Echte Paare algebraisch abgeschlossener und echte dichte Paare o-minimaler Körper

Masterarbeit von

Max Aaron Vollprecht

Betreuer: Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro

21. April 2021

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau
Fakultät für Mathematik und Physik

Danksagung

Zu aller erst möchte ich Amador Martin-Pizarro danken, nicht nur für die hervorragende Betreuung dieser Arbeit und dafür, dass er immer für Fragen ansprechbar war, sondern auch für die unzähligen Kurse, Seminare und Vorlesungen, die ich in den letzten acht Semestern bei ihm hören konnte und für die Vermittlung der Freude an Back&Forth-Systemen.
Danken möchte ich außerdem meinen Eltern für ihre Unterstützung in den letzten 23 Jahren und natürlich insbesondere während des Studiums.
Ich danke ebenso allen Korrekturleserinnen, vor allem Meike Dünnweber und meiner Schwester Tabea.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Max Aaron Vollprecht, dass ich diese Masterarbeit selbstständig verfasst habe. Es wurden keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt.

Freiburg, den 21. April 2021

Vorwort

In vielen Bereichen der Algebra und Zahlentheorie betrachtet man Körpererweiterungen, wobei insbesondere die Körper $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}$ und $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ von Interesse sind, die die bekanntesten Modelle der Theorien ACF und RCF darstellen. Es liegt nahe, auch die Theorien der Erweiterungen

$$\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$$

modelltheoretisch zu untersuchen, bzw. allgemeiner echte Körpererweiterungen algebraisch abgeschlossener Körper und o-minimaler Körper.
Erstere sind ω-stabil und vollständig, wenn man eine Charakteristik vorgibt. In einer Sprache, die die lineare Abgebra der Körpererweiterung beschreibt, haben sie außerdem Quantorenelimination; die Sprache wird hierbei so gewählt, dass die Unterstrukturen von Modellen passender Saturiertheit ein Back&Forth-System bilden.
Für o-minimale Körper muss man nicht die Charakteristik vorgeben, sondern stattdessen, dass die Erweiterung dicht ist. Das weitere Vorgehen mit dem Finden einer neuen Sprache wäre zwar wieder möglich; da wir die ursprüngliche Sprache allerdings nicht eindeutig festlegen wollen, wäre die neue Sprache aber etwas umständlich zu verstehen. Indem man die Sprache sparsam erweitert und ein etwas modifiziertes, vom Verfahren her analoges B&F-System wählt, hat man zwar keine Quantorenelimination, aber doch eine erhebliche Reduktion der Formeln modulo der Theorie. Des weiteren erhält man über das Back&Forth-System einige Aussagen, unter welchen Bedingungen Elemente den selben Typ über bestimmten Mengen haben. Mit einer passenden Definition von Kleinheit folgen interessante Aussagen über echte dichte Paare o-minimaler Körper:

Satz. Intervalle sind nicht klein.

Satz. Wenn (B, A) ein dichtes Paar ist und $X \subseteq A^n$ eine im Paar definierbare Menge, dann ist $X = A^n \cap Z$ für eine im Redukt definierbare Menge Z.

Satz. In echten dichten Paaren stimmen definierbare Mengen und Funktionen bis auf kleine Mengen mit definierbaren Mengen und Funktionen im Redukt überein.

Satz. Definierbare Mengen in echten dichten Paaren lassen sich partitionieren in Punkte, Intervalle und Mengen, die dicht und kodicht in Intervallen liegen.

Satz. Offene und abgeschlossene definierbare Mengen in einem echten dichten Paar sind schon im Redukt definierbar.

Der letzte Satz wird hier nur mit Abstrichen bewiesen werden können, mehr dazu findet sich dann in dem entsprechenden Kapitel.

Notation

Im Folgenden seien, wenn nicht weiter erklärt, mit i, j, k, l, m, n immer natürliche Zahlen gemeint, mit κ immer unendliche Kardinalzahlen.
Oftmals wird nicht zwischen Strukturen und deren Trägermengen unterschieden, insbesondere bei Paaren von Strukturen. Wenn von $\mathcal{L}$-Definierbarkeit in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ die Rede ist, ist Definierbarkeit mit $\mathcal{L}_M$-Formeln gemeint, bei $\mathcal{L}_S$-Definierbarkeit für ein $S \subseteq M$ nur Definierbarkeit mit $\mathcal{L}_S$-Formeln. Wenn von dcl und acl die Rede ist, ist die kleinste Sprache gemeint, falls mehrere verwendet werden.
Als Topologie wird die Ordnungstopologie bzw. deren Produkttopologie verstanden, mit „Intervall“ ist ein offenes, nichtleeres Intervall mit Randpunkten in der Struktur oder $\pm\infty$ gemeint. Außerdem sei für $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ und eine A-definierbare Menge $X \subseteq B$ die Menge X_A die durch dieselbe definierende Formel in $\mathcal{A}$ definierbare Menge (für $X \subseteq A$ und X_B analog). Für Relationen P sei mit „$\exists/\forall x \in P(\dots)$“ die Formel

$$„\exists x(P(x) \wedge \dots)/\forall x(P(x) \rightarrow \dots)“$$

gemeint und für eine durch φ definierbare Menge X mit „$x \in X$“ die Formel $\varphi(x)$.
$|\overline{a}|$ soll je nach Kontext unterschiedliches bedeuten, einerseits die Supremumsnorm von $\overline{a}$, andererseits die Anzahl der Einträge. Da das eine ein Element der Struktur ist und das andere eine natürliche Zahl, ist immer klar erkennbar, was gemeint ist. Im Allgemeinen wird auch nicht immer zwischen Tupeln und Elementen unterschieden, außer, wenn das für das Verständnis notwendig ist. Auch werden Tupel an gewissen Stellen als Menge eingesetzt, dann sei jeweils die Menge aus den Tupeleinträgen gemeint.
Im modelltheoretischen Kontext ungewöhnlich sind Mengen der Form $\{f = g\}, \{f > g\}$ und $\{f < g\}$ für zwei Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$. Hierunter sollen die maßtheoretischen Interpretationen dieser Ausdrucksweise

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}, \{x \in X \mid f(x) > g(x)\} \text{ und } \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$$

verstanden werden. Ebenso aus einem anderen Kontext entliehen wird die Definition

$$1_Z(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn die Bedingung } Z(x) \text{ gilt} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} .$$

Inhaltsverzeichnis

Danksagung i
Eigenständigkeitserklärung i
Vorwort iii
Notation iv

1 Die Unabhängigkeit bezüglich acl **1**

2 Paare algebraisch abgeschlossener Körper 5
2.1 Grundlagen der Stabilitätstheorie 5
2.2 Algebraische und lineare Disjunktheit von Körpern 7
2.3 Die Theorien ACP 16

3 Dichte Paare o-minimaler Körper 29
3.1 O-minimale Theorien und ihre Eigenschaften 29
3.2 Anforderungen an die hier betrachteten Theorien 32
3.3 Kleine Mengen, Dichtheit und saturierte Modelle 33
3.4 Formelreduzierung in T^{d} 37
3.5 Folgen der Existenz des B&F-Systems 43
3.6 Definierbare Teilmengen von A^n 45
3.7 Definierbare Mengen in einer Variablen 48
3.8 Definierbare Funktionen und definierbarer Abschluss 55
3.9 Offene und abgeschlossene $\mathcal{L}^P$-definierbare Mengen 59

Anhang I
A Ein Alternativbeweis zur ω-Stabilität von ACP I

Literaturverzeichnis IV

1 Die Unabhängigkeit bezüglich acl

Im Folgenden werden wir einen wichtigen Begriff einführen, der im Weiteren hilfreich sein wird. Zuerst sei allgemein T eine $\mathcal{L}$-Theorie, die für den algebraischen Abschluss acl die Austauscheigenschaft erfüllt, außerdem sei $\mathcal{M}$ ein Modell von T. In diesem Fall induziert acl dann einen Dimensionsbegriff dim auf M und einen Unabhängigkeitsbegriff für eine Menge. Im Unterschied zu dieser Art der Unabhängigkeit einer Menge wird im Folgenden ein Begriff der Unabhängigkeit von zwei Mengen entwickelt.

Definition 1.0.1. Zwei Teilmengen A und B von M seien **unabhängig über** einer dritten Teilmenge $C \subseteq A, B$ genau dann, wenn für alle $\overline{a}$ in A gilt, dass

$$\dim(\overline{a}/B) = \dim(\overline{a}/C).$$

Lemma 1.0.2. Äquivalent zu dieser Definition ist die Aussage

„Alle $\overline{a}$ aus A sind genau dann unabhängig als Menge über B, wenn sie es über C sind“.

Beweis. Sei die zweite Aussage erfüllt. Da die Dimension die Kardinalität einer maximal unabhängigen Teilmenge beschreibt, gilt für alle $\overline{a}$ in A, dass – wenn ohne Einschränkungen $a_1, \ldots, a_k$ unabhängig über B (also auch über C) sind und die restlichen Elemente algebraisch über $B, a_1, \ldots, a_k$ – gilt

$$\dim(\overline{a}/B) = \dim(a_1, \ldots, a_k/B) = k = \dim(a_1, \ldots, a_k/C) \leq \dim(\overline{a}/C).$$

Durch die Wahl eines maximalen über C unabhängigen Teiltupels folgt die umgekehrte Ungleichung.
Wenn anders herum A und B unabhängig über C sind, und $\overline{a}$ ein über B unabhängiges Tupel ist, so gilt

$$|\overline{a}| = \dim(\overline{a}/B) = \dim(\overline{a}/C),$$

also ist $\overline{a}$ auch unabhängig über C. Die Wahl von $\overline{a}$ unabhängig über C beweist auf analogem Weg die Gegenrichtung. $\square$

Bemerkung. Man kann sich überlegen, dass sowohl in der Definition, als auch in der äquivalenten Aussage, jeweils eine Richtung bzw. Ungleichung klar ist. Beim Übergang zu einer kleineren Menge kann die Dimension eines Tupels nämlich nie kleiner werden und die Unabhängigkeit eines Tupels nie verloren gehen.

Diese Definition lässt sich auch auf beliebige Mengen $C \subseteq M$ verallgemeinern.

Definition 1.0.3. Nenne A und B unabhängig über C, wenn $A \cup C$ und $B \cup C$ unabhängig über C sind.

Im Folgenden werden einige Regeln für diese Art von Unabhängigkeit vorgestellt, mit denen man später „rechnen“ kann.

Lemma 1.0.4. Es sind A und B unabhängig über C genau dann, wenn für alle $\overline{a}$ in A und alle $\overline{b}$ in B jeweils $\overline{a}$ und $\overline{b}$ über C unabhängig sind.

Beweis. Dass man von A auf endliche Teilmengen übergehen kann, ist klar, da in der Definition nur auf endliche Teilmengen zurückgegriffen wird.
Man kann von B auf endliche Teilmengen übergehen, denn wenn A und B nicht unabhängig über C sind, gibt es ein $\overline{a}$ in A, sodass $\overline{a}$ unabhängig über C, aber nicht über $B \cup C$ ist. Es gibt also eine $\mathcal{L}_{B\cup C}$-Formel $\varphi(\overline{x}, \overline{b}, \overline{c})$, die die Abhängigkeit von $\overline{a}$ bezeugt. Da das schon eine $\mathcal{L}_{\overline{b}\cup C}$-Formel ist, sind aber A und $\overline{b}$ abhängig über C. Wenn andersherum A und B unabhängig über C sind, dann sind alle $\overline{a}$ aus A, die unabhängig über C sind, schon unabhängig über $B \cup C$, also erst recht über $\overline{b} \cup C$ für alle $\overline{b}$ in B. $\square$

Lemma 1.0.5. Die Relation der Unabhängigkeit ist symmetrisch in den ersten beiden Mengen.

Beweis. Seien A und B unabhängig über C. Nach dem letzten Lemma kann man annehmen, dass wir anstatt A und B Tupel $\overline{a}$ und $\overline{b}$ haben. Nimm an, dass

$$\dim(\overline{a}/C) = \dim(\overline{a}/C, \overline{b}),$$

dann folgt daraus

$$\dim(\overline{a}/C)+\dim(\overline{b}/C, \overline{a}) = \dim(\overline{a}, \overline{b}/C) = \dim(\overline{a}/C, \overline{b})+\dim(\overline{b}/C) = \dim(\overline{a}/C)+\dim(\overline{b}/C)$$

und durch Kürzen

$$\dim(\overline{b}/C) = \dim(\overline{b}/C, \overline{a}).$$

Also sind $\overline{b}$ und $\overline{a}$ unabhängig über C. $\square$

Lemma 1.0.6. Es seien A und B unabhängig über C und Teilmengen A', B', C' von M, die die Bedingungen

$$\begin{aligned} A' &\subseteq A, \\ B' &\subseteq B \cup C \text{ und} \\ C \subseteq C' &\subseteq B \cup C \end{aligned}$$

erfüllen. Dann sind A' und B' unabhängig über C'.

Beweis. Für die Ersetzung von A durch A' folgt die Aussage aus der Reduktion auf alle Teiltupel. Die beiden anderen Ersetzungen ändern nichts, weil für alle $\overline{a}$ in A die Ungleichung

$$\dim(\overline{a}/C) \geq \dim(\overline{a}/C') \geq \dim(\overline{a}/B' \cup C') \geq \dim(\overline{a}/B \cup C) = \dim(\overline{a}/C)$$

gilt, die Gleichheit impliziert. □

Lemma 1.0.7. Wenn A und B unabhängig über C sind, dann sind $\operatorname{acl}(A)$ und $\operatorname{acl}(B)$ unabhängig über C.

Beweis. Das ist eine direkte Konsequenz der Gleichheit

$$\dim(\cdot/X) = \dim(\cdot/\operatorname{acl}(X)),$$

die wegen der Symmetrie auf beiden Seiten den Übergang auf die größere Menge ermöglicht. Dabei ist zu beachten, dass $\operatorname{acl}(A) \cup C \subseteq \operatorname{acl}(A \cup C)$ und $\operatorname{acl}(B) \cup C \subseteq \operatorname{acl}(B \cup C)$ gilt. □

Lemma 1.0.8. Seien A und B unabhängig über C und eine über $A \cup B \cup C$ unabhängige Teilmenge $X \subseteq M$. Dann sind $A \cup X$ und B unabhängig über C.

Beweis. Sei $(\overline{a}, \overline{x})$ ein Tupel aus $A \cup X$, wobei $\overline{a}$ in A ist und $\overline{x}$ in X. Da X unabhängig über $A \cup B \cup C$ ist, ist $(\overline{a}, \overline{x})$ genau dann unabhängig über C, wenn $\overline{a}$ es ist. Wegen der Unabhängigkeit von A und B über C ist das genau dann der Fall, wenn $\overline{a}$ unabhängig über $B \cup C$ ist; wegen der Unabhängigkeit von X ist das wiederum äquivalent dazu, dass $(\overline{a}, \overline{x})$ unabhängig ist über $B \cup C$. □

Lemma 1.0.9. Seien A und B unabhängig über C und sei eine Teilmenge $X \subseteq B$. Dann sind $A \cup X$ und B unabhängig über $C \cup X$.

Beweis. Sei $(\overline{a}, \overline{x})$ ein Tupel aus $A \cup X$, wobei $\overline{a}$ in A ist und $\overline{x}$ in X. Dieses Tupel ist genau dann unabhängig über $C \cup X$ (bzw. $B \cup (C \cup X)$), wenn $\overline{a}$ unabhängig über $C \cup X$ (bzw. $B \cup (C \cup X)$) ist und $|\overline{x}| = 0$.
Wegen der Unabhängigkeit von A und B über C gilt

$$\dim(\overline{a}/C) = \dim(\overline{a}/B \cup C) = \dim(\overline{a}/B \cup (C \cup X)) \leq \dim(\overline{a}/C \cup X) \leq \dim(\overline{a}/C),$$

also ist $\overline{a}$ genau dann unabhängig über $C \cup X$, wenn es unabhängig über $B \cup (C \cup X)$ ist und zusammen mit der oberen Äquivalenz ist die Unabhängigkeit gezeigt. $\square$

Lemma 1.0.10. Wenn A und B unabhängig über C sind, gilt die Inklusion

$$A \cap B \subseteq \operatorname{acl}(C).$$

Beweis. Es sei $a \in A \cap B$ beliebig. Offenkundig ist a algebraisch über B und daher gilt

$$0 = \dim(a/B \cup C) = \dim(a/C),$$

also ist a in $\operatorname{acl}(C)$. $\square$

Die hier entwickelte Unabhängigkeit wird in den folgenden zwei Kapiteln auf zwei Arten von acl-Matroiden angewendet. Einerseits im ersten Kapitel auf die streng minimale Theorie ACF und andererseits im zweiten Kapitel auf gewisse o-minimale Theorien, die ebenso die Austauscheigenschaft erfüllen. Aber zunächst wird noch ein weiterer Begriff eingeführt werden, der sehr ähnlich aussieht, aber modelltheoretisch nicht so gut zu begreifen ist. Dies ist der Begriff der linearen Disjunktheit, der im Umgang viel lineare Algebra benutzt. Da in den Theorien der Vektorräume die Skalarmultiplikation jeweils Teil der Sprache ist, kann man modelltheoretisch nicht ganz so gut zwischen verschiedenen Dimensionsfunktionen hin- und herspringen. Darum kommt im Folgenden nach einer Aufzählung der wichtigsten Erkenntnisse aus der Stabilitätstheorie erst einmal ein großes Stück (lineare) Algebra.

2 Paare algebraisch abgeschlossener Körper

Der hier vorgestellte Beweis stammt ursprünglich aus einem Werk ([Rob59]) von Robinson, dem es in erster Linie um die von Tarski aufgeworfene Farge nach der Vollständigkeit und Entscheidbarkeit der Theorie der echten Paare algebraisch abgeschlossener Körper ging. Später beschäftigte sich auch Keisler in [Kei64] mit solchen Paaren, wobei dort der kleinere Körper nicht unbedingt algebraisch abgeschlossen sein musste.
In diesem Werk soll es aber vorwiegend um Stabilität und eine gewisse Form der Formelreduktion gehen.

2.1 Grundlagen der Stabilitätstheorie

Im Folgenden werden einige Aussagen über abzählbare und vollständige Theorien T in einer Sprache $\mathcal{L}$ aufgezählt, die die Grundlage für die Stabilitätstheorie bilden. Als Quelle soll dabei [Mar02] dienen. Diese Erkenntnisse werden wichtig werden, um die ω-Stabilität der Theorie der echten Paare algebraisch abgeschlossener Körper zu zeigen.

Definition 2.1.1. Sei $\mathcal{M}$ ein $\aleph_0$-saturiertes Modell von T und X eine beliebige $\mathcal{L}_M$-definierbare Menge in M^n. Der **Morleyrang** $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(X)$ von X in $\mathcal{M}$ sei dann induktiv definiert

- durch -1 genau dann, wenn X leer ist
- durch 0 genau dann, wenn X endlich und nichtleer ist
- als $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(X) \geq \alpha + 1$ für eine Ordinalzahl α genau dann, wenn es unendlich viele paarweise disjunkte $\mathcal{L}_M$-definierbare Teilmengen von X gibt, die jeweils Morleyrang größer als oder gleich α haben
- als $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(X) \geq \gamma$ für eine Limesordinalzahl γ genau dann, wenn er größer als jede Zahl kleiner γ ist.

Ist $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(X)$ größer als oder gleich α für eine Ordinalzahl α, aber nicht größer als oder gleich $\alpha + 1$, so sei $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(X) := \alpha$, ist $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(X)$ größer als alle Ordinalzahlen, sei $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(X) := \infty$ (oder alternativ: der Rang ist nicht definiert).

Definition 2.1.2. Für ein $\aleph_0$-saturiertes Modell $\mathcal{M}$ von T und φ eine $\mathcal{L}_M$-Formel sei

$$\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\varphi) := \mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\varphi(\mathcal{M})).$$

Fakt/Definition 2.1.3. Für allgemeine Modelle $\mathcal{M}'$ und eine $\aleph_0$-saturierte Elementarerweiterung $\mathcal{M}$ sowie eine $\mathcal{L}_{M'}$-Formel φ ist der Morleyrang von φ in $\mathcal{M}$ nicht von der konkreten Wahl der Erweiterung abhängig.
Definiere daher in einem Modell $\mathcal{M}'$ den Morleyrang $\mathrm{RM}(\varphi)$ als den Morleyrang $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\varphi)$ in einer beliebigen $\aleph_0$-saturierten Erweiterung $\mathcal{M}$ und $\mathrm{RM}(X) := \mathrm{RM}(\varphi)$ für eine durch φ definierbare Menge $X \subseteq (M')^n$.

Fakt/Definition 2.1.4. In jedem Modell $\mathcal{M}$ existiert für jede $\mathcal{L}_M$-Formel φ mit $\mathrm{RM}(\varphi) \neq \infty$ eine natürliche Zahl n, sodass es in jeder Elementarerweiterung $\mathcal{M}'$ maximal n viele disjunkte Teilmengen von $\varphi(M')$ mit demselben Morleyrang gibt. Das kleinste solche n nennt man den Morleygrad DM.

Definition 2.1.5. Für einen Typen p definiere

$$\mathrm{RM}(p) := \min_{\psi \in p} \mathrm{RM}(\psi),\ \mathrm{DM}(p) := \min_{\psi \in p, \mathrm{RM}(\psi) = \mathrm{RM}(p)} \mathrm{DM}(\psi).$$

Als Kurzschreibweise stehe außerdem bei einem gegebenen Modell $\mathcal{M}$, $\overline{a}$ in M und S als Teilmenge von M die Bezeichnung $\mathrm{RM}(\overline{a}/S)$ für $\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(\overline{a}/S))$.
Analog sei $\mathrm{DM}(p)$ definiert.

Bemerkung. Der Rang und Grad eines Typen werden in einer Formel aus dem Typen angenommen, nenne diese **minimal**.

