

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Московский институт электроники и математики имени А.Н.
Тихонова

Департамент прикладной математики



NATIONAL RESEARCH
UNIVERSITY

**Конспект лекций по курсу
«Теория функций комплексного переменного»**

Авторы конспекта:

Падерин Артемий

Кожевников Максим

Москва, 2025 год

Благодарности

Этот конспект создан на основе лекций по курсу «Теория функций комплексного переменного», читаемого в НИУ ВШЭ (МИЭМ) для студентов второго курса бакалавриата «Прикладная математика».

Мы выражаем искреннюю благодарность преподавателю курса, Беловой Марии Владимировне, за интересное и доступное изложение сложного материала.

Особую благодарность хотим выразить **Артемьеву Никите** за предоставленные письменные конспекты лекций, которые послужили основой для данного издания.

Надеемся, что этот конспект будет полезен не только нам, но и другим студентам, изучающим комплексный анализ.

Конспект оформлен в системе \LaTeX с использованием пакетов для математической типографики. Все иллюстрации созданы с помощью TikZ.

Авторы:

Падерин Артемий
Кожевников Максим

Москва, 2026 год

Содержание

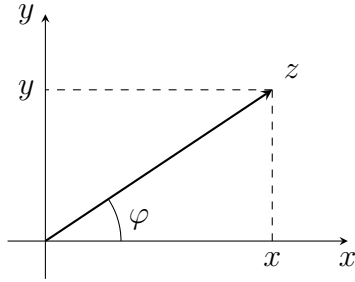
1. Лекция 1	3
1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость.	3
1.2. Операции над комплексными числами.	4
1.3. Расширенная комплексная плоскость.	5
2. Лекция 2	7
2.1. Примеры	7
2.2. Многочлены и формула Муавра.	8
3. Лекция 3	9
3.1. Кривые и множества.	9
3.2. Пределы последовательностей.	10
4. Лекция 4	12
4.1. Функции. Предел. Непрерывность.	12
4.2. Производная. Дифференцируемость. Условия Коши-Римана.	14
5. Лекция 5	16
5.1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной	16
5.2. Связанные теоремы	17
5.3. Примеры	18
6. Лекция 6	19
6.1. Гармонические функции	19

1. Лекция 1

1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость.

Опр.

Комплексным числом называют выражение вида: $z = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и i — мнимая единица ($i^2 = -1$).



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \geq 0$$

$\arg z = \varphi$ — главное значение аргумента z , $\varphi \in (-\pi, \pi]$

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{Re} z = x$ — вещественная часть

$\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ — тригонометрическая форма записи

$z = re^{i\varphi}$ — показательная форма записи

Утв.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$e^s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!}, \quad \sin s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \cos s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \{k = 2m, k = 2m-1\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m}\varphi^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{2m-1}\varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\varphi^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2m-1}\varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

□

Следствие

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Доказательство.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1)$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \quad (2)$$

$$\frac{(1) + (2)}{2} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \frac{(1) - (2)}{2} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

□

1.2. Операции над комплексными числами.

$$1) \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$2) \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$3) \quad \bar{z} = x - iy$$

