ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Московский институт электроники и математики имени А.Н. Тихонова

Департамент прикладной математики

NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

Конспект лекций по курсу

«Теория функций комплексного переменного»

Авторы конспекта:

Падерин Артемий

Кожевников Максим

Москва, 2025 год

Благодарности

Этот конспект создан на основе лекций по курсу «Теория функций комплексного переменного», читаемого в НИУ ВШЭ (МИЭМ) для студентов второго курса бакалавриата «Прикладная математика».

Мы выражаем искреннюю благодарность преподавателю курса, Беловой Марии Владимировне, за интересное и доступное изложение сложного материала.

Особую благодарность хотим выразить **Артемьеву Никите** за предоставленные письменные конспекты лекций, которые послужили основой для данного издания.

Надеемся, что этот конспект будет полезен не только нам, но и другим студентам, изучающим комплексный анализ.

Конспект оформлен в системе LaTeX с использованием пакетов для математической типографики. Все иллюстрации созданы с помощью TikZ.

Авторы:

Падерин Артемий

Кожевников Максим

Москва, 2026 год

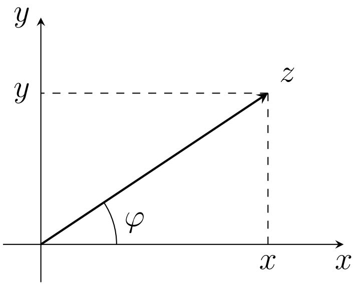
Содержание

1. Лекция 1

1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость.

Опр.

Комплексным числом *называют выражение вида:* $z = a + ib$, *где* $a, b \in \mathbb{R}$ *и* i *— мнимая единица* ($i^2 = -1$).



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},\ r \geqslant 0$
$\arg z = \varphi$ — главное значение аргумента z, $\varphi \in (-\pi, \pi]$
$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Re} z = x$ — вещественая часть
$\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма записи
$z = re^{i\varphi}$ — показательная форма записи

Утв.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \forall\varphi \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$e^s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!},\quad \sin s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!},\quad \cos s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \{k = 2m,\ k = 2m-1\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m}\varphi^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{2m-1}\varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\varphi^{2m}}{(2m)!} + i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2m-1}\varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

□

Следствие

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

Доказательство.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1}$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \tag{2}$$

$$\frac{(1)+(2)}{2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \frac{(1)-(2)}{2} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

□

1.2. Операции над комплексными числами.

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

   $z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2}$

3) $\bar{z} = x - iy$

   $\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2},\ z \neq 0$

   $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

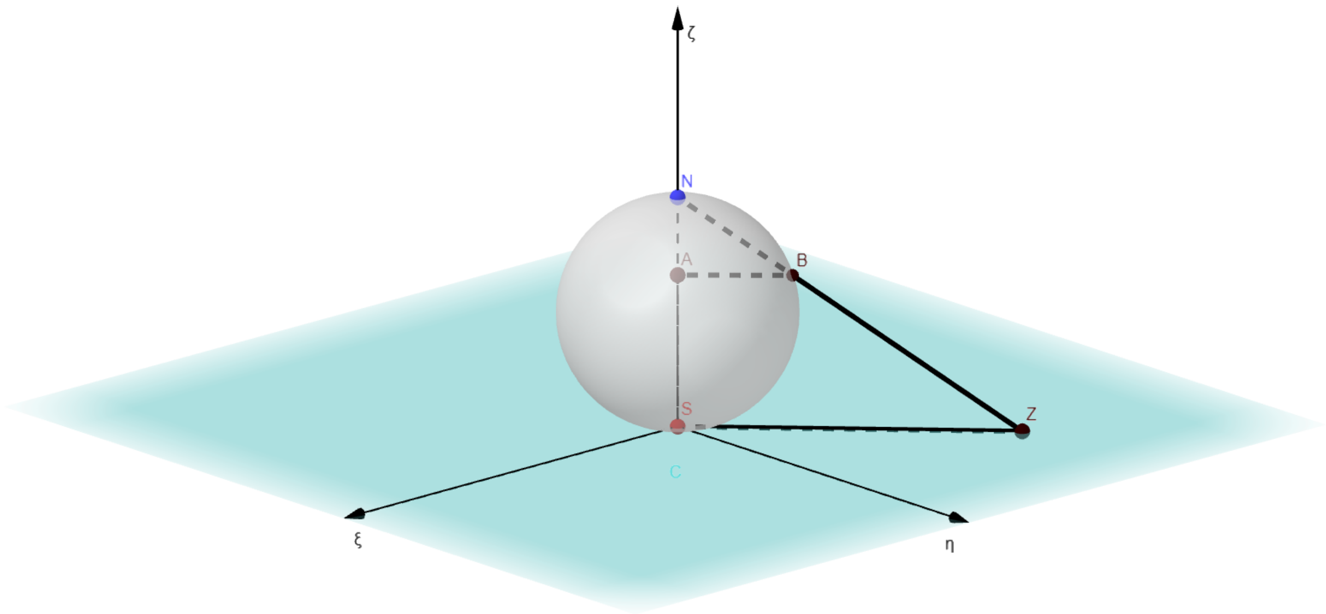
5) $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

1.3. Расширенная комплексная плоскость.

