Сложность вычислений "Дерево Штейнера"

Иванов Вячеслав, группа 699

2 декабря 2018 г.

Оглавление

1 Постановка задачи

$G = (V, E)$ — неориентированный граф, $V_0 \subset V$ — непустое множество *терминальных* вершинб $w : E \to \mathbb{R}^+$ — весовая функция. Требуется решить задачу оптимизации:

$$\min_{T \subset G} \sum_{e \in E(T)} w(e)$$
$$\text{s.t.} \begin{array}{l} T \text{ — дерево} \\ V_0 \subset V(T) \end{array}$$

Т.е. найти дерево минимального веса, покрывающее все терминальные вершины.
В нетривиальных частных случаях задача имеет полиномиальный алгоритм решения:

1. $|V_0| = 2$: задача о кратчайшем пути между выделенными вершинами
2. $|V_0| = |V|$: задача о минимальном остовном дереве

Алгоритмы поиска минимального остовного дерева, как будет показано далее, составляют основу 2-оптимального алгоритма поиска дерева Штейнера в метрическом случае.

2 Доказательство NP-полноты

Теорема 2.1.

$$\{(G, k) \mid \text{ в неориентированном графе G есть дерево Штейнера веса } \leqslant k \in \mathbb{Z}\} \in \text{NPC}$$

Доказательство.

1. **STEINER-TREE $\in$ NP**: Сертификат должен проверять, что поданный ему на вход подграф T является деревом, содержит все терминальные вершины и имеет вес $\leqslant k$, причём вторая и третья подзадачи тривиальны. Согласно одному из эквивалентных определений дерева, достаточно проверить связность T и то, что $|E(T)| = |V(T)| - 1$, для чего достаточно обхода в глубину. Т.е. полиномиальный сертификат существует и STEINER-TREE $\in$ NP.
2. **VERTEX-COVER $\leqslant_p$ STEINER-TREE**: Полиномиальное сведение устроено так:
   (a) Дополним G до $K_{|V|}$, где каждое ребро поделим на 2 и назовём результат $G' = (V', E')$.
   $$W := \{w_i \mid e_i = (u, v) \in E \implies (u, w_i), (w_i, v) \in E'\}$$
   $$V' = V \cup W$$
   $$\begin{aligned} E' = V^2 \cup \{(u, w) \in V \times W \mid \\ \exists v \in V : (u, w), (w, v) \in E'\} \end{aligned}$$
   (b) Если $\forall e' \in E' : w'(e') = 1$ и $V'_0 = W$, то в G' есть дерево Штейнера веса не более $|E| + k - 1 \iff$ в G есть вершинное покрытие мощности $\leqslant k$.

   Доказательство.

   - $\underline{\implies}$: Пусть T — дерево Штейнера для V'_0 в G', тогда $C := V(T) \setminus V'_0$ — вершинное покрытие в G: $V(T) \setminus V'_0 \subset V$ и накрывает каждое ребро $e \in E$ по построению. $|C| = |V(T)| - |V'_0| = \omega(T) + 1 - |V'_0| \leqslant (|E| + k - 1) + 1 - |V'_0| = k$, т.к. $|E| = |V'_0|$.

- $\Longleftarrow$: Пусть $C \subset V$ — вершинное покрытие, $|C| \leqslant k$, T — дерево на вершинах C в G'.[1] Чтобы гарантировать $V_0' \subset V(T)$, для каждой вершины $v_0' \in V_0' \setminus V(T)$ добавим в T ребро (v_0', c), где $c \in C$ — вершина покрытия, накрывающая ребро, подразделением которого получена v_0'. Полученный граф содержит $\leqslant |E| + |C| - 1 \leqslant |E| + k - 1$ рёбер. Если в процессе расширения в T образовались циклы, их можно раскрыть, уменьшив суммарный вес. По завершении получим дерево Штейнера веса $\leqslant |E| + k - 1$ в G'.

□

Все шаги построения G' полиномиальны: добавляется $O(|V|^2)$ рёбер и вершин. Для восстановления вершинного покрытия по дереву Штейнера в G' нужно брать разность множеств — $O(|V|^2)$ операций, а в обратную сторону нужно перебрать V_0' и исходящие из него рёбра (не более двух на каждую вершину) — тоже $O(|V|^2)$ операций. Следовательно, сведение полиномиально, а его корректность была доказана выше.

