Inhaltsverzeichnis

Notation

Im Folgenden seien, wenn nicht weiter erklärt, mit i, j, k, l, m, n immer natürliche Zahlen gemeint, mit hebräischen Buchstaben immer unendliche Kardinalzahlen.
Oftmals wird nicht zwischen Strukturen und deren Trägermengen unterschieden, insbesondere bei Paaren von Strukturen. Wenn von $\mathcal{L}$-Definierbarkeit in einem Modell $\mathcal{M}$ die Rede ist, ist Definierbarkeit mit $\mathcal{L}_M$-Formeln gemeint, bei $\mathcal{L}_S$-Definierbarkeit für ein $S \subseteq M$ nur Definierbarkeit mit $\mathcal{L}_S$-Formeln.
Als Topologie wird immer die Ordnungstopologie bzw. deren Produkttopologie verstanden, mit „Intervall" ist immer ein offenes, nichtleeres Intervall mit Randpunkten in der Struktur oder $\pm\infty$ gemeint. Außerdem sei für $A \prec B$ und $X \subseteq B$ A-definierbar in T die Menge X_A die durch dieselbe definierende Formel in B definierbare Menge (für $X \subseteq A$ und X_B natürlich analog). Außerdem sei für Relationen P mit „$\exists/\forall x \in P(\dots)$" die Formel „$\exists x(P(x) \wedge \dots)/\forall x(P(x) \rightarrow \dots)$" gemeint.
Mit $|\overline{a}|$ ist je nach Kontext unterschiedliches gemeint, einerseits die Supremumsnorm von $\overline{a}$, andererseits die Anzahl der Einträge. Da das eine ein Element der Struktur ist und das andere eine natürliche Zahl, ist immer klar erkennbar, was gemeint ist. Im Allgemeinen wird auch nicht immer zwischen Tupeln und Elementen unterschieden, außer, wenn das für das Verständnis notwendig ist.
Im modelltheoretischen Kontext ungewöhnlich sind Mengen der Form $\{f = a\}, \{f > a\}$ und $\{f < a\}$ für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Hiermit sind die maßtheoretischen Interpretationen dieser Ausdrucksweise ($\{x \in X \mid f(x) = a\}, \{x \in X \mid f(x) > a\}$ und $\{x \in X \mid f(x) < a\}$) gemeint.

1 Paare algebraisch abgeschlossener Körper

1.1 Algebraische und lineare Disjunktheit von Körpern

In diesem Teil richten wir uns im Aufbau etwas nach [Del12] und in manchen Beweisen nach [Lan73].

Definition 1.1.1. Gegeben Körperinklusionen $C \subseteq K, L \subseteq M$ in Rautenform, nenne K und L **linear disjunkt über** C, falls alle Basen von K als C-Vektorraum auch über L linear unabhängig bleiben. Nenne K und L **algebraisch disjunkt über** C, falls alle Transzendenzbasen von K über C auch algebraisch unabhängig über L bleiben. Schreibe $K \operatorname{ld}_C L$ bzw. $K \operatorname{ad}_C L$.

Bemerkung. Es reicht, lineare Disjunktheit für eine Basis zu zeigen. Denn wenn man die lineare Unabhängigkeit über L für eine Basis verliert, verliert man sie per C-Basiswechsel auch für alle anderen.

Bemerkung. Es reicht, die Erhaltung der linearen/algebraischen Unabhängigkeit nur für beliebige endliche Mengen zu prüfen, weil lineare/algebraische Unabhängigkeit einer Menge genau dann gilt, wenn sie für alle endlichen Teilmengen gilt.

Bemerkung. Der Körper M kommt in der Definition nur vor, damit die Rechenoperationen zwischen K und L wohldefiniert sind. Die genaue Wahl ist irrelevant und daher nicht in der Notation berücksichtigt. Wir nehmen für die Zukunft einfach an, dass die Multiplikation klar definiert ist.

Lemma 1.1.2. Sei C ein Körper und $C \subseteq R, S$ Ringerweiterungen von Integritätsbereichen. Dann gilt $\operatorname{Frac}(R) \operatorname{ld}_C \operatorname{Frac}(S)$ genau dann wenn linear unabhängige Mengen in R über C auch linear unabhängig über S bleiben.

Beweis. Die Hinrichtung folgt leicht aus $R \subseteq \operatorname{Frac}(R), S \subseteq \operatorname{Frac}(S)$. Für die Rückrichtung seien $r_1x_1^{-1}, \dots, r_nx_n^{-1} \in \operatorname{Frac}(R)$ linear unabhängig über C, aber linear abhängig über $\operatorname{Frac}(S)$ mit nichttrivialer Linearkombination

$$(s_1y_1^{-1})r_1x_1^{-1}, \dots, (s_ny_n^{-1})r_nx_n^{-1} = 0.$$

Dann gilt aber nach Multiplikation mit $\prod_{i=1}^{n} x_iy_i \neq 0$ die lineare Abhängigkeit über S

der über C unabhängigen Elemente $((\prod_{i\neq j} x_i)r_j)_{1,\dots,n} \in R$ mit der folgenden Gleichung:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (\prod_{i\neq j} x_i) r_j (\prod_{i\neq j} y_i) s_j$$

□

Bemerkung. Es reicht wieder, sich auf endliche Mengen zu beschränken. Alternativ kann man es auch wieder nur für eine C-Basis von R zeigen.

Lemma 1.1.3. Für Körper C, K, L wie oben gilt $K \operatorname{ld}_C L$ genau dann wenn $K[L] = L[K] \cong K \otimes_C L$ mit kanonischem Isomorphismus, daher ist ld symmetrisch.

Beweis. Der aufgespannte Ring erfüllt

$$K[L] = \{ \sum_{(k,l)\in X} kl \mid X \subset K \times L \text{ endlich}\} = L[K].$$

Wenn $(k_i)_I, (l_j)_J$ Basen von K, L über C sind, ist $(k_i \otimes l_j)_{i\in I, j\in J}$ eine Basis von $K \otimes_C L$. Der C-Homomorphismus

$$\sum_{i\in I_0, j\in J_0} c_{ij} k_i \otimes l_j \mapsto \sum_{i\in I_0, j\in J_0} c_{ij} k_i l_j$$

für $I_0 \subseteq I, J_0 \subseteq J$ endlich ist immer surjektiv, da klarerweise $E := (k_i l_j)_{i\in I, j\in J}$ ein Erzeugendensystem von $K[L]$ ist. Er ist injektiv genau dann, wenn E auch linear unabhängig über C ist, also keine Linearkombination

$$0 = \sum_{i\in I_0, j\in J_0} c_{ij} k_i l_j = \sum_{i\in I_0} (\sum_{j\in J_0} c_{ij} l_j) k_i$$

existiert mit $c_{ij} \neq 0$ für mindestens ein Paar (i, j). Aber das ist genau dann der Fall, wenn keine $\tilde{c}_i = \sum_{j\in J_0} c_{ij} l_j \in L$ existieren für $i \in I_0$ mit $\tilde{c}_i \neq 0$ für mindestens ein i und $0 = \sum_{i\in I_0} \tilde{c}_i k_i$, also wenn die $(k_i)_I$ linear unabhängig über L sind. □

Bemerkung. Auch ad ist symmetrisch, denn $K \operatorname{ad}_C L$ genau dann, wenn $\dim(\overline{k}/C) = \dim(\overline{k}/L)$ für alle $\overline{k} \in K$ im Sinne der acl-Dimension in ACF, also gerade dann, wenn K und L unabhängig über C im modelltheoretischen Sinn als Teilmengen eines algebraisch abgeschlossenen Körpers.

Definition 1.1.4.

- Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heiße **regulär**, wenn $\overline{K} \operatorname{ld}_K L$.

- Für Körper $K, L \subseteq M$ sei $KL := K(L) = L(K)$.

Wir können einige Folgerungen und „Rechenregeln“ aus den definierten Eigenschaften ziehen:

Lemma 1.1.5. Gegeben die Körperinklusionen $C \subseteq L \subseteq M$ und $C \subseteq K$. Dann gilt $K \operatorname{ld}_C M$ genau dann, wenn $K \operatorname{ld}_C L$ und $KL \operatorname{ld}_L M$.

Beweis. Sei $(k_h)_H$ eine Basis von K über C, $(l_i)_I$ eine von L über C und $(m_J)_J$ eine von M über L. $K \operatorname{ld}_C M$ bedeutet, dass die C-Basis von K auch M-Basis von K ist, aber dann ist sie natürlich auch L-Basis, da $C \subseteq L \subseteq M$. Dann kann man sich überlegen, dass $(l_i m_j)_{I\times J}$ eine Basis von M über C ist und nach dem letzten Satz $(k_h)_H$ eine Basis von $L[K]$ als L-Vektorraum.
Wenn $KL \operatorname{ld}_L M$ nicht gelten würde, würde nach den Bemerkungen oben auch schon die Basis $(k_h)_H$ von $L[K]$ über L linear abhängig über M werden, es gäbe also eine Linearkombination

$$\sum_{h\in H} \lambda_h k_h = 0, \;\; M \ni \lambda_h = 0 \text{ für fast alle, aber nicht alle } h \in H.$$

Da $(k_h)_H$ aber die Basis von K über C ist, widerspricht das $K \operatorname{ld}_C L$.
Für die Rückrichtung ist zu zeigen, dass $(l_i m_j)_{I\times J}$ linear unabhängig über K bleibt. Wenn das nicht so ist und die Linearkombination

$$0 = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij} l_i m_j, \;\; K \ni \lambda_{ij} = 0 \text{ für fast alle, aber nicht alle } (i,j) \in I \times J$$

das bezeugt, schreibe

$$\lambda_{ij} =: \sum_{h\in H} c_{hij} k_h$$

als C-Basisdarstellung für alle $(i,j) \in I \times J$. Einsetzen und Umklammern bringt uns die Linearkombination

$$0 = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij} l_i m_j = \sum_{(i,j)\in I\times J} (\sum_{h\in H} c_{hij} k_h) l_i m_j = \sum_{i\in I} (\sum_{(h,j)\in H\times J} c_{hij} k_h l_i) m_j,$$

$C \ni c_{hij} = 0$ für fast alle, aber nicht alle $(h,i,j) \in H \times I \times J$.
Da wir aber $KL \operatorname{ld}_C M$ annehmen, muss

$$\sum_{(h,j)\in H\times J} c_{hij} k_h l_i = 0 \text{ sein für alle } j \in J$$

, da wir $K \operatorname{ld}_C L$ annehmen, folgt daraus $c_{hij} = 0$ für alle h, i, j. □

Lemma 1.1.6. Wenn $C \subseteq K$ regulär ist und $K \operatorname{ad}_C L$, folgt $K \operatorname{ld}_C L$.

Beweis. Geht mit Bewertungen, steht zum Beispiel in [Lan73] (Seite 57, Theorem 3). □

Lemma 1.1.7.

1. $K \operatorname{ld}_C L$ impliziert $K \cap L = C$.
2. Wenn $C \subseteq K$ algebraisch und $C \subseteq L$ regulär, dann ist $K \operatorname{ld}_C L$.
3. $K \operatorname{ld}_C L$ impliziert $K \operatorname{ad}_C L$.
4. $K \operatorname{ad}_C L$ impliziert $\overline{K} \operatorname{ad}_C \overline{L}$.
5. Wenn $K \operatorname{ld}_C L, K \subset M$ und $X \subset M$ algebraisch unabhängig über KL, dann $K(X) \operatorname{ld}_K KL$.
6. Wenn $C \subseteq K$ regulär ist und $K \operatorname{ld}_C L$, folgt $K \operatorname{ld}_C \overline{L}$ bzw. $L \subseteq KL$ regulär.

Beweis.