Fakt 2.1.6. Es sei in einem Modell $\mathcal{M}$ eine definierbare Menge X streng minimal. Dann ist für jedes Tupel $\overline{a}$ in X sowie jede Teilmenge S von M, über der X definierbar ist, der Morleyrang schon bekannt:

$$\mathrm{RM}(\overline{a}/S) = \dim(\overline{a}/S)$$

Außerdem ist eine Formel φ streng minimal genau dann, wenn ihr Rang und Grad beide Eins sind.

Fakt 2.1.7. Sei $\mathcal{M}$ ein Modell und eine Teilmenge $S \subseteq M$, außerdem F eine konsistente und unter Konjunktion abgeschlossene Menge von $\mathcal{L}_S$-Formeln in n freien Variablen, die eine Formel mit definiertem Morleyrang enthält. Dann gibt es für jede hinreichend große Obermenge S' von S genau $\mathrm{DM}(F)$ Fortsetzungen von F zu einem Typen über S' mit Morleyrang $\mathrm{RM}(F)$ (die Definition von Rang und Grad werde entsprechend von Typen verallgemeinert).
Wenn der Morleygrad Eins ist, nenne den partiellen Typen **stationär**.

Fakt 2.1.8. Die Theorie T ist ω-stabil genau dann, wenn jede Formel definierten Morleyrang hat. Äquivalent ist, dass jede Formel in einer Variable definierten Morleyrang hat oder dass jeder Typ in einer Variable definierten Morleyrang hat.

Fakt 2.1.9. In jedem Modell ist für alle natürlichen Zahlen n die Menge der angenommenen Morleyränge von Formeln oder Typen in n Variablen ein Anfangsstück von $\mathbf{On} \cup \{\infty\}$.

Fakt 2.1.10. Sei $\mathcal{M}$ ein Modell und seien $\overline{a}, \overline{b}$ Tupel in M sowie S eine Teilmenge von M. Wenn $\overline{a}$ und $\overline{b}$ interalgebraisch über S sind, folgt

$$\mathrm{RM}(\overline{a}/S) = \mathrm{RM}(\overline{b}/S).$$

2.2 Algebraische und lineare Disjunktheit von Körpern

In diesem Teil richten wir uns im Aufbau und der Lemma-übergreifenden Strategie im Großen und Ganzen nach [Del12], wohingegen die konkreten Beweise meist von [Lan73] inspiriert sind. Ziel ist es, zwei algebraische Relationen zu verstehen, die Körper zueinander haben können.

Definition 2.2.1. Gegeben Körperinklusionen $C \subseteq K, L \subseteq M$ in Rautenform, nenne K und L **linear disjunkt über** C, falls alle Basen von K als C-Vektorraum auch über L linear unabhängig bleiben. Nenne K und L **algebraisch disjunkt über** C, falls alle Transzendenzbasen von K über C auch algebraisch unabhängig über L bleiben. Schreibe $K \,\mathrm{ld}_C\, L$ bzw. $K \,\mathrm{ad}_C\, L$.

Bemerkung.

- Algebraische Disjunktheit ist nichts anderes als die Einschränkung der Unabhängigkeit aus dem letzten Kapitel auf bestimmte Mengen (nämlich Körpern in Rautenanordnung). Denn Körper K und L sind algebraisch disjunkt über C genau dann, wenn sie unabhängig über C sind im modelltheoretischen Sinn als Teilmengen eines algebraisch abgeschlossenen Körpers.
  Wir bezeichnen es dennoch anders, um Verwirrung zu vermeiden. Wenn nämlich alle betrachteten Mengen schon Körper sind und die beiden Mengen, zwischen denen Unabhängigkeit gilt, schon Obermengen der dritten sind, kann man etwas weitergehende Eigenschaften feststellen, die im Normalfall so nicht gelten.

- Es reicht, lineare Disjunktheit für eine Basis zu zeigen. Denn wenn man die lineare Unabhängigkeit über L für eine Basis verliert, verliert man sie per C-Basiswechsel auch für alle anderen.

- Es reicht, die Erhaltung der linearen/algebraischen Unabhängigkeit nur für beliebige endliche Mengen zu prüfen. Denn lineare/algebraische Unabhängigkeit einer Menge besteht genau dann, wenn sie für alle endlichen Teilmengen gilt.
- Der Körper M kommt in der Definition nur vor, damit die Rechenoperationen zwischen K und L wohldefiniert sind. Die genaue Wahl ist irrelevant und daher nicht in der Notation berücksichtigt. Wir nehmen für die Zukunft einfach an, dass die Multiplikation klar definiert ist. Es wird sich ohnehin herausstellen, dass im Fall $K \operatorname{ld}_C L$ die Operationen eindeutig bestimmt sind.

Beispiel. Wir wollen Beispiele für die verschiedenen Konstellationen aus linearer und algebraischer Disjunktheit geben:

- Trivialerweise gilt für alle Körper $C \subseteq K$, dass C und K sowohl linear als auch algebraisch disjunkt über C sind.
  Ein weniger leichtes Beispiel wäre, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ linear und algebraisch disjunkt über $\mathbb{Q}$ sind. Die lineare Disjunktheit folgt, wenn man feststellt, dass 1 und $\sqrt{2}$ nicht linear abhängig über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sein können, da sonst $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ wäre. Für algebraische Disjunktheit ist nichts zu zeigen, da $\dim(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})$ ohnehin schon 0 ist.
- Als Beispiel für algebraische und fehlende lineare Disjunktheit können die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ über $\mathbb{Q}$ dienen. Algebraische Disjunktheit folgt dabei wie oben und lineare Disjunktheit gilt nicht, da 1 und $\sqrt{2}$ nicht linear unabhängig über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sind.
- Ausstehend ist noch der Fall, in dem keine Art von Disjunktheit gilt: Das ist zum Beispiel bei den Körpern $\mathbb{Q}(\pi)$ und $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$ so, da $\mathbb{Q}(\pi)$ Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist und daher lineare Dimension 1 und algebraische Dimension 0 über $\mathbb{C}$ hat, aber lineare Dimension $\aleph_0$ und algebraische Dimension 1 über $\mathbb{Q}$ besitzt.

Es fällt auf, dass die Kombinationsmöglichkeit „lineare, aber keine algebraische Disjunktheit“ nicht behandelt wurde. Das liegt daran, dass sie nicht möglich ist, wie später erklärt werden wird.

Lemma 2.2.2. Sei C ein Körper und seien $C \subseteq R, S$ Ringerweiterungen des Körpers auf Integritätsbereiche. Dann sind $\mathrm{Frac}(R)$ und $\mathrm{Frac}(S)$ linear disjunkt über C genau dann, wenn linear unabhängige Mengen in R über C auch linear unabhängig über S bleiben.

Beweis. Die Hinrichtung folgt leicht aus $R \subseteq \mathrm{Frac}(R), S \subseteq \mathrm{Frac}(S)$. Für die Rückrichtung seien $r_1x_1^{-1}, \dots, r_nx_n^{-1}$ in $\mathrm{Frac}(R)$ linear unabhängig über C, aber linear abhängig über $\mathrm{Frac}(S)$ mit nichttrivialer Linearkombination

$$(s_1y_1^{-1})r_1x_1^{-1}, \dots, (s_ny_n^{-1})r_nx_n^{-1} = 0,$$

wobei alle $s_iy_i^{-1}$ aus $\mathrm{Frac}(S)$ seien.
Durch Multiplikation mit $\prod_{i=1}^{n} x_iy_i \neq 0$ erhält man die Gleichung

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (\prod_{i \neq j} x_i) r_j (\prod_{i \neq j} y_i) s_j.$$

Diese bezeugt die lineare Abhängigkeit über S der Elemente $((\prod_{i \neq j} x_i) r_j)_{1,\dots,n}$ in R, die über C unabhängig sind, denn die lineare Unabhängigkeit eines Tupels bleibt bei Multiplikation mit einem Nichtnull-Element erhalten. ☐

Bemerkung. Es reicht in obiger Aussage wieder, sich auf endliche Mengen zu beschränken. Alternativ kann man die Erhaltung der linearen Unabhängigkeit auch wieder nur für eine C-Basis von R zeigen.

Das folgende Lemma sagt insbesondere aus, dass lineare Disjunktheit symmetrisch ist. Noch viel wichtiger ist aber die Aussage über die Struktur der zueinander als Ringe adjungierten Körper.

Lemma 2.2.3. Für Körper C, K, L wie oben gilt $K \,\mathrm{ld}_C\, L$ genau dann, wenn eine Isomorphie

$$K[L] = L[K] \cong K \otimes_C L$$

mit dem kanonischem Isomorphismus besteht.

Beweis. Der aufgespannte Ring erfüllt

$$K[L] = \{ \sum_{(k,l) \in X} kl \mid X \subseteq K \times L \text{ endlich} \} = L[K].$$

Wenn $(k_i)_I, (l_j)_J$ Basen von K, L über C sind, ist $(k_i \otimes l_j)_{i \in I, j \in J}$ eine Basis von $K \otimes_C L$.

Der C-Homomorphismus

$$\sum_{i\in I_0, j\in J_0} c_{ij}k_i \otimes l_j \mapsto \sum_{i\in I_0, j\in J_0} c_{ij}k_il_j$$

für endliche, beliebige Teilmengen $I_0 \subseteq I, J_0 \subseteq J$ ist immer surjektiv, da klarerweise $E := (k_il_j)_{i\in I, j\in J}$ ein Erzeugendensystem von $K[L]$ ist.
Er ist injektiv genau dann, wenn E auch linear unabhängig über C ist, also keine Linearkombination

$$0 = \sum_{i\in I_0, j\in J_0} c_{ij}k_il_j = \sum_{i\in I_0}(\sum_{j\in J_0} c_{ij}l_j)k_i$$

existiert mit $c_{ij} \neq 0$ für mindestens ein Paar (i, j). Aber das ist genau dann der Fall, wenn keine $\tilde{c}_i = \sum_{j\in J_0} c_{ij}l_j$ in L existieren mit i in I_0 und so, dass $\tilde{c}_i \neq 0$ für mindestens ein i und $0 = \sum_{i\in I_0} \tilde{c}_ik_i$ gilt; also wenn die $(k_i)_I$ linear unabhängig über L sind. □

Folgerung 2.2.4. Seien im Folgenden die Körper C, K, L, C', K', L' gegeben, sodass K und L linear disjunkt über C sind sowie K' und L' über C'. Es existiere ein Isomorphismus $C \cong C'$, der eine Fortsetzung auf $\varphi_1 : K \cong K'$ und eine andere auf $\varphi_2 : L \cong L'$ habe. Dann gibt es eine „fusionierte“ Fortsetzung auf $K[L] \cong K'[L']$, denn die zwei Fortsetzungen induzieren einen Isomorphismus

$$K \otimes_C L \cong K' \otimes_C' L',$$

durch die Abbildungsvorschrift

$$k \otimes l \mapsto \varphi_1(k) \otimes \varphi_2(l).$$

Dieser setzt die vorigen Abbildungen von den Teilkörpern

$$K \cong K \otimes_C 1, L \cong 1 \otimes_C L \text{ und } C \cong C \otimes_C 1 = 1 \otimes_C C$$

fort.
Insbesondere gibt es auch nur eine Möglichkeit, die Verknüpfung von Elementen aus linear disjunkten Körpern zu definieren (was wir zu Beginn dieses Kapitels schon ohne Beweis erwähnt hatten).

Definition 2.2.5.

- Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heiße **regulär**, wenn $\overline{K} \operatorname{ld}_K L$.
- Für Körper $K, L \subseteq M$ sei $KL := K(L) = L(K)$.

Beispiel. Die simpelsten Möglichkeiten für eine reguläre Körpererweiterung $K \subseteq L$ wäre einerseits, wenn K selbst schon algebraisch abgeschlossen ist; andererseits auch die Adjunktion eines transzendenten Elements e zu einem Körper K.
Im ersten Fall gilt die lineare Disjunktheit schon wegen Körpergleichheit, im zweiten Fall ist die K-Basis $\dots, e^{-1}, 1, e, e^2, \dots$ linear unabhängig über $\overline{K}$, sonst wäre e nicht transzendent.

Wir können einige Folgerungen und „Rechenregeln" aus den definierten Eigenschaften ziehen, die insbesondere zeigen, unter welchen Bedingungen sich lineare und algebraische Disjunktheit gegenseitig implizieren und was für Regeln bei Inklusionsketten gelten.

Lemma 2.2.6. Gegeben die Körperinklusionen $C \subseteq L \subseteq M$ und $C \subseteq K$. Dann gilt $K \operatorname{ld}_C M$ genau dann, wenn $K \operatorname{ld}_C L$ und $KL \operatorname{ld}_L M$ gilt.

Beweis. Sei $(k_h)_H$ eine Basis von K über C, $(l_i)_I$ eine Basis von L über C und $(m_j)_J$ eine Basis von M über L. Die Aussage $K \operatorname{ld}_C M$ bedeutet, dass die C-Basis von K auch eine M-Basis von K ist, aber dann ist sie natürlich auch eine L-Basis wegen den Inklusionen $C \subseteq L \subseteq M$. Dies folgt, da die Eigenschaft, Erzeugendensystem über dem Körper zu sein, sich nach oben vererbt, die für die lineare Unabhängigkeit sich dafür nach unten vererbt. Also gilt $K \operatorname{ld}_C L$.
Außerdem ist $(l_i m_j)_{I \times J}$ eine Basis von M über C und $(k_h)_H$ eine Basis von $L[K]$ als L-Vektorraum. Die erste Aussage ist aus dem Beweis der Multiplikativität von Körpererweiterungsgraden bekannt und bei der zweiten folgt aus der Definition von ld die Unabhängigkeit, die Eigenschaft als Erzeugendensystem ist klar.
Wenn $KL \operatorname{ld}_L M$ nicht gelten würde, müsste nach Lemma 2.2.2 und der anschließenden Bemerkung schon die L-Basis $(k_h)_H$ von $L[K]$ linear abhängig über M sein, es gäbe also eine M-Linearkombination

$$\sum_{h \in H} \lambda_h k_h = 0, \text{ wobei } \lambda_h = 0 \text{ für fast alle, aber nicht alle } h \text{ in } H.$$

Da $(k_h)_H$ aber die Basis von K über C ist, widerspricht das $K \operatorname{ld}_C M$.

Für die Rückrichtung ist zu zeigen, dass $(l_i m_j)_{I\times J}$ linear unabhängig über K bleibt. Wenn nicht, sei

$$0 = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij} l_i m_j, \text{ wobei } \lambda_{ij} = 0 \text{ für fast alle, aber nicht alle } (i,j) \text{ in } I\times J$$

eine K-Linearkombination, die das bezeugt. Schreibe

$$\lambda_{ij} =: \sum_{h\in H} c_{hij} k_h$$

als C-Basisdarstellung für alle (i,j) in $I\times J$.
Einsetzen und Umklammern führt uns zur Linearkombination

$$0 = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij} l_i m_j = \sum_{(i,j)\in I\times J} \left(\sum_{h\in H} c_{hij} k_h\right) l_i m_j = \sum_{i\in I} \left(\sum_{(h,j)\in H\times J} c_{hij} k_h l_i\right) m_j,$$
$$\text{wobei } c_{hij} = 0 \text{ für fast alle, aber nicht alle } (h,i,j) \text{ in } H\times I\times J.$$

Da wir aber $KL \operatorname{ld}_C M$ annehmen, muss

$$\sum_{(h,j)\in H\times J} c_{hij} k_h l_i = 0 \text{ sein für alle } j \text{ in } J,$$

und da wir $K \operatorname{ld}_C L$ annehmen, folgt daraus $c_{hij} = 0$ für alle h, i, j. □

Für weitere Regeln brauchen wir einen eingeschobenen Fakt aus [Lan73] (Seite 57, Theorem 3), der mit Bewertungen bewiesen wird.

Fakt 2.2.7. Wenn $C \subseteq K$ regulär ist und $K \operatorname{ad}_C L$, folgt $K \operatorname{ld}_C L$.

Damit lassen sich dann einige Regeln für das „Herumschieben“ von linearer und algebraischer Disjunktheit beweisen.

Lemma 2.2.8. Seien C, K, L, M Körper.

1. Wenn K und L linear disjunkt über C sind, so ist $K \cap L = C$.

2. Wenn die Erweiterung $C \subseteq K$ algebraisch und die Erweiterung $C \subseteq L$ regulär ist, dann sind K und L linear disjunkt über C.

3. Wenn K und L linear disjunkt über C sind, sind sie auch algebraisch disjunkt.

4. Wenn K und L algebraisch disjunkt über C sind, dann sind es auch $\overline{K}$ und $\overline{L}$.

5. Wenn K und L linear disjunkt über C sind, $K \subseteq M$ gilt und $X \subseteq M$ algebraisch unabhängig über KL ist, dann folgt $K(X) \operatorname{ld}_K KL$.

6. Wenn die Erweiterung $C \subseteq K$ regulär ist und K und L linear disjunkt über C sind, folgt $K \operatorname{ld}_C \overline{L}$ und außerdem, dass die Erweiterung $L \subseteq KL$ regulär ist.

Beweis.

1. Die eine Inklusion gilt, denn $C \subseteq K, L$. Für die Inklusion in Gegenrichtung sei x in $(K \cap L) \setminus C$. Dann ist $(1, x)$ in K linear abhängig über L und somit auch über C. Aber dann ist x schon in C, weil es als C-Vielfaches von 1 geschrieben werden kann.

2. Wegen der Regularität gilt $L \operatorname{ld}_C \overline{C}$ und wegen $C \subseteq K \subseteq \overline{C}$ und dem Lemma 2.2.6 gilt $L \operatorname{ld}_C K$.

3. Seien $k_1, \ldots, k_n$ in K algebraisch abhängig über L, das heißt, es gibt ein Polynom

$$0 \neq f(X) = \sum_{|\alpha| \leq m} l_\alpha X^\alpha \text{ in } L[X_1, \ldots, X_n]$$

mit $f(k) = 0$, also insbesondere $(k^\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ linear abhängig über L, per Annahme also auch über C. Dann existiert aber eine Linearkombination $\sum\limits_{|\alpha| \leq m} c_\alpha k^\alpha = 0$ mit c_α in C nicht alle Null, und diese bezeugt die algebraische Abhängigkeit über C.

4. Diese Aussage ist exakt der Spezialfall von Lemma 1.0.7 in unserem Setting von Körpern als Teilmengen eines algebraisch abgeschlossenen Körpers.

5. Wegen algebraischer Unabhängigkeit ist

$$|\overline{x}| = \dim(\overline{x}/KL) \leq \dim(\overline{x}/K) \leq |\overline{x}|$$

für alle $\overline{x}$ in X, also sind X und KL im modelltheoretischen Sinne unabhängig über K. Das gilt dann nach den Regeln aus Kapitel 1 auch für $K \cup X$ und KL, für $\operatorname{acl}(K \cup X)$ und KL und auch für $K(X)$ und KL, also $K(X) \operatorname{ad}_K KL$.
Die Erweiterung $K(X) \supseteq K$ ist außerdem regulär, denn $K[X]$ hat als K-Basis

$$\left\{ \prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i} \right\}_{\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X,\ n \in \mathbb{N}^k},$$

wie man wegen algebraischer Unabhängigkeit sieht.

Diese Basis bleibt aber linear unabhängig über $\overline{K}$, denn sonst wäre ein Polynom in $\overline{K}[X_1, X_2, \ldots]$ gefunden, was ein x aus X über den anderen Elementen algebraisiert, also

$$x \in \operatorname{acl}(X \setminus \{x\} \cup \overline{K}) = \operatorname{acl}(X \setminus \{x\} \cup K),$$

demnach wäre X nicht mehr algebraisch unabhängig über K. Lemma 2.2.2 besagt dann

$$K(X) = \operatorname{Frac}(K[X]) \operatorname{ld}_K \overline{K}.$$

Also haben wir $K(X) \operatorname{ad}_K KL$ und $K(X) \supseteq K$ regulär, woraus nach Fakt 2.2.7 $K(X) \operatorname{ld}_K KL$ folgt.

6. Mit 3. folgt $K \operatorname{ad}_C L$, mit 4. $\overline{K} \operatorname{ad}_C \overline{L}$, mit Lemma 2.2.6 $K \operatorname{ad}_C \overline{L}$, mit Fakt 2.2.7 $K \operatorname{ld}_C \overline{L}$ (benutze $C \subseteq K$ regulär) und mit noch einmal Lemma 2.2.6 gilt schließlich für die Einbettungskette $C \subseteq L \subseteq \overline{L}$ die Regularitätsbedingung $LK \operatorname{ld}_L \overline{L}$.

□

Es hat nicht nur die algebraische Disjunktheit, sondern auch die Regularität einer Erweiterung und die lineare Disjunktheit eine modelltheoretische Bedeutung.

Lemma 2.2.9. Es sei eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ gegeben und ein Tupel a aus L. Dann ist $K \subseteq K(a)$ genau dann regulär, wenn $\operatorname{tp}(a/K)$ stationär im Modell $\overline{L}$ von ACF ist.

Beweis. Die minimale Formel dieses Typen ist eine, die beschreibt, welche Elemente algebraisch übereinander sind und wie sie es sind. Ohne Einschränkungen sei a so angeordnet, dass die ersten k Einträge algebraisch unabhängig über K sind und alle späteren im algebraischen Abschluss davon. Die minimale Formel beschreibe dann ohne Einschränkungen Polynome von minimalem Grad derart, dass a_{k+1} über $K[a_1, \ldots, a_k]$ algebraisiert wird, a_{k+2} über $K[a_1, \ldots, a_{k+1}]$ und so weiter.
Hierbei seien die auftretenden Potenzen der a_i in den Koeffizienten schon maximal reduziert, also für alle i größer als k auf jeden Fall kleiner als der Grad des Minimalpolynoms von a_i über $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$, dieser sei mit n_i bezeichnet. Dann ist $\operatorname{tp}(a/K)$ stationär genau dann, wenn keines dieser Polynome über $K[a_1, \ldots, a_i]$ beim Übergang zu einer größeren Parametermenge als K reduzibel wird.