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\} \text{ — Поле комплексных чисел}$$

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty \text{ — Расширенная комплексная плоскость}$$

Рассмотрим сферу: $S = \{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$



Из подобия в треугольнике:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1-\zeta}{1} \iff \rho = r(1-\zeta),\ SZ = r,\ AB = \rho,\ AS = \zeta,\ NS = 1$$

$\xi = \rho\cos\varphi = r(1-\zeta)\cos\varphi = (1-\zeta)x$
$\eta = \rho\sin\varphi = r(1-\zeta)\sin\varphi = (1-\zeta)y$
Подставляем в исходное уравнение:

$$(1-\zeta)^2x^2 + (1-\zeta)^2y^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \iff (1-\zeta)^2(x^2+y^2) + (\zeta-1)\zeta = 0$$

$$(1-\zeta)\Big((1-\zeta)(x^2+y^2) - \zeta\Big) = 0$$

$$\begin{cases} \zeta &= \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \\ \xi &= \dfrac{x}{x^2+y^2+1} \\ \eta &= \dfrac{y}{x^2+y^2+1} \end{cases} \iff \begin{cases} u &= \dfrac{x}{|z|^2+1} \\ v &= \dfrac{y}{|z|^2+1} \\ w &= \dfrac{|z|^2}{|z|^2+1} \end{cases}$$

$S \leftrightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{C} \mapsto S$ — стереографическая проекция ($\infty \mapsto N$)

Утв.

$$\mathbb{C} - \textit{Метрическое пространство, где } \rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Доказательство.

$$|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3| = |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2 + \tilde{z}_2 - \tilde{z}_3| \leqslant |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2| + |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3|$$

т.е. требуется доказать, что $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} &= (r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2})(r_1 e^{-i\varphi_1} + r_2 e^{-i\varphi_2}) = \\
&= r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = r_1^2 + r_2^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) r_1 r_2 = \\
&\leqslant r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 = (r_1 + r_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

□

2. Лекция 2

2.1. Примеры

1) $e^{\varphi_1+\varphi_2} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2) =$

$$= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) =$$

$$= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

2) $S_1 = 1 + \cos x + \ldots + \cos nx$

$S_2 = \sin x + \ldots + \sin nx$

$S_1 + iS_2 = 1 + (\cos x + i\sin x) + \ldots + (\cos nx + i\sin nx) = 1 + e^{ix} + \ldots + e^{inx} =$

$$= \frac{1\cdot(1-e^{i(n+1)x})}{(1-e^{ix})} = \frac{(e^{i(n+1)x}-1)}{(e^{ix}-1)} \cdot \frac{e^{\frac{-ix}{2}}}{e^{\frac{-ix}{2}}} = \frac{(e^{i(n+1)x}-1)(e^{\frac{-ix}{2}})}{(e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}})\cdot\frac{2i}{2i}} =$$

$$= \frac{(e^{i(n+1)x}-1)(e^{\frac{-ix}{2}})}{2i\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}\frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{\frac{-i(n+1)x}{2}}}{2i} \cdot \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{-ix}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{inx}{2}}$$

$$S_1 = \operatorname{Re} S = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{nx}{2},\ x \neq 2\pi k$$

$$S_2 = \operatorname{Im} S = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{nx}{2},\ x \neq 2\pi k$$

3) Дана рекурентная последовательность: $u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n),\ u_0 = u_1 = 1$

Найти общий член этой последовательности.

Замена: $u_n = \lambda^n, \quad \lambda^{n+2} = 2\lambda^{n+1} - 2\lambda^n \iff \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$. Далее, будем искать u_n в виде:

$u_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Найдем C_1 и C_2 используя начальные условия:

$$\begin{cases} u_0 = C_1 + C_2 = 1 \\ u_1 = C_1(1+i) + C_2(1-i) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_n = \frac{1}{2}((1+i)^n + (1-i)^n) = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}(e^{i\frac{\pi n}{4}} + e^{-i\frac{\pi n}{4}}) = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{A}{x-i} + \dfrac{B}{x+i} = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{1}{x+i} - \dfrac{1}{x-i}\right)$

$$f^{(k)}(x) = \frac{i(-1)^k k!}{2}\left(\frac{1}{(x+i)^{k+1}} - \frac{1}{(x-i)^{k+1}}\right) = \frac{i(-1)^k k!}{2}\left(\frac{(x-i)^{k+1}}{(x^2-1)^{k+1}} - \frac{(x+i)^{k+1}}{(x^2-1)^{k+1}}\right)$$

$$(x-i)^{k+1} - (x+i)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}(-i)^j x^{k+1-j} - \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j} i^j x^{k+1-j} = \{k = 2m\} =$$

$$= 2i\sum_{l=1}^{m+1}\binom{2m+1}{2l-1}(-1)^l x^{2m+1-2l+1}$$

$$f^{(2m)}(x) = \frac{-(2m)!}{(x^2+1)^{2m+1}}\sum_{l=1}^{m+1}\binom{2m+1}{2l-1}(-1)^l x^{2(m-l+1)}$$

$$f^{(2m+1)}(x) = \frac{(2m-1)!}{(x^2+1)^{2m}}\sum_{l=1}^{m}\binom{2m}{2l-1}(-1)^l x^{2(m-l)+1}$$

2.2. Многочлены и формула Муавра.

Утв. *(Основная теорема алгебры)*

Любой многочлен степени n над полем $\mathbb{C}$ имеет n корней с учетом кратности.

Формула Муавра

Пусть $z = re^{i\varphi}$ и $A = |A|e^{i(\arg A + 2\pi k)}$, тогда
$z_n = \sqrt[n]{|A|}e^{\frac{i(\arg A+2\pi k)}{n}},\ k = 0,\ \ldots,\ n-1$
Корни такого многочлена распологаются в вершинах правильного n-угольника, с центром в начале координат, радиуса $\sqrt[n]{|A|}$.

Теорема *(Фробениуса)*

Несуществует других расширений систем и чисел, кроме $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, так чтобы новая система образовывала поле.(Нестрогая формулировка)

3. Лекция 3

3.1. Кривые и множества.

Опр.

$U_\varepsilon(z_0) = \{\ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\ \}$
$\mathring{U}_\varepsilon(z_0) = \{\ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\ \}$
$U_\varepsilon(\infty) = \{\ z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon\ \}$
$\mathring{U}_\varepsilon(\infty) = \{\ z \in \overline{\mathbb{C}} : \varepsilon < |z| < \infty\ \}$

Опр.

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется

*1) **Внутренней** точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\exists U_\varepsilon(z_0) \subset M$.*

*2) **Предельной** точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\forall \mathring{U}_\varepsilon(z_0) \subset M \ \Rightarrow\ \mathring{U}_\varepsilon(z_0) \cap M \neq \varnothing$.*

*3) **Граничной** точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\forall U_\varepsilon(z_0)\ \exists$ точки из M и не из M.*

Опр.