1. Die eine Inklusion ist klar. Für die Rückrichtung sei $x \in K \cap L \setminus C$. Dann ist $(1, x) \in K^2$ linear abhängig über L und somit über C. Aber dann ist x schon in C.
2. Wegen der Regularität gilt $L \operatorname{ld}_C \overline{C}$ und wegen $C \subseteq K \subseteq \overline{C}$ und dem Lemma 1.1.5 gilt $L \operatorname{ld}_C K$.
3. Seien $k_1, \ldots, k_n \in K$ algebraisch abhängig über L, das heißt, es gibt ein Polynom $0 \neq f(X) = \sum_{|\alpha| \leq m} l_\alpha X^\alpha \in L[X_1, \ldots, X_n]$ mit $f(k) = 0$, also insbesondere $(k^\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ linear abhängig über L, per Annahme also auch über C. Dann existiert aber eine Linearkombination $\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha k^\alpha = 0$ mit $c_\alpha \in C$ nicht alle Null, und diese bezeugt die algebraische Abhängigkeit über C
4. Folgt aus $\dim(\cdot/L) = \dim(\cdot/acl(L))$ als Matroideneigenschaft.
5. Wegen algebraischer Unabhängigkeit ist $|\overline{x}| = \dim(\overline{x}/KL) \leq \dim(\overline{x}/K) \leq |\overline{x}|$ für alle $\overline{x} \in X$, also sind X und KL im modelltheoretischen Sinne unabhängig über K. Das gilt dann aber auch für $K \cup X$ und KL, $\operatorname{acl}(K \cup X)$ und KL und auch für $K(X)$ und KL, also $K(X) \operatorname{ad}_K KL$.
   $K(X) \supseteq K$ ist außerdem regulär, denn $K[X]$ hat als K-Basis $(x^n)_{x \in X, n \in \mathbb{N}}$, wie man wegen algebraischer Unabhängigkeit sieht. Diese Basis bleibt aber linear unabhängig über $\overline{K}$, denn sonst wäre ein Polynom in $\overline{K}[X_1, X_2, \ldots]$ gefunden,

was ein $x \in X$ algebraisiert, also $x \in \mathrm{acl}(X \setminus \{x\} \cup \overline{K}) = \mathrm{acl}(X \setminus \{x\} \cup K)$, also wäre X nicht mehr algebraisch unabhängig über K. Lemma 1.1.2 $K(X) = \mathrm{Frac}(K[X]) \,\mathrm{ld}_K\, \overline{K}$.
Also haben wir $K(X) \,\mathrm{ad}_K\, KL$ und $K(X) \supseteq K$ regulär, woraus nach Lemma 1.1.6 $K(X) \,\mathrm{ld}_K\, KL$ folgt.

6. Mit 3. folgt $K \,\mathrm{ad}_C\, L$, mit 4. $\overline{K} \,\mathrm{ad}_C\, \overline{L}$, mit Lemma 1.1.5 $K \,\mathrm{ad}_C\, \overline{L}$, mit Lemma 1.1.6 $K \,\mathrm{ld}_C\, \overline{L}$ (benutze $C \subseteq K$ regulär) und mit noch einmal Lemma 1.1.5 gilt schließlich für die Einbettungskette $C \subseteq L \subseteq \overline{L}$ die Regularitätsbedingung $LK \,\mathrm{ld}_L\, \overline{L}$.

□

1.2 Paare algebraisch abgeschlossener Körper

Wir wollen Paare (K, E_K) von Körpern betrachten, wobei $E_K \subseteq K$. In der richtigen Sprache haben lassen diese sich axiomatisieren, dort haben echte Paare (d.h. $K \neq E_K$) algebraisch abgeschlossener Körper sogar Quantorenelimination und sind in einer kleineren Sprache modellvollständig. Diese Sprachen und einige der Folgerungen für ihre Strukturen wollen wir hier (angelehnt an [Del12]) einführen:

Definition 1.2.1. Wir definieren die Sprachen $\mathcal{L}^{ld} := \{0, 1, +, -, \cdot, (l_n)_{n \geq 2}\}, \mathcal{L}^f := \mathcal{L}^{ld} \cup \{f_{i,n} \mid n \geq 2, 1 \leq i \leq n\}$ und $\mathcal{L}^{f,c} := \mathcal{L}^f \cup \{^{-1}\}$, wobei die (l_n) n-stellige Relationen sein sollen und die $f_{i,n}$ $n+1$-stellige partielle Funktionen.

Lemma 1.2.2. Beliebige Paare (K, E_K) von Körpern werden kanonisch zu $\mathcal{L}^{ld}$-Strukturen, indem man folgendes setzt:

$$\models l_n(x_1, \ldots, x_n) :\Leftrightarrow x_1, \ldots, x_n \text{ sind linear unabhängig über } E_K$$

Dann kann man die Substruktur E_K auch definieren, da $x \in E_K \Leftrightarrow \models \neg l_2(1, x) =: E(x)$ und noch viel weitergehender auch

$$y \in \langle \overline{x} \rangle_{E_K} \text{ für } x_1, \ldots, x_n \text{ linear unabhängig über } E_K \Leftrightarrow \models l_n(\overline{x}) \wedge \neg l_{n+1}(\overline{x}, y) =: \phi(\overline{x}, y).$$

Mit diesem Wissen setzt man jetzt in $\mathcal{L}^f, \mathcal{L}^{f,c}$

$$\models (z = f_{n,i}(y, \overline{x})) :\Leftrightarrow \models \phi(\overline{x}, y) \text{ und } z \text{ ist die } i\text{-te Koordinate von } y \text{ in der Basisdarstellung,}$$

wobei letzteres durch

$$\exists z_1, \ldots, z_n (z = z_i \wedge y = x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \wedge z_1, \ldots, z_n \in E_K)$$

oder aber auch

$$\forall z_1, \dots, z_n (y = x_1 z_1 + \dots + x_n z_n \wedge z_1, \dots, z_n \in E_K \to z_i = z)$$

definierbar ist.

Lemma 1.2.3. Mit dem Ganzen sind echte algebraisch abgeschlossene Paare von Körpern definierbar in allen drei Sprachen $\mathcal{L}^{ld}, \mathcal{L}^f, \mathcal{L}^{f,c}$, nenne die Theorien $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}, \mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^f}, \mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$.
Das einzig nicht offensichtliche hierbei ist, dass man in der Theorie sagen muss, dass $\neg l_2(1, x)$ einen Körper definiert.

An sich wird alles sowieso interdefinierbar zwischen Sprachen sein, aber manchmal ist es klüger, eine spezielle Sprache zu betrachten. Das Ziel ist jetzt, zu beweisen, dass $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^f}, \mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$ Quantorenelimination haben und $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}$ immerhin modellvollständig ist.
Dazu müssen wir erst einmal verstehen, wie $\mathcal{L}^{f,c}$-Unterstrukturen von $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$-Modellen aussehen.

Lemma 1.2.4. Betrachte einen Paar von Körpern (K, E_K) und eine Teilmenge $A \subseteq K$ sowie eine $\mathcal{L}^{f,c}$-Struktur $\mathcal{A} := (A, 0, 1, +, -, \cdot, ^{-1}, (l_n)_{n \geq 2}, (f_{i,n})_{n \geq 2, 1 \leq i \leq n})$. Dann ist $\mathcal{A} \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ genau dann, wenn A ein Unterkörper von K ist, $\mathcal{A} = (A, E_A)$ für $E_A := A \cap E_K$, und $A \operatorname{ld}_{E_A} E_K$.

Beweis. A ist genau dann Unterkörper von K, wenn es $0, 1$ enthält, unter $+, -, \cdot, ^{-1}$ abgeschlossen ist und die entsprechenden Abbildungsvorschriften erbt.
Außerdem ist $A \operatorname{ld}_{E_A} E_K$ genau dann, wenn für alle $\overline{a} \in A$ aus $\overline{a}$ linear abhängig über E_K schon äquivalent zu linearer Abhängigkeit über E_A ist; per kanonischer Definition also genau dann wenn $(A, E_A) \models l_{|\overline{a}|}(\overline{a}) \Leftrightarrow (K, E_K) \models l_{|\overline{a}|}(\overline{a})$.
Wenn $\mathcal{A}$ Unterstruktur ist, dann gilt für alle $\overline{a} \in A$

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \models l_{|\overline{a}|}(\overline{a}) \Leftrightarrow (K, E_K) \models l_{|\overline{a}|}(\overline{a}) \\ \Leftrightarrow\ &\overline{a} \text{ linear unabhängig über } E_K \Leftrightarrow \overline{a} \text{ linear unabhängig über } E_A, \end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz davon herrührt, dass die lineare Abhängigkeit bezeugende Linearkombination sich z.B. durch Projektionen und Nullen als Koeffizienten schreiben lässt und Projektionen von Elementen aus A wegen Unterstruktureigenschaft wieder in A sind. Also stimmen die Interpretationen der l_n in $\mathcal{A}$ mit denen in (A, E_A) überein und es ist $A \operatorname{ld}_{E_A} E_K$. Da die definierende Formel der $(f_{i,n})$ bis auf die Angabe des Bildbereiches eine Ringformel ist, und da $f_{i,n}(\overline{a}) \in E_K \cap A$, stimmen auch die Interpretationen der $f_{i,n}$ in $\mathcal{A}$ und in (A, E_A) überein. Damit ist $\mathcal{A} = (A, E_A)$.

Die Rückrichtung folgt mit den ersten Zeilen dieses Beweises und, da die definierende Eigenschaft der $f_{n,i}$ „fast nur“ als Ringformel gegeben ist (s.o.). $\square$

Lemma 1.2.5. Wenn $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ und $X \subseteq K$ algebraisch unabhängig über AE_K ist, dann ist $(A(X), E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$.

Beweis. Nach vorigem Lemma ist $A \operatorname{ld}_{E_A} E_K$, daher gilt mit Lemma 1.1.7 (5.) $A(X) \operatorname{ld}_{E_A} E_K$ und da $A(X)$ Unterkörper von K ist, gilt mit der Rückrichtung des letzten Lemmas $(A(X), E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$. $\square$

Lemma 1.2.6. Sei $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ und $E_A \subseteq B \subseteq E_K$ ein Zwischenkörper. Dann ist $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (AB, B) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$.

Beweis. Es ist nur $A \operatorname{ld}_{E_A} B, AB \operatorname{ld}_B E_K$ zu zeigen. Wegen $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ gilt $A \operatorname{ld}_{E_A} E_K$ und mit Lemma 1.1.5 gilt schon beides. $\square$

Lemma 1.2.7. Im Falle dass das vorige Lemma auf $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$, $(\tilde{A}, E_{\tilde{A}}) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (\tilde{K}, E_{\tilde{K}})$, $E_A \subseteq B \subseteq E_K$ und $E_{\tilde{A}} \subseteq \tilde{B} \subseteq E_{\tilde{K}}$ angewendet wird und dass gilt $A \cong \tilde{A}, B \cong \tilde{B}, E_A \cong E_{\tilde{A}}$ (wobei die ersten Isomorphismen den dritten fortsetzen), sind (AB, B) und $(\tilde{A}\tilde{B}, \tilde{B})$ schon isomorph als $\mathcal{L}^{f,c}$-Strukturen.

Beweis. Mit Lemma 1.1.3 erhält man wegen $A \operatorname{ld}_{E_A} B, \tilde{A} \operatorname{ld}_{E_{\tilde{A}}} \tilde{B}$ den Isomorphismus

$$A[B] \cong A \otimes_{E_A} B \cong \tilde{A} \otimes_{E_{\tilde{A}}} \tilde{B} \cong \tilde{A}[\tilde{B}],$$

der sich zu einem Isomorphismus der Quotientenkörper AB und $\tilde{A}\tilde{B}$ fortsetzt und A auf $\tilde{A}$, B auf $\tilde{B}$ und E_A auf $E_{\tilde{A}}$ abbildet. Als Körperisomorphismus erhält er auch lineare Disjunktheit, weswegen er auch ein $\mathcal{L}^{f,c}$-Isomorphismus ist. $\square$

Lemma 1.2.8. Wenn $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ und (K, E_K) Paar algebraisch abgeschlossener Körper ist, ist $E_A \subseteq A$ regulär.

Beweis. Die Aussage folgt aus $A \operatorname{ld}_{E_A} E_K$ und der Körperinklusion $E_A \subseteq \overline{E_A} \subseteq E_K$ mit dem Lemma 1.1.5. $\square$

Lemma 1.2.9. Unter denselben Bedingungen wie im vorigen Lemma ist $(\overline{A}, \overline{E_A})$ Zwischenstruktur.