Da ACF modellvollständig ist, ist das äquivalent dazu, dass kein solches Polynom beim Übergang zu $\overline{K}$ reduzibel wird und das wiederum ist dasselbe wie die Aussage, dass die Erzeuger

$$(a_1^{m_1} \cdot \dots \cdot a_{|a|}^{m_{|a|}})_{m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}, 0 \leq m_i < n_i \text{ für } i>k}$$

von $K[a]$ über $\overline{K}$ linear unabhängig bleiben, also dass $K(a)$ und $\overline{K}$ linear disjunkt über K sind. □

Bemerkung. Damit ist die Folgerung 2.2.4 das algebraische Analogon zu folgender Aussage aus der Stabilitätstheorie: Sei $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ zwei Modelle einer ω-stabilen vollständigen, abzählbaren Theorie und Mengen $S \subseteq M, S' \subseteq N$, sodass es eine elementare Abbildung

$$\varphi : S \cong S'$$

gibt, außerdem seien a, b Tupel in M und a', b' Tupel in N, sodass gelte:

$$\varphi(\mathrm{tp}(a/S)) = \mathrm{tp}(a'/S'), \varphi(\mathrm{tp}(b/S)) = \mathrm{tp}(b'/S).$$

Wenn a und b unabhängig über S sind sowie a' und b' unabhängig über S', außerdem $\mathrm{tp}(b'/S)$ stationär, dann kann der gemeinsame Typ von a und b ebenso durch φ übertragen werden:

$$\varphi(\mathrm{tp}(a, b/S)) = \mathrm{tp}(a', b'/A).$$

Dass die Aussagen einander fast entsprechen, sieht man daran, dass die Übertragung der Typen durch φ Isomorphismen zwischen den erzeugten Körpern $\langle S, a \rangle$ und $\langle S', a' \rangle$ sowie zwischen $\langle S, b \rangle$ und $\langle S', b' \rangle$ entspricht, die sich auf einen Isomorphismus

$$\langle S, a, b \rangle \cong \langle S', a', b' \rangle$$

fortsetzen lassen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass in der modelltheoretischen Version die Unabhängigkeit von a und b über S sowie von a' und b' über S' eine algebraische Disjunktheit auf beiden Seiten erzeugt, die wegen Stationarität des Typen nur einseitig zur linearen Disjunktheit wird.

2.3 Die Theorien ACP

Wir wollen Paare (K, E_K) von Körpern betrachten, wobei $E_K \subseteq K$ ist. Diese lassen sich in einer Sprache $\mathcal{L}^{f,c}$ axiomatisieren, die die lineare Algebra der Körpererweiterung beschreibt, dort haben echte Paare (d.h. $K \neq E_K$) algebraisch abgeschlossener Körper mit fixierter Charakteristik sogar Quantorenelimination und sind vollständig. In einer kleineren Sprache $\mathcal{L}^{ld}$ ist diese Theorie immerhin noch modellvollständig. Diese Sprachen und einige der Folgerungen für ihre Strukturen wollen wir hier (angelehnt an [Del12]) einführen.

Definition 2.3.1. Wir definieren die Sprachen $\mathcal{L}^{ld} := \{0, 1, +, -, \cdot, (l_n)_{n\geq 2}\}, \mathcal{L}^f := \mathcal{L}^{ld} \cup \{f_{i,n} \mid n \geq 2, 1 \leq i \leq n\}$ und $\mathcal{L}^{f,c} := \mathcal{L}^f \cup \{^{-1}\}$, wobei die $(l_n)_n$ n-stellige Relationen sein sollen und die $(f_{i,n})_{i,n}$ $n+1$-stellige Funktionen.

Es kommt im Folgenden zu einem kleineren Problem: Eigentlich benötigt man für $^{-1}$ und die $f_{i,n}$ eine Auffassung als partielle Funktionen und im Folgenden werden sie auch so behandelt. Da das aber grundsätzlich nicht in unseren Axiomen der Logik vorgesehen ist, muss man die Funktionen durch 0 fortsetzen. Rein formal gesehen gibt es dann den Unterschied zwischen der Interpretation von

„$f_{i,n}(\overline{x}) = 0$“

als logische Formel in der Sprache und als für uns relevante Aussage, der gerade in der Aussage

„$\overline{x}$ liegt nicht im partiellen Definitionsbereich von $f_{i,n}$“

besteht.
Da aber sowohl der Definitionsbereich von $^{-1}$ als auch von jedem $f_{i,n}$ quantorenfrei 0-definierbar ist, wird dieser Unterschied im Folgenden ignoriert werden, weil der Übergang zwischen diesen Interpretationen immer möglich ist, ohne in irgendeiner Form Bedingungen oder Aussagen von Sätzen zu verändern. Diese Tatsache ist stets im Hinterkopf zu behalten, insbesondere auch in Folgerung 2.3.13. Dort reicht quantorenfrei nämlich nicht aus, mehr dazu aber an der gegebenen Stelle.

Nach der Klärung dieser Probleme ist es jetzt möglich, überhaupt zur Bedeutung dieser Sprache zu kommen. Es sei noch festgehalten, dass das weitere Vorgehen auch ohne Benutzung von „$^{-1}$“ möglich wäre. Allerdings besteht das Problem mit den partiellen Funktionen ohnehin, und daher kann man die Behebung auch auf diese Funktion anwenden, wenn man so ein Vorgehen benutzen muss.

Lemma 2.3.2. Beliebige Paare (K, E_K) von Körpern werden kanonisch zu $\mathcal{L}^{ld}$-Strukturen, indem man folgendes setzt:

$$\models l_n(x_1, \ldots, x_n) :\Leftrightarrow x_1, \ldots, x_n \text{ sind linear unabhängig über } E_K.$$

Dann kann man die Substruktur E_K auch definieren, da x in E_K ist genau dann, wenn

$$\models \neg l_2(1, x) =: E(x)$$

und noch viel weitergehender auch

$$y \in \langle \overline{x} \rangle_{E_K} \text{ für } x_1, \ldots, x_n \text{ linear unabhängig über } E_K \Leftrightarrow \models l_n(\overline{x}) \wedge \neg l_{n+1}(\overline{x}, y) =: \phi(\overline{x}, y).$$

Mit diesem Wissen setzt man jetzt in $\mathcal{L}^f$ bzw. $\mathcal{L}^{f,c}$

$$\models (z = f_{i,n}(y, \overline{x})) :\Leftrightarrow \models \phi(\overline{x}, y) \text{ und } z \text{ ist die } i\text{-te Koordinate von } y \text{ in der Basisdarstellung,}$$

wobei letzteres durch

$$\exists z_1, \ldots, z_n (z = z_i \wedge y = x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \wedge z_1, \ldots, z_n \in E)$$

oder aber auch

$$\forall z_1, \ldots, z_n (y = x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \wedge z_1, \ldots, z_n \in E \rightarrow z_i = z)$$

definierbar ist.

Lemma 2.3.3. Mit diesen Vorarbeiten sind echte Paare algebraisch abgeschlossener Körper axiomatisierbar in allen drei Sprachen $\mathcal{L}^{ld}, \mathcal{L}^f, \mathcal{L}^{f,c}$, nenne die Theorien

$$\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}, \mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^f}, \mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}.$$

Besonders zu beachten hierbei ist, dass man in der Theorie sagen muss, dass $\neg l_2(1, x)$ einen Körper definiert.

Alle verwendeten Sprachen und ihre Interpretationen für Paare von Körpern sind interdefinierbar, aber für bestimmte Fragestellungen sind manche Sprachen passender als andere. Die intuitivste Sprache wäre dabei $\mathcal{L}^E := \mathcal{L} \cup \{E(x)\}$ mit der obigen Bedeutung für E, aber diese hat leider nicht so starke Eigenschaften (zum Beispiel ist sie nicht modellvollständig, denn lineare Unabhängigkeit über E überträgt sich nicht zwangsläufig auf Obermodelle). Das Ziel ist jetzt, zu beweisen, dass $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^f}$ und $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$ Quantorenelimination haben sowie dass $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}$ immerhin modellvollständig ist.
Dazu müssen wir erst einmal verstehen, wie $\mathcal{L}^{f,c}$-Unterstrukturen von $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$-Modellen aussehen.

Lemma 2.3.4. Betrachte ein Paar von Körpern (K, E_K) und eine Teilmenge $A \subseteq K$ sowie eine $\mathcal{L}^{f,c}$-Struktur

$$\mathcal{A} := (A, 0, 1, +, -, \cdot, ^{-1}, (l_n)_{n\geq 2}, (f_{i,n})_{n\geq 2, 1\leq i\leq n}).$$

Dann ist $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}^{f,c}$-Unterstruktur von (K, E_K) genau dann, wenn A ein Unterkörper von K ist und außerdem $\mathcal{A} = (A, E_A)$ für $E_A := A \cap E_K$ gilt sowie A und E_K linear disjunkt über E_A sind.

Beweis. Die Menge A ist genau dann Unterkörper von K, wenn sie $0, 1$ enthält, unter $+, -, \cdot, ^{-1}$ abgeschlossen ist und die entsprechenden Abbildungsvorschriften erbt.
Außerdem sind A und E_K linear disjunkt über E_A genau dann, wenn für alle $\overline{a}$ in A aus $\overline{a}$ linear abhängig über E_K schon äquivalent zu linearer Abhängigkeit über E_A ist; per kanonischer Definition also genau dann, wenn

$$(A, E_A) \models l_{|\overline{a}|}(\overline{a}) \Leftrightarrow (K, E_K) \models l_{|\overline{a}|}(\overline{a}).$$

Wenn $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von (K, E_K) ist, gilt für alle $\overline{a}$ in A, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models l_{|\overline{a}|}(\overline{a}) &\Leftrightarrow (K, E_K) \models l_{|\overline{a}|}(\overline{a}) \\ &\Leftrightarrow \overline{a} \text{ linear unabhängig über } E_K \Leftrightarrow \overline{a} \text{ linear unabhängig über } E_A, \end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz davon herrührt, dass in jeder die lineare Abhängigkeit bezeugenden Linearkombination von $\overline{a}$ die Koeffizienten, die nicht 0 sind, durch Anwendung von Funktionen $f_{i,n}$ auf Teile von $\overline{a}$ extrahiert werden können. Projektionen von Elementen aus A sind aber wegen der Unterstruktureigenschaft wieder in A.

Also stimmen die Interpretationen der l_n in $\mathcal{A}$ mit denen in (A, E_A) überein und es sind A und E_K linear disjunkt über E_A. Die definierende Formel der $(f_{i,n})$ ist bis auf die Angabe des Bildbereiches eine $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$-Formel und es ist $f_{i,n}(\overline{a})$ in $E_K \cap A$ für alle $\overline{a}$ in A und für alle n, i. Also stimmen auch die Interpretationen der $f_{i,n}$ in $\mathcal{A}$ und in (A, E_A) überein. Damit sind die Strukturen $\mathcal{A}$ und (A, E_A) gleich.
Die Rückrichtung folgt mit den ersten Zeilen dieses Beweises und, weil die Projektionen $f_{i,n}$ Elemente aus A nach A abbilden. Das erkennt man dadurch, dass man die Koeffizienten einer Linearkombination in eine Abhängigkeitsbedingung umschreiben kann; wenn diese in E_K erfüllt ist, muss sie wegen linearer Disjunktheit auch in E_A erfüllt sein, also sind die partiellen Projektionsabbildungen $f_{i,n}$ schon in E_A. □

Lemma 2.3.5. Wenn (A, E_A) eine $\mathcal{L}^{f,c}$-Unterstruktur von (K, E_K) ist und $X \subseteq K$ algebraisch unabhängig über AE_K, dann erhalten wir die folgende Kette von Inklusionen:

$$(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (A(X), E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K).$$

Beweis. Nach dem vorigen Lemma sind A und E_K linear disjunkt über E_A, daher gilt mit Lemma 2.2.8 (5.)

$$A(X) \operatorname{ld}_{E_A} E_K.$$

Da $A(X)$ Unterkörper von K ist, gilt mit der Rückrichtung des letzten Lemmas, dass

$$(A(X), E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K).$$

Die Struktur (A, E_A) ist eine $\mathcal{L}^{f,c}$-Unterstruktur von $(A(X), E_A)$, weil die Bedingung $A \operatorname{ld}_{E_A} E_A$ immer erfüllt ist. □

Lemma 2.3.6. Sei $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ und $E_A \subseteq B \subseteq E_K$ ein Zwischenkörper. Dann ist

$$(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (AB, B) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K).$$

Beweis. Es sind nur die Bedingungen

$$A \operatorname{ld}_{E_A} B \text{ und } AB \operatorname{ld}_B E_K$$

zu zeigen. Wegen $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ sind A und E_K linear disjunkt über E_A und mit Lemma 2.2.6 gelten schon beide gesuchten Aussagen. □

Lemma 2.3.7. Im Falle, dass das vorige Lemma auf die Inklusionen

$$(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K) \text{ und } (\tilde{A}, E_{\tilde{A}}) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (\tilde{K}, E_{\tilde{K}})$$

sowie die Zwischenkörper

$$E_A \subseteq B \subseteq E_K \text{ und } E_{\tilde{A}} \subseteq \tilde{B} \subseteq E_{\tilde{K}}$$

angewendet wird und dass gilt

$$A \cong \tilde{A}, B \cong \tilde{B}, E_A \cong E_{\tilde{A}}$$

– wobei die ersten beiden Isomorphismen den dritten fortsetzen sollen–, sind (AB, B) und $(\tilde{A}\tilde{B}, \tilde{B})$ schon isomorph als $\mathcal{L}^{f,c}$-Strukturen.

Beweis. Mit Folgerung 2.2.4 erhält man den Isomorphismus

$$A[B] \cong \tilde{A}[\tilde{B}],$$

der sich zu einem Isomorphismus der Quotientenkörper AB und $\tilde{A}\tilde{B}$ fortsetzt und A auf $\tilde{A}$ sowie B auf $\tilde{B}$ und E_A auf $E_{\tilde{A}}$ abbildet. Als Körperisomorphismus überträgt er auch Linearkombinationen, also auch die Interpretationen der $(l_n)_n$ und $(f_{i,n})_{i,n}$, weswegen er ein $\mathcal{L}^{f,c}$-Isomorphismus ist. □

Lemma 2.3.8. Sei die Inklusion $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ und (K, E_K) ein Paar algebraisch abgeschlossener Körper gegeben, dann ist $E_A \subseteq A$ regulär.

Beweis. Die Aussage folgt aus $A \operatorname{ld}_{E_A} E_K$ und der Körperinklusion $E_A \subseteq \overline{E_A} \subseteq E_K$ mit dem Lemma 2.2.6. □

Lemma 2.3.9. Unter denselben Bedingungen wie im vorigen Lemma ist $(\overline{A}, \overline{E_A})$ Zwischenstruktur.

Beweis. Laut Lemma 2.3.6 ist $(A\overline{E_A}, \overline{E_A})$ Zwischenstruktur und damit insbesondere

$$A \operatorname{ld}_{E_A} \overline{E_A}, A\overline{E_A} \operatorname{ld}_{\overline{E_A}} E_K.$$

Klarerweise ist

$$(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (\overline{A\overline{E_A}}, \overline{E_A}) = (\overline{A}, \overline{E_A}),$$

weil $A\overline{E_A}$ in der Bedingung $A \operatorname{ld}_{E_A} \overline{E_A}$ gar nicht vorkommt und die Erweiterung deshalb nichts ändert.

Lemma 2.2.8 (6.) ergibt wegen der Regularität der Erweiterung $\overline{E_A} \subseteq E_K$ (die gemäß Lemma 2.3.8 vorliegt) die Konstellation

$$\overline{A} = \overline{A\overline{E_A}} \operatorname{ld}_{\overline{E_A}} E_K,$$

was $(\overline{A}, \overline{E_A}) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ beweist. □

Satz 2.3.10. Die Theorie $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$ hat Quantorenelimination und ist vollständig, wenn man eine Charakteristik vorgibt.

Beweis. Gegeben sei eine beliebige unendliche Kardinalzahl κ. Zeige die Aussage mit dem Back&Forth-System der Isomorphismen zwischen maximal κ großen Unterstrukturen von κ^+-saturierten Modellen $(K, E_K), (L, E_L)$: Dieses ist nichtleer, denn wenn $\mathbb{P}$ der Primkörper der Charakteristik ist, ist $(\mathbb{P}, \mathbb{P})$ Unterstruktur von allen Modellen (wegen Gleichheit des Paares ist lineare Disjunktheit klar), bilde das als Unterstruktur von K auf sich selbst als Unterstruktur von L ab. Sei $(M, E_M) \to (N, E_N)$ im B&F-System. Die Erweiterungen $K \supseteq E_K$ und $L \supseteq E_L$ haben Transzendenzgrad ∞.
Dies kann man zum Beispiel feststellen, indem die Erweiterung offenkundig transzendent ist, und man dann jeweils den partiellen Typ über $\emptyset$ betrachtet, der die algebraische Unabhängigkeit von n Elementen über E_K bzw. E_L beschreibt. Dieser hat folgende Gestalt:

$$\{\forall \overline{e} \in E \setminus \{0\} (f(\overline{e}, \overline{x}) \neq 0) \mid 0 \neq f \in \mathbb{P}[T_1, T_2, \ldots, \overline{x}]\}.$$

Er ist endlich erfüllbar, da für m größer als der größte Polynomgrad im endlichen Teilfragment und x transzendent über E_K bzw. E_L die Elemente $x, x^m, x^{m^2}, \ldots$ algebraisch unabhängig über Polynomen von Grad kleiner m sind.
Ohne Einschränkungen seien (M, E_M) und (N, E_N) jeweils algebraisch abgeschlossene Paare. Das kann man annehmen, denn die Lemmata 2.3.6 und 2.3.7 besagen, dass es einen Isomorphismus zwischen den Zwischenstrukturen

$$(M\overline{E_M}, \overline{E_M}) \text{ und } (N\overline{E_N}, \overline{E_N}),$$

gibt der sich mit 2.3.9 auf einen Isomorphismus

$$(\overline{M}, \overline{E_M}) \cong (\overline{N}, \overline{E_N})$$

fortsetzt.
Sei jetzt a in K. Wenn a in M liegt, dann kann man die Abbildung auf triviale Weise auf a fortsetzen.

Wenn ansonsten a algebraisch über $E_K M$ ist, ist a in $\mathrm{acl}(E_K M)$, also existiert $X \subseteq E_K$ endlich mit a in $\mathrm{acl}(MX)$. Ohne Einschränkungen sei X jetzt schon ein Oberkörper von E_M, wichtig ist nur der endliche Transzendenzgrad über E_M. Wegen der Saturation hat die Erweiterung $E_N \subseteq E_L$ Transzendenzgrad ∞ und für einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Zwischenkörper $E_N \subseteq Y \subseteq E_L$ von gleichem Transzendenzgrad wie der von X über E_M kann $E_M \cong E_N$ fortgesetzt werden zu einem Isomorphismus $X \cong Y$. Diesen kann man wie oben mit Lemma 2.3.7 und Lemma 2.3.9 fortsetzen zu einem $\mathcal{L}^{f,c}$-Isomorphismus zwischen den Zwischenstrukturen $(\overline{MX}, X)$ und $(\overline{NY}, Y)$, wobei die erste a enthält.
Wenn a transzendent über $E_K M$ ist, gibt es ein über $E_L N$ transzendentes b in L, denn der entsprechende Typ ist konsistent, wenn $|L|$ größer ist als $|E_L|$. So etwas lässt sich aber in einer elementaren Oberstruktur erreichen (für die endliche Konsistenz ist die genaue Kardinalität des Transzendenzgrads von $E_L \subseteq L$ egal) und wenn der Typ dort konsistent ist, dann auch unten.
Die Elemente a und b erzeugen einen Isomorphismus $C := \overline{M(a)} \overset{\phi}{\cong} \overline{N(b)}$. Setze

$$E := \overline{M(a)} \cap E_K \cap \phi^{-1}(E_L \cap \overline{N(b)}),$$

dann gilt $(C, E) \cong_{\mathcal{L}^{f,c}} (\phi(C), \phi(E))$ und b ist in $\phi(C)$.
Zu zeigen ist nun nur noch

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (C, E) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K) \text{ und } (N, E_N) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (\phi(C), \phi(E)) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K).$$

Aus $(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ folgt mit Lemma 2.3.5

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (M(a), E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K),$$

daraus mit Lemma 2.3.6 und $E_M \subseteq E \subseteq E_K$

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (M(a)E, E) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K),$$

daraus folgt mit Lemma 2.3.9 und $E \subseteq \overline{M(a)} = C$ schließlich

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (C, E) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K).$$

Der Beweis der Behauptung der Zwischenstruktureigenschaft für $(\phi(C), \phi(E))$ geht analog und weil a aus C kommt, haben wir die gesuchte Fortsetzung gefunden. □

Definition 2.3.11. Wenn es keine Rolle spielt, in welcher Sprache man gerade ist, schreibe einfach **ACP** für die Theorie.

Bis jetzt haben wir zwar die Quantorenelimination erreicht, allerdings kann man Formeln modulo ACP noch weiter reduzieren. Insbesondere wäre eine „Schachtelung" von mehreren $f_{i,n}$ ineinander im Weiteren nicht leicht zu behandeln. Nach weiterer Reduktion der Formeln braucht man das aber auch nicht, da die Funktionen in den kleineren Körper abbilden. Der folgende Fakt lässt sich durch einige Rechnungen und Fallunterscheidungen beweisen, aus Gründen des Leseflusses werden diese aber hier weggelassen.

