

# Комплексный анализ

Падерин А.Ю.

3 Модуль

## Содержание

<b>1. Лекция 1</b>	3
1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость	3
1.2. Операции над комплексными числами	4
1.3. Расширенная комплексная плоскость	5
<b>2. Лекция 2</b>	7
2.1. Примеры	7
2.2. Многочлены и формулы муавра	8
<b>3. Лекция 3</b>	9
3.1. Кривые и множества	9

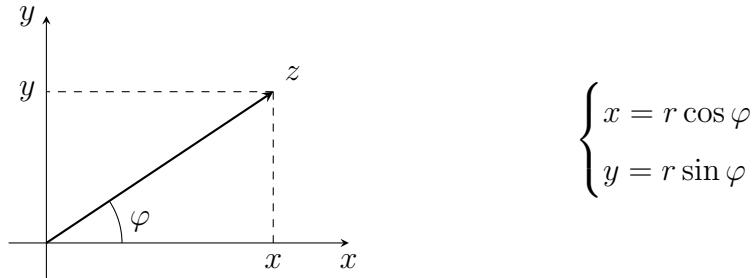
# 1. Лекция 1

## 1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость

Опр.

Комплексным числом называют выражение вида:

$$z = a + ib, \text{ где } a, b \in \mathbb{R} \text{ и } i - \text{мнимая единица} (i^2 = -1)$$



$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \geq 0$$

$\arg z = \varphi$  — главное значение аргумента  $z$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi]$

$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{Re} z = x$  — вещественная часть

$\operatorname{Im} z = y$  — мнимая часть

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  — тригонометрическая форма записи

$z = re^{i\varphi}$  — показательная форма записи

Утв.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$e^s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!}, \quad \sin s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \cos s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \{k = 2m, \quad k = 2m-1\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m} \varphi^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{2m-1} \varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \varphi^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2m-1} \varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

□

**Следствие**

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

*Доказательство.*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \tag{1}$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \tag{2}$$

$$\frac{(1) + (2)}{2} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \frac{(1) - (2)}{2} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

□

**1.2. Операции над комплексными числами**

$$1) z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$2) z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$3) \bar{z} = x - iy$$

$$\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$$

$$4) \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

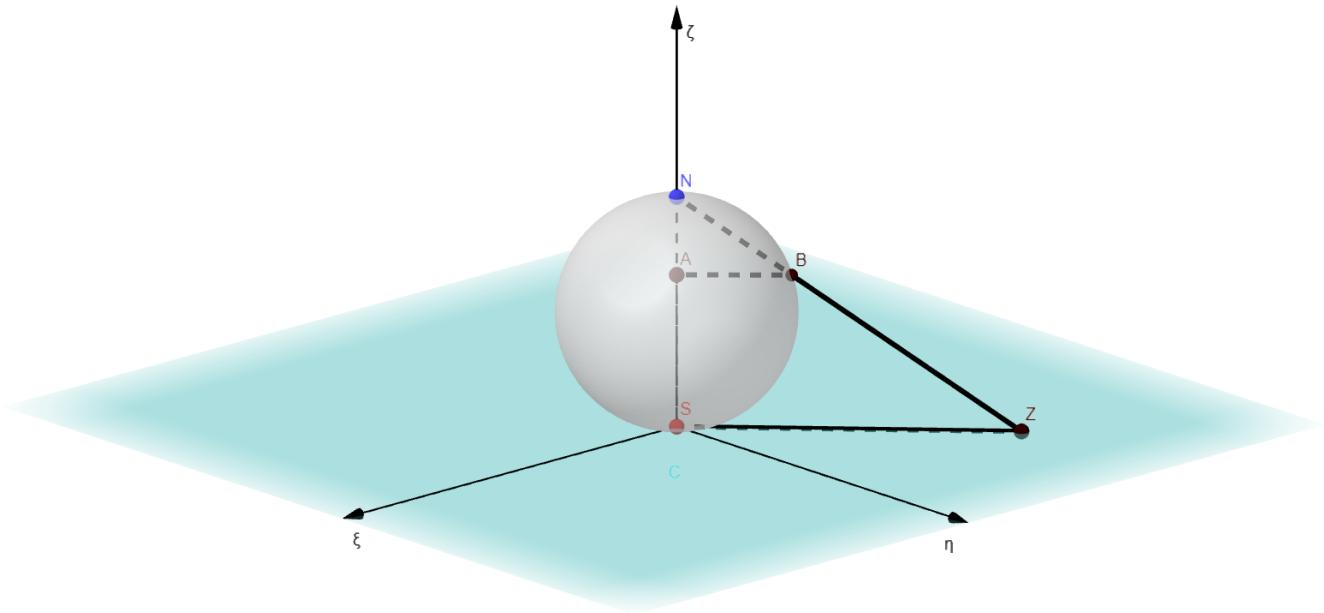
$$5) z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