Beweis. Laut Lemma 1.2.6 ist $(A\overline{E_A}, \overline{E_A})$ Zwischenstruktur und damit insbesondere

$$A \operatorname{ld}_{E_A} \overline{E_A}, A\overline{E_A} \operatorname{ld}_{\overline{E_A}} E_K.$$

Klarerweise ist

$$(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (\overline{A\overline{E_A}}, \overline{E_A}) = (\overline{A}, \overline{E_A}),$$

weil $A\overline{E_A}$ in der Bedingung $A \operatorname{ld}_{E_A} \overline{E_A}$ gar nicht vorkommt und die Erweiterung also nichts ändert.
Lemma 1.1.7 (6.) ergibt wegen $\overline{E_A} \subseteq E_K$ regulär

$$\overline{A} = \overline{A\overline{E_A}} \operatorname{ld}_{\overline{E_A}} E_K,$$

was $(\overline{A}, \overline{E_A}) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ beweist. □

Satz 1.2.10. $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$ hat Quantorenelimination und ist vollständig, wenn man noch eine Charakteristik vorgibt.

Beweis. Gegeben sei eine beliebige unendliche Kardinalität κ. Zeige die Aussage mit dem Back&Forth-System der Isomorphismen zwischen maximal κ großen Unterstrukturen von κ^+-saturierten Modellen $(K, E_K), (L, E_L)$: Dieses ist nichtleer, denn wenn $\mathbb{P}$ der Primkörper der Charakteristik ist, ist $(\mathbb{P}, \mathbb{P})$ Unterstruktur von allen Modellen (wegen Gleichheit des Paares ist lineare Disjunktheit klar), bilde das als Unterstruktur von K auf sich selbst als Unterstruktur von L ab. Sei $(M, E_M) \to (N, E_N)$ im B&F-System. $K \supset E_K, L \supset E_L$ haben Transzendenzgrad ∞.
Das kann man zum Beispiel erreichen, indem die Erweiterung offenkundig transzendent ist, und man dann jeweils den partiellen Typ über $\emptyset$ betrachtet, der die algebraische Unabhängigkeit von n Elementen über E_K bzw. E_L beschreibt, dieser hat folgende Gestalt:

$$\{\forall \overline{e} \in E \setminus \{0\}(f(\overline{e}, \overline{x}) \neq 0) \mid 0 \neq f \in \mathbb{P}(T_1, T_2, \ldots, \overline{x})\}$$

Er ist endlich erfüllbar, da für m größer als der größte Polynomgrad im endlichen Teilfragment und x transzendent über E_K bzw. E_L die Elemente $x, x^m, x^{m^2}, \ldots$ algebraisch unabhängig über Polynome von Grad kleiner m sind.
Œ ist $(M, E_M)(N, E_N)$ jeweils algebraisch abgeschlossen. Denn Lemma 1.2.6 erzeugt einen Isomorphismus zwischen den Zwischenstrukturen

$$(ME_M^{\text{alg } K}, E_M^{\text{alg } K}) \text{ und } (NE_N^{\text{alg } L}, E_N^{\text{alg } L}),$$

der sich auf einen Isomorphismus

$$(M^{\text{alg } K}, E_M^{\text{alg } K}) \cong (N^{\text{alg } L}, E_N^{\text{alg } L})$$

fortsetzt.

Sei jetzt $a \in K$. Wenn $a \in M$ liegt, dann kann man die Abbildung auf triviale Weise auf a fortsetzen.
Wenn ansonsten a algebraisch über $E_K M$ ist, ist $a \in \mathrm{acl}(E_K M)$, also existiert $X \subset E_K$ endlich mit $a \in \mathrm{acl}(MX)$. OBdA sei X jetzt schon ein Oberkörper von E_M, wichtig ist nur der endliche Transzendenzgrad über E_M. Für einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Zwischenkörper $E_N \subseteq Y \subseteq E_L$ von gleichem Transzendenzgrad (den gibt es, da die Saturation Transzendenzgrad ∞ von $E_N \subset E_L$ ergibt) kann $E_M \cong E_N$ fortgesetzt werden zu einem Isomorphismus $X \cong Y$. Diesen kann man wie in Lemma 1.2.7 fortsetzen zu einem $\mathcal{L}^{f,c}$-Isomorphismus zwischen den Zwischenstrukturen $(\overline{MX}, X), (\overline{NY}, Y)$, wobei die erste a enthält.
Wenn a transzendent über $E_K M$ ist, gibt es ein $b \in L$ transzendent über $E_L M$, denn der entsprechende Typ ist konsistent, wenn $|L| > |E_L|$. So etwas lässt sich aber in einer elementaren Oberstruktur erreichen (für die endliche Konsistenz ist die genaue Kardinalität des Transzendenzgrads von $E_L \subset L$ egal) und wenn der Typ dort konsistent ist, dann auch unten.
a und b erzeugen dann einen Isomorphismus $C := \overline{M(a)} \overset{\phi}{\cong} \overline{N(b)}$. Setze

$$E := \overline{M(a)} \cap E_K \cap \phi^{-1}(E_L \cap \overline{N(b)}),$$

dann gilt $(C, E) \cong_{\mathcal{L}^{f,c}} (\phi(C), \phi(E))$ und $b \in \phi(C)$.
Zu zeigen ist nun nur noch

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (C, E) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K), (N, E_N) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (\phi(C), \phi(E) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K) :$$

Aus $(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ folgt mit Lemma 1.2.5

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (M(a), E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K),$$

daraus mit Lemma 1.2.6 und $E_M \subseteq E \subseteq E_K$

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (M(a)E, E) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K),$$

daraus folgt mit Lemma 1.2.9 und $E \subseteq \overline{M(a)} = C$ schließlich

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (C, E) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K).$$

□

Lemma 1.2.11. Es gilt:

$$\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall x_1,\dots,x_n \forall y_1,\dots,y_n \neq 0 (l_n(x_1 y_1^{-1},\dots,x_n y_n^{-1})$$
$$\leftrightarrow l_n(x_1 \prod_{i=1\dots n, i\neq 1} y_i,\dots,x_n \prod_{i=1\dots n, i\neq n} y_i)$$
$$\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall x_1,\dots,x_n \forall e_1,\dots,e_n \in E(l_n(e_1x_1,\dots,e_nx_n) \leftrightarrow l_n(x_1,\dots,x_n)$$
$$\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall x_1,\dots,x_n, y \forall e_1,\dots,e_n, e \in E(f_{n,i}(ey, e_1x_1,\dots,e_nx_n) = f_{n,i}\frac{e}{e_i} f_{n,i}(y, x_1,\dots,x_n)$$
$$\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall a, b, x_2,\dots,x_n(\neg t_n(a+b, x_2,\dots,x_n) \leftrightarrow \neg t_{n-1}(x_2,\dots,x_n) \vee$$
$$t_{n-1}(x_2,\dots,x_n) \wedge ((l_n(b, x_2,\dots,x_n) \wedge \neg l_{n+1}(a,b,x_2,\dots,x_n)) \vee$$
$$(\neg l_n(b,x_2,\dots,x_n) \wedge l_n(a,x_2,\dots,x_n))))$$
$$\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall a,b,x_1,\dots,x_n(f_{i,n}(a+b,x_1,\dots,x_n) = f_{i,n}(a,x_1,\dots,x_n) + f_{i,n}(b,x_1,\dots,x_n))$$

für alle $i = 1,\dots,n$

$$\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall a,b,x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n,z(f_{i,n}(z,x_1,\dots,x_{i-1},a+b,x_{i+1},\dots,x_n) =$$
$$\left\{\begin{array}{ll} f_{i,n+1}(z,x_1,\dots,x_{i-1},a,b,x_{i+1},\dots,x_n) & a,b,\overline{x} \text{ unabhängig} \\ f_{i,n}(z,x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n) & \text{wenn nicht und } b \in \langle\overline{x}\rangle_E \\ f_{i,n-1}(z,x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) & \text{wenn nicht und } z \in \langle\overline{x}\rangle_E \\ \frac{f_{i,n}(z,x_1,\dots,x_{i-1},b,x_{i+1},\dots,x_n)}{1+f_{i,n}(a,x_1,\dots,x_{i-1},b,x_{i+1},\dots,x_n)} & \text{wenn nicht} \end{array}\right.)$$

für alle $i = 1,\dots,n$

$$\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall a,b,x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n,z(f_{j,n}(z,x_1,\dots,x_{i-1},a+b,x_{i+1},\dots,x_n) =$$
$$\left\{\begin{array}{l} f_{j+1_{j>i},n+1}(z,x_1,\dots,x_{i-1},a,b,x_{i+1},\dots,x_n) \\ \quad a,b,\overline{x} \text{ unabhängig} \\ f_{j,n}(z,x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n) \\ -f_{i,n}(z,x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n) f_{j-1_{j>i},n-1}(b,x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \\ \quad \text{wenn nicht und } b \in \langle\overline{x}\rangle_E \\ f_{j,n}(z,x_1,\dots,x_{i-1},b,x_{i+1},\dots,x_n) \\ -f_{i,n}(z,x_1,\dots,x_{i-1},a+b,x_{i+1},\dots,x_n) f_{j,n}(a,x_1,\dots,x_{i-1},b,x_{i+1},\dots,x_n) \\ \quad \text{wenn nicht} \end{array}\right.)$$

für alle $i = 1,\dots,n$ für alle $j \neq i$

Beweis. Die Rechnung will keiner sehen :) □

Folgerung 1.2.12. Man kann jede Formel mit Parametern aus X modulo $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$ schreiben als

1. quantorenfreie Formel in $\mathcal{L}^f_X$ oder
2. boolesche Kombination aus „l_n(Monome mit Koeffizienten in X)" und „(Polynom in $\mathbb{P}[X]$)$(f_{i_1,n_1}$(Monome in X)$,\ldots,f_{i_m,n_m}$(Monome in X)$) = 0$",

wobei $\mathbb{P}$ den Primkörper der entsprechenden Charakteristik bezeichne.

Folgerung 1.2.13. In jedem Modell (K, E_K) ist jede definierbare Menge $X \subset E^n_K$ schon beschreibbar als $X = E^n_K \cap Z$, wobei Z definierbar in der Ringsprache ist. Dementsprechend ist $E(x)$ eine streng minimale Formel und für $e_1, \ldots, e_n \in E_K$ ist $\mathrm{RM}(\overline{e}) = \dim_{\mathrm{ACL}}(\overline{e})$.

Folgerung 1.2.14. $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^f}$ hat ebenfalls Quantorenelimination. Da in Lemma 1.2.2 gezeigt wurde, dass die $f_{i,n}$ sowohl existenziell als auch universell definierbar sind, ist jede Formel modulo $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}$ immerhin universell und $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}$ ist modellvollständig.

Definition 1.2.15. Wenn es keine Rolle spielt, in welcher Sprache man gerade ist, schreibe einfach **ACP** für die drei Theorien.

Folgerung 1.2.16. Man kann sich leicht überlegen, dass ACP∪{„Charakteristik=p"} das Primmodell $(\overline{\mathbb{P}(e)}, \overline{\mathbb{P}})$ hat für $\mathbb{P}$ als Primkörper und ein beliebiges e transzendent über $\mathbb{P}$.

Satz 1.2.17. ACP ist ω-stabil.