Fakt 2.3.12. In jedem Modell (K, E_K) von ACP gelten die nachfolgenden Äquivalenzen für alle i, n. Hierbei seien die Variablen aus K beliebig, ausgenommen die $e, e_1, \ldots, e_n$, diese seien in E_K beliebig. Im Falle der partiellen Funktionen seien nur Situationen betrachtet, in denen die betrachteten Argumente im partiellen Definitionsbereich liegen.
Es ist möglich, „$^{-1}$" in gewissen Situationen zu eliminieren:

$$l_n(x_1 y_1^{-1}, \ldots, x_n y_n^{-1}) \text{ gilt genau dann, wenn } l_n\left(x_1 \prod_{i=1\ldots n, i\neq 1} y_i, \ldots, x_n \prod_{i=1\ldots n, i\neq n} y_i\right)$$

$$\text{und } f_{i,n}(x_0 y_0^{-1}, x_1 y_1^{-1}, \ldots, x_n y_n^{-1}) = f_{i,n}\left(x_0 \prod_{i=0\ldots n, i\neq 0} y_i, \ldots, x_n \prod_{i=0\ldots n, i\neq n} y_i\right)$$

Auch lassen sich Vorfaktoren aus E_K nach außen bringen/eliminieren:

$$l_n(e_1 x_1, \ldots, e_n x_n) \text{ gilt genau dann, wenn } l_n(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{und } f_{i,n}(ey, e_1 x_1, \ldots, e_n x_n) = e e_i{}^{-1} f_{i,n}(y, x_1, \ldots, x_n)$$

Beim „+" ist die Situation schon komplexer. In der ersten Koordinate ist das noch recht leicht:

$$\begin{aligned}
&\neg l_n(a+b, x_2, \ldots, x_n) \text{ gilt genau dann, wenn} \\
&\neg l_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) \text{ oder } (l_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) \text{ und} \\
&(((l_n(b, x_2, \ldots, x_n) \text{ und } \neg l_{n+1}(a, b, x_2, \ldots, x_n)) \text{ oder} \\
&(\neg l_n(b, x_2, \ldots, x_n) \text{ und } l_n(a, x_2, \ldots, x_n))))),
\end{aligned}$$

$$\text{außerdem ist } f_{i,n}(a+b, x_1, \ldots, x_n) = f_{i,n}(a, x_1, \ldots, x_n) + f_{i,n}(b, x_1, \ldots, x_n)$$

Bei l_n funktioniert diese Äquivalenz analog auch in den anderen Koordinaten, um „+“ aus einem $f_{i,n}$ herauszuziehen, bedarf es aber einer größeren Fallunterscheidung:

$$f_{i,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a + b, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$
$$\begin{cases} f_{i,n+1}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a, b, x_{i+1}, \dots, x_n) & a, b, \overline{x} \text{ unabhängig} \\ f_{i,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) & \text{wenn nicht und } b \in \langle \overline{x} \rangle_{E_K} \\ f_{i,n-1}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) & \text{wenn nicht und } z \in \langle \overline{x} \rangle_{E_K} \\ \frac{f_{i,n}(z,x_1,\dots,x_{i-1},b,x_{i+1},\dots,x_n)}{1+f_{i,n}(a,x_1,\dots,x_{i-1},b,x_{i+1},\dots,x_n)} & \text{ansonsten} \end{cases},$$

$$f_{j,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a + b, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$
$$\begin{cases} f_{j+1_{j>i},n+1}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a, b, x_{i+1}, \dots, x_n) & a, b, \overline{x} \text{ unabhängig} \\ \\ f_{j,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) & \\ -f_{i,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) & \text{wenn nicht und } b \in \langle \overline{x} \rangle_{E_K} \\ \cdot f_{j-1_{j>i},n-1}(b, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) & \\ \\ f_{j,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \dots, x_n) & \\ -f_{i,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a + b, x_{i+1}, \dots, x_n) & \text{ansonsten} \\ \cdot f_{j,n}(a, x_1, \dots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \dots, x_n) & \end{cases}$$

(hierbei sei $j \neq i$)

Es steht noch eine Erklärung der genauen Verwendung dieses Faktes aus:
Anschaulich betrachtet, kann man damit Formeln, die im Inneren eines l_n oder eines $f_{i,n}$ ein $+, -, ^{-1}$ oder ein weiteres $f_{i',n'}$ enthalten, in boolesche Kombinationen von Formeln umwandeln, die diese Art der Schachtelung nicht enthalten.
Also erhält man quantorenfreie Formeln, in denen $+, -, ^{-1}$ und alle $f_{i,n}$ wenn überhaupt, dann nur außerhalb aller l_n und $f_{i,n}$ vorkommen. Da man aber quantorenfreie $\mathcal{L}_{\text{Ring}} \cup \{^{-1}\}$-Formeln in quantorenfreie $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$-Formeln umwandeln kann, ist es möglich, das „$^{-1}$“ vollständig zu eliminieren; man erhält eine leicht handhabbare Form der Formeln.
An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass hier nicht mehr ausreicht, dass die Definitionsbereiche der $f_{i,n}$ quantorenfrei definierbar sind. Vielmehr wird benötigt, dass sie selbst in einer Form wie in der Folgerung definierbar sind. Das ist aber der Fall, wie man sich weiter vorne versichern kann.

Folgerung 2.3.13. Man kann in jedem Modell (K, E_K) jede Formel mit Parametern aus $X \subseteq K$ modulo ACP schreiben als boolesche Kombination aus Formeln der Form

$$„l_n(\text{Monome mit Koeffizienten von Produkten aus } X)“$$

und

$$„(\text{Polynom in } \mathbb{P}[X])(f_{i_1,n_1}(\text{Monome in Produkten aus } X), \\ \dots, f_{i_m,n_m}(\text{Monome in Produkten aus } X)) = 0“,$$

wobei $\mathbb{P}$ den Primkörper der entsprechenden Charakteristik bezeichne.

Folgerung 2.3.14. In jedem Modell (K, E_K) ist jede definierbare Menge $X \subseteq E_K^n$ schon beschreibbar als $X = E_K^n \cap Z$, wobei Z definierbar in der Ringsprache über denselben Parametern ist. Das liegt daran, dass die $(f_{i,n}), (l_n)$ trivial sind, wenn man Werte aus E_K einsetzt.
Dementsprechend ist $E(x)$ eine streng minimale Formel und für $e_1, \dots, e_n$ in E_K ist $\mathrm{RM}(\overline{e}/X) = \dim(\overline{e}/X)$ für alle $X \subseteq K$.

Folgerung 2.3.15. Die Theorie $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^f}$ hat für fixierte Charakteristik ebenfalls Quantorenelimination, da nach Folgerung 2.3.13 die Operation „$^{-1}$“ eliminiert werden kann. Da in Lemma 2.3.2 gezeigt wurde, dass die $(f_{i,n})$ sowohl existenziell als auch universell definierbar sind, ist jede Formel modulo $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}$ immerhin universell und $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}$ ist modellvollständig.

Bemerkung. Man kann sich leicht überlegen, dass $\mathrm{ACP} \cup \{„\text{Charakteristik} = p“\}$ das Primmodell $(\overline{\mathbb{P}(e)}, \overline{\mathbb{P}})$ hat für $\mathbb{P}$ als Primkörper und ein beliebiges e transzendent über $\mathbb{P}$. Diese Struktur findet man in einem beliebigen Modell (K, E_K) wieder, indem man ein z in $K \setminus E_K$ wählt und das Paar $(\overline{\mathbb{P}(z)}, \overline{\mathbb{P}})$ betrachtet. Klarerweise ist das isomorph zu $(\overline{\mathbb{P}(e)}, \overline{\mathbb{P}})$ und es ist in allen betrachteten Sprachen eine Substruktur von (K, E_K), weil $\overline{\mathbb{P}(z)}$ und E_K linear disjunkt über $\overline{\mathbb{P}}$ sind. Dies folgt nämlich mit Lemma 2.2.8 (5.), da z transzendent über E_K ist sowie $\mathbb{P}$ und E_K linear disjunkt über $\mathbb{P}$ sind.

Im folgenden Lemma werden einige Polynomumformungen vorgenommen. Weil diese recht technisch sind, sollen sie zuerst an einem Beispiel vorgeführt werden: Seien a, b, c drei über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängige Zahlen aus $\mathbb{C}$, betrachte die ACP-Modelle

$$(\overline{\mathbb{Q}(a)}, \overline{\mathbb{Q}}) \preceq (\mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}(b,c)})$$

Sei d eine Nullstelle von

$$f(X) := X^2 - \frac{ac}{b^{-1} + \sqrt{c}}.$$

Man kann dann f durch Multiplikation zu dem Polynom

$$b^{-1}X^2 + \sqrt{c}X^2 - a\sqrt{c}^2$$

umformen, das die Eigenschaft hat, irreduzibel im Polynomring $\mathbb{Q}(a)[b^{-1}, \sqrt{c}, X]$ zu sein und d als Nullstelle zu haben. Eine weitere Umformung ergibt das Polynom

$$(bc)^{-1}X^2 + \sqrt{c}^{-1}X^2 - a$$

aus $\mathbb{Q}(a)[(bc)^{-1}, \sqrt{c}^{-1}, X]$, das das einzige Polynom von Grad 2 ist, sodass ξ_1, ξ_2 aus $\overline{\mathbb{Q}(b,c)}$ existieren und das Polynom irreduzibel als Element von $\overline{\mathbb{Q}(a)}[\xi_1, \xi_2, X]$ ist, einen konstanten Term von festgelegtem Wert a ungleich Null hat sowie außerdem d als Nullstelle hat.
Mit dieser Eigenschaft sind seine Koeffizienten als Polynom in X in $\mathcal{L}^{f,c}$ definierbar über $\mathbb{Q}(a) \cup \{d\}$, denn nach der Argumentation aus [Cha41] bzw. den Resultaten aus [vdDS84] ist Irreduzibilität von Polynomen eine elementare Eigenschaft des zugrundeliegenden Körpers. Aus den Koeffizienten sind aber die verwendeten Potenzen von ξ_1, ξ_2 über $\overline{\mathbb{Q}(a)}$ definierbar wegen linearer Disjunktheit von $\overline{\mathbb{Q}(a)}$ und $\overline{\mathbb{Q}(b,c)}$, also sind ξ_1 und ξ_2 algebraisch über $\overline{\mathbb{Q}(a)} \cup \{d\}$. Da natürlich auch andersherum d algebraisch über $\overline{\mathbb{Q}(a)} \cup \{\xi_1, \xi_2\}$ ist, gilt für den Morleyrang

$$\mathrm{RM}(d/\overline{\mathbb{Q}(a)}) = \mathrm{RM}(\xi_1, \xi_2/\overline{\mathbb{Q}(a)}) = \dim(\xi_1, \xi_2/\overline{\mathbb{Q}(a)}) = \dim(b, c/\overline{\mathbb{Q}(a)}) = 2.$$

Bei diesem Wert handelt es sich genau um die Mächtigkeit des kleinsten Tupels $\overline{e}$ aus $\overline{\mathbb{Q}(b,c)}$, sodass d algebraisch über $\overline{\mathbb{Q}(a)}, \overline{e}$ ist.

Mit diesen Techniken ist es jetzt möglich, die Stabilität unserer Theorie zu beweisen.

Satz 2.3.16. Die Theorie ACP ist ω-stabil.

Beweis. Betrachte die Menge der Typen in einem Modell (K, E_K) über einer vorgegebenen Menge $S \subseteq K$ und wähle als Sprache $\mathcal{L}^{f,c}$, zunächst sei S keine Teilmenge von E_K. Ohne Einschränkungen sei das Modell schon $|S|^+$-saturiert und S sogar $\mathcal{L}^{f,c}$-algebraisch abgeschlossen. Insbesondere ist S Träger einer elementaren Unterstruktur, denn $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$ ist modellvollständig und S ist Modell, da es keine Teilmenge von E_K ist. Aus dem B&F-System in Satz 2.3.10 geht hervor, dass es die folgenden Typen über S gibt:

- Den Typ eines Elementes in S
- Die Typen eines Elementes a in $\overline{SE_K} \setminus S$ (bestimmt durch die minimale Größe eines Tupels $\bar{e}$ aus E_K, sodass a in $\overline{S\bar{e}}$ ist, sowie durch den Isomorphietyp des Minimalpoynoms von a über $S\bar{e}$); TODO
- Den Typ eines Elementes in $K \setminus \overline{SE_K}$

Der erste Typ hat klarerweise Morleyrang 0. Im Fall des zweiten Typs für ein Element a erhalten wir mit einem analogen Vorgehen zu oben eine Umformung des Minimalpolynoms von a über SE_K. Damit ergibt sich der Morleyrang als die Mächtigkeit eines minimalen Tupels aus E_K, sodass a algebraisch über SE_K ist.
Der dritte Typ kann keinen Morleyrang größer als ω haben, denn dann müsste es nach Fakt 2.1.9 einen Typen mit Morleyrang ω geben, die anderen Arten von Typen haben aber endlichen Rang. Sei (a_n) eine Folge von Elementen, sodass

$$n = \mathrm{RM}(a_n) \text{ für alle } n \text{ in } \mathbb{N}.$$

Man könnte zum Beispiel über S algebraisch unabhängige $x_1, x_2, \ldots$ aus $E_K \setminus S$ nehmen, die wegen Saturiertheit existieren müssen; ebenso kann man ein z aus $S \setminus E_K$ wählen, das nach unseren Annahmen an S existiert und das transzendent über E_K ist. Die Elemente $1, z, z^2, \ldots$ aus S sind dann linear unabhängig über E_K und wir setzen $a_n := x_1 + zx_2 + \cdots + z^n x_n$. Dann ist a_n interdefinierbar mit $x_1, \ldots, x_n$ über z, also hat es Morleyrang n wegen der algebraischen Unabhängigkeit der x_i.

Im Stoneraum gilt – bezüglich der in [Met19] beschriebenen Topologie –

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{tp}(a_n) = p$$

für den Typen p der dritten Art: Denn a_n ist transzendent über SX für alle $E_S \subset X$ von Transzendenzgrad $\leq n-1$. Also sind für jede Umgebung, die das Nichterfüllen einer bestimmten Art von Polynom über SE_K beschreibt, fast alle a_n enthalten. Aber diese Umgebungen bestimmen den Typen p eindeutig, also sind für jedes ϕ in p fast alle $\mathrm{tp}(a_n)$ in der von ϕ erzeugten Umgebung $\mathcal{U}_\phi$ im Stoneraum.
Jedes ϕ in $\mathcal{F}_1(\mathcal{L}_S)$ mit endlichem Rang ist dann nur in endlich vielen $\mathrm{tp}(a_n)$ enthalten (nämlich maximal $\mathrm{RM}(\phi)$ vielen), also ist $\mathrm{RM}(p) \geq \omega$, damit herrscht Gleichheit.
Da alle Typen definierten Morleyrang haben, ist die Theorie ω-stabil nach Fakt 2.1.8.
Ein Alternativbeweis wäre auch, dass es nicht mehr Typen über S gibt als $|S| + \aleph_0$, auch das beweist die ω-Stabilität. Und auch mit algebraischen Methoden ist ein Beweis möglich, siehe dazu den Anhang. $\square$

3 Dichte Paare o-minimaler Körper

3.1 O-minimale Theorien und ihre Eigenschaften

Viele Techniken und Gedanken aus dem vorigen Kapitel werden jetzt auf o-minimale Theorien übertragen. Einführend folgen hier zunächst die wichtigsten Erkenntnisse über diese Theorien, basierend auf [vdD98b].

Definition 3.1.1. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ heißt **o-minimal**, wenn $\mathcal{L}$ eine zweistellige Relation $<$ enthält, deren Interpretation die einer linearen Ordnung ist, und die definierbaren Teilmengen von $\mathcal{M}$ endliche Vereinigungen von Intervallen und Punkten sind.

Induktiv kann man den Begriff einer Zelle in einer solchen Struktur definieren.

Definition 3.1.2. Sei σ eine $\{0,1\}$-wertige endliche Folge der Länge n. Eine σ-Zelle Z in der o-minimalen Struktur $\mathcal{M}$ ist eine (definierbare) Teilmenge von M^n, sodass genau eine der folgenden Möglichkeiten gilt:

- σ ist die leere Folge, $n = 0$ und $Z = M^0 = \{0\}$.
- $n = 1$ und Z ist entweder Intervall ($\sigma = (1)$) oder einelementig ($\sigma = (0)$).
- Es existiert ein σ', eine σ'-Zelle Z' und eine definierbare stetige Funktion $f : Z' \to M$, sodass $Z = \mathrm{Graph}(f)$. Außerdem ist $\sigma = \sigma'\hat{\ }0$.
- Es existiert ein σ', eine σ'-Zelle Z' und zwei definierbare stetige Funktionen f, g aus $M^{Z'} \cup \{\pm\infty\}$, sodass $f < g$ überall und

  $$Z = \{(x, y) \in Z' \times M \mid f(x) < y < g(x)\}.$$

  Außerdem ist $\sigma = \sigma'\hat{\ }1$.

Definition 3.1.3. Sei $\mathcal{M}$ o-minimal. Eine Menge $Z \subseteq M^n$ heißt **Zelle**, wenn es eine $\{0,1\}$-Folge σ der Länge n gibt, sodass Z eine σ-Zelle ist.

Es gibt besonders hilfreiche Zellen, nämlich die offenen. Glücklicherweise ist jede Zelle definierbar homöomorph zu einer offenen Zelle.

Fakt 3.1.4. Jede σ-Zelle ist homöomorph zu einer offenen Zelle. Der kanonische Homöomorphismus entsteht dabei durch Weglassen der Koordinaten, in denen σ den Wert 0 hat. Insbesondere ist der Homöomorphismus definierbar über der selben Menge wie die Zelle.

Zellen haben auch zwei andere wichtige topologische Eigenschaften:

Fakt 3.1.5. Zellen sind **lokal abgeschlossen**, das heißt, sie sind offen in der Spurtopologie ihres Abschlusses. Sie sind außerdem **definierbar zusammenhängend**, das heißt, sie enthalten keine definierbaren und in der Spurtopologie zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen.

Wichtigste Grundlage der Arbeit mit o-minimalen Theorien sind die folgenden Aussagen zur **Zellzerlegung**. Sie stellen quasi eine Verallgemeinerung der Definition von o-Minimalität auf höhere Dimensionen dar und geben die Struktur definierbarer Funktionen an.

Fakt 3.1.6. In einer o-minimalen Struktur $\mathcal{M}$ ist jede definierbare Menge eine endliche disjunkte Vereinigung von Zellen. Für jede definierbare (möglicherweise partielle) Funktion gibt es eine Zerlegung des Definitionsbereiches in Zellen, sodass die Funktion auf jeder Zelle stetig ist. Wenn es eine Funktion in einer Variable ist, ist sie nicht nur stückweise stetig, sondern es gibt auch eine Zerlegung, sodass die Funktion auf jedem Stück entweder streng monoton oder konstant ist.

Bemerkung. Wenn die Menge bzw. die Funktion über einer bestimmten Menge definierbar ist, kann man sich die Zerlegung ebenso über dieser Menge definierbar wählen. Außerdem kann man endlich viele Mengen simultan zerlegen und sie sogar partitionieren. Eine Partition einer Teilmenge $Z \subseteq M^n$ sei dabei

- eine beliebige Zellzerlegung im Fall $n = 1$ oder ansonsten
- eine Zellzerlegung von Z, so dass die Projektion π auf die ersten $n-1$ Koordinaten eine Partition von $\pi(Z)$ erzeugt.

Folgerung 3.1.7. O-minimale Strukturen eliminieren $\exists^\infty$. Damit existiert für jede definierbare Menge in einer Variable eine uniforme obere Schranke für die Anzahl der Punkte und Intervalle in der gröbsten solchen Unterteilung der Menge. Also lässt sich o-Minimalität als Formelmenge beschreiben und ist somit Eigenschaft einer vollständigen Theorie.

Definition 3.1.8. Eine vollständige Theorie sei o-minimal, wenn eines ihrer Modelle es ist.

Ab jetzt geben wir uns ein o-minimales Modell $\mathcal{M}$ einer vollständigen $\mathcal{L}$-Theorie T vor, in dem die Ordnung dicht ist. Zellen sind sehr ähnlich zu Mannigfaltigkeiten, genauso wie diesen kann man ihnen eine Dimension zuweisen.

Fakt/Definition 3.1.9. Die endliche Folge σ zur jeweiligen Zelle Z ist eindeutig bestimmt und daher der Wert $\dim(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$ wohldefiniert. Er wird **Dimension der Zelle** genannt. Für allgemeine definierbare nichtleere Mengen X sei die **Dimension** $\dim(X)$ definiert als das Maximum der Zelldimensionen in einer beliebigen Zellzerlegung, die Dimension der leeren Menge sei 0. Das ist wohldefiniert und rein topologisch definierbar: Es ist $\dim(X) \leq n$ genau dann, wenn eine Projektion von X nach M^n nichtleeres Inneres hat. Damit ist die Dimension auch $\mathcal{L}$-definierbar.

Man kann die Dimension auch anders definieren:

Fakt 3.1.10. Es erfüllt acl = dcl das Austauschprinzip und induziert also einen Dimensionsbegriff für Tupel. Wenn $\mathcal{M}$ hinreichend saturiert ist und $X \subseteq M^n$ definierbar über Y, ist $\dim(X) = \max\{\dim(a/Y) \mid a \in X\}$.

O-minimale Gruppen haben eine enorm wichtige Eigenschaft, aus der viele weitere Eigenschaften folgen, die hier nicht von Bedeutung sind. In unserem Fall reicht die folgende Grundaussage aus.

