Formula lui Taylor și aplicații

O cărămidă importantă a analizei numerice

Radu T. Trîmbițaș

UBB

26 februarie 2025

Polinomul lui Taylor I

- Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$, $a \in int(I)$. Dorim să găsim un polinom P de grad minim care să verifice condițiile

$$P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), \dots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \tag{1}$$

- Căutăm P sub forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n \tag{2}$$

Polinomul lui Taylor II

- Din (1) și (2) obținem

$$
\begin{aligned}
P(a) &= a_0 = f(a) \\
P'(a) &= a_1 = f'(a) \\
&\vdots \\
P^{(k)}(a) &= k!a_k = f^{(k)}(a) \\
&\vdots \\
P^{(n)}(a) &= n!a_n = f^{(n)}(a),
\end{aligned}
$$

de unde rezultă

$$
a_0 = f(a), a_1 = f'(a), \dots, a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{3}
$$

Polinomul lui Taylor III

- **Unicitatea**: presupunem că există $Q \neq P$ care verifică (1). Notăm $H := P - Q$. Obținem

$$H(a) = 0, H'(a) = 0, \ldots, H^{(n)}(a) = 0,$$

  adică $H \equiv 0$ (H identic nul)
- De ce se pune condiția P de grad minim?
- P se va numi polinomul lui Taylor de gradul n, atașat funcției f în punctul a și se va nota cu $(T_n f)(x)$

Formula lui Taylor

- I interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori în punctul $a \in I$. Polinomul lui Taylor de gradul n, atașat funcției f în punctul a:

$$(T_n f)(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

- Restul de ordinul n al formulei lui Taylor în punctul x

$$(R_n f)(x) = f(x) - (T_n f)(x)$$

- formula lui Taylor de ordinul n pentru funcția f în vecinătatea punctului a:

$$f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x)$$

sau

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (R_n f)(x)$$

- Are loc
$$(R_nf)(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\omega(x), \text{ cu } \lim_{x\to a}\omega(x) = 0.$$
- Dacă $f \in C^{n+1}(I)$, atunci $\exists\theta \in (0,1)$ astfel încât
$$(R_nf)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}\left(a+\theta(x-a)\right)}{(n+1)!}$$

  (restul în forma Lagrange)
$$(R_nf)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}\left(a+\theta(x-a)\right)}{n!}$$

  (restul în forma Cauchy)
$$(R_nf)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}\,t$$

(restul în formă integrală)

Demonstrația expresiei restului I

- Pornim de la expresia restului și o integrăm prin părți de n ori

$$
\begin{aligned}
\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t &= f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\bigg|_a^x + \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}\,t \\
&= -f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\bigg|_a^x + \int_a^x f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{d}\,t \\
&\vdots \\
&= -f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} - f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} - \cdots - f'(a)\frac{x-a}{1!} + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= -f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} - f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} - \cdots - f'(a)\frac{x-a}{1!} + f(x) - f(a)
\end{aligned}
$$

Demonstrația expresiei restului II

- de aici se obține

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}\, t}_{(R_n f)(x)}$$

- Pentru a obține forma Lagrange a restului folosim teorema a doua de medie a calculului integral: fie $u, v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, u, v continue și u are semn constant pe $[\alpha, \beta]$. Atunci există $\xi \in [\alpha, \beta]$ astfel încât

$$\int_\alpha^\beta u(t) v(t) \mathrm{d}\, t = v(\xi) \int_\alpha^\beta u(t) \mathrm{d}\, t$$

Demonstrația expresiei restului III

- Alegând $\alpha = a$, $\beta = x$, $u(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$, $v(t) = f^{(n+1)}(t)$ vom obține

$$
\begin{aligned}
(R_n f)(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\
&= f^{(n+1)}(\xi) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right] \Bigg|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}
\end{aligned}
$$

O formă utilă

Dacă $f \in C^{n+1}(I)$, dezvoltând $f(x+h)$ în jurul lui x,

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + (R_n f)(x),$$

iar o formă pentru rest este

$$(R_n f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1},$$

unde ξ este între x și $x+h$.

Formula lui Maclaurin

- Dacă în formula lui Taylor se ia $a = 0$, se obține formula lui Maclaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + (R_n f)(x),$$

unde

$$(R_n f)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad \theta \in (0,1).$$

- Exemple de dezvoltări uzuale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x); \tag{4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x); \tag{5}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x); \tag{6}$$

Alte dezvoltari uzuale

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(x); \tag{7}$$

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1} x + \binom{k}{2} x^2 + \cdots + \binom{k}{n} x^n + R_n(x), \tag{8}$$

unde

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}.$$

Brook Taylor (1685-1731)

Colin Maclaurin (1698-1768)

Aplicații I

Problemă

Să se scrie formula lui MacLaurin pentru funcția $f : [-a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a+x}$, $a > 0$.

