Problema 1 *Se consideră polinoamele*

$$P_n^{(\lambda)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(1-t^2\right)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\left(1-t^2\right)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right].$$

(a) *Să se arate că sunt ortogonale pe $[-1,1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \left(1-t^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}$. (1p)*

(b) *Să se determine coeficienţii relaţiei de recurenţă α_k şi β_k. (1p)*

(c) *Să se implementeze în MATLAB o rutină pentru o cuadratură Gaussiană de forma*

$$\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k).$$

(1p)

(d) *Să se aproximeze $\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{1-t^2}\cos t\,\mathrm{d}t$ folosind rutina de la punctul (c) şi 5 noduri. (1p)*

(e) *Daţi o estimare a erorii de la punctul (d). (1p)*

Soluţie.

(a) Pornind de la formula lui Rodrigues pentru polinoame Jacobi

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\left(1-t^2\right)^n\right]$$

şi înlocuind α şi β cu $\lambda-\frac{1}{2}$ se obţine

$$P_n^{(\lambda)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(1-t^2\right)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\left(1-t^2\right)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right],$$

adică chiar formula din enunţ.

(b) Deoarece ponderea este pară şi intervalul simetric $\alpha_k = 0$. Pornind de la formulele coeficienţilor din relaţia de recurenţă pentru polinoame Jacobi

$$\beta_0^J = 2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$\beta_k^J = \frac{4k\,(k+\alpha)\,(k+\beta)\,(k+\alpha+\beta)}{(2k+\alpha+\beta)^2\,(2k+\alpha+\beta+1)\,(2k+\alpha+\beta-1)}$$

şi înlocuind α şi β cu $\lambda-\frac{1}{2}$ se obţine

$$\beta_0 = \frac{4^{\lambda}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(2\lambda)},$$

$$\beta_k = \frac{k\,(k+2\lambda-1)}{4\,(k+\lambda)\,(k+\lambda-1)}.$$

Forma lui β_0 nu este satisfăcătoare, îl calculăm direct

$$\beta_0 = \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda + 1\right)}.$$

(c) Cuadratura Gauss-Gegenbauer – coeficienții şi nodurile

```
function [g_nodes,g_coeffs] = Gauss_Gegenbauer(n,lambda)
%GAUSS-GEGENBAUER  Gauss_Gegenbauer quadrature
%weight w(t)=(1-t^2)^(lambda-1/2)
%   n - number of nodes
[g_nodes,g_coeffs] = Gauss_Jacobi(n,lambda-1/2,lambda-1/2);
end
```

(d) Aproximarea integralei

```
format long
[g_n,g_c]=Gauss_Jacobi(5,1/3,1/3);
vi=vquad(g_n,g_c,@cos)
```

```
vi =
   1.463076013607699
```

Direct cu Gegenbauer

```
lambda=5/6
```

```
lambda =
   0.833333333333333
```

```
[g_n2,g_c2]=Gauss_Gegenbauer(5,5/6);
vi2=vquad(g_n2,g_c2,@cos)
```

```
vi2 =
   1.463076013607698
```

(d) Restul

```
syms t
w=(1-t^2).^(sym(1)/sym(3));
pi5=jacobiP(5,1/3,1/3,t);
Rest=1/factorial(sym(10))*int(w*expand(pi5^2),t,-1,1)
```

```
Rest =
```

$$\frac{338\sqrt{3}\,\pi^{3/2}}{28985677875\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\,\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$$

```
ve=int(w*cos(t),t,-1,1)
```

```
ve =
```

$$\frac{2\,2^{5/6}\sqrt{3}\,\pi^{3/2}\,\mathrm{J}_{\frac{5}{6}}(1)}{9\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

```
abs(vi-double(ve))
```

```
ans =
     5.100369016020068e-10
```

```
restf=double(vpa(Rest))
```

```
restf =
     7.357837175301929e-08
```

