

Комплексный анализ

Падерин А.Ю.

3 Модуль

Содержание

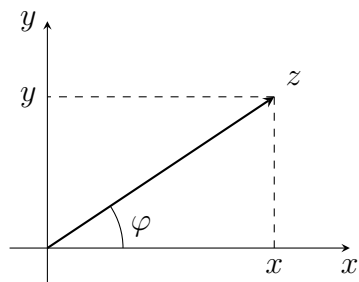
1. Лекция 1	3
1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость.	3
1.2. Операции над комплексными числами.	4
1.3. Расширенная комплексная плоскость.	5
2. Лекция 2	7
2.1. Примеры	7
2.2. Многочлены и формула Муавра.	8
3. Лекция 3	9
3.1. Кривые и множества.	9
3.2. Пределы последовательностей.	10
4. Лекция 4	12
4.1. Функции. Предел. Непрерывность.	12
4.2. Производная. Дифференцируемость. Условия Коши-Римана.	14
5. Лекция 5	16
5.1. Следствие:	16
5.2. Примеры	16
5.3. Условие Коши-Римана в полярной СК	18
5.4. Аналитические функции	18

1. Лекция 1

1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость.

Опр.

Комплексным числом называют выражение вида: $z = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и i — мнимая единица ($i^2 = -1$).



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \geq 0$$

$\arg z = \varphi$ — главное значение аргумента z , $\varphi \in (-\pi, \pi]$

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{Re} z = x$ — вещественная часть

$\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ — тригонометрическая форма записи

$z = re^{i\varphi}$ — показательная форма записи

Утв.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$e^s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!}, \quad \sin s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \cos s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \{k = 2m, k = 2m-1\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m}\varphi^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{2m-1}\varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\varphi^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2m-1}\varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

□

Следствие

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Доказательство.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1)$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \quad (2)$$

$$\frac{(1) + (2)}{2} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \frac{(1) - (2)}{2} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

□

1.2. Операции над комплексными числами.

$$1) \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$2) \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$3) \quad \bar{z} = x - iy$$

$$\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$$

$$4) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

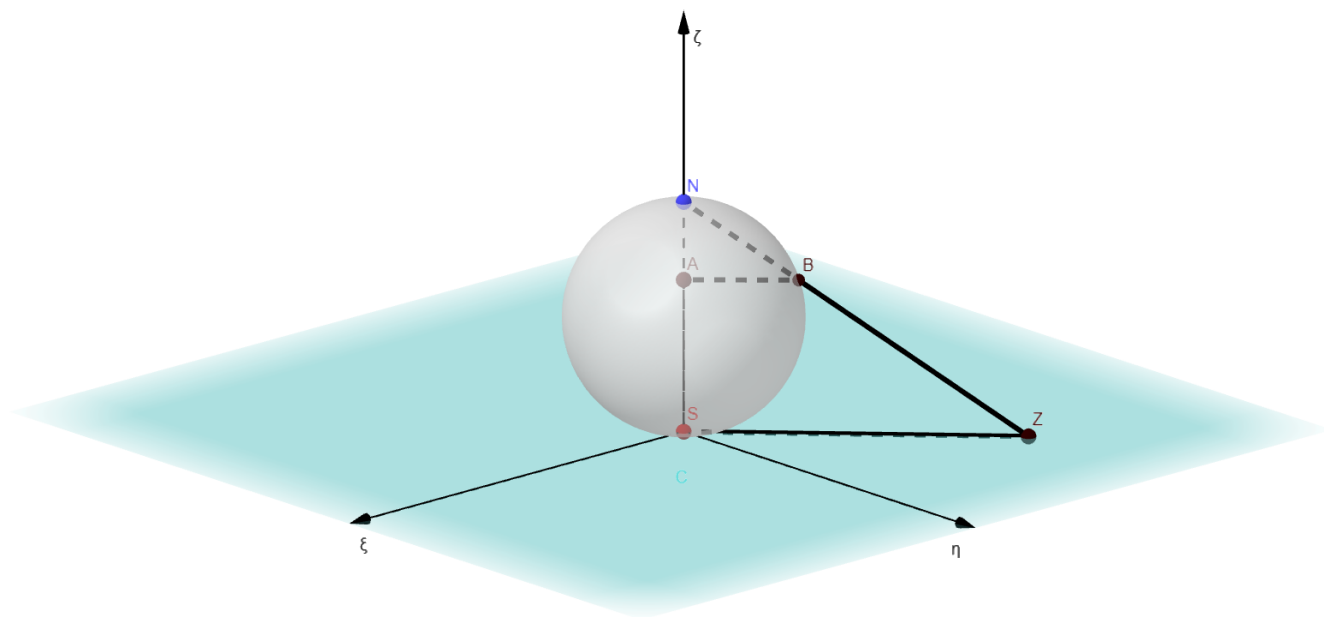
$$5) \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

