

Комплексный анализ

Падерин А.Ю.

3 Модуль

Содержание

1. Лекция 1	3
1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость.	3
1.2. Операции над комплексными числами.	4
1.3. Расширенная комплексная плоскость.	5
2. Лекция 2	7
2.1. Примеры	7
2.2. Многочлены и формула Муавра.	8
3. Лекция 3	9
3.1. Кривые и множества.	9
3.2. Пределы последовательностей.	10
4. Лекция 4	13
4.1. Функции. Предел. Непрерывность.	13

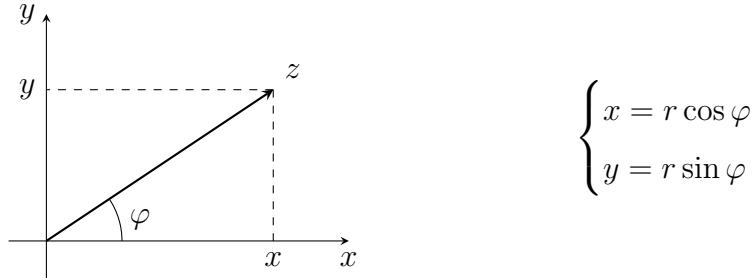
1. Лекция 1

1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость.

Опр.

Комплексным числом называют выражение вида:

$$z = a + ib, \text{ где } a, b \in \mathbb{R} \text{ и } i - \text{мнимая единица} (i^2 = -1)$$



$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \geq 0$$

$\arg z = \varphi$ — главное значение аргумента z , $\varphi \in (-\pi, \pi]$

$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{Re} z = x$ — вещественная часть

$\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ — тригонометрическая форма записи

$z = re^{i\varphi}$ — показательная форма записи

Утв.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$e^s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!}, \quad \sin s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \cos s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \{k = 2m, \quad k = 2m-1\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m} \varphi^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{2m-1} \varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \varphi^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2m-1} \varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

□

Следствие

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Доказательство.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \tag{1}$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \tag{2}$$

$$\frac{(1) + (2)}{2} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \frac{(1) - (2)}{2} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

□

1.2. Операции над комплексными числами.

$$1) z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$2) z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$3) \bar{z} = x - iy$$

$$\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$$

$$4) \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

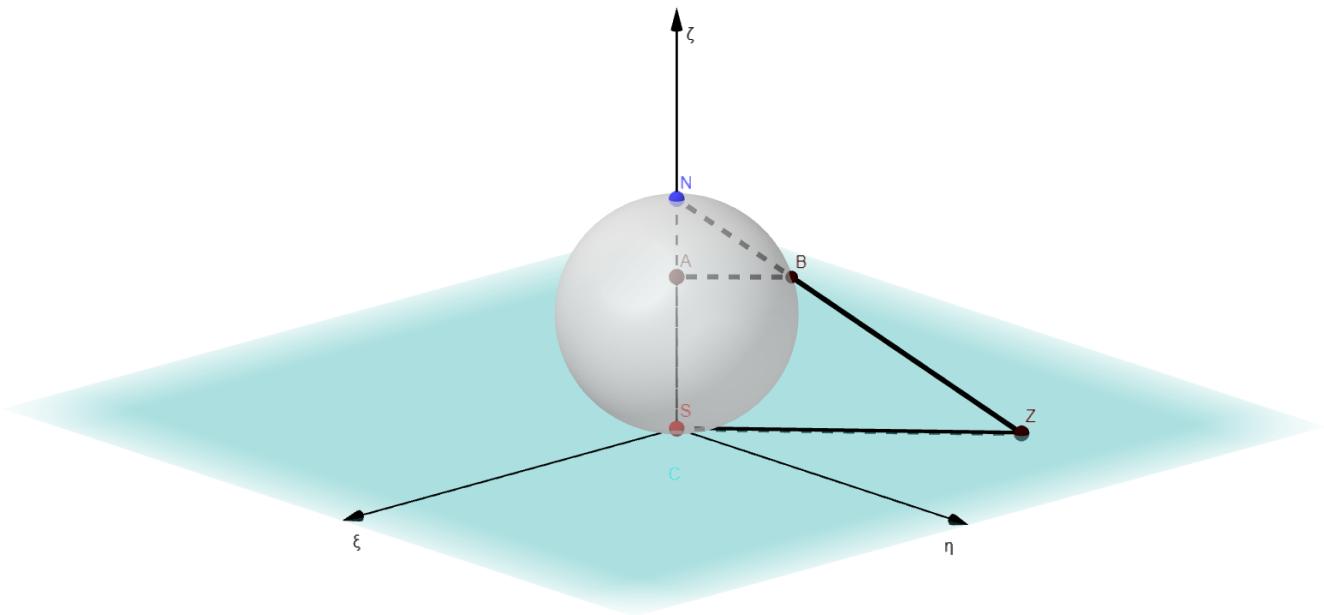
$$5) z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

