x^*\| &\leq |t| \left\|x'(0)\right\| + O(t^2)\\ &\leq |t| \left\|A^{-1}\right\| \left(\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \|x^*\|\right) + O(t^2)\end{aligned}$$

Estimarea numărului de condiționare 2

- din $||b|| \leq ||A||||x^*||$ obținem pentru eroarea relativă

$$\frac{\|\Delta x(t)\|}{\|x^*\|} \leq |t| \, \|A^{-1}\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x^*\|} + \|\Delta A\| \right) + O(t^2)$$
$$\leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \, |t| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right) + O(t^2)$$

- Introducem notațiile

$$\rho_A(t) = |t| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \quad \rho_b(t) = |t| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

și putem scrie pentru eroarea relativă

$$\frac{\|\Delta x(t)\|}{\|x^*\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \left(\rho_A(t) + \rho_b(t)\right) + O(t^2) \quad (1)$$

Estimarea numărului de condiționare 3

Definiție

Dacă A este nesingulară, numărul

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \tag{2}$$

se numește număr de condiționare al matricei A. Dacă A este singulară, $cond(A) = \infty$.

Relația (1) se poate scrie sub forma

$$\frac{\|\Delta x(t)\|}{\|x^*\|} \leq \operatorname{cond}(A) \left(\rho_A(t) + \rho_b(t)\right) + O(t^2)$$

Exemple de matrice prost condiționate

- Matricea lui Hilbert $H_m = (h_{ij})$ cu $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, $i,j = 1, \ldots, m$. Szegő a demonstrat

$$\operatorname{cond}_2(H_m) = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{4m+4}}{2^{14/4}\sqrt{\pi m}}.$$

m	10	20	40
$\operatorname{cond}_2(H_m)$	$1.6{\cdot}10^{13}$	$2.45{\cdot}10^{28}$	$7.65{\cdot}10^{58}$

- Matricea Vandermonde $V = (v_{ij})$, $v_{ij} = t_j^{i-1}$, $i,j = 1, \ldots, m$
  - elemente echidistante în [-1,1]

$$cond_\infty(V_m) \sim \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\pi}{4}} e^{m\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\right)}$$

  - $t_j = 1/j$, $j = 1, \ldots m$: $cond_\infty(V_m) > m^{m+1}$.

David Hilbert
(1862-1943)

Gábor Szegő (1895-1985)

Bibliografie I

- Octavian Agratini, Ioana Chiorean, Gheorghe Coman, Trîmbiţaş Radu, *Analiză numerică şi teoria aproximării*, vol. III, Presa Universitară Clujeană, 2002, coordonatori D. D. Stancu şi Gh. Coman.
- R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. van der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, PA, 1994, disponibila prin www, `http://www.netlib.org/templates`.
- James Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- H. H. Goldstine, J. von Neumann, *Numerical inverting of matrices of high order*, Amer. Math. Soc. Bull. **53** (1947), 1021–1099.

Bibliografie II

- Gene H. Golub, Charles van Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- C. G. J. Jacobi, *Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen*, Astronomische Nachrichten **22** (1845), 9–12, Issue no. 523.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, 1996, disponibila prin www, `http://www.nr.com/`.

Bibliografie III

- Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing, Boston, 1996, disponibilă via www la adresa `http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html`.
- Lloyd N. Trefethen, David Bau III, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1996.

Overlay

Deci

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \frac{(x^* A^* Ax)^{1/2}}{\|x\|_2}$$

egalitatea are loc dacă y este o coloană convenabil aleasă a matricei identitate.

Overlay

Deci

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \frac{(x^* A^* A x)^{1/2}}{\|x\|_2}$$
$$= \max_{x\neq 0} \frac{(x^* Q\Lambda Q^* x)^{1/2}}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \frac{((Q^* x)^* \Lambda Q^* x)^{1/2}}{\|Q^* x\|_2}$$

egalitatea are loc dacă y este o coloană convenabil aleasă a matricei identitate.

Overlay

Deci

$$
\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \frac{(x^*A^*Ax)^{1/2}}{\|x\|_2} \\
&= \max_{x\neq 0} \frac{(x^*Q\Lambda Q^*x)^{1/2}}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \frac{((Q^*x)^*\Lambda Q^*x)^{1/2}}{\|Q^*x\|_2} \\
&= \max_{y\neq 0} \frac{(y^*\Lambda y)^{1/2}}{\|y\|_2} = \max_{y\neq 0} \sqrt{\frac{\sum \lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2}}
\end{aligned}
$$

egalitatea are loc dacă y este o coloană convenabil aleasă a matricei identitate.

Overlay

Deci

$$
\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \frac{(x^*A^*Ax)^{1/2}}{\|x\|_2} \\
&= \max_{x\neq 0} \frac{(x^*Q\Lambda Q^*x)^{1/2}}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \frac{((Q^*x)^*\Lambda Q^*x)^{1/2}}{\|Q^*x\|_2} \\
&= \max_{y\neq 0} \frac{(y^*\Lambda y)^{1/2}}{\|y\|_2} = \max_{y\neq 0} \sqrt{\frac{\sum \lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2}} \\
&\leq \max_{y\neq 0} \sqrt{\lambda_{\max}} \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{\sum y_i^2}};
\end{aligned}
$$

egalitatea are loc dacă y este o coloană convenabil aleasă a matricei identitate.