1.3. Расширенная комплексная плоскость.

$\mathbb{C} = \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ — Поле комплексных чисел

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ — Расширенная комплексная плоскость

Рассмотрим сферу: $S = \{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$



Из подобия в треугольнике:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1-\zeta}{1} \Leftrightarrow \rho = r(1-\zeta), \quad SZ = r, \quad AB = \rho, \quad AS = \zeta, \quad NS = 1$$

$$\xi = \rho \cos \varphi = r(1-\zeta) \cos \varphi = (1-\zeta)x$$

$$\eta = \rho \sin \varphi = r(1-\zeta) \sin \varphi = (1-\zeta)y$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$(1-\zeta)^2 x^2 + (1-\zeta)^2 y^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (1-\zeta)^2 (x^2 + y^2) + (\zeta - 1)\zeta = 0$$

$$(1-\zeta) \left((1-\zeta)(x^2 + y^2) - \zeta \right) = 0$$

$$\begin{cases} \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \\ \xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \\ \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{x}{|z|^2 + 1} \\ v = \frac{y}{|z|^2 + 1} \\ w = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} \end{cases}$$

$$S \leftrightarrow \mathbb{C}$$

$\mathbb{C} \mapsto S$ — стереографическая проекция ($\infty \mapsto N$)

Утв.

\mathbb{C} — Метрическое пространство, где $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

Доказательство.

$$|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3| = |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2 + \tilde{z}_2 - \tilde{z}_3| \leq |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2| + |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3|$$

т.е. требуется доказать, что $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2})(r_1 e^{-i\varphi_1} + r_2 e^{-i\varphi_2}) = \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = r_1^2 + r_2^2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) r_1 r_2 = \\ &\leq r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 = (r_1 + r_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

□

2. Лекция 2

2.1. Примеры

$$\begin{aligned}
 1) \quad e^{\varphi_1 + \varphi_2} &= e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\
 &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\
 &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)
 \end{aligned}$$

$$2) \quad S_1 = 1 + \cos x + \dots + \cos nx$$

$$S_2 = \sin x + \dots + \sin nx$$

$$S_1 + iS_2 = 1 + (\cos x + i \sin x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) = 1 + e^{ix} + \dots + e^{inx} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1 - e^{i(n+1)x})}{(1 - e^{ix})} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)}{(e^{ix} - 1)} \cdot \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{-\frac{ix}{2}})}{(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}) \cdot \frac{2i}{2i}} =$$

$$= \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{-\frac{ix}{2}})}{2i \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}} e^{\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{inx}{2}}$$

$$S_1 = \operatorname{Re} S = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{nx}{2}, \quad x \neq 2\pi k$$

$$S_2 = \operatorname{Im} S = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}, \quad x \neq 2\pi k$$

$$3) \quad \text{Дана рекуррентная последовательность: } u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n), \quad u_0 = u_1 = 1$$

Найти общий член этой последовательности.

$$\text{Замена: } u_n = \lambda^n, \quad \lambda^{n+2} = 2\lambda^{n+1} - 2\lambda^n \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i. \quad \text{Далее, будем искать } u_n \text{ в виде:}$$

