

Квадратичные сортировки, сортировка слиянием

1. Даны k отсортированных массивов, сумма длин которых равна n . Придумайте алгоритм, позволяющий объединить все эти массивы в один отсортированный массив. Время работы $O(nk)$.
2. Даны два отсортированных массива a и b длины n . Найдите такие i и j , что значение $|a_i - b_j|$ минимально. Время работы $O(n)$.
3. Даны два отсортированных массива a и b длины n , а также число S . Найдите такие i и j , что $a_i + b_j = S$. Время работы $O(n)$.
4. Даны два отсортированных массива a и b длины n . Найдите количество пар (i, j) , таких что $a_i = b_j$. Время работы $O(n)$.
5. Дан массив a длины n , состоящий из неотрицательных целых чисел. Найдите в данном массиве подотрезок $[l, r]$, такой что $a_l + a_{l+1} + \dots + a_r = k$ либо определите, что его не существует. Время работы $O(n)$.
6. Решите предыдущую задачу при условии, что нужно найти подотрезок максимальной длины.
7. Дан массив a длины n , состоящий из неотрицательных целых чисел. Найдите количество подотрезков массива, сумма которых равна k .
8. Дан массив a . Назовем инверсией пару индексов (i, j) , такую что $i < j$ и $a_i > a_j$. Пусть в массиве длины n ровно k инверсий. Докажите, что сортировка вставками работает за $O(n + k)$.
9. Дан массив a длины n . Найдите количество инверсий в массиве за $O(n \log n)$.
Подсказка. Модифицируйте сортировку слиянием.
10. Придумайте способ сделать сортировку слиянием «снизу вверх», без использования рекурсии.
11. В отсортированный массив длины n в произвольное место вставили новый элемент. Придумайте алгоритм, позволяющий отсортировать получившийся массив за $O(n)$.
12. Постройте для произвольного n перестановку, для которой сортировка вставками делает наибольшее количество операций swap. Сколько в точности обменов совершится? Единственна ли построенная перестановка?
13. Дан массив a длины n . Необходимо для каждого элемента найти количество элементов, меньших его. Время работы $O(n \log n)$.
14. Дан массив a длины n , состоящий из натуральных чисел. Требуется найти минимальное натуральное число, которого нет в массиве, за $O(n \log n)$.
15. Даны два массива a и b длины n . Найдите такую пару (i, j) , что $a_i < a_j$ и $b_i < b_j$, либо определите, что такой пары не существует. Время работы $O(n \log n)$.