*Множество вида: $\gamma = \{\ z \in \mathbb{C} : z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [\alpha, \beta]\ \}$ называют **кривой** на $\mathbb{C}$*

$z(\alpha)$ — начальная точка

$z(\beta)$ — конечная точка

$t\uparrow$ — ориентация

Опр.

Кривая γ называется

*1) **Непрерывной**, если $x(t), y(t) \in C[\alpha, \beta]$*

*2) **Замкнутой**, если $z(\alpha) = z(\beta)$*

*3) **Гладкой**, если $x(t), y(t) \in C^1[\alpha, \beta]$ и $\forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow z'(t) \neq 0$*

Опр.

*Непрерывная кривая γ называется **простой** или **кривой Жордана**, если $z(t_1) = z(t_2)$ выполняется только для двух точек α, β.*

Опр.

*Кривая γ называется **кусочно-гладкой**, если $\gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \gamma_i$, где N — конечное число гладких кривых.*

Опр.

Множество $M \subset \mathbb{C}$ называют

*1) **Открытым**, если $\forall z_0 \in M$ — внутренняя точка M.*

*2) **Связным**, если $\forall z_1, z_2 \in M \Rightarrow \exists$ Кривая Жордана $\gamma \subset M : z_1, z_2 \in \gamma$*

Опр.

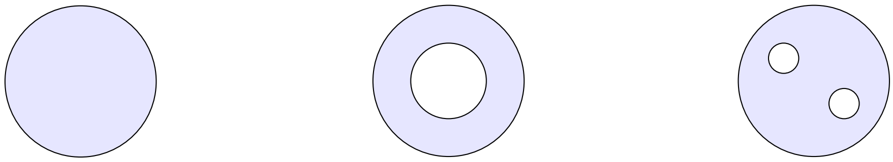
***Область** — открытое связное множество $D \subset \mathbb{C}$.*

Опр.

*Область D **односвязная**, если ∂D — связное множество.*

Опр.

*Область D **многосвязная**, если ∂D — не является связным множеством и $\partial D = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \gamma$, где $\gamma_1, \dots \gamma_N$ — связные кривые не имеющие общих точек.*



Односвязная Двусвязная Трёхсвязная

3.2. Пределы последовательностей.

Опр.

Число z называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Опр.

Число ∞ называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n| > \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} z_n = \infty$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z, \ \text{где } z = a + ib, \ z_n = x_n + iy_n \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - z| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$|y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon$

Фиксируем $\varepsilon > 0, \ N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), \ N_2(\varepsilon)\}$:

$$\forall n > N(\varepsilon) \ \Rightarrow |z_n - z|^2 = (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 < 2\varepsilon^2 \Leftrightarrow |z_n - z| < \sqrt{2}\varepsilon$$

□

Теорема *(Арифметические св-ва пределов)*

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s,$ *тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + s_n) = z + s$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot s_n) = z \cdot s$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{z_n}{s_n}\right) = \dfrac{z}{s},\ \forall n \in \mathbb{N}\ s_n \neq 0,\ s \neq 0$

Теорема *(Единственность)*

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z,$ *тогда он единственный.*

Опр.

$\{z_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subset \{z_n\}_{k=1}^{+\infty}$ — *подпоследоватедьность последовательности* z_n*, где* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$

Опр.

Последовательность $\{z_n\}$ *называется ограниченной, если* $\exists K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_n| \leqslant K$

Теорема *(Больцано-Вейерштрасса)*

Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Теорема *(Критерий Коши)*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Пример

$$z_n = \sqrt[n]{n} + i(1 + \frac{2}{n})^n = 1 + ie^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n})^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(1+\dfrac{2}{n})} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{2}{n}} = e^2$$

Пример

$$z_n = \frac{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2+5}}{\sqrt{n^2+2} - n} + i(-1)^n \text{ — \textit{расходится, т.к.} } (-1)^n \text{ \textit{расходится.}}$$

4. Лекция 4

4.1. Функции. Предел. Непрерывность.

Опр.

Однозначная функция *— отображение, ставящее в соответствие любому $z \in D$ единственное число $w \in \overline{\mathbb{C}}$. ($w = f(z), D_f$ — область определения f(z))*

Опр.

Многозначная функция *— отображение, ставящие в соответсвтие любому $z \in D$ некоторое множество значений $E(z) \subset \overline{\mathbb{C}}$.*

Пример

$$f(z) = e^z,\ z \in \mathbb{C},\ D_f = \mathbb{C}$$

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
$e^z = e^{z+2\pi ik},\ T = 2\pi i$
Функция однозначная

Пример

$$f(z) = \operatorname{Ln} z,\ z = re^{i(\varphi+2\pi k)} \in \mathbb{C},\ D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$
Функция многозначная

Пример

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-iz}}{2},\ \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-iz}}{2},\ D_f \in \mathbb{C}$$

Пример

$$\text{\textit{Решить уравнение:} } \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$$

Доказательство.

Замена: $S = e^{iw}$, тогда: $S + \dfrac{1}{S} - 2z = 0 \Leftrightarrow S^2 - 2zS + 1 = 0$
$S_{1,2} = z + \sqrt{z^2 - 1}$
Обратная замена: $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \Leftrightarrow iw = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
$w = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
$\operatorname{Argcos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$— многозначная функция.(Для корня берем два значения.)
Когда $\operatorname{Argcos} z$ принимает вещественные значения?
$\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}| = 0 \Leftrightarrow |z + \sqrt{z^2 + 1}| = 1 \Leftrightarrow z + \sqrt{z^2 + 1} = e^{it}$
$z^2 + 1 = (e^{it} - z)^2 = e^{2it} - 2ze^{it} + z^2 \Leftrightarrow z = \dfrac{e^{2it} + 1}{2e^{it}} = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$

Ответ: $M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} \in [-1, 1]\}$

□

Пример

$$f(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N},\ D_f = \mathbb{C}$$

Функция однозначная

Пример

$$f(z) = z^{\frac{1}{n}},\ D_f = \mathbb{C}$$

$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} = e^{\frac{i(\arg z + 2\pi k)}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$

Функция n - значная

Пример

$$f(z) = z^A = e^{A \operatorname{Ln} z},\ A \in \mathbb{C},\ D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Функция многозначная

Замечание:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k),\ \ln z = \ln|z| + i\varphi$$

Опр.