Soluție. Scriem $f(x) = \sqrt{a+x} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; se obține

$$f(x) = \sqrt{a}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} + (-1)^1 \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + (-1)^2 \frac{1}{2^3}\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{n!2^n}\left(\frac{x}{a}\right)^n + (R_n f)(x)\right].$$

■

Aplicații II

Problemă

Să se determine numărul natural n astfel ca pentru $a = 0$ și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $T_n f$ să aproximeze f în $[-1, 1]$ cu trei zecimale exacte.

Soluție. Impunem condiția $|(R_n f)(x)| = \left|\frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| < 10^{-3}$.Deoarece $\theta x < 1$, $e^{\theta x} < e < 3$, avem

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6.$$

În particular, luând $x = 1$, obținem

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{6!}\right) < \frac{1}{1000}.$$

■

Aplicații III

Problemă

Să se aproximeze $\sqrt[3]{999}$ cu 12 zecimale exacte.

Soluție. Avem

$$\sqrt[3]{999} = 10\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Folosim formula (8) pentru $k = 1/3$, $x = -\frac{1}{1000}$. Într-o serie alternată modulul erorii este mai mic decât modulul primului termen neglijat.

$$|(R_n f)(x)| < \left|\binom{\frac{1}{3}}{n} 10^{-3n}\right|.$$

Pentru $n = 4$, avem
$|(R_n f)(x)| < \frac{10}{243}10^{-12} = \frac{1}{24300000000000} = 4.1152 \times 10^{-14}$. ∎

Formula lui Taylor bidimensională

- Pentru o funcție $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o expresie a formulei lui Taylor este

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{i} f(a,b) + R_n(h,k) \\ R_n(h,k) &= \frac{1}{(n+1)!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f\left(a+\theta h, b+\theta k\right), \end{aligned} \tag{9}$$

cu $\theta \in (0,1)$. Semnificația termenilor diferențiali este

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{0} f(a,b) = f(a,b)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{1} f(a,b) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \right)(a,b)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{2} f(a,b) = \left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)(a,b).$$

Formula lui Taylor bidimensională

Teorema următoare precizează condițiile de aplicabilitate ale formulei (9).

Teoremă

Dacă toate derivatele parțiale de ordinul $n+1$ *ale lui* f *sunt continue în dreptunghiul definit de* $|x-a| \leq |h|$ *și* $|y-b| \leq k$*, atunci există* $\theta \in (0,1)$ *pentru care are loc (9).*

Un exemplu

Problemă

Scrieți dezvoltarea Taylor a lui $f(x,y) = \cos xy$, pentru $n = 1$.

Soluție. Aplicând formula (9) se obține

$$\cos[(a+h)(b+k)] = \cos ab - (hb + ak)\sin ab + R_1(h,k),$$

unde R_1 este suma a trei termeni

$$-\frac{1}{2}h^2(b+\theta k)^2 \cos\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right]$$
$$-hk\left\{(a+\theta h)(b+\theta k)\cos\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right] + \sin\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right]\right\}$$
$$-\frac{1}{2}k^2(a+\theta h)^2 \cos\left[(a+\theta h)(b+\theta k)\right].$$

■

Exemple

- Exemple Maple `exempletaylor.html`
- Exemplu Maple Taylor 2D `taylor2d.html`
- Exemple MATLAB Symbolic Math Toolbox `extaylor.html`

Aproximare rațională

- Se numește *funcție rațională de ordin* (n, m) o funcție de forma
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$
unde p este un polinom de grad n, iar q este un polinom de grad m.
- Numărul $N = n + m$ se numește gradul funcției raționale
- Sunt $n + 1 + m + 1 = m + n + 2$ coeficienți, dar numai $n + m + 1$ sunt independenți (putem împărți cu unul dintre coeficienții nenuli)
- Polinoamele pot fi considerate cazuri particulare de funcții raționale cu grad $q(x) = 0$.