Fakt 3.1.11. Wenn $\mathcal{M}$ eine 0-definierbare, durch $<$ angeordnete Gruppenoperation mit einem 0-definierbaren positiven Element (üblicherweise 1 genannt) besitzt, gilt **Definable Choice**: Aus jeder definierbaren Menge lässt sich kanonisch, uniform und definierbar ein Element auswählen. Insbesondere gibt es zu jeder Menge eine definierbare Skolemfunktion und jede definierbare Familie von uniform parametrisierten Mengen hat eine definierbare Auswahlfunktion. Die Auswahl ist dabei definierbar über derselben Menge wie die ursprüngliche(n) Menge(n).

Fakt 3.1.12. Wie zum Beispiel in [Mar02] gezeigt wird, ist insbesondere die Theorie RCF der reell abgeschlossenen Zahlen vollständig und o-minimal mit dichter Ordnung. Anders herum betrachtet, wird in [Pil88] gezeigt, dass o-minimale Körper mit dichter Ordnung schon reell abgeschlossen sind. Es gibt allerdings Beispiele von o-minimalen Theorien, die RCF in einer größeren Sprache erweitern. In [Wil96] aufgeführt wären zum Beispiel die Erweiterung durch analytische Funktionen eingeschränkt auf den durch 0 und 1 aufgespannten Würfel, aber auch die Erweiterung um die Exponentialfunktion.

3.2 Anforderungen an die hier betrachteten Theorien

Im Folgenden halten wir eine vollständige o-minimale Theorie T mit dichter Ordnung in der Sprache $\mathcal{L}$ fest und betrachten die Theorie T^2 in der Sprache $\mathcal{L}^P := \mathcal{L} \cup \{P(x)\}$, sodass die Modelle von T^2 Modelle von T sind und in jedem Modell $\mathcal{M}$ die Menge $P(M)$ ebenfalls Modell von T ist. Schreibe so ein Paar dann als (B, A) mit $A = P(B)$. Die Theorie T erweitere RCF, insbesondere gilt Definable Choice. Dann sind Skolemfunktionen definierbar und ohne Einschränkungen sei $\mathcal{L}$ schon so eine definitorische Erweiterung, dass T Quantorenelimination hat und universell axiomatisierbar ist (wobei bei einzelnen Theorien die Frage interessant wäre, welche Skolemfunktionen man dafür hinzufügen muss).
Weil T universell mit Quantorenelimination ist, folgt, dass Unterstrukturen von Modellen von T schon elementare Unterstrukturen sind. Also ist für jede Teilmenge S eines Modells der definierbare Abschluss $\mathrm{dcl}(S)$ schon eine elementare Substruktur; zur Vereinfachung bezeichnen wir in Zukunft mit AB den definierbaren Abschluss $\mathrm{dcl}(A \cup B) = \langle A \cup B \rangle_{\mathcal{L}}$ für zwei Teilmengen A, B eines Modells.
Das Prädikat P beschreibt also eine elementare Unterstruktur, mit T^{d} wird nun die Theorie beschrieben, die ausdrückt, dass P eine dichte echte Unterstruktur ist (diese zwei Aussagen oder deren Gegenteil müssen auf jeden Fall von der Theorie beschrieben werden, wenn sie vollständig sein soll). Klar ist dann, dass Unterstrukturen von T^{d} automatisch Modelle von T^2 sind.

Der Arbeit [vdD98a] folgend, wird in den nächsten Abschnitten die Vollständigkeit und eine Art von Quantorenelimination für T^{d} gezeigt, die mittels eines Back&Forth-Systems bewiesen wird. Danach werden einige Erkenntnisse aus dem B&F-System gezogen, bevor die Hauptaussagen dieser Arbeit bewiesen werden. Zunächst ist aber eine genauere Betrachtung von sogenannten kleinen Mengen vonnöten.

3.3 Kleine Mengen, Dichtheit und saturierte Modelle

In diesem Abschnitt wird ein Begriff der Kleinheit entwickelt und für Modelle von $\mathrm{T^d}$ gezeigt, dass kleine Mengen kein Intervall enthalten. Abschließend werden im Anschluss einige Eigenschaften von saturierten Modellen von $\mathrm{T^d}$ aufgeführt.

Definition 3.3.1. Gegeben sei ein Modell $(B, A) \models \mathrm{T^d}$, dann ist eine $\mathcal{L}^P$-definierbare Menge $S \subseteq B$ **klein**, wenn eine $\mathcal{L}$-definierbare Funktion $f : B^n \to B$ existiert mit $S \subseteq f(A^n)$.

Lemma 3.3.2. Kleine Mengen in einem echten dichten Paar bilden ein Ideal in den $\mathcal{L}^P$-definierbaren Mengen bzgl. der Teilmengenrelation.

Beweis. Es gibt kleine Mengen, zum Beispiel Punktmengen oder die Interpretation von P, außerdem sind Teilmengen von kleinen Mengen offensichtlich wieder klein.
Sei jetzt (B, A) ein dichtes Paar und X, Y kleine Mengen, außerdem seien $\mathcal{L}$-definierbare Funktionen $f, g : B^n \to B$ gegeben mit

$$X \subseteq f(A^n), Y \subseteq g(A^n).$$

Ohne Einschränkungen bilden f, g dabei schon von demselben B^n ab, ansonsten muss man beide mit Dummyvariablen vergrößern. Definiere

$$h : B^{n+1} \to B,$$
$$h(\overline{x}, y) := \begin{cases} f(\overline{x}) & y = 0 \\ g(\overline{x}) & \text{sonst} \end{cases},$$

das ist $\mathcal{L}$-definierbar und es gilt $X \cup Y \subseteq h(A^{n+1})$, also ist $X \cup Y$ auch klein.
Dass nicht jede Menge klein ist, wird im Folgenden noch bewiesen werden. □

In dem folgenden Lemma meint $+, \cdot$ nicht unbedingt die Operationen aus $\mathcal{L}$, sondern neue, beliebige Operationen. Die Anordnung hingegen soll die gewöhnliche bleiben.

Lemma 3.3.3. Seien $A \subsetneq B \models \mathrm{T}$ hinreichend hoch saturiert, $f : B^{n+1} \to B$ eine A-definierbare Funktion, b aus $B \setminus A$, β, γ in $A \cup \{\pm\infty\}$ mit $\beta < b < \gamma$ und einer angeordneten A-definierbaren Körperstruktur $(\cdot, +)$ auf $(\beta, \gamma) =: I$. Dann existieren $a_0, \ldots, a_n$ in I_A mit

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots, a_0 \in I \setminus f(A^n \times \{b\}).$$

Beweis. Wenn die Aussage nicht gilt, dann gilt mit

$$p(x,y) := x_n y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \ldots, x_0,$$

dass für jedes a aus $(I_A)^{n+1}$ ein α in A^n existiert mit $p(a,b) = f(\alpha, b)$. Es muss für festes a aus I_A ein Intervall um b in I_A mit dieser Eigenschaft geben, denn sonst wäre b in $\mathrm{dcl}(A) = A$.
Sei jetzt a nicht mehr fixiert, dann existiert mit Definable Choice in I_A eine definierbare Zuordnung $a \mapsto \alpha(a)$, sodass $p(a,\cdot) = f(\alpha(a),\cdot)$ auf einem Intervall gilt. Da jedes a die Länge $n+1$ hat und jedes $\alpha(a)$ aber Länge n, müssen unendlich viele a in $(I_A)^{n+1}$ existieren, die durch α auf das selbe Element abgebildet werden. Denn wenn das nicht so wäre, wäre wegen Saturation ein generisches Element über all den vorigen zu Definitionen benutzten Parametern aus $(I_A)^{n+1}$ algebraisch über einem Element aus A^n, was der Generizität widerspricht. Da es unendlich viele Elemente gibt, sodass α auf ihnen konstant ist, gibt es schon eine Zelle von positiver Dimension mit der Eigenschaft und damit insbesondere eine Zelle E von Dimension 1 (als Teilmenge einer Zelle lässt sich immer eine von kleinerer Dimension finden). Nenne den konstanten Wert dann α^*.
Da also gilt, dass für alle a aus E ein Intervall J existiert mit $p(a,\cdot) = f(\alpha^*,\cdot)$ auf J, existieren mit Definable Choice $\beta^*, \gamma^* : E \to I_A$, sodass $p(a,\cdot) = f(\alpha^*,\cdot)$ auf $(\beta^*(a), \gamma^*(a))$ gilt. Ohne Einschränkungen seien β^* und γ^* jetzt schon stetig auf E und ein e in E beliebig $\cdot$ Dann existiert für ε hinreichend klein eine E-Umgebung U um e, sodass

$$\beta^* < \frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) - \varepsilon,\ \frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) + \varepsilon < \gamma^*$$

auf U, also

$$p(a,x) = f(\alpha^*, x) \text{ für alle } a \text{ in } U, x \text{ in } (\frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) - \varepsilon, \frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) + \varepsilon)$$

gilt. Es kann aber nicht $p(a-a',x) = p(a,x) - p(a',x) = f(\alpha^*,x) - f(\alpha^*,x) = 0$ für a, a' verschieden in U und unendlich viele x sein, weil ein Nichtnullpolynom nicht unendlich viele Nullstellen haben kann. $\square$

Folgerung 3.3.4. Es sei ein dichtes Paar $(A, B) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$ gegeben und $\mathcal{L}_A$-definierbare Funktionen $f : B^{n+1} \to B$ sowie ein b in $B \setminus A$. Dann enthält $f(A^n \times \{b\})$ kein Intervall um b.

Beweis. Nimm an, dass das Gegenteil gelte für das Intervall J (ohne Einschränkungen mit Randpunkten $c < d$ in A): Dann ist

$$x \mapsto \frac{1}{c-x} + \frac{1}{d-x}$$

eine ordnungstreue A-definierbare Bijektion $(c, d) \to A$. Diese erzeugt in A eine definierbare angeordnete Körperstruktur auf $(c, d) = J_A$, also auch auf J eine A-definierbare angeordnete Körperstruktur. Mit dem vorigen Lemma existiert ein Element aus $J \setminus f(A^n \times \{b\})$, denn es spielt für die Aussage keine Rolle, ob man zu einer genügend saturierten Elementarerweiterung von (B, A) übergeht. $\square$

Satz 3.3.5. Wenn $(B, A) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$, dann ist kein Intervall eine kleine Teilmenge.

Beweis. Sei $f : B^n \to B$ eine durch $\varphi(x, y, b)$ definierbare Abbildung mit φ einer $\mathcal{L}_A$-Formel und b in B^m für ein m definiert. Für $\dim(b/A) = 0$ ist $f(A^n) \subseteq A$ klar, deswegen sei ohne Einschränkungen $\dim(b/A) \geq 1$. Definiere

$$g(x, z) := \begin{cases} y & \text{mit } B \models \varphi(x, y, z), \text{sofern } \varphi(x', y', z) \\ & \text{bei festem } z \text{ eine Funktion } x' \mapsto y' \text{ definiert} \\ & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann ist g A-definierbar in B und $g(\cdot, b) = f$. Falls $\dim(b/A) > 1$, füge genug Komponenten von b zu A hinzu, sodass $\dim(b/A) = 1$. Das Hinzufügen einer Komponente b_j zu A führt zu einem neuen Gegenbeispiel zur Aussage in einem dichten Paar, denn Ab_j ist nach den Eingangsbemerkungen Modell von T und Ab_j ist erst recht dicht in, aber nicht gleich B (sonst hätte man die Dimension mit diesem Schritt schon zu sehr verkleinert).
Finde also b_i, sodass A-definierbare (h_j) existieren mit $b_j = h_j(b_i)$ für alle j. Wenn jetzt $J \subseteq f(A^n) = g(A^n, b) = g(A^n, h(b_i))$ für ein Intervall J, dann widerspricht das der Aussage des letzten Lemmas für die Funktion $(x, y) \mapsto g(x, h(y))$. $\square$

Definition 3.3.6. Schreibe ab jetzt $P(\overline{x}) := \bigwedge_{i=1}^{|x|} P(x_i)$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes sollen hier noch ein paar weitere Fakten über dichte Paare aufgeführt werden, die später eine Bedeutung bekommen.

Lemma 3.3.7. Wenn (B, A) für ein unendliches $\kappa > |\mathrm{T}|$ ein κ-saturiertes Modell von T^{d} ist, ist $\dim(B/A) \geq \kappa$.

Beweis. Sei S eine Basis von B/A mit $|S| < \kappa$; zeige nun, dass es kein Erzeugendensystem sein kann. Das folgt aus der Saturation angewandt auf den partiellen Typen

$$\{\forall \overline{y} \in P(x \neq t(\overline{y})) \mid t\ \mathcal{L}_S\text{-Term}\},$$

der endlich erfüllbar ist, weil die Negation jeder dieser Formeln „x ist in einer kleinen Menge“ impliziert. Wenn der Typ also nicht endlich erfüllbar wäre, würde eine endliche Vereinigung von kleinen Mengen ganz B überdecken. Das kann aber nicht gelten, denn eine endliche Vereinigung von kleinen Mengen ist wieder klein. $\square$

Folgerung 3.3.8. Da Intervalle nicht klein sind, zeigt ein abgewandelter Beweis sogar, dass in einem κ-saturiertem Modell $(B, A) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$, gegeben Mengen $S, S', S'' \subset B$ mit

$$|S|, |S'|, |S''| < \kappa,$$

ein transzendentes Element b über SA gefunden werden kann mit $a < b$ für alle a aus S' und $b < c$ für alle c aus S'', sofern dieser Ordnungstyp von b überhaupt konsistent ist.

Lemma 3.3.9. Sei $(B, A) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$. Dann ist A auch kodicht in B.

Beweis. Zu zeigen ist, dass für alle a, c in B ein b aus $B \setminus A$ existiert mit $a < b < c$. Durch Translation und additive Inversion kann man annehmen, dass $a = 0$. Wähle jetzt ein beliebiges d aus $B \setminus A$ und ein e in A mit $d - c < e < d$. Dann ist $d - e$ nicht in A (denn sonst wäre es d) und

$$0 = e - e < d - e < d - (d - c) = c.$$

$\square$

3.4 Formelreduzierung in T^{d}

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich $\mathcal{L}^P$-Formeln modulo T^{d} sehr stark vereinfachen lassen und dass T^{d} vollständig ist. Indem dieses mit einem Back&Forth-System gezeigt wird, erhält man zusätzlich eine Klasse von elementaren Abbildungen zwischen Modellen von T^{d}.
In diesem Kontext wird wieder die acl-Unabhängigkeit in einem Modell von T relevant. Man kann sich dafür folgende Fakten überlegen. Die 1.-4. sind schon bekannt aus den Lemmata 1.0.6 bis 1.0.10., zur Zusammenstellung wird hier noch einmal darauf verwiesen.

Lemma 3.4.1. Seien A, B, C, D Mengen in irgendeinem Modell von T.

1. Wenn A und B unabhängig über C sind, sind B und A unabhängig über C und $A \cap B \subseteq \mathrm{acl}(C)$ (in fast allen betrachteten Fällen wird sowieso $A, B \supseteq C$ und $C = \mathrm{acl}(C)$ gelten, sodass dann Gleichheit herrscht).

2. Wenn A und B unabhängig über C sind und $S \subseteq B$, dann sind auch $A \cup S$ und B unabhängig über $C \cup S$.

3. Wenn A und B unabhängig über C sind, wobei außerdem $C \subseteq A, B$ gilt und
$$A \subseteq S \subseteq \mathrm{acl}(A), B \subseteq S' \subseteq \mathrm{acl}(B), C \subseteq S'' \subseteq \mathrm{acl}(C),$$
dann sind S und S' unabhängig über S''.

4. Wenn A und B unabhängig über C sind und D (algebraisch) unabhängig über $ABC := (AB)C$, dann sind $A \cup D$ und B unabhängig über C.

5. Wenn $(D, C) \preceq (B, A) \models \mathrm{T}^2$, dann sind A und D unabhängig über C.

6. Wenn $(D, C) \subseteq (B, A) \models \mathrm{T}^2$, $S \subseteq A$ und A und D unabhängig über C sind, dann sind A und DS unabhängig über CS, $\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}^P} = (DS, CS)$ und
$$(D, C) \subseteq (DS, CS) \subseteq (B, A).$$

7. Wenn $(D, C) \subseteq (B, A) \models \mathrm{T}^2$ und $S \subseteq B$ unabhängig über DA ist, dann sind A und DS unabhängig über C, $\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}^P} = (DS, C)$ und
$$(D, C) \subseteq (DS, C) \subseteq (B, A).$$

Beweis.

5. Wenn $\overline{d}$ algebraisch unabhängig in D über C ist, aber nicht über A, dann existiert eine $\mathcal{L}_A$-Formel $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$, sodass d_1 von $\varphi(x_1, d_2, d_3 \ldots, \overline{a})$ algebraisiert wird (ohne Einschränkungen wird d_1 schon durch φ definiert). Also erfüllt $\overline{d}$ die $\mathcal{L}^P$-Formel

$$\exists \overline{y} \in P(\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \forall z_2, z_3, \ldots \exists! z_1(\varphi(\overline{z}, \overline{y})))$$

in (B, A), also auch in (D, C). Es existiert also $\overline{c}$ in C mit

$$B \models \varphi(\overline{d}, \overline{c}) \wedge \forall z_2, z_3, \ldots \exists! z_1(\varphi(\overline{z}, \overline{c})),$$

was im Widerspruch zur Unabhängigkeit von $\overline{d}$ über C steht.

6. Dass A und DS unabhängig über CS sind, ergibt sich in der Kombination von 2. und dann 3.
Dass die Trägermenge von $\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}^P}$ die Menge DS ist, ergibt sich direkt per Definition als $DS = \mathrm{dcl}(D \cup S) = \langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}}$. Weil A und DS unabhängig über CS sind, folgt

$$P(\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}^P}) = DS \cap P(B) = DS \cap A = CS.$$

7. Es ergibt sich aus 4. und 3., dass A und DS unabhängig über CS sind. Der Rest folgt analog zu 6. $\square$

Zu bemerken ist, dass ein Spezialfall von Unabhängigkeit viele nützliche Eigenschaften hat. Auf diesen wird später noch oft zurückgegriffen werden.

Definition 3.4.2. Seien $(D, C) \subseteq (B, A)$ zwei Modelle von T^2. Dann heiße diese Inklusion **frei**, wenn D und A unabhängig über C sind.

Für die Konstruktion des gewünschten Back&Forth-Systems sei $\kappa > |\mathrm{T}|$ eine beliebige, aber feste Kardinalzahl und $(B, A), (D, C) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$ zwei κ-saturierte Modelle.

Satz 3.4.3. Sei S die Menge aller partiellen Isomorphismen zwischen Unterstrukturen (B', A') von (B, A) und (D', C') von (D, C) der Mächtigkeit $< \kappa$, sodass die Inklusionen frei sind. Dann bildet S ein nichtleeres B&F-System und T^{d} ist insbesondere vollständig.

Beweis. Das System ist nichtleer, denn es gibt ein Primmodell $\mathcal{M}$ von T. T ist bekanntlich vollständig und in jedem Modell A werden alle Eigenschaften von $\mathcal{M}_A := \langle\emptyset\rangle_{\mathcal{L}}$ in T beschrieben, also sind alle Modelle $(\mathcal{M}_A)_A$ isomorph. Klarerweise ist $|M| = |\mathrm{T}| < \kappa$. Der Isomorphismus $(M_A, M_A) \cong (M_C, M_C)$ liegt in S, denn Unabhängigkeit ist bei zwei gleichen Mengen offensichtlich.
Sei jetzt $i : (B', A') \to (D', C')$ eine Abbildung aus S und b aus B; zu zeigen ist, dass es in S eine Erweiterung auf b gibt. Wenn b in B' ist, ist nichts zu zeigen. Wenn b in $A \setminus B'$, betrachte den partiellen Typ über D'

$$\{\alpha < x \mid i^{-1}(\alpha) < b\} \cup \{x < \beta \mid b < i^{-1}(\beta)\} \cup \{P(x)\}.$$

Dieser ist konsistent, da i ein Isomorphismus ist und C dicht in D; mit Saturation existiert ein d aus $C \setminus D'$ mit diesem Ordnungstyp. i setzt sich dann eindeutig zu einem Isomorphismus

$$i' : (B'b, A'b) \to (D'd, C'd) \text{ mit } i(b) = d$$

fort, der gegeben ist durch die Abbildung $t(b) \mapsto i(t)(d)$ für t einen $\mathcal{L}_{B'}$-Term und $i(t)$ den durch i geshifteten Term. Die Surjektivität dieser Abbildung ist klar, ebenso dass $i'(A'b) = C'd$. Wohldefiniertheit, Injektivität und Isomorphismuseigenschaft gelten, denn:
$Rt_1(b) \ldots t_n(b)$ gilt für $\mathcal{L}_{B'}$-Terme $t_1, \ldots, t_n$ und eine Relation R genau dann, wenn es ein B'-definierbares Intervall I um b mit dieser Eigenschaft gibt (denn sonst wäre b definierbar über B' und somit in B'). Schickt man $I \cap B'$ mit i nach

$$J := i(I \cap B') = (i(\inf I), i(\sup I)) \cap D',$$

so gilt für alle Elemente z aus J, dass $Ri(t_1)(z) \ldots i(t_n)(z)$, da i ein Isomorphismus ist. Das gilt wegen o-Minimalität sogar auch noch für alle Elemente z aus $(i(\inf I), i(\sup I))$, weil dieses Intervall D'-definierbar ist und man sonst mit Definable Choice ein Element aus

$$(i(\inf I), i(\sup I)) \cap D'$$

finden könnte, für das das nicht gilt.