Beweis. Betrachte die Menge der Typen in einem Modell (K, E_K) über einer vorgegebenen Menge $S \subset K$ und wähle als Sprache $\mathcal{L}^{f,c}$. Œ ist das Modell schon $|S|^+$-saturiert und S Träger einer Unterstruktur. Aus dem B&F-System in Satz 1.2.10 geht hervor, dass es die folgenden Typen über S gibt:

- Den Typ eines Elementes in S
- Die Typen eines Elementes a in $\overline{SE_K} \setminus S$ (bestimmt durch den endlichen Transzendenzgrad über S des minimalen Unterkörpers $E_S \subseteq X \subseteq E_K$, sodass $a \in \overline{SX}$, sowie durch den Isomorphietyp des Minimalpoynoms von a über SX)
- Den Typ eines Elementes in $K \setminus \overline{SE_K}$

Der erste Typ hat klarerweise Morleyrang 0. Sei a ein Realisator eines Typen der zweiten Art. Dann ist a algebraisch über $S\overline{e}$ für gewisse $e_1, \ldots, e_n \in E_K$, also

$$\mathrm{RM}(a) \leq \mathrm{RM}(\overline{e}) = \dim_{\mathrm{ACL}}(\overline{e}) < \omega.$$

Der dritte Typ kann keinen Morleyrang $> \omega$ haben, denn dann müsste es einen Typen mit Morleyrang ω geben, die anderen Arten von Typen haben aber endlichen Rang. Sei (a_n) eine Folge von Elementen, sodass $n < \mathrm{RM}(a_n) < \omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (TODO: sowas gibt es). Dann ist im Stoneraum $\lim_{n\to\infty} \mathrm{tp}(a_n) = p$ für den Typen p der dritten Art: Denn a_n kann jeweils nicht mehr algebraisch über SX sein für alle $E_S \subset X$ von Transzendenzgrad $\leq n$. Also sind für jede Umgebung, die das Nichterfüllen einer bestimmten Art von Polynom über SE_K beschreibt, fast alle a_n enthalten. Aber diese Umgebungen bestimmen den Typen p eindeutig, also sind für jedes $\phi \in p$ fast alle $\mathrm{tp}(a_n)$ in $\mathcal{U}_\phi$.
Jedes $\phi \in S_1(S)$ mit $\mathrm{RM}(\phi) < \omega$ ist dann nur in endlich vielen $\mathrm{tp}(a_n)$ enthalten (nämlich maximal $\mathrm{RM}(\phi)$ vielen), also ist $\mathrm{RM}(p) \geq \omega$, damit herrscht Gleichheit.
Da alle Typen Morleyrang $< \infty$ haben, haben alle Formeln in einer freien Variable Morleyrang $< \infty$ und die Theorie ist ω-stabil. □

2 Dichte Paare o-minimaler Strukturen

2.1 Allgemeine Betrachtungen und Anforderungen an die Theorien

Viele Techniken und Gedanken aus dem vorigen Kapitel werden jetzt auf o-minimale Theorien übertragen: Im Folgenden halten wir einfach eine vollständige o-minimale Theorie T in der Sprache $\mathcal{L}$ fest und betrachten die Theorie T^2 in der Sprache $\mathcal{L}_P := \mathcal{L} \cup \{P(x)\}$, sodass die Modelle von T^2 Modelle von T sind und in jedem Modell $\mathcal{M}$ die Menge $P(M)$ ebenfalls Modell von T ist. Schreibe so ein Paar dann auch als (B, A) mit $A = P(B)$.

Wir setzen voraus, dass T eine durch $+$ dicht und linear angeordnete abelsche Gruppe mit einem positiven Element 1 beschreibt, sodass Definable Choice gilt. Dann sind die Skolemfunktionen definierbar und Œ ist $\mathcal{L}$ schon so eine definitorische Erweiterung, dass T Quantorenelimination hat und universell axiomatisierbar ist (wobei bei einzelnen Theorien die Frage interessant wäre, welche Skolemfunktionen man dafür überhaupt hinzufügen muss). Außerdem seien alle Modelle genug saturiert, dass die üblichen Rechenregeln für die Dimension gelten.

Aus T universell mit Quantorenelimination folgt, dass Unterstrukturen von Modellen von T schon elementare Unterstrukturen sind. Also ist für jede Teilmenge S eines Modells $\mathrm{dcl}(S)$ schon eine elementare Substruktur; zur Vereinfachung bezeichne in Zukunft $AB := \mathrm{dcl}(A \cup B)$ für zwei Teilmengen A, B eines Modells.

P beschreibt also eine elementare Unterstruktur, mit T^{d} wird nun die Theorie beschrieben, die ausdrückt, dass P eine dichte echte Unterstruktur ist (diese zwei Sachen oder deren Gegenteil müssen auf jeden Fall von der Theorie beschrieben werden, wenn sie vollständig sein soll). Klar ist dann, dass Unterstrukturen von T^{d} automatisch Modelle von T^2 sind.

Dem Verlauf in [vdD98] folgend, wird zunächst die Vollständigkeit und eine Art von Quantorenelimination für T^{d} gezeigt, wofür aber eine genauere Betrachtung von sogenannten kleinen Mengen vonnöten ist.

2.2 Kleine Mengen

Definition 2.2.1. Sei $(B, A) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$, dann ist eine $\mathcal{L}_P$-definierbare Menge $S \subseteq B$ **klein**, wenn eine $\mathcal{L}$-definierbare Funktion $f : B^n \to B$ existiert mit $S \subseteq f(A^n)$.

Das Ziel ist jetzt, zu zeigen, dass definierbare Intervalle nicht klein sind.

Im folgenden Lemma meint $(\cdot, +)$ nicht unbedingt die Operationen in $\mathcal{L}$, sondern nur irgendwelche definierbaren Verknüpfungen.

Lemma 2.2.2. Seien $A \prec B \models \mathrm{T}$, $f : B^{n+1} \to B$ A-definierbar, $b \in B \setminus A$, $\beta, \gamma \in A$ mit $\beta < b < \gamma$ und einer angeordneten A-definierbaren Körperstruktur $(\cdot, +)$ auf $(\beta, \gamma) =: I$. Dann existieren $a_0, \dots, a_n \in I_A$ mit

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots, a_0 \in I \setminus f(A^n \times \{b\}).$$

Beweis. Wenn die Aussage nicht gilt, dann gilt mit $p(x, y) := x_n y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \dots, x_0$, dass für jedes $a \in (I_A)^{n+1}$ ein $\alpha \in A^n$ existiert mit $p(a, b) = f(\alpha, b)$. Es muss für festes $a \in I_A$ ein Intervall um b in I_A mit dieser Eigenschaft geben, denn sonst wäre $b \in \mathrm{dcl}(A) = A$.
Sei jetzt a nicht mehr fixiert, dann existiert mit Definable Choice eine definierbare Zuordnung $a \mapsto \alpha(a)$, sodass $p(a, \cdot) = f(\alpha(a), \cdot)$ auf einem Intervall gilt. Da jedes a $n + 1$ viele Einträge hat und jedes $\alpha(a)$ n viele, müssen unendlich viele $a \in (I_A)^{n+1}$ existieren, die durch α auf das selbe Element abgebildet werden. Denn wenn das nicht so wäre, wäre ein generisches Element aus $(I_A)^{n+1}$ algebraisch über einem Element aus A^n, was der Generizität widerspricht. Da es unendlich viele Elemente gibt, sodass α auf ihnen konstant ist, gibt es schon eine Zelle von Dimension > 0 mit der Eigenschaft und damit insbesondere eine Zelle E von Dimension 1 (Als Teilmenge einer Zelle lässt sich immer eine von kleinerer Dimension finden). Nenne den konstanten Wert dann α^*.
Da also gilt: Für alle $a \in E$ existiert ein Intervall J mit $p(a, \cdot) = f(\alpha^*, \cdot)$ auf J; existieren mit Definable Choice $\beta^*, \gamma^* : E \to I_A$, sodass $p(a, \cdot) = f(\alpha^*, \cdot)$ auf $(\beta^*(a), \gamma^*(a))$ gilt. Œ seien β^* und γ^* jetzt schon stetig auf E und ein $e \in E$ beliebig $\cdot$ Dann existiert für ε hinreichend klein eine E-Umgebung U um e, sodass

$$\beta^* < \frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) - \varepsilon, \ \frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) + \varepsilon < \gamma^*$$

auf U, also

$$p(a, x) = f(\alpha^*, x) \text{ für alle } a \in U, x \in (\frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) - \varepsilon, \frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) + \varepsilon)$$

gilt. Es kann aber nicht $p(a - a', x) = p(a, x) - p(a', x) = f(\alpha^*, x) - f(\alpha^*, x) = 0$ für $a, a' \in U$ verschieden und unendlich viele x sein, weil ein Nichtnullpolynom nicht unendlich viele Nullstellen haben kann. □

Lemma 2.2.3. Sei $\mathcal{A}$ eine o-minimale Erweiterung eines angeordneten Vektorraums über einem angeordneten Körper F und $g : A^{p+1} \to A$ definierbar, außerdem existiere für unendlich viele $\lambda \in F$ ein $a_\lambda \in A^p$ mit $g(a_\lambda, x) = \lambda x$ für unendlich viele $x \in A$. Dann existiert ein Intervall I in A, sodass auf I eine A-definierbare Körperstruktur existiert, die mit $<$ kompatibel ist (was automatisch einen reell abgeschlossenen Körper impliziert).

Beweis. TODO: Geht irgendwie aus [PS97] hervor. □

Lemma 2.2.4. Es sei $(A, B) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$, $f : B^{n+1} \to B$ A-definierbar in B und $b \in B \setminus A$. Dann enthält $f(A^n \times \{b\})$ kein Intervall um b.

Beweis. Nimm an, dass das Gegenteil gelte für das Intervall J (Œ mit Randpunkten in A): Dann existiert insbesondere für jedes $q \in \mathbb{Q}$ hinreichend nahe bei 1 ein $a_q \in A^n$ mit $f(a_q, b) = qb$. Dann existiert wieder ein Intervall $I_q \subseteq J_A$ mit $f(a_q, x) = qx$ für alle $x \in I_q$. Œ ist dieses Intervall schon beschränkt und die Randpunkte seien $c_q < d_q$. Definiere dann

$$r_q := \frac{c_q + d_q}{2}, s_q := \frac{d_q - c_q}{2} \in A,$$
$$g : (u, v, x) \mapsto f(u, v + x) - f(u, v) \quad u \in A^n, v, x \in A.$$

Dann gilt für alle $x \in (-s_q, s_q)$

$$g(a_q, r_q, x) = f(a_q, r_q + x) - f(a_k, r_q) = q(r_q + x) - qr_q = qx.$$

Also existiert nach dem letzten Lemma ein Intervall in A mit einer A-definierbaren Körperstruktur als RCF. Durch Translation (benutze Dichtheit) nehme an, dass $b \in I_B$ liegt. Dann existiert nach Lemma 2.2.2 ein Element $c \in I_B \setminus f(A^n \times \{b\})$. Œ sei schon $\inf J, \sup J \in I$, sonst ersetze J durch ein kleineres Intervall.
Seien $d, e \in I$ mit $d < c < e$ und φ die orientierungserhaltende, A-definierbare affine Abbildung in I mit $\varphi(d) = \inf J, \varphi(e) = \sup J$. Dann ist $\varphi(c) \in J \setminus (\phi \circ f)(A^n \times \{b\})$ und da das Verketten mit einer A-definierbaren invertierbaren Abbildung nichts an der Aussage ändert, gibt es einen Widerspruch. □

Satz 2.2.5. Wenn $(B, A) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$, dann ist kein Intervall eine kleine Teilmenge.

Beweis. Sei $f : B^n \to B$ eine durch $\varphi(x, y, b)$ definierbare Abbildung mit φ eine $\mathcal{L}_A$-Formel und $b \in B^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ definiert. Für $\dim(b/A) = 0$ ist $f(A^n) \subseteq A$ klar, deswegen sei Œ $\dim(b/A) \geq 1$. Definiere

$$g(x, z) := \begin{cases} \text{das eindeutige } y \in B & \text{für alle z, für die } \varphi(x, y, z) \\ \text{ mit } B \models \varphi(x, y, z) & \text{ bei festem eine Funktion definiert} \\ & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

Dann ist g in B A-definierbar und $g(\cdot, b) = f$. Falls $\dim(b/A) > 1$, füge genug Komponenten von b zu A hinzu, sodass $\dim(b/A) = 1$. Das Hinzufügen ändert nichts, denn Ab_i ist nach den Eingangsbemerkungen Modell von T und Ab_i ist erst recht dicht in, aber nicht gleich B (sonst hätte man die Dimension mit diesem Schritt schon zu sehr verkleinert).
Finde also b_i, sodass A-definierbare (h_j) existieren mit $b_j = h_j(b_i)$ für alle j. Wenn jetzt $J \subseteq f(A^n) = g(A^n, b) = g(A^n, h(b_i))$ für ein Intervall J, dann widerspricht das der Aussage des letzten Lemmas für die Funktion $(x, y) \mapsto g(x, h(y))$. $\square$

Definition 2.2.6. Schreibe ab jetzt $P(\overline{x}) := \bigwedge_{i=1}^{|x|} P(x_i)$.

Lemma 2.2.7. Wenn (B, A) für ein unendliches $\kappa > |\mathrm{T}|$ ein κ-saturiertes Modell von T^{d} ist, ist $\dim(B/A) \geq \kappa$.

