



Лабораторная работа 3.2.2  
"Резонанс напряжений в последовательном  
контуре".

Автор:  
Лузгина Арина  
Б02-305

# 1 Введение

**Цель работы:** Исследовать резонанс напряжений в последовательном колебательном контуре с изменяемой емкостью.

## 2 Теоретическая справка

В данной работе изучается колебательный контур с ЭДС. Колебательный контур - это электрическая цепь, содержащая катушку индуктивности, конденсатор и источник электрической энергии. Самая простая схема колебательного контура представлена на рис.1. Колебания в такой цепи делятся на два типа: свободные (нет элемента эдс) и вынужденные (есть элемент эдс). В работе происходят вынужденные колебания, при которых возможно достижение резонанса. Резонанс в электрической цепи — это явление, при котором резко возрастают амплитуды вынужденных колебаний силы тока или напряжения при совпадении частоты внешнего переменного напряжения с собственной частотой колебательного контура. Важным условием данной модели является то, что выполняется условие квазистационарности процесса ( $\frac{l}{c} \ll T$ ).

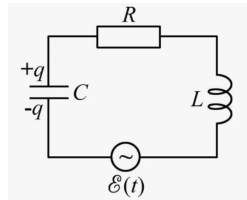
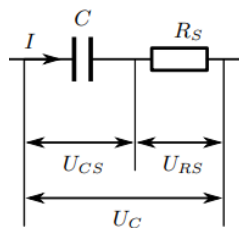


Рис. 1: Пример самого простого колебательного контура

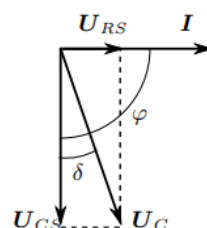
Однако, элементы цепи не являются идеальными. Поэтому следует рассмотреть поправки, которые могут возникнуть в таком случае:

1. В последовательном колебательном контуре  $L$  катушки меняется в зависимости от частоты по формуле  $L_{\text{эфф}} = \frac{L}{1 - \frac{\nu^2}{\nu_0^2}}$ . Так как  $\nu_0 \geq 1.3 \text{ МГц}$ , этим эффектом можно пренебречь.
2. Конденсатор (далее  $C_n$ ) может обладать как собственной индуктивностью, так и сопротивлением (возникает в обкладках и проводах). Собственной индуктивностью можно пренебречь. Посчитаем поправки возникающие из-за сопротивления  $C_n$ . На рисунке 2(a) изображена эквивалентная схема подключения конденсатора.  $R_s$  - эквивалентное последовательное сопротивление. Откуда получаем формулу 1, где  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  - волновое сопротивление контура (связь с  $R_s$  указана в учебнике),  $\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  - собственная круговая частота,  $C$  - емкость конденсатора цепи,  $L$  - индуктивность катушки.

$$R_s = \frac{U_{RS}}{I} = \frac{\tan \delta}{\omega_0 C} = 10^{-3} \cdot \rho \quad (1)$$



(a) эквивалентная схема конденсатора



(b) Диаграмма для эквивалентной схемы конденсатора

Далее для вывода формул на  $I$ ,  $U_c$ ,  $U_L$ , будет использоваться свойства импеданса, а именно ур.2. Из этой формулы, с учетом того, что  $U_0 \simeq U_{c0}$ , формула на добротность контура (формула 3), где  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

$$Z_{\Sigma} = Z + Z_s + Z_L \quad (2)$$

$$Q \approx \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R_{\Sigma}} \quad (3)$$

Решая уравнение колебаний электрического контура (формула 4) получаем выражения на ток и напряжения в контуре (формулы 5, 6, 7), где  $\tau$  - время затухания,  $\omega = \omega - \omega_0$

$$RI + U_C + L \frac{dI}{dt} = \varepsilon \quad (4)$$

$$I(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{R_{\Sigma}} \frac{\cos(\omega t - \phi_I)}{\sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}}, \quad \phi_I(\omega) = \arctan(\tau \Delta \omega) \quad (5)$$

$$U_C(\omega) = Q \cdot \varepsilon_0 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\cos(\omega t - \phi_C)}{\sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}}, \quad \phi_C(\omega) = \arctan(\tau \Delta \omega) + \frac{\pi}{2} - \delta \quad (6)$$

$$U_L(\omega) = Q \cdot \varepsilon_0 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\cos(\omega t - \phi_L)}{\sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}}, \quad \phi_L(\omega) = \arctan(\tau \Delta \omega) - \frac{\pi}{2} + \delta \quad (7)$$