### 1.3. Расширенная комплексная плоскость

$\mathbb{C} = \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$  — Поле комплексных чисел

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$  — Расширенная комплексная плоскость

Рассмотрим сферу:  $S = \{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$



Из подобия в треугольнике:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1 - \zeta}{1} \iff \rho = r(1 - \zeta), SZ = r, AB = \rho, AS = \zeta, NS = 1$$

$$\xi = \rho \cos \varphi = r(1 - \zeta) \cos \varphi = (1 - \zeta)x$$

$$\eta = \rho \sin \varphi = r(1 - \zeta) \sin \varphi = (1 - \zeta)y$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$(1 - \zeta)^2 x^2 + (1 - \zeta)^2 y^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \iff (1 - \zeta)^2(x^2 + y^2) + (\zeta - 1)\zeta = 0$$

$$(1 - \zeta) \left( (1 - \zeta)(x^2 + y^2) - \zeta \right) = 0$$

$$\begin{cases} \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \\ \xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \\ \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases} \iff \begin{cases} u = \frac{x}{|z|^2 + 1} \\ v = \frac{y}{|z|^2 + 1} \\ w = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} \end{cases}$$

$S \leftrightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{C} \mapsto S$  — стереографическая проекция ( $\infty \mapsto N$ )

**УТВ.**

$\mathbb{C}$  – Метрическое пространство, где  $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

*Доказательство.*

$$|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3| = |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2 + \tilde{z}_2 - \tilde{z}_3| \leq |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2| + |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3|$$

т.е. требуется доказать, что  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2})(r_1 e^{-i\varphi_1} + r_2 e^{-i\varphi_2}) = \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = r_1^2 + r_2^2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) r_1 r_2 = \\ &\leq r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 = (r_1 + r_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

□

## 2. Лекция 2

### 2.1. Примеры

$$\begin{aligned} 1) \quad e^{\varphi_1+\varphi_2} &= e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

2)  $S_1 = 1 + \cos x + \dots + \cos nx$

$$S_2 = \sin x + \dots + \sin nx$$

$$\begin{aligned} S_1 + iS_2 &= 1 + (\cos x + i \sin x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) = 1 + e^{ix} + \dots + e^{inx} = \\ &= \frac{1 \cdot (1 - e^{i(n+1)x})}{(1 - e^{ix})} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)}{(e^{ix} - 1)} \cdot \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{-\frac{ix}{2}})}{(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}) \cdot \frac{2i}{2i}} = \\ &= \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{-\frac{ix}{2}})}{2i \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}} \frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{2i} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{inx}{2}} \end{aligned}$$

$$S_1 = \operatorname{Re} S = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{nx}{2}, \quad x \neq 2\pi k$$

$$S_2 = \operatorname{Im} S = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}, \quad x \neq 2\pi k$$

3) Дана рекуррентная последовательность:  $u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n)$ ,  $u_0 = u_1 = 1$

Найти общий член этой последовательности.

