Problema 1 *Se consideră problema bilocală*

$$
\begin{aligned}
y'' + \sin y = 0, \qquad & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\
y(0) = 0, \qquad & y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.
\end{aligned}
$$

care descrie mişcarea unghiulară a unui pendul.

(a) *Aproximând derivata de ordinul doi prin diferenţe centrate*

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

şi considerând o grilă uniformă, $x_k = \frac{k}{n+1}\frac{\pi}{4}$, $k = 0, 1, \ldots, n, n+1$, să se dea un algoritm de rezolvare a problemei bilocale de mai sus prin metoda lui Newton astfel:

(a1) *Necunoscutele vor fi valorile functiei y pe punctele grilei, $y_k = y(x_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Înlocuind derivata de ordinul 2 cu aproximarea de mai sus ajunge la un sistem neliniar. Scrieți sistemul la care se ajunge. (2p)*

(a2) *Scrieți jacobianul sistemului. (1p)*

(a3) *Sistemul se rezolvă cu metoda lui Newton.*

(b) *Implementaţi algoritmul de la (a) în MATLAB. (2p)*

Proof.

(a) Înlocuid derivata cu aproximația din enunț şi scriind că ecuația diferențială trebuie verificată în x_k se obține

$$y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} + h^2 \sin(y_k) = 0.$$

Ținând cont de condițiile pe frontieră se mai deduc ecuațiile

$$
\begin{aligned}
-2y_1 + y_2 + h^2 \sin(y_1) &= 0 \\
y_{n-1} - 2y_n + 1 + h^2 \sin(y_n) &= 0,
\end{aligned}
$$

care se vor pune la începutul şi respectiv sfârşitul sistemului. Sistemul final este

$$
\begin{aligned}
-2y_1 + y_2 + h^2 \sin(y_1) &= 0 \\
y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} + h^2 \sin(y_k) &= 0, \qquad k = 2, \ldots, n-1, \\
y_{n-1} - 2y_n + 1 + h^2 \sin(y_n) &= 0
\end{aligned}
$$

Jacobianul este tridiagonal

$$J = F'(x) = \begin{bmatrix} -2+h^2\cos y_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2+h^2\cos y_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & -2+h^2\cos y_{n-1} & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -2+h^2\cos y_n \end{bmatrix}.$$

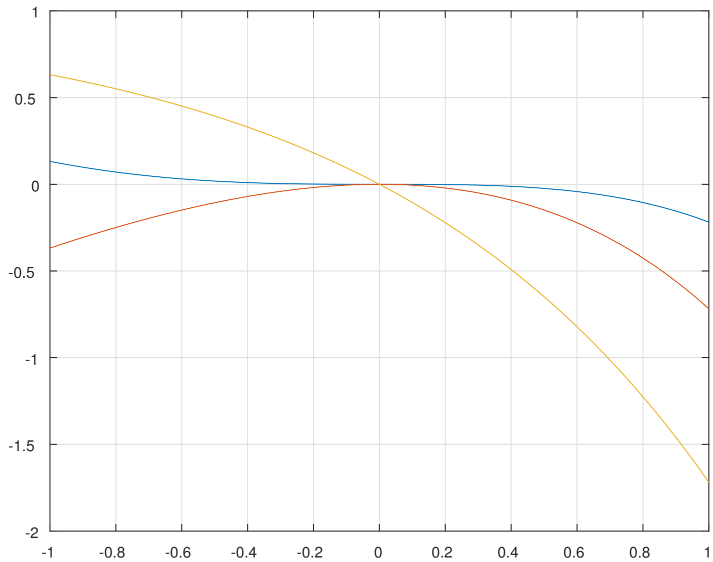
(b) Definim funcția şi jacobianul; alegem ca aproximație inițială polinomul de grad I care trece prin punctele $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$.

$$y'' + \sin(y) = 0, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

```
n=100;

c=polyfit([0,pi/4],[0,1],1);
x=linspace(0,pi/4,n+2);
y0=polyval(c,x(2:end-1));
FF=@(y) F(y,n);
FFd=@(y) Fd(y,n);
[z,ni]=Newton(FF,FFd,y0',1e-6,0,100);
zs=[0;z;1];
plot(x,zs)
```