$$\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$$

$$4) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

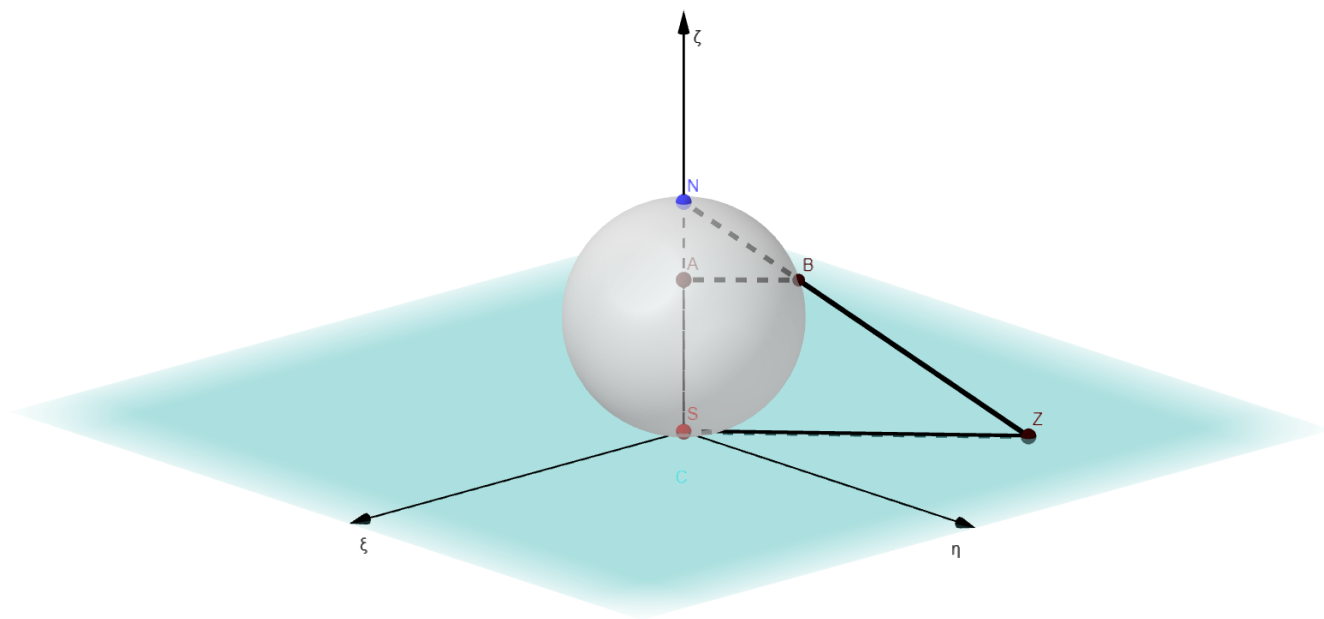
$$5) \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

1.3. Расширенная комплексная плоскость.

$\mathbb{C} = \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ — Поле комплексных чисел

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ — Расширенная комплексная плоскость

Рассмотрим сферу: $S = \{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$



Из подобия в треугольнике:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1-\zeta}{1} \Leftrightarrow \rho = r(1-\zeta), \quad SZ = r, \quad AB = \rho, \quad AS = \zeta, \quad NS = 1$$

$$\xi = \rho \cos \varphi = r(1-\zeta) \cos \varphi = (1-\zeta)x$$

$$\eta = \rho \sin \varphi = r(1-\zeta) \sin \varphi = (1-\zeta)y$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$(1-\zeta)^2 x^2 + (1-\zeta)^2 y^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (1-\zeta)^2(x^2 + y^2) + (\zeta - 1)\zeta = 0$$

$$(1-\zeta) \left((1-\zeta)(x^2 + y^2) - \zeta \right) = 0$$

$$\begin{cases} \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \\ \xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \\ \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{x}{|z|^2 + 1} \\ v = \frac{y}{|z|^2 + 1} \\ w = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} \end{cases}$$

$$S \leftrightarrow \mathbb{C}$$

$\mathbb{C} \mapsto S$ — стереографическая проекция ($\infty \mapsto N$)

Утв.

\mathbb{C} — Метрическое пространство, где $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

Доказательство.

$$|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3| = |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2 + \tilde{z}_2 - \tilde{z}_3| \leq |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2| + |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3|$$

т.е. требуется доказать, что $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2})(r_1 e^{-i\varphi_1} + r_2 e^{-i\varphi_2}) = \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = r_1^2 + r_2^2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) r_1 r_2 = \\ &\leq r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 = (r_1 + r_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