Пусть однозначная функция определена на области $D, z_0 \in D$, тогда число A называют пределом $f(z)$ при $z \to z_0$, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z \in \mathring{U}_\delta(z_0) \cap D \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \lim_{z \to z_0} z = A$$

Теорема *(Арифметические свойства)*

Пусть однозначная функции $f(z), g(z)$ определены на области $D,\ z_0 \in D$ и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A,\ \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$, тогда

1) $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B$
2) $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = A \cdot B$
3) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B},\ B \neq 0$

Опр.

*Пусть однозначная функция $f(z)$ определена на области D. Тогда $f(z)$ называется **непрерывной в точке** $z_0 \in D$, если*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

*Функция $f(z)$ **непрерывна на D** , если $f(z)$ непрерывна в каждой точке $z_0 \in D$*

Теорема

Пусть $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \in D_f,\ g(w)$ непрерывна в точке $w_0 \in D_f$ и $w_0 = f(z_0)$. Тогда $g(f(z))$ — непрерывна в точке z_0.

4.2. Производная. Дифференцируемость. Условия Коши-Римана.

Опр.

Пусть функция $f(z)$ определена на области $D, z_0 \in D$. Тогда, если $\exists$ конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумета, то его называют ***производной функции*** *$f(z)$ в точке z_0.*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Опр.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена на области $D,\ z_0 \in D$. Тогда функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** *z_0, если*

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + \alpha(z; \Delta z_0)\Delta z,\ \textit{где} \lim_{\Delta z \to 0} \alpha = 0.$$

Теорема

Функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in D \ \Leftrightarrow\ f(z)$ имеет производную в z_0. При этом $A = f'(z),\ df(z_0) = f'(z_0)dz$ — главная линейная часть (дифференциал).

Далее будем рассматривать функции вида:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ z = x + iy,\ \operatorname{Re} f(z) = u(x, y),\ \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

$$\Delta u(x_0, y_0) = u(x, y) - u(x_0, y_0),\ \Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0$$

$$\Delta u(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \beta(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},\ \lim_{\rho \to 0} \beta = 0.$$

Теорема

Пусть функция $f(z)$ определена на области D, $z_0 \in D$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *$f(z)$ дифференцируема в точке z_0.*

2. *Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и удовлетворяют условиям Коши–Римана:*
$$\begin{cases} u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \\ u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$

$f(z)$ — дифференцируема в точке z_0, тогда

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z, \ \lim_{\Delta z \to 0} \alpha(z_0, \Delta z) = 0$$

$$f'(z_0) = a + ib, \ \alpha = \beta + i\delta$$

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \ \Delta f(z_0) = \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0)$$

Подставим в определение дифференцируемости:

$$\Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\beta + i\delta)(\Delta x + i\Delta y)$$

$$\begin{cases} \Delta u(x_0, y_0) = a\Delta x - b\Delta y + \beta\Delta x - \delta\Delta y \\ \Delta v(x_0, y_0) = a\Delta y + b\Delta x + \beta\Delta y + \delta\Delta x \end{cases} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to 0} \beta = 0, \ \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to 0} \delta = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, y), \ v(x, y) \text{— дифференцируемы в } (x_0, y_0) \text{ и}$$
$$\begin{cases} a = u'_x(x_0, y_0), \ b = -u'_y(x_0, y_0) \\ a = v'_y(x_0, y_0), \ b = v'_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

u, v — дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и удовлетворяют условию Коши-Римана

$$\Delta u(x_0, y_0) = a\Delta x - b\Delta y + \beta\rho$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = b\Delta x + a\Delta y + \delta\rho$$

$$\Delta f(z_0) = \Delta u(x_0, y_0) + \Delta v(x_0, y_0) = a(\Delta x + i\Delta y) + b(i\Delta x - i\Delta y) + (\beta + i\delta)\rho =$$
$$= (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\alpha(|\Delta z|)}{\Delta z}\Delta z = A\Delta z + \tilde{\alpha}\Delta z, \lim_{\Delta z \to 0} \tilde{\alpha} = 0 \ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta z|$$

$\square$

5. Лекция 5

5.1. Следствие:

Теорема

Пусть функция $f(z)$ определена на области D, $z_0 \in D$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке z_0.*
2. *Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0,y_0) и удовлетворяют условиям Коши–Римана:*

$$\begin{cases} u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) \\ u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

Следствие

Формулы вычисления $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + iv'_x(x_0,y_0)$$

$$f'(z_0) = v'_y(x_0,y_0) + iv'_x(x_0,y_0)$$

$$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) - iu'_y(x_0,y_0)$$

$$f'(z_0) = v'_y(x_0,y_0) - iu'_y(x_0,y_0)$$

5.2. Примеры

Пример *Исследовать $f(z)$ на дифференцируемость на $\mathbb{C}$: $f(z) = z^2 - 2(\overline{z})^2$*

Доказательство.

$$f(z) = (x+iy)^2 - 2(x-iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi - 2x^2 + 2y^2 + 4xyi = y^2 - x^2 + 6xyi$$

$$u(x,y) = y^2 - x^2, \quad v(x,y) = 6xy$$

$$u, v - \text{ дифференцируемые в } \mathbb{R}^2$$

$$u'_x(x,y) = -2x, u'_y(x,y) = 2y$$

$$v'_x(x,y) = 6y, v'_y(x,y) = 6x$$

Решим уравнения, чтобы найти точки, где выполняется К-Р:

$$\begin{cases} u'_x(x,y) = v'_y(x,y) \implies -2x - 6x = 0 \implies x_0 = 0 \\ u'_y(x,y) = -v'_x(x,y) \implies -2x - 6x = 0 \implies y_0 = 0 \end{cases}$$