Эти выражения при резонансе упрощаются до выражений 8, 9, 10. Из которых следует уравнение для максимального тока:  $I_{max} = \frac{\varepsilon_0}{R_{\Sigma}}$

$$I(\omega_0) = \frac{U_R}{R} = \frac{\varepsilon_0}{R_{\Sigma}}, \quad \phi_I(\omega_0) = 0 \quad (8)$$

$$U_c(\omega_0) = Q \varepsilon_0, \quad \phi_C(\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \delta \quad (9)$$

$$U_L(\omega_0) = Q \varepsilon_0, \quad \phi_L(\omega_0) = \frac{-\pi}{2} + \frac{R_L}{\rho} \quad (10)$$

### 3 Экспериментальная методика

**Приборы и оборудование:** Два вольтметра GDM-8245 (1 на рис. 2), генератор сигнала АКИП-3408/3 (2 на рис.2), последовательный колебательный контур с переменной ёмкостью (3 на рис.2), двухканальный осциллограф GOS-620 (4 на рис.2). Погрешность измерений для данных приборов представлена в таблице 1.

	вольтметр GDM-8245	генератор сигнала АКИП-3408/3
погрешность по паспорту	5%	$\pm 1 \cdot 10^{-4} \cdot f$

Таблица 1: Погрешности приборов

Теперь рассмотрим схему, используемую в данной работе (рис. 3). В ней генератор соответствует АКИП-3408/3 (2 на рис.2); всё, что относится к блоку в пунктирном прямоугольнике, - это последовательный колебательный контур с переменной ёмкостью (3 на рис.2), где  $U_1$ ,  $U_2$  это соответствующие схеме выходы из контура подключенные к верхнему и нижнему вольтметру (1 на рис.2); осциллограф на схеме - двухканальный осциллограф GOS-620 (4 на рис.2).



Рис. 2: Используемые в данной лабораторной работе приборы

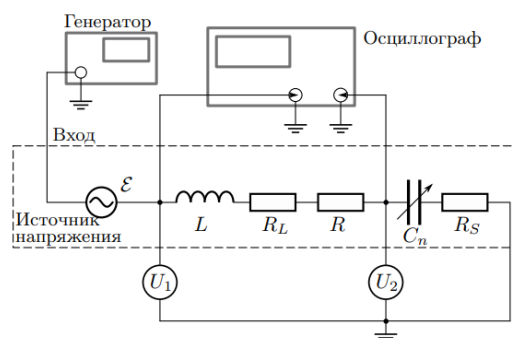


Рис. 3: Схема используемая в данной работе

### Ход работы:

1. Измерение резонансных напряжения на  $U_1$ ,  $U_2$  в зависимости от резонансной частоты выставленной на генератор. То, что частоты резонансная можно определить по появлению фигуры Лисажу на осциллографе;
2. Измерение зависимости напряжения и фазы от частоты. Частота задается на генераторе. Напряжение меряется на выходе  $U_2$ . Фаза измеряется таким образом: на осциллографе по клеточкам измеряется расстояние  $x_0$  от начала отсчёта (сигнал  $\varepsilon(t)$  выходит из начала отсчета) до точки первого обращения в нуль и  $x$  - количество клеточек от начала отсчета до первого обращения в нуль  $U_c$ . По формуле  $\phi = \frac{x}{x_0} \cdot \pi$  считается сдвиг фазы.

## 4 Обработка данных

1. Для каждой емкости конденсатора были измерены резонансная частота и напряжение, подаваемое напряжение. Из этого было посчитана  $L$  по формуле  $\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ; по формуле 9 (первая); было посчитано  $Q$ ; из этого по формуле  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  было посчитано ; по формуле 3 было посчитано  $R_{sum}$ ; из коэффициента связывающего  $R_s$  и  $\rho$ , получено  $R_{s,max}$ ; из формулы 2 и используя то, что  $R = 3.45 \text{ Ом}$ , получено  $R_L$ ; из формулы 8, получено значение  $I$ . Из этой таблицы получаем средние значения на  $L$ ,  $R_L$  (таблица 2).

	$L$ , мкГн	$R_L$ , Ом
среднее значение	1070	4.56
случайная погрешность	10	0.07
относительная погрешность (в %)	0.9	1.5

Таблица 2: Среднее значения  $L$  и  $R_L$

2. Далее были измерены АЧХ и ФЧХ для  $C_1$ ,  $C_4$ ,  $C_5$ . Используя данные из пункта 1, а также формулы 6, с помощью функции аппроксимации подбирались значения всех параметров. Графики представлены на рис. 4 и 5.