□

2. Лекция 2

2.1. Примеры

$$\begin{aligned}
 1) \quad e^{\varphi_1 + \varphi_2} &= e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\
 &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\
 &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)
 \end{aligned}$$

$$2) \quad S_1 = 1 + \cos x + \dots + \cos nx$$

$$S_2 = \sin x + \dots + \sin nx$$

$$S_1 + iS_2 = 1 + (\cos x + i \sin x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) = 1 + e^{ix} + \dots + e^{inx} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1 - e^{i(n+1)x})}{(1 - e^{ix})} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)}{(e^{ix} - 1)} \cdot \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{-\frac{ix}{2}})}{(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}) \cdot \frac{2i}{2i}} =$$

$$= \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{-\frac{ix}{2}})}{2i \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}} e^{\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}} 2i} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{inx}{2}}$$

$$S_1 = \operatorname{Re} S = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{nx}{2}, \quad x \neq 2\pi k$$

$$S_2 = \operatorname{Im} S = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}, \quad x \neq 2\pi k$$

$$3) \quad \text{Дана рекуррентная последовательность: } u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n), \quad u_0 = u_1 = 1$$

Найти общий член этой последовательности.

$$\text{Замена: } u_n = \lambda^n, \quad \lambda^{n+2} = 2\lambda^{n+1} - 2\lambda^n \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i. \quad \text{Далее, будем искать } u_n \text{ в виде:}$$

$$u_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n. \quad \text{Найдем } C_1 \text{ и } C_2 \text{ используя начальные условия:}$$

$$\begin{cases} u_0 = C_1 + C_2 = 1 \\ u_1 = C_1(1+i) + C_2(1-i) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_n = \frac{1}{2}((1+i)^n + (1-i)^n) = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}(e^{i\frac{\pi n}{4}} + e^{-i\frac{\pi n}{4}}) = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad f(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{A}{x - i} + \frac{B}{x + i} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x + i} - \frac{1}{x - i} \right) \\
f^{(k)}(x) &= \frac{i(-1)^k k!}{2} \left(\frac{1}{(x + i)^{k+1}} - \frac{1}{(x - i)^{k+1}} \right) = \frac{i(-1)^k k!}{2} \left(\frac{(x - i)^{k+1}}{(x^2 - 1)^{k+1}} - \frac{(x + i)^{k+1}}{(x^2 - 1)^{k+1}} \right) \\
(x - i)^{k+1} - (x + i)^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-i)^j x^{k+1-j} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^j x^{k+1-j} = \{k = 2m\} = \\
&= 2i \sum_{l=1}^{m+1} \binom{2m+1}{2l-1} (-1)^l x^{2m+1-2l+1} \\
f^{(2m)}(x) &= \frac{-(2m)!}{(x^2 + 1)^{2m+1}} \sum_{l=1}^{m+1} \binom{2m+1}{2l-1} (-1)^l x^{2(m-l+1)} \\
f^{(2m+1)}(x) &= \frac{(2m-1)!}{(x^2 + 1)^{2m}} \sum_{l=1}^m \binom{2m}{2l-1} (-1)^l x^{2(m-l)+1}
\end{aligned}$$

2.2. Многочлены и формула Муавра.

Утв. (Основная теорема алгебры)

Любой многочлен степени n над полем \mathbb{C} имеет n корней с учетом кратности.

Формула Муавра

Пусть $z = re^{i\varphi}$ и $A = |A|e^{i(\arg A + 2\pi k)}$, тогда

$$z_n = \sqrt[n]{|A|} e^{\frac{i(\arg A + 2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Корни такого многочлена располагаются в вершинах правильного n -угольника, с центром в начале координат, радиуса $\sqrt[n]{|A|}$.

Теорема (Фробениуса)

Несуществует других расширений систем и чисел, кроме \mathbb{R} и \mathbb{C} , так чтобы новая система образовывала поле. (Нестрогая формулировка)

3. Лекция 3

3.1. Кривые и множества.

Опр.

$$U_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon \}$$

$$\mathring{U}_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$$

$$U_\varepsilon(\infty) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon \}$$

$$\mathring{U}_\varepsilon(\infty) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \varepsilon < |z| < \infty \}$$

Опр.