Da $i(\inf I) < d < i(\sup I)$ aus dem Typ hervorgeht, gilt also auch $Ri(t_1)(d) \dots i(t_n)(d)$.
Die Rückrichtung der Äquivalenz geht analog.
Zu zeigen ist nun, dass $B'b$ und A frei über $A'b$ sowie $D'd$ und C frei über $C'd$ sind, ebenso zu zeigen ist noch, dass

$$(B'b, A'b) \subseteq (B, A), (D'd, C'd) \subseteq (D, C).$$

Das alles folgt aber aus Lemma 3.4.1 (6.). Außerdem gilt $|D'd| = |B'b| = |B'| + |\mathrm{T}| < \kappa$.
Sei jetzt b in $B'A \setminus (A \cup B')$. Dann gibt es ein $\overline{a}$ aus A mit b in $B'\overline{a}$. Erweitere wie schon bekannt i auf $\overline{a}$; dann ist schon ganz $B'\overline{a} \subseteq \mathrm{dom}(i)$, also auch b.
Abschließend sei b in $B \setminus B'A$; wie oben erfülle dann den mit i geshifteten Ordnungstyp von b über B' mit einem Element d aus $D \setminus D'C$ (mit Folgerung 3.3.8 geht das). Wieder kann i dann auf einen Isomorphismus $(B'b, A') \to (D'd, C')$ fortgesetzt werden und nach Lemma 3.4.1 (7.) erfüllen $(B'b, A'), (D'd, C')$ auch die hinreichenden Eigenschaften. $\square$

Das eben aufgestellte B&F-System beweist die Formelreduzierung in $\mathrm{T^d}$.

Definition 3.4.4. Wir betrachten $\mathcal{L}^P$-Formeln der Gestalt

$$\exists \overline{y} \in P(\phi(\overline{x}, \overline{y}))$$

für eine $\mathcal{L}$-Formel *phi*. Eine solche Formel nenne eine **gute Formel in Reinform** und eine boolesche Kombination davon eine **gute Formel**.

Satz 3.4.5. Jede $\mathcal{L}^P$-Formel ist modulo $\mathrm{T^d}$ äquivalent zu einer guten Formel.

Beweis. Hilfsaussage:
Es reicht zu zeigen, dass für alle Modelle $(B, A), (D, C) \models \mathrm{T^d}$ und für alle b in B^n, d in D^n gilt: Wenn b und d dieselben guten Formeln erfüllen, sind ihre Typen in (B, A) und (D, C) dieselben.
Dass dies ausreicht, erkennt man mit dem Trennungslemma:
Sei ψ aus $\mathcal{F}_n(\mathcal{L}^P)$ und nicht äquivalent zu einer guten Formel und nenne die Menge aller guten Formeln in n freien Koordinaten K. Dann ist K abgeschlossen unter Konjunktion und Disjunktion außerdem enthält die Menge die wahre und die falsche Aussage. Wenn ψ nicht äquivalent zu einer Formel aus K ist, sind $\mathrm{T^d} \cup \{\psi\}$ und $\mathrm{T^d} \cup \{\neg\psi\}$ nicht durch K trennbar, also existieren $(B, A), (D, C) \models \mathrm{T^d}, b$ in B^n, d in D^n, sodass $(B, A) \models \psi(b)$ und $(D, C) \models \neg\psi(d)$, aber $(B, A) \models \chi(b)$ genau dann, wenn $(D, C) \models \chi(d)$, und das für alle χ aus K. Dann erfüllen b und d dieselben guten Formeln, aber haben nicht denselben Typ - ein Widerspruch!

Beweis der Hilfsaussage. Seien b, d wie verlangt und $(B, A), (D, C)$ schon ohne Einschränkungen $|\mathrm{T}|^+$-saturiert, denn das ändert nichts an Typen und dem Erfüllen von guten Formeln. Sei a aus A^m für ein hinreichend großes m, mit der Eigenschaft dass

$$\dim(b/a) \leq \dim(b/A).$$

So etwas gibt es, wenn man endlich viele $\mathcal{L}_A$-Formeln betrachtet, sodass jede Interdefinierbarkeit in b durch diese Formeln bezeugt wird; als a kann man dann die vereinigte Parametermenge dieser ganzen Formeln nehmen. Es folgt dann Gleichheit der Dimensionen, da über einer kleineren Menge nicht mehr interdefinierbar werden kann. Für

$$A' := \mathrm{dcl}(a), B' := \mathrm{dcl}(a, b)$$

gilt dann, dass A und B' unabhängig über A' sind. Es sind nämlich per Definition von a die Mengen A und b unabhängig über a (eben wegen $\dim(b/a) = \dim(b/A)$), mit Lemma 3.4.1 (2.) sind dann auch A und $a \cup b$ unabhängig über a und mit (3.) sind A und $B' = \mathrm{dcl}(a, b)$ unabhängig über $A' = \mathrm{dcl}(a)$. Außerdem sind A' und B' maximal $|\mathrm{T}|$ groß und $(B', A') \subseteq (B, A)$.
Wenn man den partiellen $\mathcal{L}^P$-Typ $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(a/b) \cup \{P(\overline{x})\}$ betrachtet, bleibt er konsistent unter der Ersetzung $b \rightarrowtail d$ in den Formeln. Seien nämlich $\psi_1(\overline{x}, b), \ldots, \psi_n(\overline{x}, b)$ aus $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(a/b)$, dann ist

$$\exists \overline{x} \in P(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\overline{x}, \overline{y}))$$

eine gute Formel, die von b und daher auch von d erfüllt wird. Also ist der ersetzte partielle Typ endlich konsistent, wegen Saturation habe er den Erfüller c aus C und es gilt $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(a, b) = \mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(c, d)$. Wegen der Typengleichheit folgt insbesondere

$$\dim(b/a) = \dim(d/c);$$

es bleibt noch zu zeigen, dass $\dim(b/A) = \dim(d/C)$, damit dann gilt

$$\dim(d/C) = \dim(b/A) = \dim(b/a) = \dim(d/c)$$

und wie oben C und $D' := \mathrm{dcl}(c, d)$ frei über $C' := \mathrm{dcl}(c)$ sind sowie $(D', C') \subseteq (D, C)$.

Die Gleichheit $\dim(b/A) = \dim(d/C)$ gilt aber, da für jede $\mathcal{L}$-Formel ψ und für alle Wahlen der Indizes $j_1, \ldots, j_n$ die Formel zu

$$\text{„es existiert } \overline{y} \text{ in } P\text{, sodass } \psi(\overline{x}, \overline{y})\ x_i \text{ über } x_{j_1}, \ldots, x_{j_m} \text{ definiert“}$$

eine gute Formel in Reinform ist, die also genau dann von b erfüllt wird, wenn sie von d erfüllt wird.

Da (a, b) und (c, d) den gleichen $\mathcal{L}$-Typ haben, gibt es einen partiellen Isomorphismus i von $B' = \mathrm{dcl}(a, b)$ nach $D' = \mathrm{dcl}(c, d)$ durch Abbilden der $\mathcal{L}_{a,b}$-Terme auf $\mathcal{L}_{c,d}$-Terme. Dieser erfüllt $i((a, b)) = (c, d)$, die Einschränkung auf $A' = \mathrm{dcl}(a)$ bildet einen Isomorphismus nach $C' = \mathrm{dcl}(c)$. Also ist i partieller Isomorphismus $(B', A') \to (D', C')$, damit im B&F-System, also elementare Abbildung, weswegen b und d denselben $\mathcal{L}^P$-Typen haben. ■

□

3.5 Folgen der Existenz des B&F-Systems

Im Folgenden werden einige Anordnungen von wechselseitigen Inklusionen von Modellen von T betrachtet, in denen Gleichheit von bestimmten Typen folgt.

Lemma 3.5.1. Für dichte Paare $(B, A), (D, C)$ mit $(D, C) \subseteq (B, A)$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

1. $(D, C) \preceq (B, A)$
2. Die Inklusion ist frei.

Beweis. „1. $\Rightarrow$ 2.“ : Diese Richtung ist schon aus Lemma 3.4.1 (5.) bekannt.
„2. $\Rightarrow$ 1.“ : Finde $(|B| + |\mathrm{T}|)^+$-saturierte Strukturen

$$(B, A) \preceq (B', A'), (D, C) \preceq (D', C');$$

es ist dann (D, C) eine gemeinsame Unterstruktur und $(D, C) \subseteq (D', C')$ ist frei nach dem Beweis der Gegenrichtung. Außerdem sind nach Voraussetzung D und A unabhängig über C, also wird Unabhängigkeit von Tupeln in D über C „hochgegeben“ über A, da aber Unabhängigkeit von Tupeln in $D \subseteq B$ über A auch über A' erhalten bleibt (da (B', A') elementare Oberstruktur), ist auch $(D, C) \subseteq (B', A')$ frei. Also ist die Identität auf (D, C) im Back&Forth-System, daher elementare Abbildung. Daraus folgt für alle $\mathcal{L}^P_D$-Formeln φ, dass

$$(D, C) \models \phi \Leftrightarrow (D', C') \models \varphi \Leftrightarrow (B', A') \models \varphi \Leftrightarrow (B, A) \models \varphi.$$

$\square$

Lemma 3.5.2. Seien $(B_1, A_1), (B_2, A_2) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$ und (B, A) eine gemeinsame Unterstruktur, sodass die Inklusionen frei sind. Wenn a aus $(A_1)^n$ und b aus $(A_2)^n$ denselben $\mathcal{L}$-Typen über B erfüllen, erfüllen sie auch denselben $\mathcal{L}^P$-Typen über B.

Beweis. Œ seien (B_1, A_1) und (B_2, A_2) schon genügend saturiert, das ändert nichts an Typen über B und (nach derselben Argumentation wie im vorigen Lemma) auch nichts an der Unabhängigkeit. Da a und b denselben Typen über B erfüllen, kann man wieder $\mathcal{L}_B$-Terme mit eingesetztem a auf $\mathcal{L}_B$-Terme mit eingesetztem b abbilden (Wohldefiniertheit und Injektivität wird durch die Typengleichheit ermöglicht) und bekommt einen partiellen Isomorphismus $i : Ba \cong Bb$, dessen Einschränkung auf die $\mathcal{L}_A$-Terme einen partiellen Isomorphismus $Aa \cong Ab$ induziert und sodass $i(a) = b$. Also gilt $i : (Ba, Aa) \cong (Bb, Ab)$, da außerdem die Inklusionen $(Ba, Aa) \subseteq (B_1, A_1)$ und

$(Bb, Ab) \subseteq (B_2, A_2)$ frei sind nach Lemma 3.4.1 (6.), ist i im Back&Forth-System, also elementar, also haben a und b denselben $\mathcal{L}^P$-Typen über B. $\square$

Folgerung 3.5.3. Wenn man sich solch ein Paar (a, b) beliebig wählt (z.B. $a = b = 0$), sind in dem Typen auch die parameterfreien $\mathcal{L}_B^P$-Formeln, die in (B_1, A_1) bzw. (B_2, A_2) gelten. Also gelten dieselben Formeln, was als $(B_1, A_1) \equiv_B (B_2, A_2)$ geschrieben wird und Lemma 3.5.1 verallgemeinert.

Lemma 3.5.4. Seien $(B_1, A_1), (B_2, A_2)$ zwei dichte Paare und $A \subseteq A_1 \cap A_2$ eine gemeinsame Substruktur, sowie a aus $B_1 \setminus A_1$, b aus $B_2 \setminus A_2$, die den gleichen Ordnungstyp über A haben. Dann haben a und b sogar den gleichen $\mathcal{L}^P$-Typ über A.

Beweis. Es sind trivialer Weise A_i und A unabhängig über A für $i = 1, 2$, außerdem ist a transzendent über A_1 und b transzendent über A_2. Nach Lemma 3.4.1 (4.) sind also die Einbettungen

$$(Aa, A) \subseteq (B_1, A_1) \text{ und } (Ab, A) \subseteq (B_2, A_2)$$

frei. Nach dem Beweis zu Satz 3.4.3 gibt es einen Isomorphismus $Aa \cong Ab$, der $A \cong A$ fortsetzt, und für den $i(a) = b$ gilt, also einen Isomorphismus $i : (Aa, A) \cong (Ab, A)$. Wenn ohne Einschränkungen die beiden Modelle von T^{d} genügend saturiert sind, ist i im B&F-System, also erfüllen a und b dieselben $\mathcal{L}_A^P$-Formeln. $\square$

Lemma 3.5.5. Sei $(D, C) \subseteq (B, A)$ frei und $(B, A) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$, sowie $X \subseteq B$ eine kleine $\mathcal{L}_D^P$-definierbare Menge. Dann gibt es sogar eine $\mathcal{L}_D$-definierbare Funktion $f : B^n \to B$, die die Kleinheit von X bezeugt.

Beweis. Man kann für (B, A) schon hinreichende Saturiertheit annehmen. Wenn es keine solche Funktion gäbe, wäre

$$\{x \in X\} \cup \{x \notin f(A^n) \mid f : B^n \to B \ D\text{-definierbar}\}$$

eine konsistente Formelmenge über D; ihr Erfüller sei b aus $B \setminus DA$. Da X klein ist und als solches kein Intervall enthält, kann man den Ordnungstyp von b über D auch durch ein Element

$$\tilde{b} \in B \setminus (X \cup DA)$$

erfüllen wie in Folgerung 3.3.8. Nach Konstruktion des B&F-Systems haben b und $\tilde{b}$ dann den selben $\mathcal{L}_D^P$-Typ über D, was einen Widerspruch ergibt, da b in X ist, $\tilde{b}$ aber nicht. $\square$

3.6 Definierbare Teilmengen von A^n

Wir interessieren uns für die Gestalt von $\mathcal{L}^P$-definierbaren Teilmengen von A^n. Dafür braucht man zuerst eine Hilfsaussage für definierbare Mengen in o-minimalen Strukturen.

Lemma 3.6.1. Sei $\mathcal{M}$ eine o-minimale Struktur, die eine angeordnete 0-definierbare Gruppenoperation $+$ mit positivem Element 1 hat und $Y \subseteq M^n$ definierbar. Dann ist Y eine endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$\{f(b,\cdot) = 0, g(b,\cdot) > 0\},$$

wobei b in M^m ist und f, g stetige, 0-definierbare Abbildungen $M^{m+n} \to M$ sind.

Beweis. Schreibe $Y = \phi(b, \mathcal{M})$ für ein b aus M^m und definiere $Z := \phi(\mathcal{M})$. Wenn man Z in 0-definierbare Zellen $(Z_i)_i$ zerlegt, erhält man Y als endliche Vereinigung der Fasern $((Z_i)_b)_i$. Es sei also ohne Einschränkungen Z schon eine 0-definierbare Zelle. Definiere

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{|x-d| \mid d \in Z\} & Z \text{ nichtleer} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$g(x) := \begin{cases} \inf\{|x-d| \mid d \in \overline{Z} \setminus Z\} & Z \text{ nichtleer} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases},$$

das sind lipschitzstetige Funktionen.
Klar ist, dass $\overline{Z} = \{f = 0\}$; da Zellen lokal abgeschlossen sind, ist

$$\overline{Z} \setminus Z = \overline{\overline{Z} \setminus Z} = \{g = 0\}.$$

Also erhalten wir

$$Z = \overline{Z} \setminus (\overline{Z} \setminus Z) = \{f = 0\} \setminus \{g = 0\} = \{f = 0\} \cap \{g > 0\}$$

und

$$Y = Z_b = \{f(b,\cdot) = 0\} \cap \{g(b,\cdot) > 0\}.$$

□

Satz 3.6.2. Für ein echtes dichtes Paar (B, A) und eine Menge $Y \subseteq A^n$ ist folgendes äquivalent:

1. Die Menge Y ist $\mathcal{L}^P$-definierbar.
2. Es existiert eine $\mathcal{L}$-definierbare Teilmenge $Z \subseteq B^n$ so, dass $Y = Z \cap A^n$.
3. Die Menge Y ist definierbar in $(A, (R_b)_{b \in B})$ mit der Interpretation $A \models R_b(a)$ genau dann, wenn $0 < a < b$ in B.

Beweis. „1. $\Rightarrow$ 2.“ : Sei φ eine $\mathcal{L}_B^P$-Formel mit $\varphi(B) = Y$. Zu zeigen ist, dass eine $\mathcal{L}_B$-Formel ψ existiert mit $(B, A) \models P(x) \to (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$; das ist genau dann der Fall, wenn

$$\mathfrak{Th}(B, A)_B \cup \{P(x)\} \cup \{\varphi(x)\} \text{ und } \mathfrak{Th}(B, A)_B \cup \{P(x)\} \cup \{\neg\varphi(x)\}$$

in $\mathcal{L}_B$ getrennt werden können. Nach dem Trennungslemma gilt das genau dann, wenn für alle

$$(B, A) \preceq (D_1, C_1), (D_2, C_2)$$

und alle c_i aus C_i $(i = 1, 2)$ mit

$$(D_1, C_1) \models \varphi(c_1), (D_2, C_2) \models \neg\varphi(c_2)$$

eine $\mathcal{L}_B$-Formel χ existiert mit

$$(D_1, C_1) \models \chi(c_1), (D_2, C_2) \models \neg\chi(c_2).$$

Seien solche (D_i, C_i) und c_i, die die Voraussetzungen von oben erfüllen. Dann ist das die Situation aus Lemma 3.5.2, denn elementare Erweiterungen sind frei. Also muss ein trennendes χ wie verlangt existieren, denn ansonsten würden c_1 und c_2 denselben $\mathcal{L}$-Typ erfüllen, aber nicht denselben $\mathcal{L}^P$-Typ.
„2. $\Rightarrow$ 3.“ : Sei $Y = Z \cap A^n$. Nach dem letzten Lemma ist Z eine boolesche Kombination aus Mengen der Form $\{f(b, \cdot) = 0\}$ und $\{g(b, \cdot) > 0\}$ für stetige 0-$\mathcal{L}$-definierbare Funktionen f, g und passende b aus B^m. Es reicht also die Aussage für Mengen in diesen Formen zu zeigen.

Wegen der Stetigkeit der Funktionen und A dicht in B, gilt aber in B

$$
\begin{aligned}
f(b,z)=0 \Leftrightarrow\ & \text{Für alle positiven } \varepsilon \text{ in } A \text{ existiert ein } a<b \text{ (koordinatenweise) in } A^m,\\
& \text{sodass für alle } a' \text{ in } A^m \text{ mit } a<a'<b \text{ (koordinatenweise)}\\
& \text{gilt, dass } |f(a',z)|<\varepsilon,\\
g(b,z)>0 \Leftrightarrow\ & \text{Es existiert ein positives } \varepsilon \text{ in } A \text{ und ein } a<b \text{ (koordinatenweise) in } A^m,\\
& \text{sodass für alle } a' \text{ in } A^m \text{ mit } a<a'<b \text{ (koordinatenweise)}\\
& \text{gilt, dass } g(a',z)>\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Die rechten Bedingungen sind jeweils in $(A,(R_b)_{b\in B})$ definierbar.
„3. $\Rightarrow$ 1.“ : Da A und alle R_b in (B,A) definierbar sind, ist Y auch in (B,A) definierbar.

□

Definition 3.6.3. Sei $(B,A)\models \mathrm{T}^2$. Dann heißt $S\subseteq B$ speziell, wenn S und A frei über $A\cap S$ sind.

Lemma 3.6.4. Wenn S in (B,A) speziell ist, ist auch $\mathrm{dcl}(S)$ speziell und $\mathrm{dcl}(S)\cap A = \mathrm{dcl}(S\cap A)$.

Beweis. Sei a aus $\mathrm{dcl}(S)\cap A$, also ist a in A und abhängig (als einelementiges Tupel) über S. Wegen Unabhängigkeit von A und S ist a abhängig über $S\cap A$, also in $\mathrm{dcl}(S\cap A)$. Andererseits gilt

$$\mathrm{dcl}(S\cap A)\subseteq \mathrm{dcl}(S)\cap\mathrm{dcl}(A)=\mathrm{dcl}(S)\cap A$$

sowieso und es folgt die zweite Behauptung. Mit Lemma 3.4.1 (3.) folgt, dass $\mathrm{dcl}(S)$ und A unabhängig über $\mathrm{dcl}(S\cap A)$ sind. □

Lemma 3.6.5. Der Fall 2. aus dem Satz 3.6.2 lässt sich wie folgt verallgemeinern: Wenn $Y\subseteq A^n$ eine $\mathcal{L}_D^P$-definierbare Menge ist für ein spezielles $D\subseteq B$, dann existiert ein $\mathcal{L}_D$-definierbares $Z\subseteq B^n$ mit $Y=Z\cap A^n$.

Beweis. Da eine Ersetzung $D\rightarrowtail \mathrm{dcl}(D)$ nichts ändert, können wir gleich davon ausgehen, dass D schon ein Modell von T ist.
Der Beweis geht dann analog, nur müssen diesmal

$$\mathfrak{Th}(B,A)_D\cup\{P(x)\}\cup\{\varphi(x)\} \text{ und } \mathfrak{Th}(B,A)_D\cup\{P(x)\}\cup\{\neg\varphi(x)\}$$

in $\mathcal{L}_D$ getrennt werden. Das ergibt anstatt von $(B,A)\preceq(D_1,C_1),(D_2,C_2)$ hier

$$(D_1,C_1),(D_2,C_2)\models\mathfrak{Th}(B,A)_D.$$

Wegen der Spezialität von D gilt, dass die Inklusionen $(D, D \cap A) \subseteq (D_1, C_1), (D_2, C_2)$ frei sind: Wenn $\varphi(c, x)$ nämlich in (D_i, C_i) für ein i die Abhängigkeit von d aus D^n über C_i bezeugt, muss

„Es existiert ein a' in P, sodass $\varphi(a', x)$ die Abhängigkeit von d über P bezeugt“

in $\mathfrak{Th}(B, A)_D$ gelten, also ist d abhängig über A, also wegen Spezialität von D auch abhängig über $D \cap A$. Ab dann kann man den Beweis wie bekannt weiterführen und muss nur (B, A) durch $(D, D \cap A)$ ersetzen. $\square$

3.7 Definierbare Mengen in einer Variablen

In diesem Abschnitt wird eine zur o-Minimalität ähnliche Charakterisierung von Mengen in einer Variable in Modellen von T^{d} hergeleitet. Ab jetzt sei (B, A) ein beliebiges dichtes Paar und $S \subseteq B$ eine spezielle Menge. Da B selbst eine spezielle Menge ist, gelten die folgenden Aussagen insbesondere alle auch für Definierbarkeit unabhängig von irgendwelchen Parametermengen. Angelehnt ist die folgende Vorgehensweise (auch im nächsten Abschnitt) an die Modifikation in [BMP21] von [vdD98a], Teile konnten noch präziser für spezielle Mengen gemacht werden.