1.3. Расширенная комплексная плоскость.

$\mathbb{C} = \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ — Поле комплексных чисел

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ — Расширенная комплексная плоскость

Рассмотрим сферу: $S = \{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$



Из подобия в треугольнике:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1 - \zeta}{1} \iff \rho = r(1 - \zeta), SZ = r, AB = \rho, AS = \zeta, NS = 1$$

$$\xi = \rho \cos \varphi = r(1 - \zeta) \cos \varphi = (1 - \zeta)x$$

$$\eta = \rho \sin \varphi = r(1 - \zeta) \sin \varphi = (1 - \zeta)y$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$(1 - \zeta)^2 x^2 + (1 - \zeta)^2 y^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \iff (1 - \zeta)^2(x^2 + y^2) + (\zeta - 1)\zeta = 0$$

$$(1 - \zeta) \left((1 - \zeta)(x^2 + y^2) - \zeta \right) = 0$$

$$\begin{cases} \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \\ \xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \\ \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases} \iff \begin{cases} u = \frac{x}{|z|^2 + 1} \\ v = \frac{y}{|z|^2 + 1} \\ w = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} \end{cases}$$

$S \leftrightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{C} \mapsto S$ — стереографическая проекция ($\infty \mapsto N$)

УТВ.

\mathbb{C} – Метрическое пространство, где $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

Доказательство.

$$|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3| = |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2 + \tilde{z}_2 - \tilde{z}_3| \leq |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2| + |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3|$$

т.е. требуется доказать, что $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2})(r_1 e^{-i\varphi_1} + r_2 e^{-i\varphi_2}) = \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = r_1^2 + r_2^2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) r_1 r_2 = \\ &\leq r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 = (r_1 + r_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

□

2. Лекция 2

2.1. Примеры

- 1) $e^{\varphi_1+\varphi_2} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$
 $= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) =$
 $= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$
- 2) $S_1 = 1 + \cos x + \dots + \cos nx$
 $S_2 = \sin x + \dots + \sin nx$
 $S_1 + iS_2 = 1 + (\cos x + i \sin x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) = 1 + e^{ix} + \dots + e^{inx} =$
 $= \frac{1 \cdot (1 - e^{i(n+1)x})}{(1 - e^{ix})} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)}{(e^{ix} - 1)} \cdot \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{-\frac{ix}{2}})}{(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}) \cdot \frac{2i}{2i}} =$
 $= \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{-\frac{ix}{2}})}{2i \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}} \frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{2i} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{inx}{2}}$
 $S_1 = \operatorname{Re} S = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{nx}{2}, \quad x \neq 2\pi k$
 $S_2 = \operatorname{Im} S = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}, \quad x \neq 2\pi k$
- 3) Дана рекуррентная последовательность: $u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n)$, $u_0 = u_1 = 1$
Найти общий член этой последовательности.
Замена: $u_n = \lambda^n$, $\lambda^{n+2} = 2\lambda^{n+1} - 2\lambda^n \iff \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
 $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$. Далее, будем искать u_n в виде:
 $u_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Найдем C_1 и C_2 используя начальные условия:

