Комплексный анализ

Падерин А.Ю.

3 Модуль

Содержание

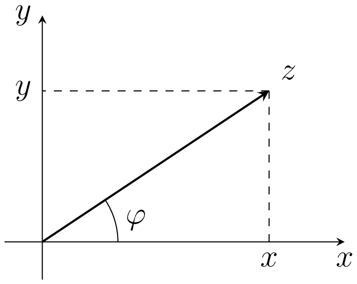
1. Лекция 1

1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость

Опр.

Комплексным числом называют выражение вида:

$$z = a + ib,\ \textit{где } a, b \in \mathbb{R} \textit{ и } i \textit{ — мнимая единица } (i^2 = -1)$$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},\ r \geqslant 0$
$\arg z = \varphi$ — главное значение аргумента z, $\varphi \in (-\pi, \pi]$
$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Re} z = x$ — вещественная часть
$\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма записи
$z = re^{i\varphi}$ — показательная форма записи

Утв.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \forall\varphi \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$e^s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!},\quad \sin s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!},\quad \cos s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \{k = 2m,\ k = 2m-1\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m}\varphi^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{2m-1}\varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\varphi^{2m}}{(2m)!} + i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2m-1}\varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

□

Следствие

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

Доказательство.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1}$$
$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \tag{2}$$

$$\frac{(1)+(2)}{2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \frac{(1)-(2)}{2} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

□

1.2. Операции над комплексными числами

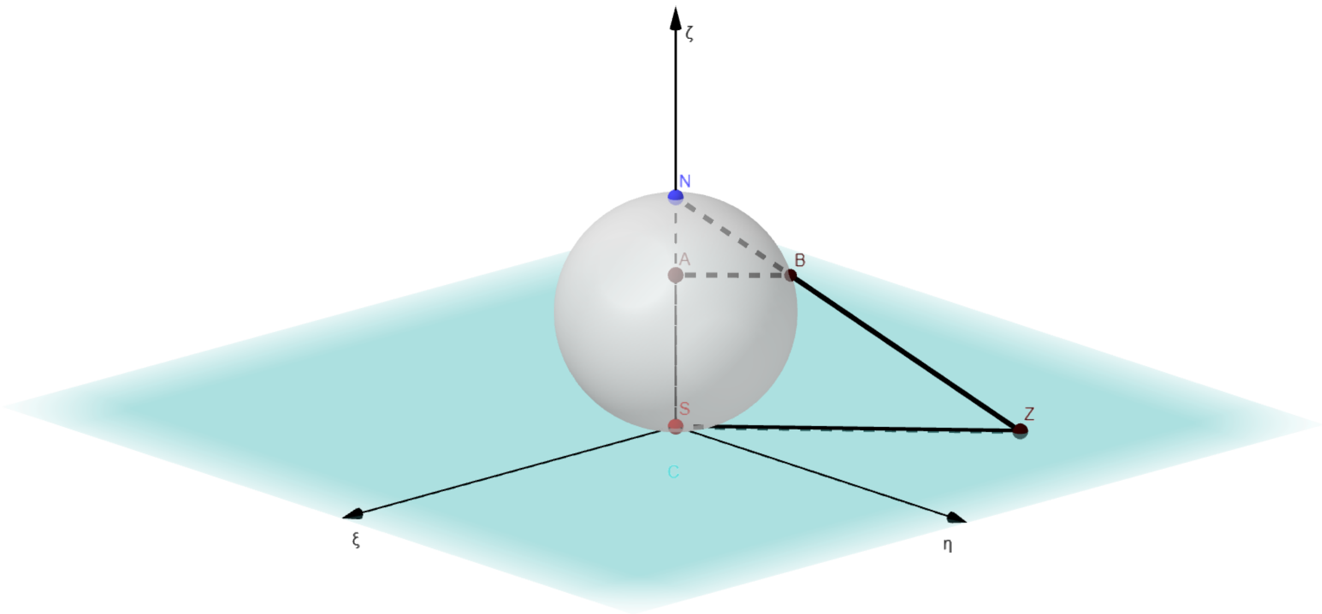
1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
   $z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2}$
3) $\bar{z} = x - iy$
   $\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$
4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2},\ z \neq 0$
   $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
5) $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

1.3. Расширенная комплексная плоскость

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\} \text{ — Поле комплексных чисел}$$

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty \text{ — Расширенная комплексная плоскость}$$

Рассмотрим сферу: $S = \{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$



Из подобия в треугольнике:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1-\zeta}{1} \iff \rho = r(1-\zeta),\ SZ = r,\ AB = \rho,\ AS = \zeta,\ NS = 1$$