Aproximare Padé

- Este un analog rațional al formulei lui Taylor
- Fie o funcție rațională de ordin (n, m) de forma

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n}{q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m}$$

- Dacă $q_0 \neq 0$, putem împărți cu el; wlog $q_0 = 1$; sunt $m + n + 1$ coeficienți independenți
- Se numește *aproximare Padé* a lui f de ordin (n, m) (de grad $N = n + m$) o funcție rațională R de ordin (n, m) care verifică

$$f^{(k)}(0) - R^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, \ldots, m + n \tag{10}$$

- Pentru $m = 0$ R este polinomul MacLaurin de grad n

Calculul aproximantei I

- Considerăm diferența

$$
\begin{aligned}
f(x) - R(x) = f(x) - \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{f(x)q(x) - p(x)}{q(x)} \\
&= \frac{f(x)\sum_{k=0}^{m} q_k x^k - \sum_{k=0}^{n} p_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} q_k x^k}
\end{aligned}
$$

- Considerăm dezvoltarea Mac Laurin a lui f, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ și o înlocuim în formula precedentă

$$
f(x) - R(x) = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} q_k x^k\right) - \sum_{k=0}^{n} p_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} q_k x^k}
$$

- $q_k =?$, $k = 1, \ldots, m$; $p_k =?$, $k = 0, \ldots, n$

Calculul aproximantei II

- (10)$\Longrightarrow$

$$\Delta = (c_0 + c_1 x + \cdots)(1 + q_1 x + \cdots + q_m x^m) - (p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n) \tag{11}$$

  nu are nici un termen de grad $< N$.
- Definim $p_{n+1} = p_{n+2} = \cdots = p_N = 0$ și $q_{m+1} = q_{m+2} = \cdots = q_N = 0$
- coeficientul lui x^k din (11) se scrie mai compact

$$\left(\sum_{i=0}^{k} c_i q_{k-i}\right) - p_k$$

- Pentru $k = 0, 1, \ldots, N$ el trebuie să fie nul; se obține sistemul

$$\sum_{i=0}^{k} c_i q_{k-i} = p_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N \tag{12}$$

  cu necunoscutele $p_0, \ldots, p_n$; $q_1, \ldots, q_m$

Rezolvarea sistemului în practică I

- Ultimele m ecuații ne dau, ținând cont că $q_0 = 1$ și $p_j = 0$,pentru $j > n$
$$\sum_{i=0}^{k-1} c_i q_{k-i} = -c_k, \qquad k = n+1, \ldots, n+m \tag{13}$$
- Odată determinați coeficienții $q_1, \ldots, q_m$ coeficienții p_k, $k = 0, \ldots, n$ se obțin cu
$$p_k = \sum_{i=0}^{k} c_i q_{k-i}$$

Rezolvarea sistemului în practică II

- Matricea A a sistemului (13) este matrice Toeplitz (diagonalele sunt constante)

$$
A = \begin{bmatrix}
c_n & c_{n-1} & \cdots & c_{n-(m-2)} & c_{n-(m-1)} \\
c_{n+1} & c_n & c_{n-1} & \cdots & c_{n-(m-2)} \\
c_{n+2} & c_{n+1} & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & c_n & c_{n-1} \\
c_{n+(m-1)} & \cdots & c_{n+2} & c_{n+1} & c_n
\end{bmatrix}
$$

Exemplu I

- Aproximarea Padé de ordin $(1,1)$ pentru $f(x) = e^x$;
- Avem $c_k = \frac{1}{k!}$; $N = 1 + 1 = 2$; forma aproximantei este

$$R = \frac{p_0 + p_1 x}{1 + q_1 x}$$

- Calculăm numărătorul lui $f - R$

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)(1 + q_1 x) - (p_0 + p_1 x)$$
$$= \frac{1}{2} q_1 x^3 + \left(q_1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + (q_1 - p_1 + 1) x + (1 - p_0)$$

Exemplu II

- Sistemul (12) devine

$$\begin{cases} 1 - p_0 = 0 \\ q_1 - p_1 + 1 = 0 \\ q_1 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

  Soluția $p_0 = 1$, $q_1 = -\frac{1}{2}$, $p_1 = \frac{1}{2}$.

- Am obținut aproximanta

$$R = \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x}$$

- Eroarea

$$e^x - \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x} = \frac{-\frac{1}{12}x^3 + \cdots}{1 - \frac{1}{2}x}$$

Avantaje

- În loc să utilizăm polinoame de grad mare, putem utiliza câturi de polinoame de grad mic;
- Poate aproxima funcții cu singularități;
- Dă adesea aproximări mai bune decât seriile Taylor trunchiate;
- Uneori funcționează chiar și atunci când seria Taylor nu converge!

Bibliografie I

- W. Cheney, David Kinkaid, *Numerical Mathematics and Computing*, 6th edition, Brooks/Cole, 2008
- J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.
- C. Ueberhuber, *Numerical Computation. Methods, Software and Analysis*, vol. I, II, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, 2nd ed., AMS 1982