## АЧХ для $0.3U_{c0}$

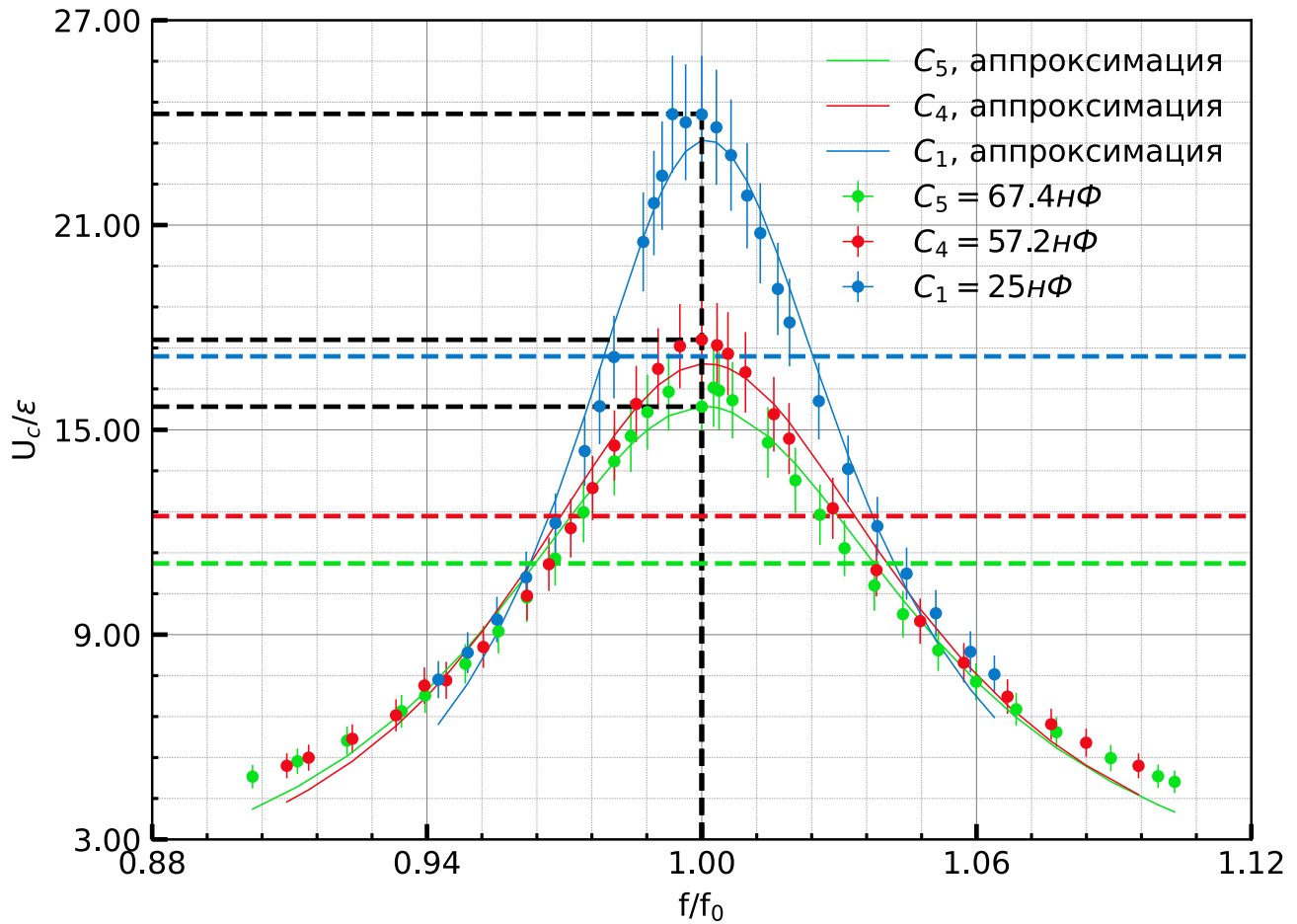


Рис. 4: На графике пунктирными линиями соответствующих цветов обозначены уровни, на которых  $U_c$  уменьшается в  $\sqrt{2}$  относительно резонансной величины  $U_{c0}$ . Черный пунктир ведет к пиковым значениям для каждого  $C_n$ . Кривые были аппроксимированы по формуле 6(1).