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется

- 1) **Внутренней** точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\exists U_\varepsilon(z_0) \subset M$.
- 2) **Предельной** точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\forall \mathring{U}_\varepsilon(z_0) \subset M \Rightarrow \mathring{U}_\varepsilon(z_0) \cap M \neq \emptyset$.
- 3) **Граничной** точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\forall U_\varepsilon(z_0) \exists$ точки из M и не из M .

Опр.

Множество вида: $\gamma = \{ z \in \mathbb{C} : z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta] \}$ называют **кривой** на \mathbb{C}

$z(\alpha)$ — начальная точка

$z(\beta)$ — конечная точка

$t \uparrow$ — ориентация

Опр.

Кривая γ называется

- 1) **Непрерывной**, если $x(t), y(t) \in C[\alpha, \beta]$
- 2) **Замкнутой**, если $z(\alpha) = z(\beta)$
- 3) **Гладкой**, если $x(t), y(t) \in C^1[\alpha, \beta]$ и $\forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow z'(t) \neq 0$

Опр.

Непрерывная кривая γ называется **простой** или **кривой Жордана**, если $z(t_1) = z(t_2)$ выполняется только для двух точек α, β .

Опр.

Кривая γ называется **кусочно-гладкой**, если $\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$, где N — конечное число гладких кривых.

Опр.

Множество $M \subset \mathbb{C}$ называют

- 1) **Открытым**, если $\forall z_0 \in M$ — внутренняя точка M .
- 2) **Связным**, если $\forall z_1, z_2 \in M \Rightarrow \exists$ Кривая Жордана $\gamma \subset M : z_1, z_2 \in \gamma$

Опр.

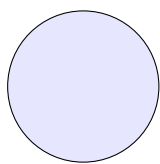
Область — открытое связное множество $D \subset \mathbb{C}$.

Опр.

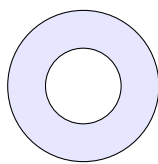
Область D **односвязная**, если ∂D — связное множество.

Опр.

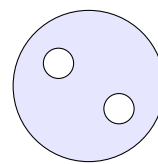
Область D **многосвязная**, если ∂D — не является связным множеством и $\partial D = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$, где $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ — связные кривые не имеющие общих точек.



Односвязная



Двусвязная



Трёхсвязная

3.2. Пределы последовательностей.

Опр.

Число z называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Опр.

Число ∞ называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n| > \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$

Теорема

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z, \text{ где } z = a + ib, z_n = x_n + iy_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Доказательство.

\Rightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - z| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

$$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$|y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

\Leftarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$, $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$:

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z|^2 = (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 < 2\varepsilon^2 \Leftrightarrow |z_n - z| < \sqrt{2}\varepsilon$$

□

Теорема (Арифметические св-ва пределов)

Пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, тогда

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + s_n) = z + s$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot s_n) = z \cdot s$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z_n}{s_n} \right) = \frac{z}{s}$, $\forall n \in \mathbb{N} \ s_n \neq 0, \ s \neq 0$

Теорема (Единственность)

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, тогда он единственный.

Опр.

$\{z_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subset \{z_n\}_{k=1}^{+\infty}$ — подпоследовательность последовательности z_n , где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

Опр.

Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если $\exists K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_n| \leq K$

Теорема (Больцано-Вейерштрасса)

Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Теорема (Критерий Коши)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Пример

$$z_n = \sqrt[n]{n} + i\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = 1 + ie^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{2}{n}} = e^2$$

Пример

$$z_n = \frac{\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt{n^2 + 2} - n} + i(-1)^n - \text{расходится, т.к. } (-1)^n \text{ расходится.}$$

4. Лекция 4

4.1. Функции. Предел. Непрерывность.

Опр.