$u_n = C_1(1 + i)^n + C_2(1 - i)^n$. Найдём C_1 и C_2 используя начальные условия:

$$\begin{cases} u_0 = C_1 + C_2 = 1 \\ u_1 = C_1(1 + i) + C_2(1 - i) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_n = \frac{1}{2}((1 + i)^n + (1 - i)^n) = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}(e^{i\frac{\pi n}{4}} + e^{-i\frac{\pi n}{4}}) = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad f(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{A}{x - i} + \frac{B}{x + i} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x + i} - \frac{1}{x - i} \right) \\
f^{(k)}(x) &= \frac{i(-1)^k k!}{2} \left(\frac{1}{(x + i)^{k+1}} - \frac{1}{(x - i)^{k+1}} \right) = \frac{i(-1)^k k!}{2} \left(\frac{(x - i)^{k+1}}{(x^2 - 1)^{k+1}} - \frac{(x + i)^{k+1}}{(x^2 - 1)^{k+1}} \right) \\
(x - i)^{k+1} - (x + i)^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-i)^j x^{k+1-j} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^j x^{k+1-j} = \{k = 2m\} = \\
&= 2i \sum_{l=1}^{m+1} \binom{2m+1}{2l-1} (-1)^l x^{2m+1-2l+1} \\
f^{(2m)}(x) &= \frac{-(2m)!}{(x^2 + 1)^{2m+1}} \sum_{l=1}^{m+1} \binom{2m+1}{2l-1} (-1)^l x^{2(m-l+1)} \\
f^{(2m+1)}(x) &= \frac{(2m-1)!}{(x^2 + 1)^{2m}} \sum_{l=1}^m \binom{2m}{2l-1} (-1)^l x^{2(m-l)+1}
\end{aligned}$$

2.2. Многочлены и формула Муавра.

Утв. (Основная теорема алгебры)

Любой многочлен степени n над полем \mathbb{C} имеет n корней с учетом кратности.

Формула Муавра

Пусть $z = re^{i\varphi}$ и $A = |A|e^{i(\arg A + 2\pi k)}$, тогда

$$z_n = \sqrt[n]{|A|} e^{\frac{i(\arg A + 2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Корни такого многочлена располагаются в вершинах правильного n -угольника, с центром в начале координат, радиуса $\sqrt[n]{|A|}$.

Теорема (Фробениуса)

Несуществует других расширений систем и чисел, кроме \mathbb{R} и \mathbb{C} , так чтобы новая система образовывала поле. (Нестрогая формулировка)

3. Лекция 3

3.1. Кривые и множества.

Опр.

$$U_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon \}$$

$$\mathring{U}_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$$

$$U_\varepsilon(\infty) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon \}$$

$$\mathring{U}_\varepsilon(\infty) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \varepsilon < |z| < \infty \}$$

Опр.

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется

- 1) **Внутренней** точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\exists U_\varepsilon(z_0) \subset M$.
- 2) **Предельной** точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\forall \mathring{U}_\varepsilon(z_0) \subset M \Rightarrow \mathring{U}_\varepsilon(z_0) \cap M \neq \emptyset$.
- 3) **Граничной** точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\forall U_\varepsilon(z_0) \exists$ точки из M и не из M .

Опр.

Множество вида: $\gamma = \{ z \in \mathbb{C} : z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta] \}$ называют **кривой** на \mathbb{C}
 $z(\alpha)$ — начальная точка
 $z(\beta)$ — конечная точка
 $t \uparrow$ — ориентация

Опр.

Кривая γ называется

- 1) **Непрерывной**, если $x(t), y(t) \in C[\alpha, \beta]$
- 2) **Замкнутой**, если $z(\alpha) = z(\beta)$
- 3) **Гладкой**, если $x(t), y(t) \in C^1[\alpha, \beta]$ и $\forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow z'(t) \neq 0$

Опр.

Непрерывная кривая γ называется **простой** или **кривой Жордана**, если $z(t_1) = z(t_2)$ выполняется только для двух точек α, β .

Опр.

Кривая γ называется **кусочно-гладкой**, если $\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$, где N — конечное число гладких кривых.

Опр.

Множество $M \subset \mathbb{C}$ называют

- 1) **Открытым**, если $\forall z_0 \in M$ — внутренняя точка M .
- 2) **Связным**, если $\forall z_1, z_2 \in M \Rightarrow \exists$ Кривая Жордана $\gamma \subset M : z_1, z_2 \in \gamma$

Опр.

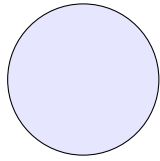
Область — открытое связное множество $D \subset \mathbb{C}$.

Опр.

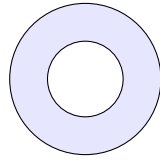
Область D **односвязная**, если ∂D — связное множество.