## ФЧХ для $0.3U_{c0}$

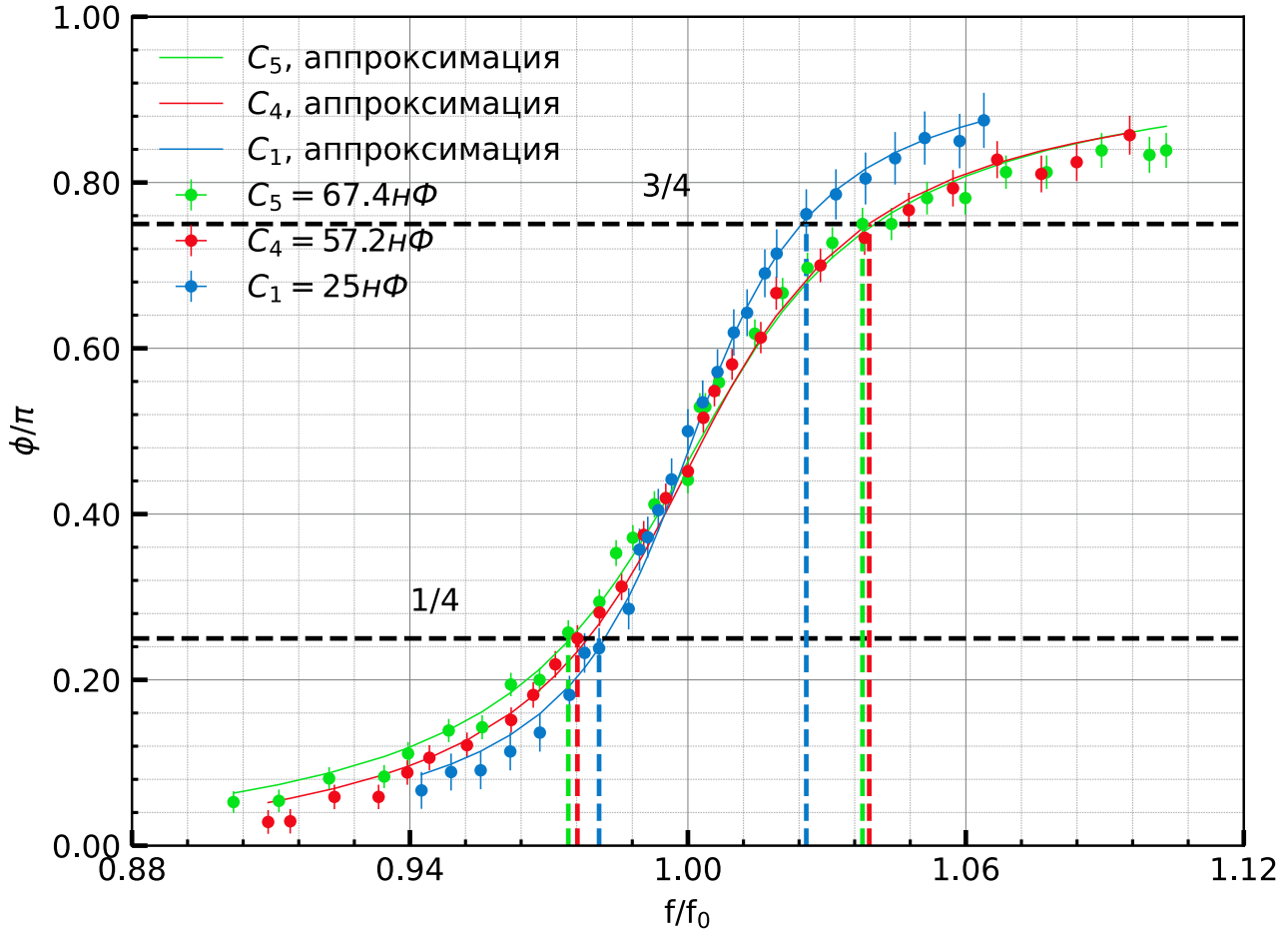


Рис. 5: На графике черные пунктирные линии обозначают уровни, между которыми  $U_c$  уменьшается в  $\sqrt{2}$  относительно резонансной величины  $U_{c0}$ . Цветные пунктирные линии для соответствующих цветов обозначают точки, в которых будут пересекаться нужные уровни. Кривые были аппроксимированы по формуле 6(2).

- По графикам определим значения добротности. Сравним полученные значения добротности со значениями полученными в пункте 1, из графиков АЧХ и ФЧХ и их аппроксимации (см. таблицу 3).

