Chapitre 2: Interpolation polynomiale et approximation

Méthode d'interpolation de Lagrange

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $n+1$ points de coordonnées $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $x_i \neq x_j$, pour tout $0 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$.

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $n+1$ points de coordonnées $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $x_i \neq x_j$, pour tout $0 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$.

- Il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\}.$$

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $n+1$ points de coordonnées $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que $x_i \neq x_j$, pour tout $0 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$.

- Il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\}.$$

- Le polynôme P_n s'exprime comme suit:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $n+1$ points de coordonnées $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que $x_i \neq x_j$, pour tout $0 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$.

- Il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant
$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\}.$$
- Le polynôme P_n s'exprime comme suit:
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x), \quad x \in \mathbb{R}$$
où $L_i(x) = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.
- La famille de polynômes de Lagrange $\{L_0, L_1, \cdots, L_n\}$ associés aux points (x_i, y_i), $i \in \{0, \cdots, n\}$, est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice

Soit f une fonction qui vérifie le tableau suivant:

x_i	$x_0 = -1$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$f(x_i)$	$f(x_0) = 2$	$f(x_1) = 1$	$f(x_2) = -1$

1. Justifier l'existence d'un unique polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}_2[X]$ des points d'abscisses x_0, x_1 et x_2.
2. Déterminer la base de Lagrange pour l'interpolation des points d'abscisses x_0, x_1 et x_2.
3. Déterminer l'expression du polynôme P.
4. En déduire une approximation de $f(0.5)$.

Solution:

1. On a $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq x_2$ et $x_0 \neq x_2$, alors il existe un unique polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}_2[X]$ des points d'abscisses x_0, x_1 et x_2.

Solution:

1. On a $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq x_2$ et $x_0 \neq x_2$, alors il existe un unique polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}_2[X]$ des points d'abscisses x_0, x_1 et x_2.

2. Les éléments de la base de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés respectivement à x_0, x_1 et x_2 sont définies comme suit:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

Solution:

1. On a $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq x_2$ et $x_0 \neq x_2$, alors il existe un unique polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}_2[X]$ des points d'abscisses x_0, x_1 et x_2.

2. Les éléments de la base de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés respectivement à x_0, x_1 et x_2 sont définies comme suit:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2} \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} \end{aligned}$$

Solution:

1. On a $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq x_2$ et $x_0 \neq x_2$, alors il existe un unique polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}_2[X]$ des points d'abscisses x_0, x_1 et x_2.

2. Les éléments de la base de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés respectivement à x_0, x_1 et x_2 sont définies comme suit:

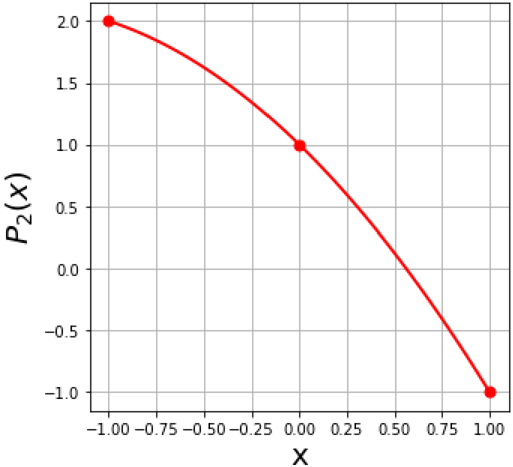
$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)x}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{(x+1)x}{2}.
\end{aligned}$$

3. **Le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points d'abscisses x_0,x_1 et x_2 est donné par:**

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\
&= \frac{x(x-1)}{2}f(x_0) + \frac{(x+1)(x-1)}{-1}f(x_1) + \frac{(x+1)x}{2}f(x_2) \\
&= 2\frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) - \frac{(x+1)x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1.
\end{aligned}$$

3. Le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points d'abscisses x_0,x_1 et x_2 est donné par:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\ &= \frac{x(x-1)}{2}f(x_0) + \frac{(x+1)(x-1)}{-1}f(x_1) + \frac{(x+1)x}{2}f(x_2) \\ &= 2\frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) - \frac{(x+1)x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1. \end{aligned}$$



3. D'après ce qui précède,

$$f(0.5) \approx P_2(0.5) = 0.125.$$

Exercice

Répondre aux questions de l'exemple introductif en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange.

Inconvénient majeur de la méthode d'interpolation de Lagrange

- Un inconvénient majeur de la méthode d'interpolation par les polynômes de Lagrange réside en l'ajout d'un point (x_{n+1}, y_{n+1}) à l'ensemble de n points d'interpolation. Dans ce cas, il n'est numériquement pas évident de déduire P_{n+1} de P_n. **Tous les calculs seront refaits de zéro**.

Inconvénient majeur de la méthode d'interpolation de Lagrange

- Un inconvénient majeur de la méthode d'interpolation par les polynômes de Lagrange réside en l'ajout d'un point (x_{n+1}, y_{n+1}) à l'ensemble de n points d'interpolation. Dans ce cas, il n'est numériquement pas évident de déduire P_{n+1} de P_n. **Tous les calculs seront refaits de zéro**.
- Pour combler cette lacune, on pourra appliquer la **méthode d'interpolation de Newton**.