Комплексный анализ

Падерин А.Ю.

3 Модуль

Содержание

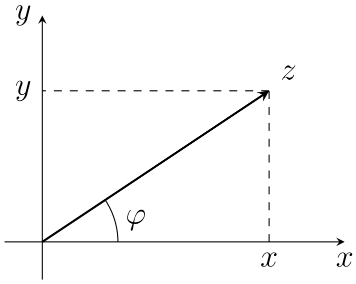
1. Лекция 1

1.1. Комплексные числа и комплексная плоскость

Опр.

Комплексным числом называют выражение вида:

$$z = a + ib,\ \text{где } a, b \in \mathbb{R} \text{ и } i \text{ — мнимая единица } (i^2 = -1)$$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},\ r \geqslant 0$
$\arg z = \varphi$ — главное значение аргумента z, $\varphi \in (-\pi, \pi]$
$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Re} z = x$ — вещественая часть
$\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма записи
$z = re^{i\varphi}$ — показательная форма записи

Утв.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \forall\varphi \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$e^s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k!},\quad \sin s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)!},\ \cos s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \{k = 2m,\ k = 2m-1\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m}\varphi^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{2m-1}\varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\varphi^{2m}}{(2m)!} + i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2m-1}\varphi^{2m-1}}{(2m-1)!} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

□

Следствие

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

Доказательство.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1}$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \tag{2}$$

$$\frac{(1)+(2)}{2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \frac{(1)-(2)}{2} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

□

1.2. Операции над комплексными числами

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

   $z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2}$
3) $\bar{z} = x - iy$

   $\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$
4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2},\ z \neq 0$

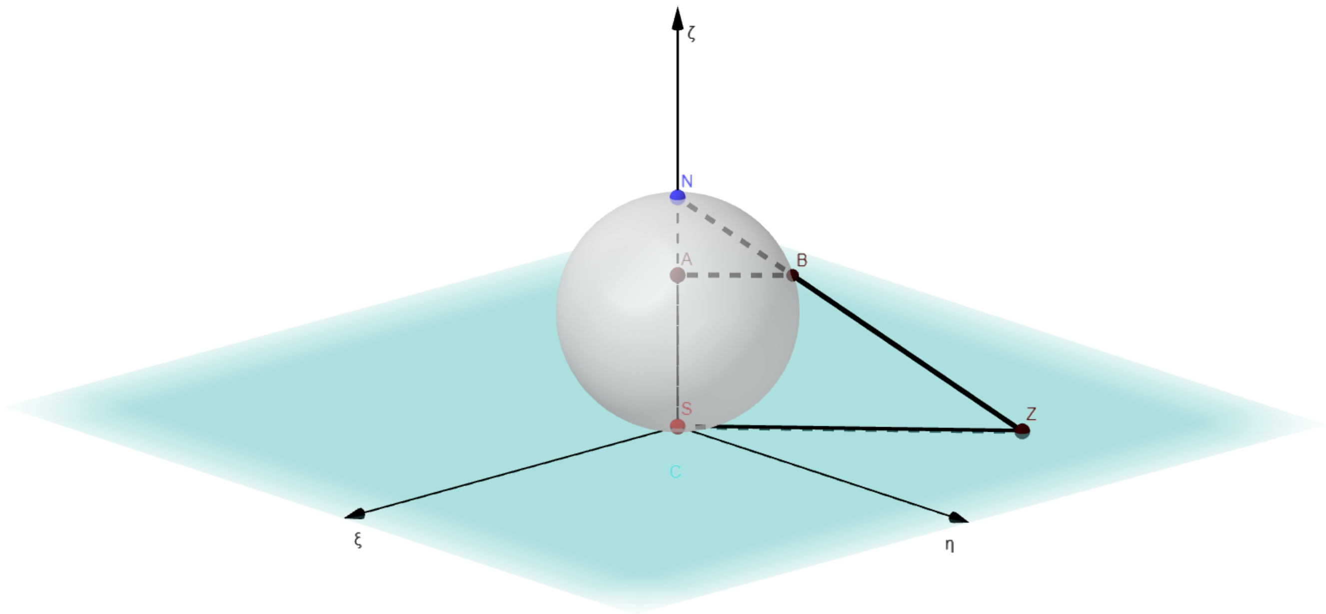
   $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
5) $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

1.3. Расширенная комплексная плоскость

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\} \text{ — Поле комплексных чисел}$$

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty \text{ — Расширенная комплексная плоскость}$$

Рассмотрим сферу: $S = \{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$



Из подобия в треугольнике:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1-\zeta}{1} \iff \rho = r(1-\zeta)\ , SZ = r, AB = \rho, AS = \zeta, NS = 1$$

$\xi = \rho\cos\varphi = r(1-\zeta)\cos\varphi = (1-\zeta)x$

$\eta = \rho\sin\varphi = r(1-\zeta)\sin\varphi = (1-\zeta)y$

Подставляем в исходное уравнение:

$$(1-\zeta)^2x^2 + (1-\zeta)^2y^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \iff (1-\zeta)^2(x^2+y^2) + (\zeta-1)\zeta = 0$$

$$(1-\zeta)\Big((1-\zeta)(x^2+y^2) - \zeta\Big) = 0$$

$$\begin{cases} \zeta &= \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \\ \xi &= \dfrac{x}{x^2+y^2+1} \\ \eta &= \dfrac{y}{x^2+y^2+1} \end{cases} \iff \begin{cases} u &= \dfrac{x}{|z|^2+1} \\ v &= \dfrac{y}{|z|^2+1} \\ w &= \dfrac{|z|^2}{|z|^2+1} \end{cases}$$

$S \leftrightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{C} \mapsto S$ — стереографическая проекция ($\infty \mapsto N$)

Утв.

$$\mathbb{C} - \textit{Метрическое пространство, где } \rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Доказательство.

$$|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3| = |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2 + \tilde{z}_2 - \tilde{z}_3| \leqslant |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2| + |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3|$$

т.е. требуется доказать, что $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} &= (r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2})(r_1 e^{-i\varphi_1} + r_2 e^{-i\varphi_2}) = \\
&= r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = r_1^2 + r_2^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) r_1 r_2 = \\
&\leqslant r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 = (r_1 + r_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

□

2. Лекция 2

2.1. Комплексные числа и комплексная плоскость