	$C_1 = 25 \text{ нФ}$	$C_4 = 57.2 \text{ нФ}$	$C_5 = 67.4 \text{ нФ}$
Из пункта 1	$Q = (24.35 \pm 0.013), \varepsilon = 0.05\%$	$Q = (17.196 \pm 0.009), \varepsilon = 0.05\%$	$Q = (15.680 \pm 0.008), \varepsilon = 0.05\%$
Аппроксимация данных	$Q = (23.6 \pm 1.7), \varepsilon = 7\%$	$Q = (17.0 \pm 1.2), \varepsilon = 7\%$	$Q = (15.7 \pm 1.1), \varepsilon = 7\%$
Анализ графика АЧХ	$Q = (25.0 \pm 1.6), \varepsilon = 6\%$	$Q = (18.2 \pm 0.8), \varepsilon = 4\%$	$Q = (14.3 \pm 0.5), \varepsilon = 3\%$
Анализ графика ФЧХ	$Q = (22.2 \pm 1.2), \varepsilon = 6\%$	$Q = (16.0 \pm 0.6), \varepsilon = 4\%$	$Q = (16.0 \pm 0.6), \varepsilon = 4\%$

Таблица 3: Значения добротности, полученные разными способами

- Так же при аппроксимации данных для графика ФЧХ для каждой кривой были получены значения  $\tau$  и  $\delta$ , представленные в таблице 4.

	$C_1 = 25 \text{ нФ}$	$C_4 = 57.2 \text{ нФ}$	$C_5 = 67.4 \text{ нФ}$
АЧХ	$\tau = (0.7081 \pm 0.0007)c, \varepsilon = 0.10\%$	$\tau = (0.7272 \pm 0.0011)c, \varepsilon = 0.15\%$	$\tau = (0.733 \pm 0.001)c, \varepsilon = 0.14\%$
ФЧХ	$\tau = (1.232 \pm 0.021)c, \varepsilon = 1.7\%$	$\tau = (1.301 \pm 0.020)c, \varepsilon = 1.5\%$	$\tau = (1.284 \pm 0.018)c, \varepsilon = 1.4\%$
АЧХ	$\delta = 1.7, \varepsilon = 2.1 \cdot 10^{-6}\%$	$\delta = 1.7, \varepsilon = 2.1 \cdot 10^{-6}\%$	$\delta = 1.6, \varepsilon = 2.1 \cdot 10^{-6}\%$
ФЧХ	$\delta = (0.08 \pm 0.08), \varepsilon = 100\%$	$\delta = (0.15 \pm 0.06), \varepsilon = 40\%$	$\delta = (0.12 \pm 0.05), \varepsilon = 40\%$

Таблица 4: Значения  $\tau, \delta$  полученный из аппроксимации кривых

## 5 Выводы

1. Значения полученные для  $L, R_L$  достаточно точные (относительная погрешность около 1%);
2. Данные аппроксимируются по формуле 6 достаточно точно (по графику видно, что кривые ложатся на кресты погрешности) на частотах около резонанса. При удалении от резонансных частот аппроксимация уже работает не точно. Скорее всего это связано с тем, что при удалении от резонансных частот формула 6 уже работает не так точно, так как она была выведена с учётом пренебрежения величин, которые становятся малыми при резонансе. Так же на неточность аппроксимации влияет то, что точек для каждой кривой не достаточно много (их порядка 30 для каждого значения  $C_n$ , для более менее точной аппроксимации их должно быть не менее 100);
3. Все значения добротности полученные разными методами имеют маленькую относительную погрешность (менее 7%). А так же для каждого значения  $C_n$ , значения  $Q$  пересекаются, что говорит о том, что выбранные методы расчета добротности работают достаточно точно;
4. Большая погрешность возникала при аппроксимации значения  $\delta$  из графиков. Скорее всего это связано с тем, что сама погрешность определения  $\phi$  большая, так как она напрямую связана с точностью картинки, которую мог нарисовать осциллограф, это накладывается на маленькое количество точек.
5. Значения  $\tau$  и  $\delta$  определенные через АЧХ и ФЧХ очень сильно отличаются (значения  $\tau$  отличаются примерно в два раза, значения  $\delta$  отличаются примерно в 10 раза). Возможно данная проблема возникает опять же из-за нехватки точек. Так же они могут так сильно отличаться, из-за того, что эти параметры сильно зависят от поведения значений на отдалении от резонанса, а формулы, которые были использованы наоборот описывают систему около резонансных частот.