Тогда получаем, что $f(z)$ дифференцируема только в точке $z_0 = 0$ и ее производная равна:

$$f'(0) = u'_x(0,0) + iv'_x(0,0) = 0$$

□

Пример *Показать, что в точке $z_0 = 0$ для $f(z) = \sqrt{|xy|}$ выполнены условия К-Р, но $f(z)$ не дифференцируема в этой точке:*

Доказательство.

$$u = \sqrt{|xy|}, \quad v = 0$$

$$v'_x = 0, \quad v'_y = 0$$

$$u'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = 0$$

$$u'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = 0$$

Покажем, что $u(x,y)$ не дифференцируема в $(0,0)$:

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x, \quad (x_0, y_0) = (0,0)$$

Вопрос в следующем, можем ли мы представить нашу функцию как:

$$\Delta u(0,0) \overset{?}{=} u'_x(0,0)\Delta x + u'_y(0,0)\Delta y + \mu\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \text{ где } \mu \text{— бесконечно малая}$$

$$\Delta u(0,0) = \mu\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \mu = 0 \implies \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta u(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Нам нужно показать, что если такого предела не существует или он не равен 0.

Способ 1:

Рассмотрим этот предел вдоль прямой $y = kx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|kx^2|}}{\sqrt{(1+k^2)x^2}} = \frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}} \implies \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Способ 2:

Перейдем в полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r\sqrt{|\sin\varphi\cos\varphi|}}{r} = \sqrt{|\sin\varphi\cos\varphi|} \implies \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

В итоге получили, что предела не существует.

$$\implies u(x,y) \text{ не дифференцируема в } (0,0) \implies f(z) \text{ не дифференцируема в } z_0 = 0$$

□

5.3. Условие Коши-Римана в полярной СК

$$\text{Пусть } \mathcal{U}(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$\text{Пусть } \mathcal{V}(r,\varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$f(z) = \mathcal{U}(r,\varphi) + i\mathcal{V}(r,\varphi)$$

Утв.

$$\begin{cases} \mathcal{U}'_r(r,\varphi) = \frac{1}{r}\mathcal{V}'_\varphi(r,\varphi) \\ \frac{1}{r}\mathcal{U}'_\varphi(r,\varphi) = -\mathcal{V}'_r(r,\varphi) \end{cases}$$

Доказательство.

$$\mathcal{U}'_r(r,\varphi) = u'_x x'_r + u'_y y'_r = u'_x \cos\varphi + u'_y \sin\varphi$$

$$\mathcal{U}'_\varphi(r,\varphi) = u'_x x'_\varphi + u'_y y'_\varphi = u'_x(-r\sin\varphi) + u'_y(r\cos\varphi)$$

$$\mathcal{V}'_r(r,\varphi) = v'_m x'_r + u'_y y'_r = v'_x \cos\varphi + v'_y \sin\varphi$$

$$\mathcal{V}'_\varphi(r,\varphi) = v'_x x'_\varphi + v'_y y'_\varphi = v'_x(-r\sin\varphi) + v'_y(r\cos\varphi)$$

Зная что $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$ получим $\implies r\mathcal{U}'_r = \mathcal{V}'_\varphi$ и $-r\mathcal{V}'_r = \mathcal{U}'_\varphi$ □

5.4. Аналитические функции

В следующих определениях $f(z)$ — однозначная функция.

Опр.

*Функция $f(z)$ называется **аналитической функцией** в z_0, если $\exists \varepsilon > 0 : f(z)$ дифференцируема в $O_\varepsilon(z_0)$.*

Опр.

*Функция $f(z)$ называется **аналитической в области** D, если она аналитична в $\forall$ точке области D.*

Замечание: *Обозначается $f(z) \in \mathcal{A}(z_0)$ и $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ соответственно.*

Пример *Выше доказали, что функция $f(z) = z^2 - 2(\overline{z})^2$ дифференцируема только в точке $z_0 = 0 \implies f(z) \notin \mathcal{A}(\mathbb{C})$*

Пример *Функция $f(z) = e^z \implies f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$*

Пример *Функция $f(z) = \frac{1}{z-1} \implies f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$*

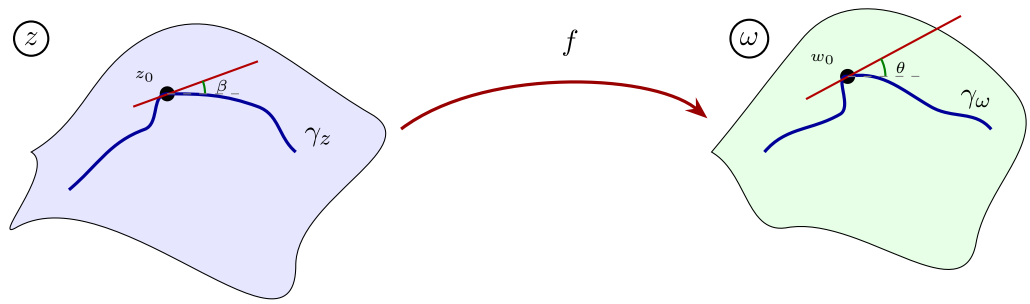
6. Лекция 6

6.1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Возьмем функцию $f(z) \in \mathcal{A}(D), z_0 \in D$, где $f'(z_0) \neq 0$, а так же рассмотрим гладкую кривую Жордана:

$$\gamma_z = \{z \in \mathbb{C} : z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$$

Построим отображение нашей кривой из плоскости z в плоскость ω:



Тогда точка $\omega_0 = f(z_0)$ и рассмотрим сложную функцию $\omega(t) = f(z(t))$. и найдем ее производную в точке t_0:

$$\omega'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$$

Откуда по свойству аргумента комплексного числа и $\begin{cases} \arg(\omega'(t_0)) = \theta \\ \arg(f'(t_0)) = \alpha \\ \arg(z'(t_0)) = \beta \end{cases}$ получаем, что:

$$\arg(\omega'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0)) \implies \theta = \alpha + \beta$$

Тогда $\alpha = \theta - \beta$ - угол поворота кривой в точке z_0

Утв. *Геометрический смысл аргумента производной*

Угол между жордановыми кривыми в точке z_0 равен углу между их образами в точке ω_0

Рассмотрим выражение $|\underbrace{f'(z_0)}_{K\neq 0}| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left|\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}\right|$, откуда следует его представление в виде:

$$|\Delta\omega| = K|\Delta z| + \overline{\overline{o}}(|\Delta t|)$$

Из этого следует, что бесконечно малые фигуры преобразуются в подобные им, при этом число K называется **коэффициентом подобия**.