Опр.

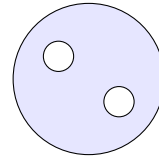
Область D **многосвязная**, если ∂D — не является связным множеством и $\partial D = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$, где $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ — связные кривые не имеющие общих точек.



Односвязная



Двусвязная



Трёхсвязная

3.2. Пределы последовательностей.

Опр.

Число z называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Опр.

Число ∞ называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n| > \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$

Теорема

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z, \text{ где } z = a + ib, z_n = x_n + iy_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Доказательство.

\Rightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - z| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

$$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$|y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

\Leftarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$, $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$:

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z|^2 = (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 < 2\varepsilon^2 \Leftrightarrow |z_n - z| < \sqrt{2}\varepsilon$$

□

Теорема (Арифметические св-ва пределов)

Пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, тогда

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + s_n) = z + s$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot s_n) = z \cdot s$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z_n}{s_n} \right) = \frac{z}{s}, \forall n \in \mathbb{N} \ s_n \neq 0, \ s \neq 0$

Теорема (Единственность)

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, тогда он единственный.

Опр.

$\{z_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subset \{z_n\}_{k=1}^{+\infty}$ — подпоследовательность последовательности z_n , где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

Опр.

Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если $\exists K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_n| \leq K$

Теорема (Больцано-Вейерштрасса)

Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Теорема (Критерий Коши)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Пример

$$z_n = \sqrt[n]{n} + i\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = 1 + ie^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{2}{n}} = e^2$$

Пример

$$z_n = \frac{\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt{n^2 + 2} - n} + i(-1)^n - \text{расходится, т.к. } (-1)^n \text{ расходится.}$$

4. Лекция 4

4.1. Функции. Предел. Непрерывность.

Опр.

Однозначная функция — отображение, ставящее в соответствие любому $z \in D$ единственное число $w \in \overline{\mathbb{C}}$. ($w = f(z)$, D_f — область определения $f(z)$)

Опр.

Многозначная функция — отображение, ставящее в соответствие любому $z \in D$ некоторое множество значений $E(z) \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Пример

$$f(z) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad D_f = \mathbb{C}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$e^z = e^{z+2\pi ik}, \quad T = 2\pi i$$

Функция однозначная

Пример

$$f(z) = \text{Ln } z, \quad z = re^{i(\varphi+2\pi k)} \in \mathbb{C}, \quad D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Функция многозначная

Пример

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad D_f \in \mathbb{C}$$

Пример

$$\text{Решить уравнение: } \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$$

Доказательство.

$$\text{Замена: } S = e^{iw}, \text{ тогда: } S + \frac{1}{S} - 2z = 0 \Leftrightarrow S^2 - 2zS + 1 = 0$$

$$S_{1,2} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\text{Обратная замена: } e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \Leftrightarrow iw = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$w = -i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$\text{Argcos } z = -i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ — многозначная функция. (Для корня берем два значения.)

Когда $\text{Argcos } z$ принимает вещественные значения?

$$\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| = 0 \Leftrightarrow |z + \sqrt{z^2 - 1}| = 1 \Leftrightarrow z + \sqrt{z^2 - 1} = e^{it}$$

$$z^2 + 1 = (e^{it} - z)^2 = e^{2it} - 2ze^{it} + z^2 \Leftrightarrow z = \frac{e^{2it} + 1}{2e^{it}} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$$

Ответ: $M = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 0, \text{ Re } z \in [-1, 1]\}$

□

Пример

$$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad D_f = \mathbb{C}$$

Функция однозначная

Пример

$$f(z) = z^{\frac{1}{n}}, \quad D_f = \mathbb{C}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i(\arg z + 2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Функция n - значная

Пример

$$f(z) = z^A = e^{A \operatorname{Ln} z}, \quad A \in \mathbb{C}, \quad D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Функция многозначная

Замечание:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi k), \quad \ln z = \ln |z| + i\varphi$$

Опр.