Lemma 3.7.1. Sei $Y \subseteq B^n$ $\mathcal{L}_S$-definierbar und $(U_y)_{y \in Y} \subseteq B$ eine Familie von offenen, uniform $\mathcal{L}_S$-definierbaren Mengen. Dann ist

$$X := \bigcup_{y \in Y \cap A^n} U_y$$

auch $\mathcal{L}_S$-definierbar.

Beweis. Wir führen eine Induktion über $\dim Y$, man kann schon annehmen, dass alle U_y nichtleer sind, sonst muss man entsprechend aus Y aussondern. Wenn $\dim Y = 0$ ist, ist Y endlich und es ist schon $Y \cap A^n$ definierbar mit Parametern aus S (zähle z.B. auf, das wievielte Element aus Y man nimmt), also auch X.
Zerlege Y in Zellen, das ändert nichts an irgendwelchen Definierbarkeiten, also kann man annehmen, dass Y selbst schon Zelle ist. Wenn Y keine offene Zelle ist und $\pi : Y \to Z$ die kanonische homöomorphe Projektion zu einer offenen Zelle von Dimension $m < \dim Y$, existiert nach Satz 3.6.5 ein $\mathcal{L}_S$-definierbares $Z' \subseteq B^m$ mit

$$\pi(Y \cap A^n) = Z' \cap A^m,$$

da $\pi(Y \cap A^n) \subseteq A^m$ eine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Menge ist.

Definiere dann $Y' := Z \cap Z'$, sodass immer noch $\pi(Y \cap A^n) = Y' \cap A^m$ gilt und man die Menge umparametrisieren kann:

$$\bigcup_{y' \in Y' \cap A^m} U_{\pi^{-1}(y')} = \bigcup_{y \in \pi^{-1}(Y' \cap A^m)} U_y = \bigcup_{y \in Y \cap A^n} U_y = S$$

Da $(U_{\pi^{-1}(y')})_{y' \in Y'}$ die gleichen Bedingungen erfüllt wie $(U_y)_{y \in Y}$ und $\dim Y' \leq \dim Z < \dim Y$, gilt die Aussage per Induktion.
Für den Beweis für offene Zellen definiere die vier $\mathcal{L}_S$-definierbaren Mengen

$$U := \bigcup_{y \in Y} U_y,$$

$$Y_x := \{y \in Y \mid x \in U_y\},$$

$$C := \{x \in U \mid \operatorname{int}(Y_x) = \emptyset\},$$

$$D := \bigcup_{x \in \operatorname{int} C} Y_x.$$

Es gilt

$$D = \bigcup_{x \in U} \{y \in Y \mid x \in U_y \cap \operatorname{int} C\} = \{y \in Y \mid U_y \cap \operatorname{int} C \neq \emptyset\}.$$

Wir wollen jetzt herleiten, dass $\operatorname{int} D$ leer sein muss. Seien dafür mit Definable Choice die $\mathcal{L}_S$-definierbaren Funktionen $f, g_1, g_2 : D \to B$ gegeben mit

$$f(y) \in (g_1(y), g_2(y)) \subseteq U_y \cap \operatorname{int} C.$$

Wenn $\operatorname{int} D \neq \emptyset$, schränke D ein, sodass es offen ist und f, g_1, g_2 stetig auf D sind. Sei außerdem d, e in $U_y \cap \operatorname{int} C, (c, h) \subseteq U_y \cap \operatorname{int} C$ (das ist offen), sodass

$$c < g_1(y) < d < f(y) < e < g_2(y) < h.$$

Setze

$$V := g_1^{-1}((c, d)) \cap f^{-1}((d, e)) \cap g_2^{-1}((e, h)),$$

das ist dann eine offene Umgebung um y in B^n. Für alle z aus V ist

$$f(y) \in (d, e) \subseteq (g_1(z), g_2(z)) \subseteq U_z,$$

also ist z in $Y_{f(y)}$.

Das heißt, es gilt $V \subseteq Y_{f(y)}$; aber das ist unmöglich, weil V offen in dem (eingeschränkten) Definitionsbereich, also auch in B^n ist und $Y_{f(y)}$ nichtleeres Inneres hätte. Dann läge $f(y)$ nicht in C im Widerspruch zur Definition von f.
Die Menge D hat als Menge ohne Inneres eine kleinere Dimension als n. Also ist induktiv auch

$$\bigcup_{y \in D \cap A^n} U_y$$

S-definierbar in B. Es ist außerdem

$$\bigcup_{y \in (Y \setminus D) \cap A^n} U_y \cup ((C \setminus \operatorname{int} C) \cap \bigcup_{y \in Y \setminus D} U_y) = \bigcup_{y \in Y \setminus D} U_y. \tag{3.1}$$

Dass die linke Seite Teilmenge der Rechten ist, ist sowieso klar per Definition; sei nun

$$x \text{ in } \bigcup_{y \in Y \setminus D} U_y \setminus (C \setminus \operatorname{int} C)$$

und y ein Element aus $Y \setminus D$ mit x in U_y. Weil x nicht in $C \setminus \operatorname{int} C$ liegt, hat Y_x nichtleeres Inneres (wenn x außerhalb von C liegt) oder x ist in $\operatorname{int} C$ und daher y in D (denn x bezeugt, dass $U_y \cap \operatorname{int} C$ nichtleer ist). Da das zweite ausgeschlossen wurde, hat Y_x nichtleeres Inneres, also auch $Y_x \setminus D$ (denn D war niedrigdimensional) und enthält damit ein Element z aus $A^n \cap (Y_x \setminus D)$ wegen Dichtheit. z bezeugt, dass x in $\bigcup_{y \in (Y \setminus D) \cap A^n} U_y$ liegt.
Aus 3.1 folgt, dass

$$\bigcup_{y \in (Y \setminus D) \cap A^n} U_y = \left(\bigcup_{y \in Y \setminus D} U_y \setminus (C \setminus \operatorname{int} C) \right) \cup \left((C \setminus \operatorname{int} C) \cap \bigcup_{y \in (Y \setminus D) \cap A^n} U_y \right)$$

$\mathcal{L}_S$-definierbar ist (der letzte Teil ist es wegen Endlichkeit von $C \setminus \operatorname{int} C$). Also ist auch

$$X = \bigcup_{y \in Y \cap A^n} U_y = \bigcup_{y \in (Y \setminus D) \cap A^n} U_y \cup \bigcup_{y \in D \cap A^n} U_y$$

$\mathcal{L}_S$-definierbar in B. $\square$

Satz 3.7.2. Sei eine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Menge $X \subseteq B$. Dann stimmt X bis auf eine kleine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Menge mit einer $\mathcal{L}_S$-definierbaren Menge X' überein.

Beweis. Sei zunächst X gegeben durch $\exists y \in P(\psi(x,y))$ für eine Formel ψ aus $\mathcal{F}_{1+n}(\mathcal{L}_S)$. Die Mengen

$$F_y := \psi(B,y) \cap \partial\psi(B,y)$$

sind endlich für jedes y aus M^n und weil o-minimale Theorien $\exists^\infty$ eliminieren, ist deren Mächtigkeit uniform beschränkt, sagen wir durch k. Sei

$$Y := (\exists x \psi(x,y))(B), Y' := \{y \in Y \mid F_y \neq \emptyset\}$$

und $\mathcal{L}_S$-definierbare Funktionen $g_1, \ldots, g_k : Y' \to F_y$, sodass $F_y = \{g_1(y), \ldots, g_k(y)\}$ für alle y aus Y'. Als diese Funktionen kann man zum Beispiel die angeordnete Aufzählung der Elemente in F_y nehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned} X = (\exists y \in P(\psi(x,y)))\,(B,A) &= \bigcup_{y \in A^n} \psi(B,y) = \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \psi(B,y) \\ &= \bigcup_{y \in Y \cap A^n} (\psi(B,y) \cap \partial\psi(B,y)) \cup \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \operatorname{int}\psi(B,y) \\ &= \bigcup_{y \in Y' \cap A^n} \{g_1(y), \ldots, g_k(y)\} \cup \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \operatorname{int}\psi(B,y) \\ &= \bigcup_{i=1}^{k} g_i(Y' \cap A^n) \cup \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \operatorname{int}\psi(B,y). \end{aligned}$$

Da $X' := \bigcup_{i=1}^{k} g_i(Y' \cap A^n)$ klein ist und $S'' := \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \operatorname{int}\psi(B,y)$ nach dem letzten Lemma $\mathcal{L}_S$-definierbar, stimmen X und X' bis auf die kleine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Menge S'' überein. Da Darstellungen

$$(X \setminus S') \cup S''$$

für eine $\mathcal{L}_S$-definierbare Menge $X \subseteq B$, und kleine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare S', S'' unter booleschen Kombinationen erhalten bleiben (Zur Erinnerung: Kleine Mengen bilden ein Ideal), folgt die Aussage für gute Formeln und daher für alle Mengen. Dabei ist zu beachten, dass Satz 3.4.5 auch hergibt, dass $\mathcal{L}_S^P$-Formeln zu guten $\mathcal{L}_S^P$-Formeln äquivalent sind. $\square$

Lemma 3.7.3. Sei $X \subseteq B$ eine kleine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Teilmenge. Dann ist X eine endliche Vereinigung von Mengen der Form $f(A^n \cap E)$ für E eine offene $\mathcal{L}_S$-definierbare Zelle und $f : E \to B$ eine stetige $\mathcal{L}_S$-definierbare Funktion.

Beweis. Wenn X klein ist, existiert ein $\mathcal{L}$-definierbares $g : B^m \to B$, sodass $X \subseteq g(A^m)$, nach Lemma 3.5.5 kann man schon annehmen, dass g über $\operatorname{dcl}(S)$ definierbar ist (denn $(\operatorname{dcl}(S), \operatorname{dcl}(S) \cap A) \subseteq (B, A)$ ist frei nach Lemma 3.6.4), also auch über S. Setze

$$X' := g^{-1}(X) \cap A^m = (g \restriction A^m)^{-1}(X),$$

das ist $\mathcal{L}_S^P$-definierbar und es gilt $g(X') = X$ wegen $X \subseteq \operatorname{im}(g \restriction A^m)$.
Beweise die Aussage jetzt induktiv über m: Wenn $m = 0$ ist, ist X endlich und eine Vereinigung der Mengen $f(\{0\})$ für konstante Funktionen f. Wegen Endlichkeit gilt $X \subseteq \operatorname{dcl}(S)$, also sind die Funktionen f über S definierbar.
Wenn $m > 0$ ist, schreibe X' als Teilmenge von A^m wegen Lemma 3.6.5 in der Form $Y \cap A^m$ für ein $\mathcal{L}_S$-definierbares Y. Sei eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Y in $\mathcal{L}_S$-definierbare Zellen gegeben, auf denen g jeweils stetig ist, dann ist

$$X = g(Y \cap A^m) = \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}} g(Z \cap A^m).$$

Für offene Zellen Z ist so eine Darstellung also schon gefunden. Sei Z nun eine Zelle der Dimension $d < m$ und $\pi : B^d \to B^m$ eine $\mathcal{L}_S$-definierbare Fortsetzung des kanonischen Homöomorphismus der entsprechenden offenen Zelle Z' nach Z. Mit Lemma 3.6.5 kann man ein $\mathcal{L}_S$-definierbares $E \subseteq B^d$ findet mit

$$Z' \cap \pi^{-1}(A^m) = A^d \cap E,$$

denn es gilt

$$A^d \supseteq Z' \cap \pi^{-1}(A^m),$$

weil $\pi|_{Z'}$ die Umkehrabbildung einer Projektion ist.
Es ergibt sich dann

$$g(Z \cap A^m) = (g \circ \pi)(Z' \cap \pi^{-1}(A^m)) = (g \circ \pi)(A^d \cap E)$$

Die Gleichung ist aber schon der Fall eines kleineren m und mit Induktion folgt die Aussage. $\square$

Satz 3.7.4. Sei $X \subseteq B$ eine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Menge. Dann existiert eine endliche $\mathcal{L}_S$-definierbare Unterteilung von B, sodass für jedes dadurch erzeugte offene Intervall I genau einer der folgenden Fälle gilt:

- Das Intervall I ist disjunkt zu X.
- Das Intervall I ist Teilmenge von X.
- Die Menge $X \cap I$ ist dicht & kodicht in I und entweder ist $X \cap I$ klein oder $I \setminus X$.

Für kleine X entfallen die Fälle „Teilmenge“ und „koklein“.

Beweis. Sei X zunächst klein und gegeben als $X = f(A^n \cap E)$ für ein stetiges, $\mathcal{L}_S$-definierbares $f : E \to B$ und eine offene $\mathcal{L}_S$-definierbare Zelle $E \subseteq B^n$. Da definierbarer Zusammenhang unter definierbaren stetigen Funktionen erhalten bleibt, ist $I := f(E)$ auch definierbar zusammenhängend, weil es $\mathcal{L}_S$-definierbar ist, ist es Vereinigung von Intervallen und Punkten, also muss es ein Intervall (ausnahmsweise seien hier auch nichtoffene Intervalle mitgemeint). Wenn I endlich ist, ist auch X endlich und es ist nichts zu zeigen. X ist disjunkt zu $B \setminus I$, nun muss nur noch gezeigt werden, dass $X = X \cap I$ dicht und kodicht in I ist. Der Satz verlangt eigentlich Dichte und Kodichte in einem offenen Intervall, allerdings ist Dichte und Kodichte in nichtoffenen unendlichen Intervallen äquivalent zu Dichte und Kodichte in deren Innerem. Aber dichte Teilmengen werden durch stetige Abbildungen auf dichte Teilmengen abgebildet; da A^n dicht in B^n ist, ist auch $A^n \cap E$ dicht in E und folglich X dicht in I. Andererseits muss auch das Komplement von X dicht in I sein, da es sonst ein Intervall ganz in X gäbe, was der Kleinheit mit Satz 3.3.5 widerspricht.
Die gesuchte Eigenschaft für kleine Mengen bleibt unter Vereinigungen erhalten. Man muss nur eine Verfeinerung der Unterteilung durchführen und dann ausnutzen, dass endliche Vereinigungen von kleinen Mengen klein sind. Also gilt für Y und Z als kleine Teilmengen eines Intervalls I:

- Die Vereinigung $Y \cup Z$ ist klein.
- Es ist $Y \cup Z = Y$, sofern Z leer ist.
- Die Menge $Y \cup Z$ ist dicht in I, wenn Y und Z dicht in I sind.
- Die Vereinigung $Y \cup Z$ ist kodicht in I als kleine Menge (s. Begr. oben).

Daher gilt mit dem letzten Lemma die Aussage für kleine Mengen allgemein.

Sei jetzt X nicht mehr klein, dann stimmt es aber bis auf eine kleine Menge mit einer $\mathcal{L}$-definierbaren Menge X' überein. Schreibe also $X = (X' \cup Y) \setminus Z$ für Y und Z klein und disjunkt. X' ist als $\mathcal{L}$-definierbare Menge eine endliche Vereinigung von Punkten und Intervallen; da Y, Z als kleine Mengen die oben beschriebene Gestalt haben, entspricht $X' \cup Y$ der Darstellung ohne den Fall koklein. In der Darstellung der drei Fälle wird der erste durch Subtraktion von Z nicht geändert, der zweite bleibt oder wird zum dritten (2. Teil) und der dritte bleibt auch, da er nur von Y kommt, aber Y und Z disjunkt sind. Also hat X auch so eine Darstellung. $\square$

Folgerung 3.7.5. Jede $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Menge $X \subseteq B$ hat ein Supremum und Infimum in $\mathrm{dcl}(S) \cup \{\pm\infty\}$.

Lemma 3.7.6. T^{d} eliminiert $\exists^\infty$: Wenn $S \subseteq B^{m+n}$ eine $\mathcal{L}^P$-definierbare Menge ist mit S_x endlich für alle x aus B^m, dann ist $(|S_x|)_{x \in B^m}$ beschränkt.

Beweis. Für $n = 1$ gilt das nach Bemerkung 5.33. aus [Met19]. Denn S_x ist genau dann endlich, wenn S_x diskret in B ist. Das ist uniform $\mathcal{L}^P$-ausdrückbar. Die Äquivalenz zur Diskretheit sieht man ein, indem man eine Aufteilung von S_x wie im letzten Satz vornimmt. Dann ist S_x genau dann endlich, wenn nur der Fall „$S_x \cap I = \emptyset$“ vorkommt; weil dichte Teilmengen und Intervalle nicht diskret sind, gilt das genau dann wiederum, wenn S_x diskret ist.
Sei $n > 1$. Dann sind für $\pi_{i_1,\dots,i_k}$ als Projektionsabbildung auf die Koordinaten $i_1, \dots, i_k$ jeweils auch

$$Y_x := (\pi_{1,\dots,m+1}(S))_x = \pi_{m+1}(S_x)$$

und

$$Z_x := (\pi_{1,\dots,m,m+2,\dots,m+n}(S))_x = \pi_{m+2,\dots,m+n}(S_x)$$

endlich und daher ist nach Induktionsvoraussetzung die Mächtigkeit jeweils uniform beschränkt durch irgendwelche natürlichen Zahlen K, L. Dann gilt aber

$$|S_x| \leq |Y_x \times Z_x| = |Y_x||Z_x|,$$

was uniform durch KL beschränkt ist. $\square$

3.8 Definierbare Funktionen und definierbarer Abschluss

Um definierbare Funktionen besser zu verstehen, ist es notwendig, sich mit dem definierbaren Abschluss in $\mathcal{L}^P$ zu beschäftigen. Damit kann man zeigen, dass definierbare Funktionen in einer Variablen „fast überall" $\mathcal{L}$-definierbar sind. Wir erinnern uns, dass ein dichtes Paar (B, A) fixiert war und $S \subseteq B$ speziell. Mit „definierbar abgeschlossen" ist im Folgenden „$\mathcal{L}^P$-definierbar abgeschlossen" gemeint. Zuerst kommen zwei einfach zu beweisende Aussagen, um sie dann stark zu verallgemeinern und daraus Wissen über Funktionen zu erhalten.

Lemma 3.8.1. Die Menge A ist definierbar abgeschlossen.

Beweis. Sei b in $B \setminus A$ und $(B, A) \preceq (D, C)$ eine genügend saturierte Elementarerweiterung. Dann wird der Ordnungstyp von b über A auch von einem Element $d \neq b$ in $D \setminus C$ realisiert wegen Dichtheit von $D \setminus C$ in D und Saturation.
Nach Lemma 3.5.4 haben b und d dann den selben $\mathcal{L}^P$-Typen über A, weswegen b nicht definierbar über A in (D, C) sein kann, also auch nicht in (B, A). $\square$

Lemma 3.8.2. Sei $(D, C) \subseteq (B, A)$ frei, dann ist D definierbar abgeschlossen in (B, A).

Beweis. Für eine beliebige Struktur $(B', A') \succeq (B, A)$ gelten die Voraussetzungen ebenso, da acl-Abhängigkeit über A als Teil vom Typen äquivalent ist zu acl-Abhängigkeit über A'. Ebenso ist D in (B, A) definierbar abgeschlossen genau dann, wenn es in (B', A') definierbar abgeschlossen ist. Also sei (B, A) jetzt schon ohne Einschränkungen hinreichend saturiert und b in $B \setminus D$.
Nach dem Beweis zur Existenz des B&F-Systems kann der partielle Isomorphismus

$$(B, A) \supseteq (D, C) \cong (D, C) \subseteq (B, A)$$

insbesondere auf mehrere Weisen auf b fortgesetzt werden: Wenn b in A oder in $B \setminus AD$ liegt, ging es nur um die Erfüllung von transzendenten Ordnungstypen, dort hat man also mehrere Optionen. Wenn b in $AD \setminus (A \cup D)$ ist und a in A^n unabhängig über D, sodass b in Da liegt, dann finde in A Elemente a'_1 transzendent über Da von passendem Ordnungstyp über D, a'_2 transzendent über Daa'_1 von passendem Ordnungstyp über Da'_1, usw.

So kann man den Isomorphismus auf Da fortsetzen mit Bild Da'; da aber a und a' per Konstruktion unabhängig über D waren, sind auch Da und Da' unabhängig über D, also $Da \cap Da' = D$ und das Bild von b kann nicht b selbst sein. Also gibt es auch in diesem Fall mehrere Möglichkeiten für eine Fortsetzung, also mehrere elementare Abbildungen, daher kann b nicht definierbar über D sein. □

Das vorige Lemma kann man unter bestimmten Bedingungen umkehren, so zum Beispiel für $\mathrm{RCF}^{\mathrm{d}}$.

Definition 3.8.3. T^{d} sei **zahm für Paare**, wenn jede definierbar abgeschlossene Menge in jedem Modell $(B, A) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$ speziell ist.

Lemma 3.8.4. $\mathrm{RCF}^{\mathrm{d}}$ ist zahm für Paare.