$\xi = \rho\cos\varphi = r(1-\zeta)\cos\varphi = (1-\zeta)x$

$\eta = \rho\sin\varphi = r(1-\zeta)\sin\varphi = (1-\zeta)y$

Подставляем в исходное уравнение:

$$(1-\zeta)^2x^2 + (1-\zeta)^2y^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \iff (1-\zeta)^2(x^2+y^2) + (\zeta-1)\zeta = 0$$

$$(1-\zeta)\Big((1-\zeta)(x^2+y^2) - \zeta\Big) = 0$$

$$\begin{cases} \zeta &= \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \\ \xi &= \dfrac{x}{x^2+y^2+1} \\ \eta &= \dfrac{y}{x^2+y^2+1} \end{cases} \iff \begin{cases} u &= \dfrac{x}{|z|^2+1} \\ v &= \dfrac{y}{|z|^2+1} \\ w &= \dfrac{|z|^2}{|z|^2+1} \end{cases}$$

$S \leftrightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{C} \mapsto S$ — стереографическая проекция ($\infty \mapsto N$)

Утв.

$$\mathbb{C} - \textit{Метрическое пространство, где } \rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Доказательство.

$$|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3| = |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2 + \tilde{z}_2 - \tilde{z}_3| \leqslant |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2| + |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3|$$

т.е. требуется доказать, что $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2})(r_1 e^{-i\varphi_1} + r_2 e^{-i\varphi_2}) = \\
= r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = r_1^2 + r_2^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) r_1 r_2 = \\
\leqslant r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 = (r_1 + r_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

□

2. Лекция 2

2.1. Примеры

1) $e^{\varphi_1+\varphi_2} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2) =$

$= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) =$

$= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$

2) $S_1 = 1 + \cos x + \ldots + \cos nx$

$S_2 = \sin x + \ldots + \sin nx$

$S_1 + iS_2 = 1 + (\cos x + i\sin x) + \ldots + (\cos nx + i\sin nx) = 1 + e^{ix} + \ldots + e^{inx} =$

$$= \frac{1\cdot(1-e^{i(n+1)x})}{(1-e^{ix})} = \frac{(e^{i(n+1)x}-1)}{(e^{ix}-1)} \cdot \frac{e^{\frac{-ix}{2}}}{e^{\frac{-ix}{2}}} = \frac{(e^{i(n+1)x}-1)(e^{\frac{-ix}{2}})}{(e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}})\cdot\frac{2i}{2i}} =$$

$$= \frac{(e^{i(n+1)x}-1)(e^{\frac{-ix}{2}})}{2i\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}} \frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{\frac{-i(n+1)x}{2}}}{2i} \cdot \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{-ix}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{inx}{2}}$$

$$S_1 = \operatorname{Re} S = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{nx}{2},\ x \neq 2\pi k$$

$$S_2 = \operatorname{Im} S = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{nx}{2},\ x \neq 2\pi k$$

3) Дана рекуррентная последовательность: $u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n),\ u_0 = u_1 = 1$

Найти общий член этой последовательности.

Замена: $u_n = \lambda^n, \quad \lambda^{n+2} = 2\lambda^{n+1} - 2\lambda^n \iff \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$. Далее, будем искать u_n в виде:

$u_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Найдем C_1 и C_2 используя начальные условия:

$$\begin{cases} u_0 &= C_1 + C_2 = 1 \\ u_1 &= C_1(1+i) + C_2(1-i) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_n = \frac{1}{2}((1+i)^n + (1-i)^n) = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}(e^{i\frac{\pi n}{4}} + e^{-i\frac{\pi n}{4}}) = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}$$

4)

2.2. Многочлены и формула Муавра

Утв. *(Основная теорема алгебры)*

$\forall P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0,\ c_i \in \mathbb{C},\ c_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N},$ *имеет n корней с учетом кратности.*

Формула Муавра

Пусть $z = re^{i\varphi}$ и $A = |A|e^{i(\arg A + 2\pi k)}$, тогда
$z_n = \sqrt[n]{|A|}e^{\frac{i(\arg A + 2\pi k)}{n}},\ k = 0,\ \ldots,\ n-1$
Корни такого многочлена распологаются в вершинах правильного n-угольника, с центром в начале координат, радиуса $\sqrt[n]{|A|}$

Теорема *(Фробениуса)*

Несуществует других расширений систем и чисел, кроме $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{C}$, *так чтобы новая система образовывала поле.(Нестрогая формулировка)*

3. Лекция 3

3.1. Кривые и множества

Опр.

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ *называется*

1) ***Внутренней*** *точкой множества* $M \subset \mathbb{C}$, *если* $\exists U_\varepsilon(z_0) \subset M$.

2) ***Предельной*** *точкой множества* $M \subset \mathbb{C}$, *если* $\forall \mathring{U}_\varepsilon(z_0) \subset M \;\Rightarrow\; \mathring{U}_\varepsilon(z_0) \cap M \neq \varnothing$.