Однозначная функция — отображение, ставящее в соответствие любому $z \in D$ единственное число $w \in \overline{\mathbb{C}}$. ($w = f(z)$, D_f — область определения $f(z)$)

Опр.

Многозначная функция — отображение, ставящее в соответствие любому $z \in D$ некоторое множество значений $E(z) \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Пример

$$f(z) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad D_f = \mathbb{C}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$e^z = e^{z+2\pi ik}, \quad T = 2\pi i$$

Функция однозначная

Пример

$$f(z) = \text{Ln } z, \quad z = re^{i(\varphi+2\pi k)} \in \mathbb{C}, \quad D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Функция многозначная

Пример

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad D_f \in \mathbb{C}$$

Пример

$$\text{Решить уравнение: } \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$$

Доказательство.

$$\text{Замена: } S = e^{iw}, \text{ тогда: } S + \frac{1}{S} - 2z = 0 \Leftrightarrow S^2 - 2zS + 1 = 0$$

$$S_{1,2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\text{Обратная замена: } e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \Leftrightarrow iw = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$w = -i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$\text{Argcos } z = -i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ — многозначная функция. (Для корня берем два значения.)

Когда $\text{Argcos } z$ принимает вещественные значения?

$$\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| = 0 \Leftrightarrow |z + \sqrt{z^2 - 1}| = 1 \Leftrightarrow z + \sqrt{z^2 - 1} = e^{it}$$

$$z^2 + 1 = (e^{it} - z)^2 = e^{2it} - 2ze^{it} + z^2 \Leftrightarrow z = \frac{e^{2it} + 1}{2e^{it}} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$$

Ответ: $M = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 0, \text{ Re } z \in [-1, 1]\}$

□

Пример

$$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad D_f = \mathbb{C}$$

Функция однозначная

Пример

$$f(z) = z^{\frac{1}{n}}, \quad D_f = \mathbb{C}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i(\arg z + 2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Функция n - значная

Пример

$$f(z) = z^A = e^{A \operatorname{Ln} z}, \quad A \in \mathbb{C}, \quad D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Функция многозначная

Замечание:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi k), \quad \ln z = \ln |z| + i\varphi$$

Опр.

Пусть однозначная функция определена на области D , $z_0 \in D$, тогда число A называют пределом $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0) \cap D \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

Теорема (Арифметические свойства)

Пусть однозначная функции $f(z), g(z)$ определены на области D , $z_0 \in D$ и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, тогда

- 1) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B$
- 2) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = A \cdot B$
- 3) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$

Опр.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена на области D . Тогда $f(z)$ называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Функция $f(z)$ **непрерывна на D** , если $f(z)$ непрерывна в каждой точке $z_0 \in D$

Теорема

Пусть $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \in D_f$, $g(w)$ непрерывна в точке $w_0 \in D_g$ и $w_0 = f(z_0)$. Тогда $g(f(z))$ — непрерывна в точке z_0 .

4.2. Производная. Дифференцируемость. Условия Коши-Римана.

Опр.

Пусть функция $f(z)$ определена на области $D, z_0 \in D$. Тогда, если \exists конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, то его называют **производной функции $f(z)$ в точке z_0** .

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Опр.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена на области $D, z_0 \in D$. Тогда функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке z_0** , если

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + \alpha(z, \Delta z)\Delta z, \text{ где } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Теорема

Функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in D \Leftrightarrow f(z)$ имеет производную в z_0 .
При этом $A = f'(z)$, $df(z_0) = f'(z_0)dz$ — главная линейная часть (дифференциал).

Далее будем рассматривать функции вида:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \quad \operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

$$\Delta u(x_0, y_0) = u(x, y) - u(x_0, y_0), \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

$$\Delta u(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \beta(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \beta = 0.$$

Теорема

Пусть функция $f(z)$ определена на области D , $z_0 \in D$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке z_0 .
2. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \\ u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

Доказательство.