Замена:  $u_n = \lambda^n$ ,  $\lambda^{n+2} = 2\lambda^{n+1} - 2\lambda^n \iff \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$ . Далее, будем искать  $u_n$  в виде:

$u_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$ . Найдем  $C_1$  и  $C_2$  используя начальные условия:

$$\begin{cases} u_0 = C_1 + C_2 = 1 \\ u_1 = C_1(1+i) + C_2(1-i) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_n = \frac{1}{2}((1+i)^n + (1-i)^n) = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}(e^{i\frac{\pi n}{4}} + e^{-i\frac{\pi n}{4}}) = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}$$

4)

## 2.2. Многочлены и формулы муавра

**Утв.** *Основная теорема алгебры*

$\forall P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0, c_i \in \mathbb{C}, c_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ , имеет  $n$  корней с учетом кратности

**Формула Муавра**

Пусть  $z = re^{i\varphi}$  и  $A = |A|e^{i(\arg A + 2\pi k)}$ , тогда  
 $z_n = \sqrt[n]{|A|} e^{\frac{i(\arg A + 2\pi k)}{n}}, k = 0, \dots, n - 1$

Корни такого многочлена располагаются в вершинах правильного  $n$ -угольника, с центром в начале координат, радиуса  $\sqrt[n]{|A|}$

**Теорема (Фробениуса)**

*Несуществует других расширений систем и чисел, кроме  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ , так чтобы новая система образовывала поле. (Нестрогая формулировка)*

### 3. Лекция 3

#### 3.1. Кривые и множества

Опр.

Точка  $z_0 \in \mathbb{C}$  называется

- 1) *Внутренней* точкой множества  $M \subset \mathbb{C}$ , если  $\exists U_\varepsilon(z_0) \subset M$ .
- 2) *Пределной* точкой множества  $M \subset \mathbb{C}$ , если  $\forall \dot{U}_\varepsilon(z_0) \subset M \Rightarrow \dot{U}_\varepsilon(z_0) \cap M \neq \emptyset$ .
- 3) *Границей* точкой множества  $M \subset \mathbb{C}$ , если  $\forall U_\varepsilon(z_0) \exists$  точки, как из  $M$ , так и не из  $M$ .

$$U_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon \}$$

$$\dot{U}_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$$

$$U_\varepsilon(\infty) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon \}$$

$$\dot{U}_\varepsilon(\infty) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \varepsilon < |z| < \infty \}$$

Опр.

Множество вида:  $\gamma = \{ z \in \mathbb{C} : z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta] \}$  называют **кривой** на  $\mathbb{C}$

$z(\alpha)$  — начальная точка

$z(\beta)$  — конечная точка

$t \uparrow$  — ориентация

Опр.

Кривая  $\gamma$  называется

- 1) *Непрерывной*, если  $x(t), y(t) \in C[\alpha, \beta]$
- 2) *Замкнутой*, если  $z(\alpha) = z(\beta)$
- 3) *Гладкой*, если  $x(t), y(t) \in C^1[\alpha, \beta]$  и  $\forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow z'(t) \neq 0$

Опр.

Непрерывная кривая  $\gamma$  называется **простой** или **кривой Жордана**, если  $z(t_1) = z(t_2)$  выполняется только для двух точек  $\alpha, \beta$ .

Опр.

Кривая  $\gamma$  называется **кусочно-гладкой**, если  $\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$ , где  $N$  — конечное число гладких кривых.

Опр.

Множество  $M \subset \mathbb{C}$  называют

- 1) *Открытым*, если  $\forall z_0 \in M$  — внутренняя точка  $M$ .
- 2) *Связным*, если  $\forall z_1, z_2 \in M \Rightarrow \exists$  Кривая Жордана  $\gamma \subset M : z_1, z_2 \in \gamma$

Опр.

*Область* — открытое связное множество  $D \subset \mathbb{C}$

Опр.

*Область* — открытое связное множество  $D \subset \mathbb{C}$  26