Beweis. Sei S eine Basis von B/A mit $|S| < \kappa$; zeige nun, dass es kein Erzeugendensystem sein kann. Das folgt aus der Saturation angewandt auf den partiellen Typen

$$\{\forall \overline{y} \in P(x \neq t(\overline{y})) \mid t \ \mathcal{L}_E\text{-Term}\},$$

der endlich erfüllbar ist, weil die Negation jeder dieser Formeln „x ist in einer kleinen Menge“ impliziert. Wenn der Typ also nicht endlich erfüllbar wäre, würde eine endliche Vereinigung von kleinen Mengen ganz B überdecken. Das kann aber nicht gelten, denn eine endliche Vereinigung von kleinen Mengen ist wieder klein (in der das bezeugenden Abbildung kann man das durch Erhöhen der Dimension des Urbildes und Fallunterscheidung über eine Koordinate beweisen). $\square$

Folgerung 2.2.8. Der Beweis zeigt sogar, dass in einem κ-saturiertem Modell $(B, A) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$, gegeben Menge, $S, S', S'' \subset B$ mit $|S|, |S'|, |S''| < \kappa$, ein transzendentes Element b über SA gefunden werden kann mit $a < b$ für alle $a \in S'$ und $b < c$ für alle $c \in S''$, sofern dieser Ordnungstyp von b überhaupt konsistent ist.

2.3 Formelreduzierung in T^{d}

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich $\mathcal{L}_P$-Formeln modulo T^{d} sehr stark vereinfachen lassen. Indem dieses mit einem Back&Forth-System gezeigt wird, erhält man zusätzlich eine sehr große Klasse von elementaren Abbildungen zwischen Modellen von T^{d}.

In diesem Kontext wird wieder die acl-Unabhängigkeit in einem Modell von T relevant, die im ersten Kapitel mit „algebraisch disjunkt“ bezeichnet wurde. Man kann sich dafür folgende (teilweise schon bekannte) Fakten überlegen.

Lemma 2.3.1. Seien A, B, C, D Mengen in irgendeinem Modell von T.

1. Wenn A und B unabhängig über C sind, sind B und A unabhängig über C und $A \cap B \subseteq \mathrm{acl}(C)$ (in fast allen betrachteten Fällen wird sowieso $A, B \supseteq C$ und $C = \mathrm{acl}(C)$ gelten).

2. Wenn A und B unabhängig über C sind und $S \subseteq B$, dann sind auch $A \cup S$ und B unabhängig über $C \cup S$.

3. Wenn A und B unabhängig über C sind, $A \subseteq S \subseteq \mathrm{acl}(A), B \subseteq S' \subseteq \mathrm{acl}(B)$, dann sind S und S' unabhängig über C.

4. Wenn A und B unabhängig über C sind und D (algebraisch) unabhängig über AB, dann sind $A \cup D$ und B unabhängig über C.

5. Wenn $(D, C) \preceq (B, A) \models \mathrm{T}^2$, dann sind A und D unabhängig über C.

6. Wenn $(D, C) \subseteq (B, A) \models \mathrm{T}^2$, $S \subseteq A$ und A und D unabhängig über C sind, dann sind A und DS unabhängig über CS, $\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}_P} = (DS, CS)$ und
$$(D, C) \subseteq (DS, CS) \subseteq (B, A).$$

7. Wenn $(D, C) \subseteq (B, A) \models \mathrm{T}^2$ und $S \subseteq B$ unabhängig über DA ist, dann sind A und DS unabhängig über C, $\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}_P} = (DS, C)$ und
$$(D, C) \subseteq (DS, C) \subseteq (B, A).$$

Beweis. 1.-4. sind bekannt.

5. Wenn $\overline{d} \in D$ algebraisch unabhängig über C ist, aber nicht über A, dann existiert eine $\mathcal{L}_A$-Formel $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$, sodass Œ d_1 von $\varphi(x_1, d_2, d_3 \ldots, \overline{a})$ algebraisiert wird (Œ wird d_1 schon durch φ definiert). Also erfüllt $\overline{d}$ die $\mathcal{L}_P$-Formel

$$\exists \overline{y} \in P(\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \forall z_2, z_3, \ldots \exists! z_1(\varphi(\overline{z}, \overline{y})))$$

in (B, A), also auch in (D, C). Es existiert also $\overline{c} \in C$ mit

$$B \models \varphi(\overline{d}, \overline{c}) \wedge \forall z_2, z_3, \ldots \exists! z_1(\varphi(\overline{z}, \overline{c})),$$

was im Widerspruch zur Unabhängigkeit von $\overline{d}$ über C steht.

6. Dass A und DS unabhängig über CS sind, ergibt sich in der Kombination von 2. und dann 3.
Dass die Trägermenge von $\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}_P}$ die Menge DS ist, ergibt sich direkt per Definition als $DS = \mathrm{dcl}(D \cup S) = \langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}}$. Weil A und DS unabhängig über CS sind, folgt

$$P(\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}_P}) = DS \cap P(B) = DS \cap A = CS.$$

7 Es ergibt sich aus 4. und 3. dass A und DS unabhängig über CS sind. Der Rest geht analog zu 6. □

Zu bemerken ist, dass ein Spezialfall von Unabhängigkeit viele nützliche Eigenschaften hat. Auf diesen wird später noch oft zurückgegriffen werden.

Definition 2.3.2. Seien $(D, C) \subseteq (B, A)$ zwei Modelle von T^2. Dann heiße diese Erweiterung **frei**, wenn D und A unabhängig über C sind.

Lemma 2.3.3. Sei $(B, A) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$. Dann ist A auch kodicht in B.

Beweis. Zu zeigen ist, dass für alle $a, c \in B$ ein $b \in B \setminus A$ existiert mit $a < b < c$. Durch Translation und Inversion kann man annehmen, dass $a = 0$. Wähle jetzt ein $d \in B \setminus A$ beliebig und $e \in A$ mit $d - c < e < d$. Dann ist $d - e$ nicht in A (denn sonst wäre es d) und $0 = e - e < d - e < d - (d - c) = c$. □

Für die Konstruktion des gewünschten Back&Forth-Systems sei $\kappa > |T|$ eine beliebige, aber feste Kardinalzahl und $(B, A), (D, C) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$ zwei κ-saturierte Modelle.

Satz 2.3.4. Sei S die Menge aller partiellen Isomorphismen zwischen Unterstrukturen (B', A') von (B, A) und (D', C') von (D, C) der Mächtigkeit $< \kappa$, sodass die Erweiterungen frei sind. Dann bildet S ein nichtleeres B&F-System und T^{d} ist insbesondere vollständig.

Beweis. Das System ist nichtleer, denn es gibt ein Primmodell $\mathcal{M}$ von T, weil T vollständig ist und in jedem Modell A alle Eigenschaften von $\mathcal{M}_A := \langle\emptyset\rangle_{\mathcal{L}}$ in T beschrieben werden. Klarerweise ist $|M| = |T| < \kappa$. Der Isomorphismus $(\mathcal{M}_A, \mathcal{M}_A) \cong (\mathcal{M}_C, \mathcal{M}_C)$ liegt in S, denn Unabhängigkeit ist bei zwei gleichen Mengen offensichtlich.
Sei jetzt $S \ni i : (B', A') \to (D', C')$ und $b \in B$. Wenn $b \in B'$ ist, ist nichts zu zeigen. Wenn $b \in A \setminus B'$, betrachte den partiellen Typ

$$\{\alpha < x \mid i^{-1}(\alpha) < b\} \cup \{x < \beta \mid b < i^{-1}(\beta)\} \cup \{P(x)\}.$$

Dieser ist konsistent, da i ein Isomorphismus ist und C dicht in D; mit Saturation existiert ein $d \in C \setminus D'$ mit diesem Ordnungstyp. i setzt sich dann eindeutig zu einem Isomorphismus $i' : (B'b, A'b) \to (D'd, C'd)$ mit $i(b) = d$ fort, der gegeben ist durch die Abbildung $t(b) \mapsto i(t)(d)$ für t einen $\mathcal{L}_{B'}$-Term und $i(t)$ den durch i geshifteten Term. Die Surjektivität dieser Abbildung ist klar, ebenso dass $i'(A'b) = C'd$. Wohldefiniertheit, Injektivität und Isomorphismuseigenschaft gelten, denn:
$Rt_1(b) \dots t_n(b)$ gilt für $\mathcal{L}_{B'}$-Terme $t_1, \dots, t_n$ und eine Relation R genau dann, wenn es ein B'-definierbares Intervall I um b mit dieser Eigenschaft gibt (denn sonst wäre b definierbar über B' und somit in B'). Schickt man $I \cap B'$ mit i nach $J := i(I \cap B')$, so gilt für alle Elemente $z \in J$, dass $Ri(t_1)(z) \dots i(t_n)(z)$, da i ein Isomorphismus ist. Wäre jetzt nicht $Ri(t_1)(d) \dots i(t_n)(d)$, so gäbe es ein D'-definierbares Intervall I' um d, sodass das nicht gilt; insbesondere ist I' disjunkt zu J. Allerdings ist

$$b \in I' \cap \operatorname{convex}(J) = I' \cap (i(\inf I), i(\sup I)),$$

also können I' und J nicht disjunkt sein. Es gilt also $Ri(t_1)(d) \dots i(t_n)(d)$.
Die Rückrichtung geht analog.
Zu zeigen ist nun, dass $B'b$ und A frei über $A'b$ sowie $D'd$ und C frei über $C'd$ sind, ebenso zu zeigen ist noch, dass $(B'b, A'b) \subseteq (B, A), (D'd, C'd) \subseteq (D, C)$. Das alles folgt aber aus Lemma 2.3.1 (6.). Außerdem gilt $|D'd| = |B'b| = |B'| + |T| < \kappa$.
Sei jetzt $b \in B'A \setminus (A \cup B')$. Dann gibt es $\overline{a} \in A$ mit $b \in B'\overline{a}$. Erweitere wie schon bekannt i, sodass $\overline{a} \in \operatorname{dom}(i)$; dann ist schon ganz $B'\overline{a} \subseteq \operatorname{dom}(i)$, also auch b.

Abschließend sei $b \in B \setminus B'A$; wie oben erfülle dann den mit i geshifteten Ordnungstyp von b über B' mit einem Element $d \in D \setminus D'C$ (mit Folgerung 2.2.8 geht das). Wie oben kann i dann auf einen Isomorphismus $(B'b, A') \to (D'd, C')$ fortgesetzt werden und nach Lemma 2.3.1 (7.) erfüllen $(B'b, A'), (D'd, C')$ auch die hinreichenden Eigenschaften. $\square$

Dieses B&F-System beweist die Formelreduzierung in $\mathrm{T^d}$.

Satz 2.3.5. Jede $\mathcal{L}_P$-Formel ist modulo $\mathrm{T^d}$ äquivalent zu einer booleschen Kombination von Formeln der Gestalt

$$\exists \overline{y} \in P(\phi(\overline{x}, \overline{y}))$$

für ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel. Nenne eine solche boolesche Kombination eine **gute Formel** und eine Formel der Gestalt wie beschrieben eine **gute Formel in Reinform**.

Beweis. Hilfsaussage:
Es reicht zu zeigen, dass für alle Modelle $(B, A), (D, C) \models \mathrm{T^d}$ und für alle $b \in B^n, d \in D^n$ gilt: Wenn b und d dieselben guten Formeln erfüllen, sind ihre Typen in (B, A) und (D, C) dieselben.
Dass dies ausreicht, erkennt man mit dem Ziegler'schen Trennungslemma: Sei $\psi \in \mathcal{F}_n(\mathcal{L}_P)$ nicht äquivalent zu einer guten Formel und nenne die Menge aller guten Formeln in n freien Koordinaten K. Dann ist K abgeschlossen unter $\wedge, \vee$ und enthält $\top, \bot$. Wenn ψ nicht äquivalent zu einer Formel aus K ist, sind $\mathrm{T^d} \cup \{\psi\}$ und $\mathrm{T^d} \cup \{\neg\psi\}$ nicht durch K trennbar, also existieren $(B, A), (D, C) \models \mathrm{T^d}, b \in B^n, d \in D^n$, sodass $(B, A) \models \psi(b)$ und $(D, C) \models \neg\psi(d)$, aber $(B, A) \models \chi(b)$ genau dann, wenn $(D, C) \models \chi(d)$ für alle $\chi \in K$. Dann erfüllen b und d dieselben guten Formeln, aber haben nicht denselben Typ - ein Widerspruch!