\Rightarrow

$f(z)$ — дифференцируема в точке z_0 , тогда

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha(z_0, \Delta z) = 0$$

$$f'(z_0) = a + ib, \quad \alpha = \beta + i\delta$$

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad \Delta f(z_0) = \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0)$$

Подставим в определение дифференцируемости:

$$\Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\beta + i\delta)(\Delta x + i\Delta y)$$

$$\begin{cases} \Delta u(x_0, y_0) = a\Delta x - b\Delta y + \beta\Delta x - \delta\Delta y \\ \Delta v(x_0, y_0) = a\Delta y + b\Delta x + \beta\Delta y + \delta\Delta x \end{cases} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \beta = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \delta = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u(x, y), v(x, y)$ — дифференцируемы в (x_0, y_0) и

$$\begin{cases} a = u'_x(x_0, y_0), \quad b = -u'_y(x_0, y_0) \\ a = v'_y(x_0, y_0), \quad b = v'_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

\Leftarrow

u, v — дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и удовлетворяют условию Коши-Римана

$$\Delta u(x_0, y_0) = a\Delta x - b\Delta y + \beta\rho$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = b\Delta x + a\Delta y + \delta\rho$$

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0) &= \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) = a(\Delta x + i\Delta y) + b(i\Delta x - i\Delta y) + (\beta + i\delta)\rho = \\ &= (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\alpha(|\Delta z|)}{\Delta z}\Delta z = A\Delta z + \tilde{\alpha}\Delta z, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \tilde{\alpha} = 0 \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta z| \end{aligned}$$

□

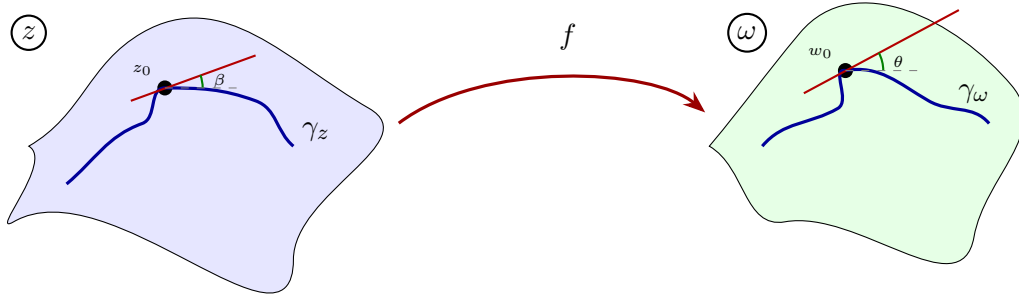
5. Лекция 5

5.1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Возьмем функцию $f(z) \in \mathcal{A}(D)$, $z_0 \in D$, где $f'(z_0) \neq 0$, а так же рассмотрим гладкую кривую Жордана:

$$\gamma_z = \{z \in \mathbb{C} : z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$$

Построим отображение нашей кривой из плоскости z в плоскость ω :



Тогда точка $\omega_0 = f(z_0)$ и рассмотрим сложную функцию $\omega(t) = f(z(t))$. и найдем ее производную в точке t_0 :

$$\omega'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$$

Откуда по свойству аргумента комплексного числа и
$$\begin{cases} \arg(\omega'(t_0)) = \theta \\ \arg(f'(z_0)) = \alpha \\ \arg(z'(t_0)) = \beta \end{cases} \quad \text{получаем, что:}$$

$$\arg(\omega'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0)) \implies \theta = \alpha + \beta$$

Тогда $\alpha = \theta - \beta$ - угол поворота кривой в точке z_0

Утв. Геометрический смысл аргумента производной

Угол между жордановыми кривыми в точке z_0 равен углу между их образами в точке ω_0

Рассмотрим выражение $\underbrace{|f'(z_0)|}_{K \neq 0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right|$, откуда следует его представление в виде:

$$|\Delta \omega| = K|\Delta z| + o(|\Delta t|)$$

Из этого следует, что бесконечно малые фигуры преобразуются в подобные им, при этом число K называется **коэффициентом подобия**.