$$\begin{cases} u_0 = C_1 + C_2 = 1 \\ u_1 = C_1(1+i) + C_2(1-i) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_n = \frac{1}{2}((1+i)^n + (1-i)^n) = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}(e^{i\frac{\pi n}{4}} + e^{-i\frac{\pi n}{4}}) = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad f(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{A}{x - i} + \frac{B}{x + i} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x + i} - \frac{1}{x - i} \right) \\
f^{(k)}(x) &= \frac{i(-1)^k k!}{2} \left(\frac{1}{(x + i)^{k+1}} - \frac{1}{(x - i)^{k+1}} \right) = \frac{i(-1)^k k!}{2} \left(\frac{(x - i)^{k+1}}{(x^2 - 1)^{k+1}} - \frac{(x + i)^{k+1}}{(x^2 - 1)^{k+1}} \right) \\
(x - i)^{k+1} - (x + i)^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-i)^j x^{k+1-j} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^j x^{k+1-j} = \{k = 2m\} = \\
&= 2i \sum_{l=1}^{m+1} \binom{2m+1}{2l-1} (-1)^l x^{2m+1-2l+1} \\
f^{(2m)}(x) &= \frac{-(2m)!}{(x^2 + 1)^{2m+1}} \sum_{l=1}^{m+1} \binom{2m+1}{2l-1} (-1)^l x^{2(m-l+1)} \\
f^{(2m+1)}(x) &= \frac{(2m-1)!}{(x^2 + 1)^{2m}} \sum_{l=1}^m \binom{2m}{2l-1} (-1)^l x^{2(m-l)+1}
\end{aligned}$$

2.2. Многочлены и формула Муавра.

Утв. (*Основная теорема алгебры*)

$\forall P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0$, $c_i \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, имеет n корней с учетом кратности.

Формула Муавра

Пусть $z = re^{i\varphi}$ и $A = |A|e^{i(\arg A + 2\pi k)}$, тогда
 $z_n = \sqrt[n]{|A|} e^{\frac{i(\arg A + 2\pi k)}{n}}$, $k = 0, \dots, n - 1$

Корни такого многочлена располагаются в вершинах правильного n -угольника, с центром в начале координат, радиуса $\sqrt[n]{|A|}$

Теорема (Фробениуса)

Несуществует других расширений систем и чисел, кроме \mathbb{R} и \mathbb{C} , так чтобы новая система образовывала поле. (Нестрогая формулировка)

3. Лекция 3

3.1. Кривые и множества.

Опр.

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется

- 1) *Внутренней* точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\exists U_\varepsilon(z_0) \subset M$.
- 2) *Пределной* точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\forall \dot{U}_\varepsilon(z_0) \subset M \Rightarrow \dot{U}_\varepsilon(z_0) \cap M \neq \emptyset$.
- 3) *Границей* точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если $\forall U_\varepsilon(z_0) \exists$ точки, как из M , так и не из M .

$$U_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon \}$$

$$\dot{U}_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$$

$$U_\varepsilon(\infty) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon \}$$

$$\dot{U}_\varepsilon(\infty) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \varepsilon < |z| < \infty \}$$

Опр.

Множество вида: $\gamma = \{ z \in \mathbb{C} : z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta] \}$ называют **кривой** на \mathbb{C}

$z(\alpha)$ — начальная точка

$z(\beta)$ — конечная точка

$t \uparrow$ — ориентация

Опр.

Кривая γ называется

- 1) *Непрерывной*, если $x(t), y(t) \in C[\alpha, \beta]$
- 2) *Замкнутой*, если $z(\alpha) = z(\beta)$
- 3) *Гладкой*, если $x(t), y(t) \in C^1[\alpha, \beta]$ и $\forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow z'(t) \neq 0$

Опр.

Непрерывная кривая γ называется **простой** или **кривой Жордана**, если $z(t_1) = z(t_2)$ выполняется только для двух точек α, β .

Опр.

Кривая γ называется **кусочно-гладкой**, если $\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$, где N — конечное число гладких кривых.

Опр.