Beweis der Hilfsaussage. Seien b, d wie verlangt und $(B, A), (D, C)$ schon Œ $|T|^+$-saturiert (das ändert nichts an Typen und dem Erfüllen von guten Formeln). Sei $a \in A^m$ für ein hinreichend großes m, mit der Eigenschaft dass $\dim(b/a) \leq \dim(b/A)$ (es folgt dann Gleichheit, da über einer kleineren Menge nicht mehr interdefinierbar werden kann). Für $A' := \mathrm{dcl}(a), B' := \mathrm{dcl}(a, b)$ gilt dann, dass A und B' unabhängig über A' sind. Es sind nämlich per Definition von a die Mengen A und b unabhängig über a (eben wegen $\dim(b/a) = \dim(b/A)$), mit Lemma 2.3.1 (2.) sind dann auch A und $b \cup (A')$ unabhängig über A' und mit 3. sind A und $B' = \mathrm{dcl}(b \cup A')$ unabhängig über A'. Außerdem sind A' und B' maximal $|T|$ groß.

Wenn man den partiellen $\mathcal{L}_P$-Typ $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(a/b) \cup \{P(\overline{x})\}$ betrachtet, bleibt er konsistent unter der Ersetzung $b \rightarrowtail d$ in den Formeln. Seien nämlich $\psi_1(\overline{x}, b), \ldots, \psi_n(\overline{x}, b) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(a/b)$, dann ist

$$\exists \overline{x} \in P(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\overline{x}, \overline{y}))$$

eine gute Formel, die von b und daher auch von d erfüllt wird. Also ist der ersetzte partielle Typ endlich konsistent, wegen Saturation habe er den Erfüller $c \in C$ und es gilt $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(a, b) = \mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(c, d)$. Wegen der Typengleichheit folgt insbesondere $\dim(b/a) = \dim(d/c)$; es bleibt noch zu zeigen, dass $\dim(b/A) = \dim(d/C)$, damit dann gilt $\dim(d/C) = \dim(b/A) = \dim(b/a) = \dim(d/c)$ und wie oben C und $D' := \mathrm{dcl}(c, d)$ frei über $C' := \mathrm{dcl}(c)$ sind. Die Gleichheit $\dim(b/A) = \dim(d/C)$ gilt aber, da für jede $\mathcal{L}$-Formel ψ und $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$ die Formel zu

„es existiert $\overline{y} \in P$, sodass $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ x_i über $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ definiert“

eine gute Formel ist, die also genau dann von b erfüllt wird, wenn sie von d erfüllt wird. Da (a, b) und (c, d) den gleichen $\mathcal{L}$-Typ haben, gibt es einen partiellen Isomorphismus i von $B' = \mathrm{dcl}(a, b)$ nach $D' = \mathrm{dcl}(c, d)$ mit $i((a, b)) = (c, d)$, die Einschränkung auf $A' = \mathrm{dcl}(a)$ bildet einen Isomorphismus nach $C' = \mathrm{dcl}(c)$. Also ist i partieller Isomorphismus $(B, A) \to (D, C)$, damit im B&F-System, also elementare Abbildung, weswegen b und d denselben $\mathcal{L}_P$-Typen haben. □

□

Folgerung 2.3.6. Für ein dichtes Paar (B, A) und $S \subseteq B^n$ eine A_0-definierbare Menge in $\mathcal{L}_P$ (wobei $A_0 \subseteq A$) ist $S \cap A^n$ eine A_0-definierbare Menge in $\mathcal{L}$.

Beweis. Nach der Formelreduzierung sei S Œ durch eine gute Formel definiert. Da die Definierbarkeit abgeschlossen unter booleschen Kombinationen ist, reicht es, eine Formel in Reinform zu betrachten.

Da aber für jede $\mathcal{L}_{A_0}$-Formel $\varphi(x, y, a')$ und jedes $a \in A^n$ die Aussagen

$$„\text{Es existiert ein } y \in A^m \text{ mit } (B, A) \models \varphi(a, y, a')“,$$

$$„\text{Es existiert ein } y \in A^m \text{ mit } B \models \varphi(a, y, a')“,$$

$$„\text{Es existiert ein } y \in A^m \text{ mit } A \models \varphi(a, y, a')“$$

äquivalent sind wegen φ als $\mathcal{L}$-Formel und $A \prec B$, folgt, dass

$$\exists y \in P(\varphi(x, y, a'))(B) \cap A^n = \exists y(\varphi(x, y, a'))(A).$$

$\square$

2.4 Folgen der Existenz des B&F-Systems

Im Folgenden werden einige Anordnungen von wechselseitigen Inklusionen von Modellen von T betrachtet, in der Gleichheit von bestimmten Typen folgt.

Lemma 2.4.1. Für dichte Paare $(B, A), (D, C)$ mit $(D, C) \subseteq (B, A)$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

1. $(D, C) \preceq (B, A)$
2. Die Erweiterung ist frei.

Beweis. „1. $\Rightarrow$ 2.“ : Diese Richtung ist schon aus Lemma 2.3.1 (5.) bekannt.
„2. $\Rightarrow$ 1.“ : Finde $(|B| + |T|)^+$-saturierte Strukturen

$$(B, A) \preceq (B', A'), (D, C) \preceq (D', C');$$

es ist dann (D, C) eine gemeinsame Unterstruktur und $(D, C) \subseteq (D', C')$ ist frei nach dem Beweis der Gegenrichtung. Außerdem sind nach Voraussetzung D und A unabhängig über C, da aber Unabhängigkeit von Tupeln in D über A auch über A' erhalten bleibt (da (B', A') elementare Oberstruktur), ist auch $(D, C) \subseteq (B', A')$ frei. Also ist die Identität auf (D, C) im Back&Forth-System, daher elementare Abbildung. Daraus folgt für alle $(\mathcal{L}_P)_D$-Formeln φ, dass

$$(D, C) \models \phi \Leftrightarrow (D', C') \models \varphi \Leftrightarrow (B', A') \models \varphi \Leftrightarrow (B, A) \models \varphi.$$

$\square$

Lemma 2.4.2. Seien $(B_1, A_1), (B_2, A_2) \models \mathrm{T^d}$ und (B, A) eine gemeinsame Unterstruktur, sodass die Inklusionen frei sind. Wenn $a \in (A_1)^n$ und $b \in (A_2)^n$ denselben $\mathcal{L}$-Typen über B erfüllen, erfüllen sie auch denselben $\mathcal{L}_P$-Typen über B.

Beweis. Œ seien (B_1, A_1) und (B_2, A_2) schon genügend saturiert, das ändert nichts an Typen über B und (nach derselben Argumentation wie im vorigen Lemma) auch nichts an der Unabhängigkeit. Da a und b denselben Typen über B erfüllen, kann man wieder $\mathcal{L}_B$-Terme mit eingesetztem a auf $\mathcal{L}_B$-Terme mit eingesetztem b abbilden (Wohldefiniertheit und Injektivität wird durch die Typengleichheit ermöglicht) und bekommt einen partiellen Isomorphismus $i : Ba \cong Bb$, dessen Einschränkung auf die $\mathcal{L}_A$-Terme einen partiellen Isomorphismus $Aa \cong Ab$ induziert und sodass $i(a) = b$. Also gilt $i : (Ba, Aa) \cong (Bb, Ab)$, da außerdem die Erweiterungen $(Ba, Aa) \subseteq (B_1, A_1)$ und $(Bb, Ab) \subseteq (B_2, A_2)$ frei sind nach Lemma 2.3.1 (6.), ist i im Back&Forth-System, also elementar, also haben a und b denselben $\mathcal{L}_P$-Typen über B. □

Folgerung 2.4.3. Wenn man sich solch ein Paar (a, b) beliebig wählt (z.B. $a = b = 0$), sind in dem Typen auch die parameterfreien $(\mathcal{L}_P)_B$-Formeln, die in (B_1, A_1) bzw. (B_2, A_2) gelten. Also gelten dieselben Formeln, was als $(B_1, A_1) \equiv_B (B_2, A_2)$ geschrieben wird.

Lemma 2.4.4. Seien $(B_1, A_1), (B_2, A_2)$ zwei dichte Paare und $A \subseteq A_1 \cap A_2$ eine gemeinsame Substruktur, sowie $a \in B_1 \setminus A_1,\ b \in B_2 \setminus A_2$, die den gleichen Ordnungstyp über A haben. Dann haben a und b sogar den gleichen $\mathcal{L}_P$-Typ über A.

Beweis. Es sind trivialer Weise A_i und A unabhängig über A für $i = 1, 2$, außerdem ist a transzendent über A_1 und b transzendent über A_2. Nach Lemma 2.3.1 (4.) sind also die Einbettungen $(Aa, A) \subseteq (B_1, A_1)$ und $(Ab, A) \subseteq (B_2, A_2)$ frei. Nach dem Beweis zu Satz 2.3.4 gibt es also einen Isomorphismus $Aa \cong Ab$, der $A \cong A$ fortsetzt und für den $i(a) = b$ gilt, also gibt es einen Isomorphismus $i : (Aa, A) \cong (Ab, A)$.
Wenn Œ die beiden Modelle von $\mathrm{T^d}$ genügend saturiert sind, ist i im B&F-System, also erfüllen a und b dieselben Formeln. □

2.5 Definierbare Teilmengen von A^n

Wir interessieren uns für die Gestalt von $\mathcal{L}_P$-definierbaren Teilmengen von A^n. Dafür braucht man zuerst eine Hilfsaussage für definierbare Mengen in o-minimalen Strukturen.

Lemma 2.5.1. Sei $\mathcal{M}$ eine o-minimale Struktur, die eine angeordnete Gruppenoperation $+$ mit positivem Element 1 hat und $Y \subseteq M^n$ definierbar. Dann ist Y eine endliche Vereinigung von Mengen der Form $\{f(b,\cdot) = 0, g(b,\cdot) > 0\}$, wobei $b \in M^m$ und f, g stetige, 0-definierbare Abbildungen $M^{m+n} \to M$ sind.

Beweis. Schreibe $Y = \phi(b, \mathcal{M})$ für ein $b \in M^m$ und definiere $Z := \phi(\mathcal{M})$. Wenn man Z in Zellen $(Z_i)_i$ zerlegt, erhält man Y als endliche Vereinigung von $((Z_i)_b)_i$. Es sei also o.B.d.A. Z schon eine 0-definierbare Zelle.
Definiere

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{|x-d| \mid d \in Z\} & Z \text{ nichtleer} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$g(x) := \begin{cases} \inf\{|x-d| \mid d \in \overline{Z} \setminus Z\} & Z \text{ nichtleer} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases},$$

das sind lipschitzstetige Funktionen.
Klar ist, dass $\overline{Z} = \{f = 0\}$; da Zellen lokal abgeschlossen sind, ist $\overline{Z} \setminus Z = \overline{\overline{Z} \setminus Z} = \{g = 0\}$. Also erhalten wir

$$Z = \overline{Z} \setminus (\overline{Z} \setminus Z) = \{f = 0\} \setminus \{g = 0\} = \{f = 0\} \cap \{g > 0\}$$

und

$$Y = Z_b = \{f(b,\cdot) = 0\} \cap \{g(b,\cdot) > 0\}.$$

□

Satz 2.5.2. Für ein dichtes Paar (B, A) und $Y \subseteq A^n$ ist folgendes äquivalent:

1. Y ist $\mathcal{L}_P$-definierbar.
2. Es existiert ein $\mathcal{L}$-definierbares $Z \subseteq B^n$, sodass $Y = Z \cap A^n$.
3. Y ist definierbar in $(A, (R_b)_{b \in B})$ mit der Interpretation $A \models R_b(a)$ genau dann, wenn $0 < a < b$ in B.