Funcții auxiliare

Funcția

```
function z=F(y,n)
h=pi/4/(n+1);
z=zeros(n,1);
z(1)=-2*y(1) + y(2) + h^2*sin(y(1));
for k=2:(n-1)
    z(k)=y(k - 1) - 2*y(k) + y(k + 1) + h^2*sin(y(k));
end
z(n)=y(n - 1) - 2*y(n) + 1 + h^2*sin(y(n));
end
```

Jacobianul

```
function J=Fd(y,n)
e=ones(n,1);
h=pi/4/(n+1);
dp = -2+h^2*cos(y);
J=spdiags([e,dp,e],-1:1,n,n);
```

```
end
```

■

Problema 2 *Fie $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a lui $[a,b]$ în $n-1$ subintervale. Presupunem că se dau valorile $f_i = f(x_i)$ ale funcţie f în punctele x_i, $i = 1,2,\ldots,n$. În această problemă $s \in \mathbb{S}_2^1$ va fi un spline cuadratic (de gradul II) care interpolează f pe Δ, adică $s(x_i) = f_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.*

(a) *Explicaţi de ce este nevoie de o condiţie suplimentară pentru a determina s unic. (1p)*

(b) *Definim $m_i = s'(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,n-1$. Determinaţi $p_i := s|_{[x_i,x_{i+1}]}$, $i = 1,2,\ldots,n-1$ în funcţie de f_i, f_{i+1} şi m_i. (2.5p)*

(c) *Presupunem că $m_n = f'(b)$. (Conform lui (a), aceasta determină s unic.) Arătaţi cum pot fi calculate m_1, m_2, …, m_{n-1}. (0.5p)*

Soluție.

(a) Sunt $n-1$ subintervale, pe fiecare avem un polinom de gradul 2, sunt $3n-3$ necunoscute, n condiţii de interpolare, $n-2$ condiţii de continuitate C^0, $n-2$ condiţii de continuitate C^1; în total $3n-4$ condiții.

(b) Fie `x_1`=x_i, `x_2`=x_{i+1}, m_1=$m_i = f'(x_i)$, m_2=$m_{i+1} = f'(x_{i+1})$.

```
clear
syms x_1 x_2 f(t) m_1 m_2
```

Obținem tabela de diferențe divizate

```
x=[x_1,x_2]; fd={[f(x_1),m_1],[f(x_2)]};
[z,td]=MNDividedDifferences(x,fd);
disp(td)
```

$$\begin{pmatrix} f(x_1) & m_1 & \frac{-\frac{f(x_1)-f(x_2)}{-x_2+x_1}+m_1}{-x_2+x_1} \\ f(x_1) & \frac{f(x_1)-f(x_2)}{-x_2+x_1} & \mathrm{NaN} \\ f(x_2) & \mathrm{NaN} & \mathrm{NaN} \end{pmatrix}$$

Polinomul de interpolare Hermite p_i are forma:

```
P=Newtonpolynomial(td,z,t)
```

P =

$$f(x_1) + m_1(t-x_1) + \frac{(t-x_1)^2\left(-\frac{f(x_1)-f(x_2)}{-x_2+x_1}+m_1\right)}{-x_2+x_1}$$

Deoarece spline-ul trebuie sa fie de clasă C^1, impunem condiția $p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1}$

```
ec=collect(simplifyFraction(subs(diff(P,t),t,x_2)),m_1)==m_2
```

```
ec =
```

$$-m_1 + \frac{2\,f\,(x_1) - 2\,f\,(x_2)}{-x_2 + x_1} = m_2$$

Am găsit relația de recurență

$$m_{i+1} = -m_i + 2\frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}. \tag{1}$$

(c) Pornind de la $m_n = f'(b)$, celelalte m-uri se pot determina folosind relaţia de recurenţă (1).

$$m_i = -m_{i+1} + 2\frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \qquad i = n-1, n, \ldots, 1.$$

■