Утв. *Геометрический смысл модуля производной*

При отображении кривых сохраняется коэффициент подобия: $|\Delta\omega| \approx k|\Delta z|$

6.2. Связанные теоремы

В последующих теоремах считаем $f(z)$ - однозначной функцией, D - область на которой она определена.

Теорема

Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D), \quad f(z) \not\equiv \text{const}, \quad t \in D$, *тогда* $D_\omega = f(D_z)$ *- область и любая кривая Жордана* $\gamma_z \in D_z \xrightarrow{f}$ *в кривую Жордана* $\gamma_\omega \in D_\omega$

Теорема

Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(O_\varepsilon(z))$ *и* $f(z_0) \neq 0$, *тогда* $\exists \delta > 0$ *в* $O_\delta(\omega_0), \omega_0 = f(z_0)$ *определена обратная для* $\psi(\omega) \in \mathcal{A}(O_\delta(\omega_0)) : \Longrightarrow \psi'(\omega_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$

Утв.

Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D_z) : f : D_z \longrightarrow D_\omega$ *гладкая кривая Жордана* $\gamma_z \in D_z \longrightarrow \gamma_\omega \in D_\omega$

$$\gamma_z = \{z \in \mathbb{C} : z = \varphi(t),\ \alpha \leq t \leq \beta\}$$

Предположим существование этих величин:

$$S_{D_\omega} = \iint\limits_{D_z} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \text{площадь}$$

$$L_{\gamma_\omega} = \int_\alpha^\beta |f'(\psi(t))| \cdot |\psi'(t)| \mathrm{d}t - \text{длина}$$

Доказательство.

$$1) \quad S_{D_\omega} = \iint\limits_{D_\omega} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \left|(u,v) \xrightarrow{\text{замена}} (x,y)\right| = \iint\limits_{D_z} |\mathcal{J}(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_z} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\det \mathcal{J}(x,y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = v_y u_x - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2 \implies S_{D_\omega} = \iint\limits_{D_z} |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$2) \quad L_{\gamma_z} = \int\limits_{\gamma_z} |\mathrm{d}\omega|; \quad \omega = f(\psi(t))$$

$$\mathrm{d}\omega = f'(\psi(t))\psi'(t)\mathrm{d}t \implies |\mathrm{d}\omega| = |f'(\psi(t))||\psi'(t)|\mathrm{d}t \implies L_{\gamma_\omega} = \int_\alpha^\beta |f'(\psi(t))| \cdot |\psi'(t)| \mathrm{d}t$$

□

6.3. Примеры

Пример *Пусть дана функция $f(z) = e^z$, дана область определения:*

$$D_z = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2,\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 4\}$$

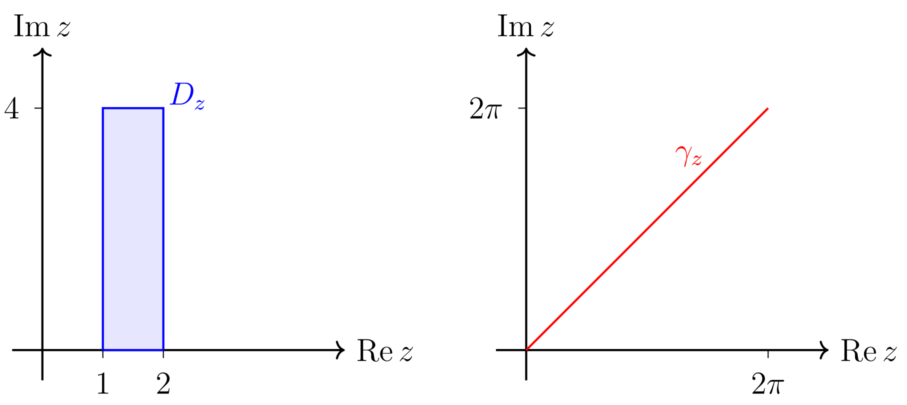
и кривая Жордана:

$$\gamma_z = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z,\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi\}$$

Найти площадь образа области и длину образа этой кривой.

Доказательство.

$$\text{Наше отображение переводит } f : \begin{cases} D_z \longrightarrow D_\omega \\ \gamma_z \longrightarrow \gamma_\omega \end{cases}$$



$$f(z) = e^z \implies f'(z) = e^z = e^{x+iy} \implies |f'(z)| = e^x$$

$$S_{D_\omega} = \iint\limits_{D_z} |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^4 \int_1^2 e^{2x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 \cdot \frac{e^{2x}}{2}\bigg|_1^2 = 2(e^4 - e^2)$$

Для поиска длины кривой параметризуем ее параметром x:

$$\text{Из рисунка } y = x \implies z = x + ix,\ 0 \leq x < 2\pi$$

$$|f'(z(x))| = e^x, \quad |z'(x)| = |1 + i| = \sqrt{2}$$

Тогда получаем, что:

$$L_{\gamma_\omega} = \int_0^{2\pi} |f'(\psi(x))| \cdot |\psi'(x)| \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} e^x \mathrm{d}x = \sqrt{2}\ e^x\big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$$

$\square$

7. Лекция 7

7.1. Гармонические функции

Опр.