Утв. Геометрический смысл модуля производной

При отображении кривых сохраняется коэффициент подобия: $|\Delta \omega| \approx k|\Delta z|$

5.2. Связанные теоремы

В последующих теоремах считаем $f(z)$ - однозначной функцией, D - область на которой она определена.

Теорема

Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \not\equiv \text{const}$, $t \in D$, тогда $D_\omega = f(D_z)$ - область и любая кривая Жордана $\gamma_z \in D_z \xrightarrow{f} \gamma_\omega \in D_\omega$

Теорема

Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(O_\varepsilon(z))$ и $f(z_0) \neq 0$, тогда $\exists \delta > 0$ в $O_\delta(\omega_0)$, $\omega_0 = f(z_0)$ определена обратная для $\psi(\omega) \in \mathcal{A}(O_\delta(\omega_0)) : \implies \psi'(\omega_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$

Утв.

Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D_z) : f : D_z \longrightarrow D_\omega$ гладкая кривая Жордана $\gamma_z \in D_z \longrightarrow \gamma_\omega \in D_\omega$

$$\gamma_z = \{z \in \mathbb{C} : z = \varphi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$$

Предположим существование этих величин:

$$S_{D_\omega} = \iint_{D_z} |f'(x)|^2 dx dy - \text{площадь}$$

$$L_{\gamma_\omega} = \int_\alpha^\beta |f'(\psi(t))| \cdot |\psi'(t)| dt - \text{длина}$$

Доказательство.

$$1) \quad S_{D_\omega} = \iint_{D_\omega} du dv = \left| (u, v) \xrightarrow{\text{замена}} (x, y) \right| = \iint_{D_z} |\mathcal{J}(x, y)| dx dy = \iint_{D_z} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} dx dy$$

$$\det \mathcal{J}(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = v_y u_x - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2 \implies S_{D_\omega} = \iint_{D_z} |f'(z)|^2 dx dy$$

$$2) \quad L_{\gamma_z} = \int_{\gamma_z} |d\omega|; \quad \omega = f(\psi(t))$$

$$d\omega = f'(\psi(t))\psi'(t)dt \implies |d\omega| = |f'(\psi(t))| |\psi'(t)| dt \implies L_{\gamma_\omega} = \int_\alpha^\beta |f'(\psi(t))| \cdot |\psi'(t)| dt$$

□

5.3. Примеры

Пример Пусть дана функция $f(z) = e^z$, дана область определения:

$$D_z = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 4\}$$

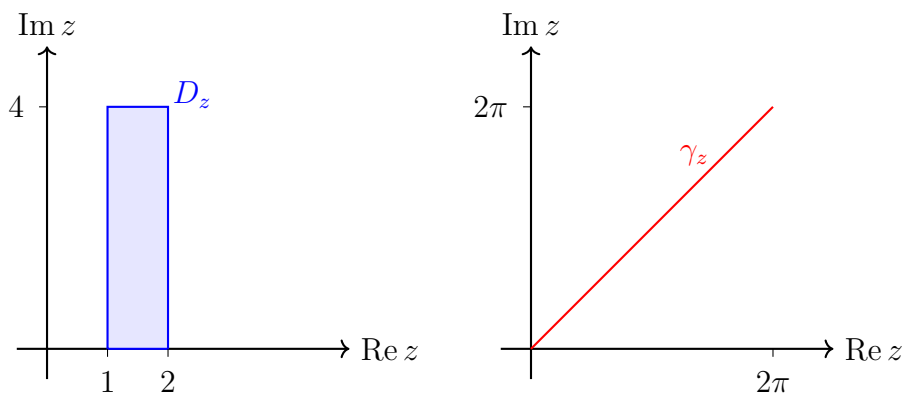
и кривая Жордана:

$$\gamma_z = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi\}$$

Найти площадь образа области и длину образа этой кривой.