Пусть однозначная функция определена на области D , $z_0 \in D$, тогда число A называют пределом $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0) \cap D \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

Теорема (Арифметические свойства)

Пусть однозначная функции $f(z), g(z)$ определены на области D , $z_0 \in D$ и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, тогда

- 1) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B$
- 2) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = A \cdot B$
- 3) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$

Опр.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена на области D . Тогда $f(z)$ называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Функция $f(z)$ **непрерывна на D** , если $f(z)$ непрерывна в каждой точке $z_0 \in D$

Теорема

Пусть $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \in D_f$, $g(w)$ непрерывна в точке $w_0 \in D_g$ и $w_0 = f(z_0)$. Тогда $g(f(z))$ — непрерывна в точке z_0 .

4.2. Производная. Дифференцируемость. Условия Коши-Римана.

Опр.

Пусть функция $f(z)$ определена на области $D, z_0 \in D$. Тогда, если \exists конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, то его называют **производной функции $f(z)$ в точке z_0** .

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Опр.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена на области $D, z_0 \in D$. Тогда функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке z_0** , если

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + \alpha(z, \Delta z)\Delta z, \text{ где } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Теорема

Функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in D \Leftrightarrow f(z)$ имеет производную в z_0 .
При этом $A = f'(z)$, $df(z_0) = f'(z_0)dz$ — главная линейная часть (дифференциал).

Далее будем рассматривать функции вида:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \quad \operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

$$\Delta u(x_0, y_0) = u(x, y) - u(x_0, y_0), \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

$$\Delta u(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \beta(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \beta = 0.$$

Теорема

Пусть функция $f(z)$ определена на области D , $z_0 \in D$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке z_0 .
2. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \\ u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

Доказательство.

\Rightarrow

$f(z)$ — дифференцируема в точке z_0 , тогда

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha(z_0, \Delta z) = 0$$

$$f'(z_0) = a + ib, \quad \alpha = \beta + i\delta$$

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad \Delta f(z_0) = \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0)$$

Подставим в определение дифференцируемости:

$$\Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\beta + i\delta)(\Delta x + i\Delta y)$$

$$\begin{cases} \Delta u(x_0, y_0) = a\Delta x - b\Delta y + \beta\Delta x - \delta\Delta y \\ \Delta v(x_0, y_0) = a\Delta y + b\Delta x + \beta\Delta y + \delta\Delta x \end{cases} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \beta = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \delta = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u(x, y), v(x, y)$ — дифференцируемы в (x_0, y_0) и

$$\begin{cases} a = u'_x(x_0, y_0), \quad b = -u'_y(x_0, y_0) \\ a = v'_y(x_0, y_0), \quad b = v'_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

\Leftarrow

u, v — дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и удовлетворяют условию Коши-Римана

$$\Delta u(x_0, y_0) = a\Delta x - b\Delta y + \beta\rho$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = b\Delta x + a\Delta y + \delta\rho$$

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0) &= \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) = a(\Delta x + i\Delta y) + b(i\Delta x - \Delta y) + (\beta + i\delta)\rho = \\ &= (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\alpha(|\Delta z|)}{\Delta z}\Delta z = A\Delta z + \tilde{\alpha}\Delta z, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \tilde{\alpha} = 0 \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta z| \end{aligned}$$

□

5. Лекция 5

5.1. Следствие:

Теорема

Пусть функция $f(z)$ определена на области D , $z_0 \in D$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке z_0 .
2. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и удовлетворяют условиям Коши–Римана:

$$\begin{cases} u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \\ u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

Следствие

Формулы вычисления $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0)$$

$$f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0)$$

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0)$$

$$f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0)$$

5.2. Примеры

Пример Исследовать $f(z)$ на дифференцируемость на \mathbb{C} : $f(z) = z^2 - 2(\bar{z})^2$

Доказательство.

$$f(z) = (x + iy)^2 - 2(x - iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi - 2x^2 + 2y^2 + 4xyi = y^2 - x^2 + 6xyi$$

$$u(x, y) = y^2 - x^2, \quad v(x, y) = 6xy$$

u, v — дифференцируемые в \mathbb{R}^2

$$u'_x(x, y) = -2x, \quad u'_y(x, y) = 2y$$

$$v'_x(x, y) = 6y, \quad v'_y(x, y) = 6x$$

Решим уравнения, чтобы найти точки, где выполняется К-Р:

$$\begin{cases} u'_x(x, y) = v'_y(x, y) \implies -2x - 6x = 0 \implies x_0 = 0 \\ u'_y(x, y) = -v'_x(x, y) \implies 2y - 6y = 0 \implies y_0 = 0 \end{cases}$$