Множество $M \subset \mathbb{C}$ называют

- 1) *Открытым*, если $\forall z_0 \in M$ — внутренняя точка M .
- 2) *Связным*, если $\forall z_1, z_2 \in M \Rightarrow \exists$ Кривая Жордана $\gamma \subset M : z_1, z_2 \in \gamma$

Опр.

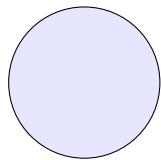
Область — открытое связное множество $D \subset \mathbb{C}$.

Опр.

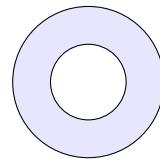
Область D односвязная, если ∂D — связное множество.

Опр.

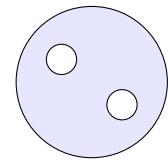
Область D многосвязная, если ∂D — не является связным множеством и $\partial D = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$, где $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ — связные кривые не имеющие общих точек.



Односвязная



Двусвязная



Трёхсвязная

3.2. Пределы последовательностей.

Опр.

Число z называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Опр.

Число ∞ называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n| > \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$

Теорема

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z, \text{ где } z = a + ib, \quad z_n = x_n + iy_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Доказательство.

⇒

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - z| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

$$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$|y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

⇐

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$, $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$:

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z|^2 = (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 < 2\varepsilon^2 \Leftrightarrow |z_n - z| < \sqrt{2}\varepsilon$$

□

Теорема (Арифметические св-ва пределов)

Пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, тогда

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + s_n) = z + s$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot s_n) = z \cdot s$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z_n}{s_n} \right) = \frac{z}{s}$, $\forall n \in \mathbb{N} s_n \neq 0$, $s \neq 0$

Теорема (Единственность)

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, тогда он единственный.

Опр.

$\{z_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subset \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – подпоследовательность последовательности z_n , где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

Опр.

Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если $\exists K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_n| \leq K$

Теорема (Больцано-Вейерштрасса)

Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Теорема (Критерий Коши)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Пример

$$z_n = \sqrt[n]{n} + i\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = 1 + ie^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{2}{n}} = e^2$$

Пример

$$z_n = \frac{\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt{n^2 + 2} - n} + i(-1)^n - \text{расходится, т.к. } (-1)^n \text{ расходится.}$$

4. Лекция 4

4.1. Функции. Предел. Непрерывность.

Опр.

Однозначная функция — отображение, ставящее в соответствие любому $z \in D$ единственное число $w \in \overline{\mathbb{C}}$. ($w = f(z)$, D_f — область определения $f(z)$)

Опр.

Многозначная функция — отображение, ставящие в соответствие любому $z \in D$ некоторое множество значений $E(z) \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Пример

$$f(z) = e^z, z \in \mathbb{C}, D_f = \mathbb{C}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$e^z = e^{z+2\pi ik}, T = 2\pi i$$

Функция однозначная

Пример

$$f(z) = \ln z, z = re^{i(\varphi+2\pi k)} \in \mathbb{C}, D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

Функция многозначная

Пример

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, D_f \in \mathbb{C}$$

Пример

$$\text{Решить уравнение: } \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$$

Доказательство.

$$\text{Замена: } S = e^{iw}, \text{ тогда: } S + \frac{1}{S} - 2z = 0 \Leftrightarrow S^2 - 2zS + 1 = 0$$

$$S_{1,2} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\text{Обратная замена: } e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \Leftrightarrow iw = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$w = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$\operatorname{Argcos} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ — многозначная функция. (Для корня берем два значения.)

Когда $\operatorname{Argcos} z$ принимает вещественные значения?

$$\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}| = 0 \Leftrightarrow |z + \sqrt{z^2 - 1}| = 1 \Leftrightarrow z + \sqrt{z^2 - 1} = e^{it}$$

$$z^2 + 1 = (e^{it} - z)^2 = e^{2it} - 2ze^{it} + z^2 \Leftrightarrow z = \frac{e^{2it} + 1}{2e^{it}} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$$

Ответ: $M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \in [-1, 1]\}$

□