*Вещественнозначная функция $u(x, y)$ называется **гармонической** в области D, если $u(x, y) \in C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$, где $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$, $(x, y) \in D$.*

Замечание: *Уравнение в частных производных вида $\Delta u = 0$ называется **уравнением Лапласа**.*

Теорема

Если $f(z) \in \mathcal{A}(D) \implies \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ — гармонические функции в D.

Доказательство. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

Из условий Коши-Римана: $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$.

Дифференцируем первое уравнение по x, второе по y:

$$u''_{xx} = v''_{yx}, \quad u''_{yy} = -v''_{xy}$$

Складывая и учитывая равенство смешанных производных $v''_{xy} = v''_{yx}$, получаем:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{yx} - v''_{xy} = 0$$

Аналогично для $v(x, y)$. □

Опр.

*Две гармонические в области D функции, связанные условием Коши-Римана называют **гармонически сопряженными функциями**.*

Замечание: *Вещественные и мнимые части аналитической функции являются гармонически сопряженными функциями.*

Есть некоторая гармоническая функция, как построить аналитическую функцию, для которой она ее вещественная или мнимая часть?

Теорема

Пусть $u(x, y)$ гармоническая в односвязной области D функция, тогда $\exists$ однозначная функция $f(z)$, такая что $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ и $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, причем $f(z)$ определяется с точностью до аддитивной мнимой постоянной.

Доказательство. Построим гармонически-сопряженную функцию. Введем обозначения $u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x$.

$$dv = v'_x dx + v'_y dy = -u'_y dx + u'_x dy$$

$$(*) \quad v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u'_y dx + u'_x dy + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Проверим независимость интеграла от пути. Пусть $P = -u'_y$, $Q = u'_x$. Условием является равенство перекрестных производных:

$$P_y = Q_x \implies -u''_{yy} = u''_{xx} \implies \Delta u = 0$$

Как видим, пришли к уравнению Лапласа, которое выполняется по условию.

Тогда аналитическая функция $f(z)$ запишется как:

$$f(z) = u + iv = u + i \cdot \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y dx + u'_x dy + ic, \quad c \in \mathbb{R}$$

Откуда видим, что наша функция определяется чисто мнимой постоянной. □

Замечание: *Если D - многосвязная область, то интеграл $(*)$ может быть многозначной функцией.*

7.2. Примеры

Напоминание:

$$u(x,y) \in C^2(D), \Delta u = 0 \text{ — гармоническая функция}$$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), f \in \mathcal{A}(D) \quad u, v \text{ — гармонически сопряженные функции}$$

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \qquad (x,y) \in D$$

Известно u. Требуется найти гармонически сопряженную функцию v.

$$\begin{cases} dv = v'_x dx + v'_y dy \\ dv = -u'_y dx + u'_x dy \end{cases} \implies v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (-u'_y dx + u'_x dy)$$

Пример *Пусть $u = e^{-y}\cos x$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ Найти $f(z)$, такое что $Ref = u$*

Доказательство.

$$u'_x = -e^{-y}\sin x$$

$$u'_y = -e^{-y}\cos x$$

$$\begin{cases} v'_x = -u'_y = e^{-y}\cos x \\ v'_y = u'_x = -e^{-y}\sin x \end{cases}$$

Найдем v из первого уравнения:

$$v = e^{-y}\int \cos x dx = e^{-y}(\sin x + A(y))$$

где $A(y)$ - произвольная функция от переменной y.

Тогда:

$$v = e^{-y}\sin x + B(y), \text{ где } B(y) = e^{-y}A(y)$$

Найдем производную по y:

$$v'_y = -e^{-y}\sin x + B'(y)$$

Подставляем во второе уравнение системы:

$$-e^{-y}\sin x + B'(y) = -e^{-y}\sin x \implies B'(y) = 0 \implies B(y) = c_0$$

Таким образом:

$$v = e^{-y}\sin x + c_0, c_0 \in \mathbb{R}$$

Имеем:

$$f(z) = e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x + ic_0$$

Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{-y}}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) + i \cdot \frac{e^{-y}}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) + ic_0 \\ &= \frac{e^{-y}}{2}(e^{ix} + e^{-ix} + e^{ix} - e^{-ix}) + ic_0 \\ &= e^{-y}e^{ix} + ic_0 = e^{ix-y} + ic_0 \\ &= e^{i(x+iy)} + ic_0 = e^{iz} + ic_0 \end{aligned}$$

Ответ: $f(z) = e^{iz} + ic_0, c_0 \in \mathbb{R}$ □

В общем случае не так легко получить результат, чтобы он зависел от z, а не от x и y. Для этого используем:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \overline{z} = x - iy \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{z+\overline{z}}{2} \\ y = \frac{z-\overline{z}}{2i} \end{cases}$$

Пример *Существуют ли гармонические функции вида $u(x,y) = \psi(\frac{y}{x})$? Если да, то найти их.*

$$\Delta u = 0 \implies u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$s = \frac{y}{x}, u = \psi(s) \implies u'_y = \psi'(s) \cdot s'_y = \psi'(s) \cdot \frac{1}{x} \implies u''_{yy} = \frac{1}{x} \cdot \psi''(s) \cdot s'_y = \frac{\psi''(s)}{x^2}$$

$$u''_{xx} = \psi''(s) \cdot (-\frac{y}{x^2})^2 + \frac{2y\psi'(s)}{x^3}$$

Далее подставляем эти формулы в уравнение (*):

$$\psi'' \cdot \frac{y^2}{x^4} + \frac{2y}{x^3}\psi' + \frac{\psi''}{x^2} = 0$$

$$\psi'' \cdot \frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}\psi' + \psi'' = 0$$

Получили линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$\psi''(s^2+1)+2s\psi'=0 - \text{ ОДУ}$$

Сделаем замену $\psi'(s)=h(s)$

$$h'(s^2+1)+2sh=0 \implies \frac{dh}{h}=-\frac{2s}{s^2+1}ds$$

$$\ln|h|=-\ln|s^2+1|+\ln c_1 \implies h=\frac{c_2}{s^2+1} \implies \psi'=\frac{c_2}{s^2+1}$$