Тогда получаем, что $f(z)$ дифференцируема только в точке $z_0 = 0$ и ее производная равна:

$$f'(0) = u'_x(0, 0) + iv'_x(0, 0) = 0$$

□

Пример Показать, что в точке $z_0 = 0$ для $f(z) = \sqrt{|xy|}$ выполнены условия К-Р, но $f(z)$ не дифференцируема в этой точке:

Доказательство.

$$u = \sqrt{|xy|}, \quad v = 0$$

$$v'_x = 0, \quad v'_y = 0$$

$$u'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = 0$$

$$u'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y - 0} = 0$$

Покажем, что $u(x, y)$ не дифференцируема в $(0, 0)$:

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x, \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Вопрос в следующем, можем ли мы представить нашу функцию как:

$$\Delta u(0, 0) \stackrel{?}{=} u'_x(0, 0)\Delta x + u'_y(0, 0)\Delta y + \mu\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \text{ где } \mu \text{ — бесконечно малая}$$

$$\Delta u(0, 0) = \mu\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \mu = 0 \implies \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta u(0, 0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Нам нужно показать, что если такого предела не существует или он не равен 0.

Способ 1:

Рассмотрим этот предел вдоль прямой $y = kx$:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|kx^2|}}{\sqrt{(1 + k^2)x^2}} = \frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1 + k^2}} \implies \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Способ 2:

Перейдем в полярные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r\sqrt{|\sin \varphi \cos \varphi|}}{r} = \sqrt{|\sin \varphi \cos \varphi|} \implies \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

В итоге получили, что предела не существует.

$$\implies u(x, y) \text{ не дифференцируема в } (0, 0) \implies f(z) \text{ не дифференцируема в } z_0 = 0$$

□

5.3. Условие Коши-Римана в полярной СК

Пусть $\mathcal{U}(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

Пусть $\mathcal{V}(r, \varphi) = v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$f(z) = \mathcal{U}(r, \varphi) + i\mathcal{V}(r, \varphi)$$

Утв.

$$\begin{cases} \mathcal{U}'_r(r, \varphi) = \frac{1}{r}\mathcal{V}'_\varphi(r, \varphi) \\ \frac{1}{r}\mathcal{U}'_\varphi(r, \varphi) = -\mathcal{V}'_r(r, \varphi) \end{cases}$$

Доказательство.

$$\mathcal{U}'_r(r, \varphi) = u'_x x'_r + u'_y y'_r = u'_x \cos \varphi + u'_y \sin \varphi$$

$$\mathcal{U}'_\varphi(r, \varphi) = u'_x x'_\varphi + u'_y y'_\varphi = u'_x (-r \sin \varphi) + u'_y (r \cos \varphi)$$

$$\mathcal{V}'_r(r, \varphi) = v'_x x'_r + v'_y y'_r = v'_x \cos \varphi + v'_y \sin \varphi$$

$$\mathcal{V}'_\varphi(r, \varphi) = v'_x x'_\varphi + v'_y y'_\varphi = v'_x (-r \sin \varphi) + v'_y (r \cos \varphi)$$

$$\text{Зная что } \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \text{ получим } \implies r\mathcal{U}'_r = \mathcal{V}'_\varphi \text{ и } -r\mathcal{V}'_r = \mathcal{U}'_\varphi$$

□

5.4. Аналитические функции

В следующих определениях $f(z)$ — однозначная функция.

Опр.

Функция $f(z)$ называется **аналитической функцией** в z_0 , если $\exists \varepsilon > 0 : f(z)$ дифференцируема в $O_\varepsilon(z_0)$.

Опр.

Функция $f(z)$ называется **аналитической в области D** , если она аналитична в \forall точке области D .

Замечание: Обозначается $f(z) \in \mathcal{A}(z_0)$ и $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ соответственно.

Пример Выше доказали, что функция $f(z) = z^2 - 2(\bar{z})^2$ дифференцируема только в точке $z_0 = 0 \implies f(z) \notin \mathcal{A}(\mathbb{C})$

Пример Функция $f(z) = e^z \implies f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$

Пример Функция $f(z) = \frac{1}{z-1} \implies f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$