■

Problema 2 *Uneori metoda lui Newton poate avea ordinul $p > 2$.*

(a) *Dăm o astfel de situaţie. Fie α un zero simplu al lui f şi $f \in C^p$ în vecinătatea lui α, unde $p \geq 3$. Arătaţi că: dacă $f^{(k)}(\alpha) = 0$, $k = 2, \ldots, p-1$ şi $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$, atunci metoda lui Newton aplicată lui $f(x) = 0$ converge local către α cu ordinul p. Determinaţi constanta de eroare asimptotică. (2p)*

(b) *Deduceţi o metodă pentru calculul lui $\sqrt[4]{a}$, aplicând rezultatul precedent funcţiei $f(x) = x^{4-\lambda} - ax^{-\lambda}$, pentru un λ convenabil.(1p)Cât este ordinul de convergenţă? (2p)*

Soluţie.

(a) Dezvoltăm f şi f' cu formula lui Taylor în iteraţia Newton. Scădem din ambii membri α şi ţinem cont că $f(\alpha)$=0. Din enunț rezultă că

$$f(x_n) = (x_n - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^p}{p!} f^{(p)}(\xi_1)$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(\xi_2)$$

Înlocuind în iterația Newton şi scăzând α din ambii membri se obține

$$\begin{aligned}
x_{n+1}-\alpha &= x_n-\alpha-\frac{(x_n-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}f^{(p)}(\xi_1)}{f'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(\xi_2)}\\
&= \frac{\dfrac{(x_n-\alpha)^p}{(p-1)!}f^{(p)}(\xi_2)-\dfrac{(x_n-\alpha)^p}{p!}f^{(p)}(\xi_1)}{f'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(\xi_2)}\\
&= \frac{(x_n-\alpha)^p}{(p-1)!}\frac{f^{(p)}(\xi_2)-\frac{f^{(p)}(\xi_1)}{p}}{f'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(\xi_2)}
\end{aligned}$$

Împărțim ecuația cu $(x_n-\alpha)^p$):

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}=\frac{1}{p(p-1)!}\frac{pf^{(p)}(\xi_2)-f^{(p)}(\xi_1)}{f'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(\xi_2)}$$

Am obţinut expresia lui

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}.$$

Trecem la limită pentru $x_n-\alpha\to 0$ şi ținem cont că $\xi_1,\xi_2\to\alpha$ şi $f\in C^p(V(\alpha))$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p} &= \lim_{x_n\to\alpha}\frac{1}{p(p-1)!}\frac{pf^{(p)}(\xi_2)-f^{(p)}(\xi_1)}{f'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(\xi_2)}\\
&= \frac{(p-1)f^{(p)}(\alpha)}{p(p-1)!f'(\alpha)}=\frac{f^{(p)}(\alpha)}{(p-2)!p\,f'(\alpha)}
\end{aligned}$$

Deci, ordinul de convergenţă este p, iar expresia din membrul drept este constanta de eroare asimptotică.

(b) Conform enunțului trebuie ca $f''(\alpha)=0$, unde $\alpha=a^{1/4}$.

```
syms x f(x) a lambda
f(x)=x^(4-lambda)-a*x^(-lambda);
D2=simplify(subs(diff(f(x),x,2),x,a^(1/4)));
lambda=solve(D2==0,lambda)
```

```
lambda =
```

$$\frac{3}{2}$$

Cu λ astfel obținut, f şi iterația Newton au forma:

```
f(x)=x^(4-lambda)-a*x^(-lambda)
```

f(x) =

$$x^{5/2} - \frac{a}{x^{3/2}}$$

```
phi=simplify(x-f(x)/diff(f(x),x))
```

phi =

$$\frac{5\,a\,x + 3\,x^5}{3\,a + 5\,x^4}$$

```
D3=simplify(subs(diff(f(x),x,3),x,a^(1/4)))
```

D3 =

$$\frac{15}{a^{1/8}}$$

Deoarece $f'''(\alpha) \neq 0$, conform enunțului ordinul este 3.

■