Beweis. „1. $\Rightarrow$ 2.“ : Sei φ eine $(\mathcal{L}_P)_B$-Formel mit $\varphi(B) = Y$. Zu zeigen ist, dass eine $\mathcal{L}_B$-Formel ψ existiert mit $(B, A) \models P(x) \rightarrow (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$; das ist genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{Th}(B, A)_B \cup \{P(x)\} \cup \{\varphi(x)\}$ und $\mathfrak{Th}(B, A)_B \cup \{P(x)\} \cup \{\neg\varphi(x)\}$ in $\mathcal{L}_B$ getrennt werden können. Nach dem Trennungslemma gilt das genau dann, wenn für alle $(B, A) \preceq (D_1, C_1), (D_2, C_2)$ und alle $c_i \in C_i$ $(i = 1, 2)$ mit $(D_1, C_1) \models \varphi(c_1), (D_2, C_2) \models \neg\varphi(c_2)$ eine $\mathcal{L}_B$-Formel χ existiert mit $(D_1, C_1) \models \chi(c_1), (D_2, C_2) \models \neg\chi(c_2)$.
Seien solche (D_i, C_i) und c_i, die die Voraussetzungen von oben erfüllen. Dann ist das die Situation aus Lemma 2.4.2, denn elementare Erweiterungen sind frei. Also muss ein trennendes χ wie verlangt existieren, denn ansonsten würden c_1 und c_2 denselben $\mathcal{L}$-Typ erfüllen, aber nicht denselben $\mathcal{L}_P$-Typ.
„2. $\Rightarrow$ 3.“ : Sei $Y = Z \cap A^n$. Nach dem letzten Lemma ist Z eine boolesche Kombination aus Mengen der Form $\{f(b, \cdot) = 0\}$ und $\{g(b, \cdot) > 0\}$ für stetige 0-$\mathcal{L}$-definierbare Funktionen f, g und passende $b \in B^m$. Es reicht also die Aussage für Mengen in diesen Formen zu zeigen. Wegen der Stetigkeit der Funktionen und A dicht in B gilt aber in B

$$\begin{aligned} f(b,z) = 0 \Leftrightarrow\ & \text{Für alle } 0 < \varepsilon \in A \text{ existiert } A^m \ni a < b \text{ (koordinatenweise)}, \\ & \text{sodass für alle } a' \in A^m \text{ mit } a < a' < b \text{ (koordinatenweise)} \\ & \text{gilt, dass } |f(a', z)| < \varepsilon, \\ g(b,z) > 0 \Leftrightarrow\ & \text{Es existiert ein } 0 < \varepsilon \in A \text{ und ein } A^m \ni a < b \text{ (koordinatenweise)}, \\ & \text{sodass für alle } a' \in A^m \text{ mit } a < a' < b \text{ (koordinatenweise)} \\ & \text{gilt, dass } |f(a', z)| > \varepsilon. \end{aligned}$$

Die rechten Bedingungen sind jeweils in $(A, (R_b)_{b \in B})$ definierbar.
„3. $\Rightarrow$ 1.“ : Da Aund alle R_b in (B, A) definierbar sind, ist Y auch in (B, A) definierbar. □

2.6 Definierbare Funktionen

Um definierbare Funktionen besser zu verstehen, ist es notwendig, sich mit dem definierbaren Abschluss zu beschäftigen.

Lemma 2.6.1. In jedem dichten Paar (B, A) ist A definierbar abgeschlossen.

Beweis. Sei $b \in B \setminus A$ und $(B, A) \preceq (D, C)$ eine genügend saturierte Erweiterung. Dann wird der Ordnungstyp von b über A auch von einem Element $D \setminus C \ni d \neq b$ realisiert wegen Dichtheit von $D \setminus C$ in D und Saturation.

Nach Lemma 2.4.4 haben b und d dann den selben $\mathcal{L}_P$-Typen über A, weswegen b nicht definierbar über A in (D, C) sein kann, also auch nicht in (B, A). $\square$

Folgerung 2.6.2. Sei (B, A) ein dichtes Paar und $A_0 \preceq A$. Dann ist A_0 definierbar abgeschlossen.

Beweis. Sei b definierbar über A_0. Dann ist b insbesondere definierbar über A, also in A. Nach Folgerung 2.3.6 ist dann $\{a\} = \{a\} \cap A$ schon $\mathcal{L}$-definierbar aus A_0, also in A_0, da A_0 elementare Substruktur ist. $\square$

Lemma 2.6.3. Sei $(D, C) \subseteq (B, A)$ frei und (B, A) dichtes Paar. Dann ist D definierbar abgeschlossen in (B, A).

Beweis. Wenn $D = C$, ist $D \preceq A$ und die Aussage daher klar nach der vorigen Folgerung. Die Erweiterung $(AD, A) \subseteq (B, A)$ ist trivialerweise frei (zwei gleiche Mengen in der Unabhängigkeit), außerdem ist $A \preceq AD$ dicht (da A dicht in $B \supseteq AD$) und eine echte Inklusion, da für $D = A$ wegen Unabhängigkeit von D und A ansonsten $D = C$ folgen würde. Nach Lemma 2.4.1 ist also $(AD, A) \preceq (B, A)$ und daher ist $\mathrm{dcl}(D) \subseteq \mathrm{dcl}(AD) = AD$, da AD definierbar abgeschlossen nach Lemma 2.6.1.

Sei jetzt $d \in AD$ $\mathcal{L}_P$-definierbar über D und $a \in A^n$ minimal mit $d \in Da$ (insbesondere ist a unabhängig über D). Im Folgenden wird gezeigt, dass dann a schon das leere Tupel, also $d \in D$ ist.

Nimm an, dass $n > 0$ und sei $f : B^n \to B$ die definierende Funktion von d, also ist sie D-definierbar und $f(a) = d$. Seien

$$S_1 := \{x \in B^n \mid f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \cdot) \text{ ist streng monoton wachsend auf einem Intervall um } x_n\},$$

$$S_2 := \{x \in B^n \mid f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \cdot) \text{ ist streng monoton fallend auf einem Intervall um } x_n\},$$

$$S_3 := \{x \in B^n \mid f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \cdot) \text{ ist konstant auf einem Intervall um } x_n\}.$$

$S_1 \cup S_2 \cup S_3$ ist groß, denn wenn eine offene Menge $U \subseteq B^n \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ existiert, wähle $x \in U$ beliebig und ein Intervall I um x_n mit $\{(x_1, \ldots, x_{n-1})\} \times I \subset U$. Nach der Charakterisierung o-minimaler definierbarer Funktionen existiert ein Subintervall $J \subseteq I$, sodass $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \cdot)$ entweder streng monoton wachsend, fallend oder konstant ist auf J. Also ist $x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ im Widerspruch zu $x \in U$.

Da a generisch ist, muss es also in der großen Menge liegen.

- Wenn a in S_1 liegt, nehmen wir an, dass (B, A) schon hinreichend saturiert ist (das ändert nichts, da (B, A) ja nur irgendeine Oberstruktur und Modell von $\mathrm{T^d}$ sein muss) und finden in $A \setminus Da_1 \ldots a_{n-1}$ ein $a' \neq a_n$ mit demselben Ordnungstyp über $Da_1 \ldots a_{n-1}$ (ansonsten wäre a_n definierbar über $a_1, \ldots, a_{n-1}$). Insbesondere ist $a_1, \ldots, a_{n-1}, a' \in S_1$, weil die Menge aller solchen Elemente a' $Da_1 \ldots a_{n-1}$-definierbar ist und daher eine $Da_1 \ldots a_{n-1}$-definierbare Umgebung von a_n dort drin liegt, in der a' liegen muss. Da f streng monoton ist, ist $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a') \neq f(a) = d \in D$.
  Allerdings ist d $\mathcal{L}_P$-definierbar über D, also ist

  $$f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) = d \in \mathrm{tp}_{\mathcal{L}_P}(a/Da_1 \ldots a_{n-1}) \setminus \mathrm{tp}_{\mathcal{L}_P}(a'/Da_1 \ldots a_{n-1})$$

  (oder zumindest mit der definierenden Formel für d eingesetzt), die Typen sind daher nicht gleich.
  Da $a_n, a' \in A$ aber den gleichen Ordnungstyp über $Da_1 \ldots a_{n-1}$ haben, haben sie auch den gleichen $\mathcal{L}$-Typ über $Da_1 \ldots a_{n-1}$ nach dem Beweis von Satz 2.3.4. Außerdem ist $(Da_1 \ldots a_{n-1}, Ca_1 \ldots a_{n-1}) \subseteq (B, A)$ nach Lemma 2.3.1 (6.) frei, weswegen aus Lemma 2.4.2 folgt, dass a_n, a' denselben $\mathcal{L}_P$-Typ über $Da_1 \ldots a_{n-1}$ haben - Widerspruch!

- Das Fall $a \in S_2$ geht analog, es wurde eben auch nur streng monoton benutzt.

- Im Falle $a \in S_3$ ist d $\mathcal{L}$-definierbar über $Da_1 \ldots a_{n-1}$ durch

  „$d = f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$ für irgendein $(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) \in S_3$.

$\square$

Ab hier müsst ihr (Stand 20.1.) nicht mehr korrekturlesen. (TODO: Entfernen, wenn unnötig)

Satz 2.6.4. Sei $(B, A) \models \mathrm{T^d}$ und sei $F : B \to B$ eine $\mathcal{L}_P$-definierbare Funktion. Dann stimmt F auf bis auf eine kleine Menge mit einer $\mathcal{L}$-definierbaren Funktion überein.

Beweis. TODO: Muss noch warten $\square$

Folgerung 2.6.5. Auch jede $\mathcal{L}_P$-definierbare Menge $S \subseteq B^n$ stimmt bis auf eine kleine Menge mit einer $\mathcal{L}$-definierbaren Menge S' überein. S' kann man zum Beispiel finden, indem man für die $\mathcal{L}_P$-definierbare charakteristische Funktion χ_S die $\mathcal{L}$-definierbare Annäherung f findet und $S' := \{f = 1\}$ setzt.

Lemma 2.6.6. Sei $(B, A) \models \mathrm{T}^{\mathrm{d}}$ und sei $F : A^n \to A$ eine $\mathcal{L}_P$-definierbare Funktion. Dann gibt es $\mathcal{L}_A$-definierbare $f_1, \ldots, f_k : A^n \to A$, sodass für alle $a \in A^n$ ein f_i existiert mit $F(a) = f_i(a)$.

Beweis. Wenn die Aussage nicht gilt, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\mathcal{L}_A$-definierbaren $f_1, \ldots, f_k : A^n \to A$, dass ein $a \in A$ existiert mit $f_i(a) \neq F(a)$ für alle i. Also ist der partielle Typ

$$\{F(x) \neq f(x) \mid f : A^n \to A \ \mathcal{L}_A\text{-definierbar}\}$$

konsistent und es existiert $(B, A) \preceq (B', A')$ und $a' \in A'^n$ mit $F(a') \neq f(a')$ für alle $\mathcal{L}_A$-definierbaren $f : A'^n \to A'$.
Allerdings ist nach Lemma 2.3.1 (6.) wegen $a' \in A'^n$ die Erweiterung $(Ba', Aa') \subseteq (B', A')$ frei, nach Lemma 2.6.3 ist Ba' also $\mathcal{L}_P$-definierbar abgeschlossen. Da $F(a')$ $\mathcal{L}_P$-definierbar über Ba' ist, ist es in Ba', wegen $F : A'^n \to A$ ist $F(a') \in A'$. Wegen Unabhängigkeit liegt also $F(a') \in Ba' \cap A' = Aa'$ und es gibt eine $\mathcal{L}_A$-definierbare Abbildung $f : A'^n \to A'$ mit $f(a') = F(a')$ - ein Widerspruch! □

2.7 Definierbare eindimensionale Mengen

TODO: Hier noch einleitende Worte finden
In diesem Teil sei (B, A) ein dichtes Paar, als Konvention nehmen wir an, dass $A^0 = \{0\}$.

Lemma 2.7.1. Für jede $\mathcal{L}$-definierbare Menge $S \subseteq B^m$ und Funktion $g : B^m \to B^k$ gibt es eine $\mathcal{L}$-definierbare Teilmenge $S' \subseteq S$, sodass

$$A^m \cap S \cap g^{-1}(A^k) = A^m \cap S'.$$

Beweis. Für $S = \emptyset$, wähle $S' = \emptyset$. Ansonsten führen wir eine Induktion über $(m, k, \dim S)$ mit elementweiser Halbordnung (die ist fundiert):
Wenn $m = 0, k = 0$ oder $\dim S = 0$, ist $A^m \cap S \cap g^{-1}(A^k)$ endlich und daher $\mathcal{L}$-definierbar, also kann man $S' = A^m \cap S \cap g^{-1}(A^k)$ wählen. Sei also $(m, k, \dim S) > (0, 0, 0)$.