Beweis. Sei (B, A) ein Modell und S definierbar abgeschlossen. Dann ist S Träger einer $\mathcal{L}$-Unterstruktur von B, also auch Modell von RCF. Sei $\overline{B}$ ein algebraischer Abschluss von B, dann stimmt der RCF-acl auf B mit dem auf B eingeschränkten ACF-acl auf $\overline{B}$ überein, wir brauchen sie also nicht zu unterscheiden. Zu zeigen ist dann

$$S \,\mathrm{ad}_{S\cap A}\, A.$$

Es gilt aber

$$S \,\mathrm{ld}_{S\cap A}\, A,$$

denn wenn $\overline{x}$ aus S linear abhängig über A ist und ohne Einschränkungen $x_1, \ldots, x_k$ eine Basis des Tupels über A sind, dann kann jedes x_i eindeutig als A-Linearkombination der Basis geschrieben werden. Also ist diese Linearkombination $\mathcal{L}^P_S$-definierbar, ergo in $S \cap A$; somit ist $\overline{x}$ linear abhängig über $S \cap A$. Mit Lemma 2.2.8 folgt $S \,\mathrm{ad}_{S\cap A}\, A$. □

Nun aber zu den definierbaren Funktionen. Es gibt mehrere Möglichkeiten, $\mathcal{L}^P$-definierbare Funktionen mit $\mathcal{L}$-definierbaren Funktionen in Verbindung zu setzen.

Lemma 3.8.5. Sei $F : A^n \to A$ eine $\mathcal{L}^P_S$-definierbare Funktion. Dann gibt es $S \cap A$-definierbare $f_1, \ldots, f_k : A^n \to A$ in A, sodass für alle a in A^n ein f_i existiert mit $F(a) = f_i(a)$.

Beweis. Man kann annehmen, dass S schon Modell von T ist, ansonsten geht man zu $\mathrm{dcl}(S)$ über. Nach Lemma 3.6.4 ist $\mathrm{dcl}(S) \cap A = \mathrm{dcl}(S \cap A)$, also ändert das die Aussage nicht.

Wenn das Lemma nicht gälte, gilt für alle k und alle in A über $S \cap A$ definierbaren $f_1, \dots, f_k : A^n \to A$, dass ein a aus A existiert mit $f_i(a) \neq F(a)$ für alle i. Also ist der partielle Typ

$$\{P(x)\} \cup \{F(x) \neq f(x) \mid f : A^n \to A \; \mathcal{L}_{S \cap A}\text{-definierbar}\}$$

konsistent und es existiert $(B, A) \preceq (B', A')$ und a' in A'^n mit $F(a') \neq f(a')$ für alle $\mathcal{L}_{S \cap A}$-definierbaren $f : A'^n \to A'$.
Allerdings ist die Inklusion

$$(S, S \cap A) \subseteq (B, A)$$

frei, wegen Elementarität auch

$$(S, S \cap A) \subseteq (B', A').$$

Nach Lemma 3.4.1 (6.) ist, weil a' in A'^n liegt, die Inklusion

$$(Sa', (S \cap A)a') \subseteq (B', A')$$

frei. Nach Lemma 3.8.2 ist Sa' also $\mathcal{L}^P$-definierbar abgeschlossen. Da $F(a')$ $\mathcal{L}^P$-definierbar über Sa' ist, liegt es in Sa', außerdem bildet F nach A' ab. Wegen Unabhängigkeit liegt also

$$F(a') \in Sa' \cap A' = (S \cap A)a'$$

und es gibt eine $\mathcal{L}_{S \cap A}$-definierbare Abbildung $f : A'^n \to A'$ mit $f(a') = F(a')$ - ein Widerspruch! □

Lemma 3.8.6. Sei $F : B \to B$ eine $\mathcal{L}^P_S$-definierbare Funktion. Dann gibt es $\mathcal{L}_S$-definierbare $f_1, \dots, f_k : B \to B$ und eine kleine $\mathcal{L}^P_S$-definierbare Menge $X \subseteq B$, sodass für alle b aus $B \setminus X$ ein f_i existiert mit $F(b) = f_i(b)$.

Beweis. Ohne Einschränkungen ist wieder S ein Modell.
Wenn die Aussage nicht gilt, gilt für alle k, alle kleinen $\mathcal{L}^P_S$-definierbaren Mengen $X \subseteq B$ und alle $\mathcal{L}_S$-definierbaren $f_1, \dots, f_k : B \to B$, dass ein b aus $B \setminus X$ existiert mit $f_i(b) \neq F(b)$ für alle i.

Also ist der partielle Typ

$$\{x \notin X \mid X \text{ klein, } \mathcal{L}_S^P\text{-definierbar}\} \cup \{F(x) \neq f(x) \mid f : B \to B \ \mathcal{L}_S\text{-definierbar}\}$$

(endlich) konsistent und es existiert $(B, A) \preceq (B', A')$ und

$$b' \text{ in } B' \setminus \bigcup_{f: B'^n \to B' \ \mathcal{L}_S\text{-definierbar}} f(A'^n) = B' \setminus A'S$$

mit $F(b') \neq f(b')$ für alle $\mathcal{L}_S$-definierbaren $f : B' \to B'$.
Allerdings ist

$$(S, S \cap A) \subseteq (B', A')$$

frei und nach Lemma 3.4.1 (7.), weil b' nicht in $A'S$ liegt, die Inklusion

$$(Sb', S \cap A) \subseteq (B', A')$$

ebenso. Nach Lemma 3.8.2 ist Sb' also $\mathcal{L}^P$-definierbar abgeschlossen. Da $F(b')$ $\mathcal{L}^P$-definierbar über Sb' ist, ist es in Sb', also existiert eine $\mathcal{L}_S$-definierbare Abbildung $f : B' \to B'$ mit $f(b') = F(b')$ - ein Widerspruch! □

Satz 3.8.7. Sei $F : B \to B$ eine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Funktion. Dann stimmt F auf bis auf eine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare kleine Menge mit einer $\mathcal{L}_S$-definierbaren Funktion überein.

Beweis. Nach dem vorigen Lemma existieren $\mathcal{L}_S$-definierbare $f_1, \ldots, f_k : B \to B$ und ein kleines $\mathcal{L}_S^P$-definierbares X, sodass für alle b außerhalb von X ein i existiert mit $F(b) = f_i(b)$. Wenn $k = 1$ ist, ist das die gewünschte Aussage, wenn nicht, zeige dass man k weiter reduzieren kann. Dafür partitioniere B mit Satz 3.7.4 in $\mathcal{L}_S$-definierbare $E, T, D, K, C \subseteq B$, sodass E endlich ist, alle anderen Mengen dafür offen,

$$T \subseteq \{F = f_1\}, D \cap \{F = f_1\} = \emptyset, K' := K \cap \{F = f_1\} \text{ klein, dicht und kodicht in } K$$

$$\text{sowie } C' := C \cap \{F = f_1\} \text{ koklein, dicht und kodicht in } C.$$

Definiere dann

$$f : x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & x \in T \cup C \\ f_2(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Menge $X' := X \cup E \cup K' \cup (C \setminus C')$ ist klein als Vereinigung von kleinen Mengen, außerdem $\mathcal{L}_S^P$-definierbar. Wenn x nicht in X' liegt und $F(x) \neq f_i(x)$ ist für $i = 3, \ldots, k$, dann gibt es folgende Möglichkeiten:

- Liegt x in $T \cup C' \subseteq \{F = f_1\}$, so ist $F(x) = f_1(x) = f(x)$.
- Liegt x in $D \cup (K \setminus K')$, also insbesondere nicht in $\{F = f_1\}$, so ist $f(x) = f_2(x)$ und wegen $F(x) \neq f_1(x)$ ist $F(x) = f(x)$.

Also nimmt F auf $B \setminus X'$ immer die Werte von $f, f_3, \ldots, f_k$ an und induktiv ist die Aussage gezeigt. □

Lemma 3.8.8. Sei $f : B \to B$ stückweise stetig und $\mathcal{L}_S^P$-definierbar. Dann ist f schon $\mathcal{L}_S$-definierbar.

Beweis. Nach Satz 3.8.7 stimmt f bis auf eine kleine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Menge X mit einer $\mathcal{L}_S$-definierbaren Funktion f' überein. Wegen o-Minimalität von T ist f' auch stückweise stetig. Unterteile X wie in Satz 3.7.4 und verfeinere die Unterteilung, so dass f, f' auf jedem Intervall stetig sind. Für jedes Intervall I dieser Unterteilung gilt dann entweder, dass $X \cap I$ dicht und kodicht in I ist oder, dass $X \cap I = \emptyset$. Der erste Fall kann nie eintreten, da zwei stetige Funktionen, die auf der dichten Teilmenge $I \setminus X$ übereinstimmen, schon auf ganz I übereinstimmen. Also ist X endlich und f kann mit $\mathcal{L}$ definiert werden (nämlich durch f' außerhalb von X und ansonsten manuell). Da diese Unterteilung $\mathcal{L}_S$-definierbar ist, ist auch f schon $\mathcal{L}_S$-definierbar. □

3.9 Offene und abgeschlossene $\mathcal{L}^P$-definierbare Mengen

Nach der Beschreibung der Struktur von $\mathcal{L}^P$-definierbaren Teilmengen von B liegt die Vermutung nahe, dass offene und abgeschlossene $\mathcal{L}^P$-definierbare Mengen schon $\mathcal{L}$-definierbar sind.
Dies lässt sich in vielen Situationen auch beweisen. Im Folgenden werden mehrere Möglichkeiten dafür angegeben. Hierbei sei (B, A) wieder ein dichtes Paar und S speziell.
Als erstes ist festzuhalten, dass die Aussage für Mengen in einer Variable leicht zu sehen ist und man sie nur für offene Mengen zeigen muss.

Lemma 3.9.1.

- Sei $Z \subseteq B$ offen und $\mathcal{L}_S^P$-definierbar. Dann ist Z schon $\mathcal{L}_S$-definierbar.
- Wenn alle offenen $\mathcal{L}_S^P$-definierbaren Teilmengen von B^n auch $\mathcal{L}_S$-definierbar sind, sind es alle abgeschlossenen solchen Mengen auch.

Beweis.

- In der Darstellung von Satz 3.7.4 kann der Fall $Z \cap I$ dicht und kodicht nicht auftreten. Die Menge $Z \cap I$ ist nämlich offen und kann daher nicht kodicht in I sein (denn sonst würde sie ein Element ihres eigenen Komplements enthalten). Also sind die $\mathcal{L}_S^P$-definierbaren offenen Teilmengen von B gerade die endlichen Vereinigungen von Intervallen mit Rand aus $\mathrm{dcl}(S) \cup \{\pm\infty\}$ und Punkten aus $\mathrm{dcl}(S)$ und das ist $\mathcal{L}_S$-definierbar.
- Wenn $Z \subseteq B^n$ abgeschlossen und $\mathcal{L}_S^P$-definierbar ist, ist Z^c offen und $\mathcal{L}_S^P$-definierbar, also $\mathcal{L}_S$-definierbar per Voraussetzung. Damit ist Z dann selbst $\mathcal{L}_S$-definierbar.

□

Für mehrstellige Mengen kann man folgenden Satz aus [BMP21] benutzen, die Voraussetzungen dafür sind allerdings nicht zwangsläufig erfüllt. Für einige Theorien wie z.B. $\mathrm{RCF}^{\mathrm{d}}$ ist das aber ein gangbarer Weg (siehe auch Lemma 3.8.4).

Satz 3.9.2. Sei $F : B^n \to B$ eine $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Funktion und T^{d} sei zahm für Paare. Dann ist F definierbar in $\mathcal{L}_S$ genau dann, wenn für alle speziellen $X \supseteq S$ und alle $\mathcal{L}_X$-definierbaren partiellen Funktionen $\alpha : Y \to B^n$ mit Y offen in B auch $F \circ \alpha$ schon $\mathcal{L}_X$-definierbar ist.

Mit diesem Satz kann man dann die gewünschte Eigenschaft beweisen.

Satz 3.9.3. Offene und abgeschlossene $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Mengen sind $\mathcal{L}_S$-definierbar, sofern T^{d} zahm für Paare ist.

Beweis. Es reicht, das für offene Mengen zu zeigen; genauer reicht es schon, die Definierbarkeit für charakteristische Funktionen solcher Mengen zu zeigen. Sei $Z \subseteq B^n$ eine offene $\mathcal{L}_S^P$-definierbare Menge und $X \supseteq S$ speziell, $\alpha : Y \to B^n$ eine $\mathcal{L}_X$-definierbare, partielle Funktion und $Y \subseteq B$ offen. Zu zeigen ist für die Anwendung von Satz 3.9.2, dass $\chi_Z \circ \alpha$ definierbar in $\mathcal{L}_X$ ist.

Man kann annehmen, dass α stetig ist, sonst zerlege Y in Intervalle, auf denen α stetig ist, und Punkte; das ändert nichts an irgendwelchen Definierbarkeiten. Es ist festzustellen, dass

$$1 = \chi_Z \circ \alpha(x) \Leftrightarrow \alpha(x) \in Z \Leftrightarrow x \in \alpha^{-1}(Z).$$

Da aber $\alpha^{-1}(Z)$ eine $\mathcal{L}_X^P$-definierbare Teilmenge von B ist, offen wegen Stetigkeit von α und Offenheit von Z und zusätzlich X speziell ist, ist $\alpha^{-1}(Z)$ nach Lemma 3.9.1 $\mathcal{L}_X$-definierbar. Also ist $\chi_Z \circ \alpha$ definierbar in $\mathcal{L}_X$ durch

$$\chi_Z \circ \alpha(x) = \begin{cases} 1 & x \in \alpha^{-1}(Z) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

$\square$

Folgerung 3.9.4. Der Abschluss und das Innere von $\mathcal{L}_S^P$-definierbaren Mengen sind unter dieser Anforderung an die Theorie $\mathcal{L}_S$-definierbar.

Es gibt auch andere Möglichkeiten, die gesuchte Aussage für manche Theorien zu beweisen. Für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ in einer o-minimalen Erweiterung von RCF mit Grundmenge $\mathbb{R}$ wird das zum Beispiel in [vdD98a] beschrieben. Es wäre auch zu betrachten, ob die Argumentation in [DMS09] eine Lösung dieses Problems hergibt. Man könnte sich überlegen, wie Satz 3.7.4 und Satz 3.8.7 ins mehrdimensionale zu verallgemeinern wären und dann so vorgehen, wie beim Beweis der Zellzerlegung in [vdD98b]. Aber dies wäre eine Aufgabe für eine weitere Arbeit zu dem Thema.

A Ein Alternativbeweis zur ω-Stabilität von ACP

Beweis. Sei (K, E_K) ein Modell von ACP und $X \subseteq K$ unendlich. Nach Folgerung 2.3.13 kann man jede Formel mit Parametern aus X modulo ACP schreiben als boolesche Kombination aus

$$„l_n(\text{Monome mit Koeffizienten von Produkten aus } X)“$$

und

$$„(\text{Polynom in } \mathbb{P}[X])(f_{i_1,n_1}(\text{Monome in Produkten aus } X), \\ \dots, f_{i_m,n_m}(\text{Monome in Produkten aus } X)) = 0“.$$

Diese beiden Arten von Formeln lassen sich verallgemeinern zu Formeln der Art

$$\exists \overline{e} \in E(f(\overline{e}, \overline{x}) = 0)$$

für $f(\overline{T}, \overline{x})$ aus $(\mathbb{P}(X))(\overline{T})[\overline{x}]$ und der Art

$$\exists z_{1,2}, \dots, z_{1,n_1+1}, z_{2,2}, \dots, z_{2,n_2+1}, \dots \in E(p(z_{1,1}, \dots, z_{k,1}) = 0 \\ \bigwedge_{i=1}^{k} m_{i,1}(\overline{x}) = z_{i,2} m_{i,2}(\overline{x}) + \dots + z_{i,n_i} m_{i,n_i}(\overline{x}))$$

für Monome $(m_{i,j})$ in $\mathbb{P}(X)[\overline{x}]$ und ein Polynom p aus $\mathbb{P}(X)[\overline{x}]$. Nenne die Menge aller Formeln der ersten Art A und die aller Formeln der zweiten Art B. Insbesondere wurde die Menge der „interessanten“ Formeln nur vergrößert, das heißt, dass ein Typ p eindeutig durch

$$(p \cap A) \cup (p \cap B) \cup (p \cap \neg A) \cup (p \cap \neg B)$$

festgelegt wird.
Das bedeutet, $S_n(X)$ zerfällt in folgende Teilmengen:

1. Typen, die eine Formel aus A und eine aus B enthalten
2. Typen, die eine Formel aus A und keine aus B enthalten
3. Typen, die eine Formel aus B und keine aus A enthalten
4. Typen, die keine Formel aus $A \cup B$ enthalten

Für einen Typen p ist im Fall 3./4. $p \cap A = \emptyset$, also $p \cap (A \cup \neg A)$ eindeutig gegeben durch die Verneinung aller möglichen Formeln in A mit n freien Variablen. Analog ist in Fall 2./4. $p \cap (B \cup \neg B)$ eindeutig bestimmt.
Es bleibt nun noch zu zeigen, dass es im Fall 1./2. jeweils nur $|X|$ viele Möglichkeiten für Einschränkungen $p \cap (A \cup \neg A)$ geben kann und im Fall 1./3. nur $|X|$ viele Möglichkeiten für Einschränkungen $p \cap (B \cup \neg B)$.
Zunächst zum ersten Teil: Definiere für ein Polynom g aus $E_K(X)[\overline{x}]$ die Relation

$$\begin{aligned} g \in\in p :\Leftrightarrow\ & \text{es existiert ein } f(\overline{T}, \overline{x}) \text{ aus } (\mathbb{P}(X))(\overline{T})[\overline{x}], \text{ es existieren } a_1, \ldots, a_n \\ & \text{in } E_K \text{ mit } f(\overline{a}, \overline{x}) = g(\overline{x}) \text{ und } (\exists \overline{e} \in E(f(\overline{e}, \overline{x}) = 0)) \in p. \end{aligned}$$

$I := \{g \in E_K(X)[\overline{x}] \mid g \in\in p\}$ ist offenbar ein Ideal im Noetherschen Ring $E_K(X)[\overline{x}]$ (es ist nichtleer im Fall 1./2.) und daher endlich erzeugt durch gewisse $h_1, \ldots, h_m$. Da jedes Element g aus I mit einem Element

$$(\exists \overline{e} \in E(\overline{g}(\overline{e}, \overline{x}) = 0)) \in p$$

korrespondiert, ist $p \cap (A \cup \neg A)$ isoliert durch die übertragenen Erzeuger

$$\exists \overline{e} \in E(\overline{h_1}(\overline{e}, \overline{x}) = 0), \ldots, \exists \overline{e} \in E(\overline{h_m}(\overline{e}, \overline{x}) = 0),$$

also gibt es nur $|X|$ viele Möglichkeiten für $p \cap (A \cup \neg A)$.
Formeln der zweiten Art kann man in Konjunktionen von Formeln der ersten Art umwandeln, indem man $(z_{l,1})_{l=1\ldots k}$ zu freien Variablen macht. Auf diese Weise kann man partielle Typen in B zu partiellen Typen in A in mehr Variablen umformen (am schnellsten geht es wahrscheinlich, wenn man annimmt, dass $\mathcal{M}$ schon hinreichend saturiert ist und einen Erfüller $\overline{a}$ von einem p der Art 1./3. betrachtet, eine Belegung $(b_{i,j})$ für die $(z_{i,j})$ in einer der Formeln findet und dann

$$\mathrm{tp}(\overline{a}, (b_{l,1})_{l=1\ldots k}/X) \cap (A \cup \neg A)$$

betrachtet). Egal welchen Weg man letztlich anwendet, es können nur mehr Typen werden, dafür erhält man wieder den Fall 1./2., wo wir wissen, dass es nur $|X|$ viele Möglichkeiten gibt. Also ist ACP κ-stabil für alle unendlichen κ. $\square$

Literaturverzeichnis

[BMP21] Elias Baro and Amador Martin-Pizarro. *Open Core and Small Groups in Dense Pairs of Topologigal Structures.* Annals of Pure and Applied Logic. 172, 2021.

[Cha41] Zoé Chatzidakis. Notes on the model theory of finite and pseudo-finite fields. `https://www.math.ens.fr/~chatzidakis/papiers/Helsinki.pdf`, Abgerufen am 20.4.2021, 19:41.

[Del12] Françoise Delon. *Elimination des Quantificateurs dans les Paires de Corps Algébriquement Clos.* Confluentes Mathematici Vol. 4, No. 2, 2012.

[DMS09] Alfred Dolich, Chris Miller, and Charles Steinhorn. *Structures Having O-Minimal Open Core.* Transactions of the American Mathematical Society Vol. 362, No. 3, 2009.

[Kei64] Jerome Keisler. *Complete Theories of Algebraically Closed Fields with Distinguished Subfields.* Michigan Mathematical Journal Vol. 11, 1964.

[Lan73] Serge Lang. *Introduction To Algebraic Geometry.* Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1973.

[Mar02] David Marker. *Model Theory: An Introduction.* Springer-Verlag New York, 2002.

[Met19] Lukas Metzger. Notizen zur Vorlesung Modelltheorie bei Markus Junker im Wintersemester 2018/2019. `https://github.com/loewexy/mathe-modelltheorie/blob/master/skript_modelltheorie.pdf`, 2019.

[Pil88] Anand Pillay. *On Groups and Fields Definable in O-Minimal Structures.* Journal of Pure and Applied Algebra. 53, 1988.

[Rob59] Alan Robinson. *Solution of a Problem of Tarski.* Fundamenta Mathematicae. 47, 1959.

[vdD98a] Lou van den Dries. *Dense Pairs of o-minimal Structures.* Fundamenta Mathematicae. 157, 1998.

[vdD98b] Lou van den Dries. *Tame Topology and O-minimal Structures.* London Mathematical Society Lecture Note Series. 248, 1998.

[vdDS84] Lou van den Dries and Klaus Schmidt. *Bounds in the theory of polynomial rings over fields. A nonstandard approach.* Inventiones mathematicae. 76, 1984.

[Wil96] Alex Wilkie. *Model Completeness Results for Expansions of the Ordered Field of Real Numbers by Restricted Pfaffian Functions and the Exponential Function.* Journal of the American Mathematical Society Vol. 9, No. 4, 1996.