3) ***Граничной*** *точкой множества* $M \subset \mathbb{C}$, *если* $\forall U_\varepsilon(z_0)$ $\exists$ *точки, как из* M, *так и не из* M.

$U_\varepsilon(z_0) = \{\ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\ \}$
$\mathring{U}_\varepsilon(z_0) = \{\ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\ \}$
$U_\varepsilon(\infty) = \{\ z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon\ \}$
$\mathring{U}_\varepsilon(\infty) = \{\ z \in \overline{\mathbb{C}} : \varepsilon < |z| < \infty\ \}$

Опр.

Множество вида: $\gamma = \{\ z \in \mathbb{C} : z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [\alpha, \beta]\ \}$ *называют* ***кривой*** *на* $\mathbb{C}$

$z(\alpha)$ *— начальная точка*

$z(\beta)$ *— конечная точка*

$t \uparrow$ *— ориентация*

Опр.

Кривая γ *называется*

1) ***Непрерывной****, если* $x(t), y(t) \in C[\alpha, \beta]$

2) ***Замкнутой****, если* $z(\alpha) = z(\beta)$

3) ***Гладкой****, если* $x(t), y(t) \in C^1[\alpha, \beta]$ *и* $\forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow z'(t) \neq 0$

Опр.

Непрерывная кривая γ *называется* ***простой*** *или* ***кривой Жордана****, если* $z(t_1) = z(t_2)$ *выполняется только для двух точек* α, β.

Опр.

Кривая γ *называется* ***кусочно-гладкой****, если* $\gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \gamma_i$, *где* N *— конечное число гладких кривых.*

Опр.

Множество $M \subset \mathbb{C}$ *называют*

1) ***Открытым****, если* $\forall z_0 \in M$ *— внутренняя точка* M.

2) ***Связным****, если* $\forall z_1, z_2 \in M \Rightarrow \exists$ *Кривая Жордана* $\gamma \subset M : z_1, z_2 \in \gamma$

Опр.

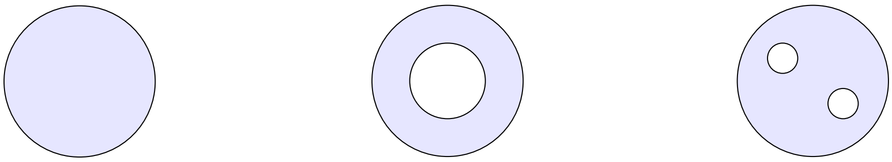
Область *— открытое связное множество* $D \subset \mathbb{C}$.

Опр.

Область D **односвязная**, *если* ∂D *— связное множество.*

Опр.

Область D **многосвязная**, *если* ∂D *— не является связным множеством и* $\partial D = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \gamma$, *где* $\gamma_1, \dots \gamma_N$ *— связные кривые не имеющие общих точек.*



Односвязная Двусвязная Трёхсвязная

3.2. Пределы последовательностей

Опр.

Число z *называется пределом последовательности* $\{z_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Опр.

Число ∞ *называется пределом последовательности* $\{z_n\}$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n| > \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} z_n = \infty$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z, \ \text{где } z = a + ib, \ z_n = x_n + iy_n \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - z| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$|y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon$

Фиксируем $\varepsilon > 0,\ N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon)\}$:

$$\forall n > N(\varepsilon)\ \Rightarrow |z_n - z|^2 = (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 < 2\varepsilon^2 \Leftrightarrow |z_n - z| < \sqrt{2}\varepsilon$$

$\square$

Теорема *(Арифметические св-ва пределов)*

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s,$ *тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + s_n) = z + s$
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot s_n) = z \cdot s$
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{z_n}{s_n}\right) = \dfrac{z}{s},\ \forall n \in \mathbb{N}\ s_n \neq 0,\ s \neq 0$

Теорема *(Единственность)*

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z,$ *тогда он единственный.*

Опр.

$\{z_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subset \{z_n\}_{k=1}^{+\infty}$ *— подпоследоватедьность последовательности* z_n*, где* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$

Опр.

Последовательность $\{z_n\}$ *называется ограниченной, если* $\exists K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_n| \leqslant K$

Теорема *(Больцано-Вейерштрасса)*

Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Теорема *(Критерий Коши)*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Пример

$$z_n = \sqrt[n]{n} + i(1+\frac{2}{n})^n = 1 + ie^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n})^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n \ln{(1+\frac{2}{n})}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{2}{n}} = e^2$$

Пример

$$z_n = \frac{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2+5}}{\sqrt{n^2+2} - n} + i(-1)^n \text{ — \textit{расходится, т.к.} } (-1)^n \text{ \textit{расходится.}}$$

4. Лекция 4

4.1. Функции. Предел. Непрерывность