Доказательство.

$$\text{Наше отображение переводит } f : \begin{cases} D_z \longrightarrow D_\omega \\ \gamma_z \longrightarrow \gamma_\omega \end{cases}$$



$$f(z) = e^z \implies f'(z) = e^z = e^{x+iy} \implies |f'(z)| = e^x$$

$$S_{D_\omega} = \iint_{D_z} |f'(z)|^2 dx dy = \int_0^4 \int_1^2 e^{2x} dx dy = 4 \cdot \left. \frac{e^{2x}}{2} \right|_1^2 = 2(e^4 - e^2)$$

Для поиска длины кривой параметризуем ее параметром x :

$$\text{Из рисунка } y = x \implies z = x + ix, 0 \leq x < 2\pi$$

$$|f'(z(x))| = e^x, \quad |z'(x)| = |1 + i| = \sqrt{2}$$

Тогда получаем, что:

$$L_{\gamma_\omega} = \int_0^{2\pi} |f'(\psi(x))| \cdot |\psi'(x)| dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} e^x dx = \sqrt{2} e^x \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$$

□

6. Лекция 6

6.1. Гармонические функции

Утв.

Вещественнозначная функция $u(x, y)$ называется **гармонической** в области D , если $u(x, y) \in C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, где $\Delta u = \nabla^2 u = u''_{xx} + u''_{yy}$, $(x, y) \in D$.

Замечание: Уравнение в частных производных вида $\Delta u = 0$ называется **уравнением Лапласа**.

Теорема

Если $f(z) \in \mathcal{A}(D) \implies \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ — гармонические в D .

Доказательство.

$$f(z) = \underbrace{u(x, y)}_{\operatorname{Re} f} + i \underbrace{v(x, y)}_{\operatorname{Im} f}$$

$$\forall (x, y) \in D \implies \begin{cases} u'_x = v'_y \mid \frac{\partial}{\partial x} \\ u'_y = -v'_x \mid \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \implies u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{yx} - v''_{xy} = 0$$

или тоже самое для функции $v(x, y)$:

$$\forall (x, y) \in D \implies \begin{cases} v'_y = u'_x \mid \frac{\partial}{\partial y} \\ v'_x = -u'_y \mid \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \implies v''_{yy} + v''_{xx} = u''_{xy} - u''_{yx} = 0$$

□

Утв.

Две гармонические в области D функции, связанные условием Коши-Римана называют **гармонически-сопряженными**.

Замечание: Вещественные и мнимые части аналитической функции являются гармонически сопряженными функциями.

Есть некоторая гармоническая функция, как построить аналитическую функцию, для которой она ее вещественная или мнимая часть? Ответом на данный вопрос служит теорема:

Теорема

Пусть $u(x, y)$ гармоническая в односвязной области D функция, тогда \exists однозначная функция $f(z)$, такая что $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ и $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, причем $f(z)$ определяется с точностью до аддитивной мнимой постоянной.

Доказательство. Построим гармонически-сопряженную функцию.

Введем обозначения $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$

$$dv = v'_x dx + v'_y dy$$

$$dv = \underbrace{-u'_y dx}_P + \underbrace{u'_x dy}_Q$$

$$(*) \quad v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u'_y dx + u'_x dy + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Мы должны проверить, что независимость интеграла от пути:

$$P = -u'_y, Q = u'_x$$

Условием является равенство перекрестных производных, то есть:

$$P_y = Q_x \implies -u''_{yy} = u''_{xx} \implies \Delta u = 0$$

Как видим, пришли к уравнению Лапласа. Тогда аналитическая функция $f(z)$ запишется как:

$$f(z) = u + iv = u + i \cdot \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u'_y dx + u'_x dy + ic, \quad c \in \mathbb{R}$$

Откуда видим, что наша функция определяется чисто мнимой постоянной. □

Замечание: Если D - многосвязная область, то интеграл $(*)$ может быть многозначной функцией.