□

3 Сведение к метрическому случаю

Часто хочется потребовать, чтобы для весовой функции выполнялось правило треугольника:

$$\omega(x, y) \leqslant \omega(x, z) + \omega(z, y)$$

причём она должна быть определена на V^2. Такая весовая функция играет роль метрики на множестве вершин и становится проще для восприятия. В таком случае говорят о поиске *метрического* дерева Штейнера, и именно такой вид задачи был исторически первым.

Утверждение 3.1.

1. Существует полиномиальное сведение задачи о дереве Штейнера к метрическому случаю.
2. Оптимальные ответы к обеим задачам совпадают.

Доказательство. Предложенная конструкция основана на понятии *метрического замыкания*:

Определение. Пусть $G = (V, E, \omega)$ — неориентированный взвешенный граф, $d : V^2 \to \mathbb{R}^+$ — функция расстояния, сопоставляющая паре вершин длину кратчайшего пути между ними. Тогда граф G', построенный по следующим правилам, называется *метрическим замыканием* графа G:

$$G' = (V, E', d),\ E' = \{(u, v, d(u, v)) \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$$

Полученный граф является метрическим, т.к. для d выполнено правило треугольника: если $d(x, y) > d(x, z) + d(z, y)$, то путь $x \to y$ можно было бы прорелаксировать конкатенацией путей $x \to z$ и $z \to y$, что противоречит определению $d(x, y)$ как длины *кратчайшего* пути $x \to y$. Построить метрическое замыкание можно за $O(|V|^3)$ алгоритмом Флойда-Уоршелла.

Пусть T, T' — деревья Штейнера для V_0 в G и G' соответственно. Докажем, что $\omega(T) = d(T')$. Очевидно, что $d(T') \leqslant \omega(T)$, т.к. переход к кратчайшим путям не ухудшает ответ. Более того, каждое ребро в T' можно "разжать"в тот кратчайший путь, из которого он был получен, после чего выбрать в полученном графе минимальное остовное дерево T''. $\omega(T'') \leqslant d(T')$, т.к. теперь каждое ребро встречается ровно один раз, а ранее могло вносить свой вклад одновременно в несколько кратчайших путей. Но T'' по построению — дерево Штейнера для V_0 в G! Следовательно, $\omega(T) = \omega(T'') \leqslant d(T') \leqslant \omega(T)$, т.е. $\omega(T) = d(T')$. □

[1] Такое дерево всегда существует, т.к. $V^2 \subset V(G')$.

4 2-оптимальный алгоритм

Теорема 4.1. Предложенный алгоритм является 2-оптимальным для метрического случая задачи поиска дерева Штейнера, и существуют графы, на которых эта оценка достигается.

1. Считать граф $G = (V, E, \omega)$ и множество терминальных вершин V_0.
2. Построить метрическое замыкание $G' = (V, E', d)$ графа G.
3. Выделить H' — подграф в G', индуцированный вершинами V_0.
4. Построить минимальное остовное дерево T_{MST} в H'.
5. Вернуть полученный T_{MST} в качестве ответа.

Доказательство. Пусть T_S — дерево Штейнера для V_0 в G'.
Вершины T_S в порядке обхода в глубину

$$u_0, u_1, \ldots, u_m = u_0$$

задают Эйлеров цикл, потому:

$$\sum_{i=0}^{m-1} d(u_i, u_{i+1}) = 2 \cdot d(T_S)$$

Если исключить из рассмотрения все нетерминальные вершины и оставить только первое вхождение всех терминальных, то получим путь:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

содержащий все терминальные вершины (т.к. изначально это был обход G').
По неравенству треугольника:

$$d(v_i, v_{i+1}) \leqslant \sum_{j=1}^{t} d(u_{i_j}, u_{i_{j+1}})$$

Здесь $v_{i_j}, \ldots, v_{i_{t+1}}$ - последовательные вершины в обходе в глубину, причём $v_i = u_{i_1}, u_{i+1} = v_{i_{t+1}}$. Поскольку $y_1, \ldots, y_k$ — путь, это также дерево, причём неравенство треугольника гарантирует, что добавление любой вершины только увеличивает его вес. Более того, в силу того, как задана весовая функция, это ещё и минимальное остовное дерево в H'. Следовательно, это дерево Штейнера T_{MST} для V_0 в G', причём:

$$d(T_{\mathrm{MST}}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} d(u_i, u_{i+1}) = 2 \cdot d(T_S)$$

По *утверждению 3.1.*, по нему восстанавливается дерево Штейнера в G. □

5 Реализация

6 Список литературы