Решаем ОДУ первого порядка:

$$\psi=c_2\int\frac{ds}{s^2+1} \implies \psi=\arctan s\cdot c_2+c_3$$

Ответ: $u(x,y)=c_2\cdot\arctan(\frac{y}{x})+c_3, \quad c_2,c_3\in\mathbb{R}$

Теорема

Пусть $f(z)\in\mathcal{A}(D)$ *и* $\forall z\in D \implies f'(z)\neq 0$. *Тогда* $\{u(x,y)=c_1\}\perp\{v(x,y)=c_2\}$, *где* $u=Ref, v=Imf$

Доказательство.

$$f(z)\in\mathcal{A}(D) \implies u,v - \text{гармонически сопряженные в D функции}$$

$$\implies u'_x=v'_y, \quad u'_y=-v'_x,(x,y)\in D$$

$$\{u=c_1\}\perp\{v=c_2\} \iff \nabla u\perp\nabla v$$

$$\nabla u=u'_x\overline{e}_x+u'_y\overline{e}_y$$

$$\nabla v=v'_x\overline{e}_x+v'_y\overline{e}_y$$

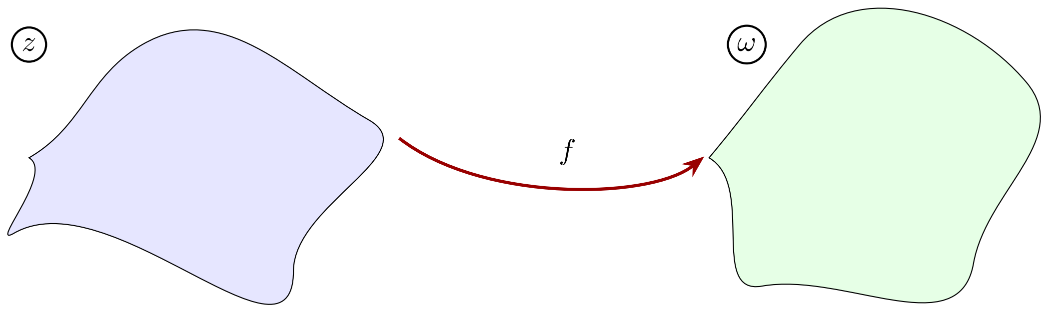
$$(\nabla u,\nabla v)=u'_xv'_x+u'_yv'_y=-u'_xu'_y+u'_yu'_x=0$$

□

Замечание: *Если* $\exists z_0\in D: f'(z_0)=0 \implies f'(z_0)=u'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0)=0$

$$\begin{cases}u'_x(x_0,y_0)=0\\ v'_x(x_0,y_0)=0\end{cases} \implies \begin{cases}v'_y(x_0,y_0)=0\\ u'_y(x_0,y_0)=0\end{cases} \implies \begin{cases}\nabla u(x_0,y_0)=\overline{0}\\ \nabla v(x_0,y_0)=\overline{0}\end{cases}$$

7.3. Конформные отображения



Классы задач:

I) Найти область D_ω куда после отображения отображение $f(z)$ области D_z Дано: $D_z, \omega = f(z)$

II) Найти такое отображение $\omega = f(z)$ Дано D_z, D_ω

Опр.

*Пусть функция $f(z)$ определена на области D_z. Тогда, если отображение $\omega = f(z)$ взаимно-однозначно на D_z, то это отображение называют **однолистным**. (Взаимно-однозначное) = (Однолистность)*

$$\omega = f(z)$$

$$D_z : z_1 \neq z_2 \iff D_\omega : \omega_1 \neq \omega_2$$

Опр.

*Пусть функция $f(z)$ определена на области D_z. Отображение $\omega = f(z)$ называют **конформным** на D_z, если:*

1. *это отображение однолистно и в обе стороны непрерывно на D (**гомеоморфизм**)*
2. *это отображение в каждой точке области D обладает свойством сохранения углов и постоянством коэффициента подобия.*

Теорема

Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D), z_0 \in D_z$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\exists\, \mathcal{U}_\varepsilon(z_0) \subset D_z$: отображение $\omega = f(z)$ конформно на $\mathcal{U}_\varepsilon(z_0)$.

Доказательство. Теорема об аналитичности обратной функции $\implies$ **1)**

Из геометрического смысла модуля и аргумента производной $\implies$ **2)** □

Теорема

Если функция $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ и положим отображение $\omega = f(z)$ однолистно на D_z. Тогда отображение $\omega = f(z)$ конформно на D_z.

Бесконечность:

1) $z_0 \xrightarrow{f} \infty \quad (\frac{1}{\omega} = \frac{1}{f(z)})$

Опр.

Будем говорить, что отображение $\omega = f(z)$ *конформно переводит* $\mathcal{U}_\varepsilon(z_0)$ *на* $\mathcal{U}_\delta(\infty)$, *если отображение* $\xi = \frac{1}{f(z)}$ *конформно переводит* $\mathcal{U}_\varepsilon(z_0)$ *на* $\mathcal{U}_\mu(0)$

2) $\infty \xrightarrow{f} \omega_0 \quad (\eta = \frac{1}{z})$

Опр.

Будем говорить, что отображение $\omega = f(z)$ *конформно переводит* $\mathcal{U}_\varepsilon(\infty)$ *на* $\mathcal{U}_\delta(\omega_0)$, *если отображение* $\omega = f(\frac{1}{z})$ *конформно переводит* $\mathcal{U}_r(0)$ *на* $\mathcal{U}_delta(\omega_0)$

3) $\infty \xrightarrow{f} \infty \quad (\eta = \frac{1}{z}, \xi = \frac{1}{\omega})$

Опр.

Будем говорить, что отображение $\omega = f(z)$ *конформно переводит* $\mathcal{U}_\varepsilon(\infty)$ *на* $\mathcal{U}_\delta(\infty)$, *если отображение* $\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ *конформно переводит* $\mathcal{U}_\mu(0)$ *на* $\mathcal{U}_\mathcal{M}(0)$