- Wenn $k > 1$ gilt und g die Koordinatenfunktionen $g_1, \ldots, g_k$ hat, so existieren $(S'_i)_{i \leq k}$ mit $S'_i \subseteq S$ und $A^m \cap S \cap g_k^{-1}(A) = A^m \cap S'_i$ für alle i per Induktionsvoraussetzung. Dann gilt

$$A^m \cap S \cap g^{-1}(A^k) = \bigcap_{i=1}^{k} A^m \cap S \cap g_i^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^{k} A^m \cap S'_i = A^m \cap (\bigcap_{i=1}^{k} S'_i),$$

also erfüllt $S' := \bigcap_{i=1}^{k} S'_i$ das Gewünschte.

- Wenn $k = 1$ gilt, zerlege S in Zellen (Z_i), deren Dimension natürlich $\leq \dim S$ ist. Wenn man da das Problem löst (induktiv bzw. von Hand) und jeweils ein passendes S'_i findet, löst $\bigcup_i S'_i$ das Problem für S.
  Sei also S jetzt schon eine Zelle.

  – Wenn $n := \dim S < m$ ist und π die entsprechende homöomorphe Projektion auf eine offene Zelle in B^n bzw. eine $\mathcal{L}$-definierbare Fortsetzung davon auf ganz B^m, sei λ eine $\mathcal{L}$-definierbare Fortsetzung der Umkehrfunktion dieser Projektion. Wähle die Fortsetzung λ dabei so, dass $\lambda(\pi(S))$ und $\lambda(B^n \setminus \pi(S))$ disjunkt sind. Das ermöglicht die Gleichheit $\lambda(C \cap D) = \lambda(C) \cap \lambda(D)$ für $C \subseteq \pi(S)$. Löse dann mit einem $\mathcal{L}$-definierbaren $S'' \subseteq \pi(S)$ das Problem

  $$A^n \cap \pi(S) \cap \lambda^{-1}(A^m) \cap (g \circ \lambda)^{-1}(A) = A^n \cap S''.$$

  Das Problem entspricht im Übrigen den Anforderungen, weil man $\lambda^{-1}(A^m) \cap (g \circ \lambda)^{-1}(A)$ wie im Fall $k > 1$ umschreiben kann. Schneidet man das mit $\lambda^{-1}(A^m)$ und wendet darauf λ an, erhält man (mit schrittweiser Verwendung des $\cap$-Herausziehens)

  $$\begin{aligned} \lambda(A^n) \cap S \cap A^m \cap g^{-1}(A) &= \lambda(A^n \cap \pi(S) \cap \lambda^{-1}(A^m) \cap (g \circ \lambda)^{-1}(A)) \\ &= \lambda(\lambda^{-1}(A^m) \cap A^n \cap S'') \\ &= A^m \cap \lambda(A^n) \cap \lambda(S''), \end{aligned}$$

  wegen $A^m \cap S \subseteq \lambda(A^n)$ aufgrund der Projektionseigenschaft von π, kann man $\lambda(A^n)$ weglassen und erhält

  $$A^m \cap S \cap g^{-1}(A) = A^m \cap \lambda(S''),$$

  also löst $\lambda(S'')$ das Problem für S.

– Wenn $\dim S = m$, finde eine $\mathcal{L}_A$-definierbare Funktion $G : B^{m+n} \to B$ mit $g = G(\cdot, b)$ für ein über A unabhängiges Tupel $b \in B^n$. Als nächstes betreiben wir Induktion über n. Wenn $n = 0$, dann ist nichts zu tun, weil dann g schon A-definierbar ist, also $g^{-1}(A) = A^m$ und man dann $S' = S$ wählen kann. Ansonsten zerlege S wie schon im Beweis von Lemma 2.6.3 in Mengen

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \{x \in B^{m+n} \,| G(x_1, \ldots, x_{m+n-1}, \cdot) \text{ ist streng monoton wachsend} \\
&\qquad\qquad \text{auf einem Intervall um } x_n\}, \\
S_2 &:= \{x \in B^{m+n} \,| G(x_1, \ldots, x_{m+n-1}, \cdot) \text{ ist streng monoton fallend} \\
&\qquad\qquad \text{auf einem Intervall um } x_n\}, \\
S_3 &:= \{x \in B^{m+n} \,| G(x_1, \ldots, x_{m+n-1}, \cdot) \text{ ist konstant auf einem Intervall um } x_n\}
\end{aligned}$$

und den Rest $S_4 := B^{m+n} \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$, partitioniere diese Mengen dann noch in A-definierbare Zellen $(Z_i)_i$ und definiere $Z_i' := \{x \in B \mid (x, b) \in Z_i\}$ für alle i. Dann ist für jede offene Zelle G in der letzten Koordinate entweder streng monoton steigend, fallend oder konstant jeweils auf der ganzen Zelle; das folgt, indem analog zum Beweis von Lemma 2.6.3 offene Zellen schon Teilmenge von S_1, S_2 oder S_3 sind, die lokale Definition dieser Mengen überträgt sich durch Supremumsbildung auf die gesamte Zelle.
Löse das Problem jetzt für alle $(Z_i')_i$, wegen $S := \bigcup\limits_i Z_i'$ ist es dann auch für S gelöst: Für nicht-offene Zellen geht das per Induktion bzw. genauso wie im vorigen Unterpunkt. Wenn Z_i' nun eine offene Zelle ist, gilt für ein generisches Element x über A, b, dass (x, b) generisch von B^{m+n} ist, also in $S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Also ist Z_i entweder in S_1, S_2 oder S_3 enthalten.

  * Wenn $Z_i \subseteq S_3$ ist, definiere

  $$\tilde{G}(\overline{x}) = z :\Leftrightarrow z = G(\overline{x}, y) \text{ für ein } y \text{ mit } (\overline{x}, y) \in Z_i,$$

  dann gilt $g = \tilde{G}(\cdot, b_1, \ldots, b_{n-1})$ und per Induktion kann man das Problem für $n - 1$ lösen.
  * Wenn $Z_i \subseteq S_1, S_2$, also G auf Z_i injektiv in der letzten Koordinate ist, wird das Problem durch $\emptyset$ gelöst: Denn sei $a \in A^m \cap S_i' \cap g^{-1}(A)$, also existiert $a' \in A$ mit $a' = g(a) = G(a, b)$, weil $a \in Z_i'$ ist, ist $(a, b) \in Z_i$, also ist wegen Injektivität von G in der letzten Koordinate b_n eindeutig bestimmt mit $(a, b) \in Z_i$ und $a' = G(a, b)$. Das ist aber $A, b_1, \ldots, b_{n-1}$-

definierbar, also ist b nicht unabhängig über A.

$\square$

Lemma 2.7.2. Sei $X \subseteq B$ eine kleine Teilmenge. Dann ist X eine endliche Vereinigung von Mengen $f(A^n \cap E)$ für E eine offene Zelle und $f : E \to B$ eine stetige $\mathcal{L}$-definierbare Funktion.

Beweis. Wenn X klein ist, existiert ein $\mathcal{L}$-definierbares $g : B^m \to B$, sodass $X \subseteq g(A^m)$. Setze $X' := g^{-1}(X) \cap A^m = (g \restriction A^m)^{-1}(X)$, das ist $\mathcal{L}_P$-definierbar und es gilt $g(X') = X$ wegen $X \subseteq \operatorname{im}(g \restriction A^m)$.
Beweise die Aussage jetzt induktiv über m: Wenn $m = 0$ ist, ist X maximal einelementig und entweder gleich $f(\{0\})$ für eine konstante Funktion f oder schon die leere Vereinigung.
Wenn $m > 0$ ist, schreibe X' als Teilmenge von A^m wegen Satz 2.5.2 in der Form $Y \cap A^m$ für ein $\mathcal{L}$-definierbares Y. Sei eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Y in Zellen gegeben, auf denen g jeweils stetig ist, dann ist

$$X = g(Y \cap A^m) = \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}} g(Z \cap A^m).$$

Für offene Zellen Z ist so eine Darstellung also schon gefunden. Sei Z nun eine Zelle der Dimension $d < m$ und $\pi : B^d \to B^m$ eine $\mathcal{L}$-definierbare Fortsetzung des kanonischen Homöomorphismus der entsprechenden offenen Zelle Z' nach Z, die so gewählt ist, dass $\pi(Z')$ und $\pi(M^d \setminus Z')$ disjunkt sind. Dann gilt mit derselben Argumentation wie im letzten Beweis und mit Anwendung des daraus resultierenden Lemmas

$$f(Z \cap A^m) = (f \circ \pi)(A^d \cap Z \cap \pi^{-1}(A^m)) = (f \circ \pi)(A^d \cap S)$$

für ein passendes $\mathcal{L}$-definierbares S. Das ist dann aber schon der Fall eines kleineren m und mit der Induktionsbehauptung folgt die Aussage. $\square$

Satz 2.7.3. Sei $X \subseteq B$ eine $\mathcal{L}_P$-definierbare Menge. Dann existiert eine endliche Unterteilung von B, sodass jedes dadurch erzeugte offene Intervall I entweder disjunkt zu X ist, Teilmenge von X ist oder $X \cap I$ dicht & kodicht in I ist. Für kleine X entfällt der Fall „Teilmenge“ natürlich.

Beweis. Die gesuchte Eigenschaft bleibt unter endlichen Vereinigungen von Mengen erhalten, man muss nur eine Verfeinerung der Unterteilung durchführen. Deswegen sei X zunächst klein und nach dem letzten Lemma gegeben als $X = f(A^n \cap E)$ für ein

stetiges, $\mathcal{L}$-definierbares $f : E \to B$ und eine offene Zelle $E \subseteq B^n$. Da definierbarer Zusammenhang unter definierbaren stetigen Funktionen erhalten bleibt, ist $I := f(E)$ auch definierbar zusammenhängend, weil es $\mathcal{L}$-definierbar ist, hat es auch ein Supremum und Infimum in $B \cup \{\pm\infty\}$, ist also ein Intervall (ausnahmsweise sei hier auch ein nichtoffenes Intervall mitgemeint). Wenn I endlich ist, ist auch X endlich und es ist nichts zu zeigen. X ist disjunkt zu $B \setminus I$, nun muss nur noch gezeigt werden, dass $X = X \cap I$ dicht und kodicht in I ist, denn Dichte und Kodichte in nichtoffenen unendlichen Intervallen ist äquivalent zu Dichte und Kodichte in deren Innerem. Aber für dichte Teilmengen werden durch stetige Abbildungen auf dichte Teilmengen abgebildet; da A^n dicht in B^n ist, ist auch $A^n \cap E$ dicht in E und folglich X dicht in I. Andererseits muss auch das Komplement von X dicht in I sein, da es sonst ein Intervall ganz in X gäbe, was der Kleinheit mit Lemma 2.2.5 widerspricht.
Sei jetzt X nicht mehr klein, dann stimmt es aber bis auf eine kleine Menge mit einer $\mathcal{L}$-definierbaren Menge X überein. $\square$

A Ein Alternativbeweis zur ω-Stabilität von ACP

Beweis. Nach Folgerung 1.2.12 kann man jede Formel modulo $\mathrm{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$ schreiben als boolesche Kombination aus „l_n(Monome in $\mathbb{P}(X)$)“ und
„(Polynom in $\mathbb{P}(X)$)(f_{i_1,n_1}(Monome in $\mathbb{P}(X)$), …, f_{i_m,n_m}(Monome in $\mathbb{P}(X)$)) = 0“.
Diese beiden Arten von Formeln lassen sich weiterentwickeln zu Formeln der Art $\exists \overline{e} \in E(f(\overline{e}, \overline{x}) = 0)$ für $f(\overline{T}, \overline{x}) \in \mathbb{P}(\overline{T})[\overline{x}]$ und der Art

$$\exists z_{1,2}, \ldots, z_{1,n_1+1}, z_{2,2}, \ldots, z_{2,n_2+1}, \cdots \in E(p(z_{1,i_1-1}, \ldots, z_{k,i_k-1}) = 0$$
$$\bigwedge_{i=1}^{k} m_{i,1} = z_{i,2} m_{i,2}(\overline{x}) + \cdots + z_{i,n_i} m_{i,n_i}(\overline{x}))$$

für Monome $(m_{i,j}) \in \mathbb{P}(X)[\overline{x}]$ und ein Polynom $p \in \mathbb{P}(X)[\overline{x}]$. Nenne die Menge aller Formeln der ersten Art A und die aller Formeln der zweiten Art B. Insbesondere wurde die Menge der „interessanten“ Formeln nur vergrößert, das heißt, dass ein Typ p eindeutig durch

$$(p \cap A) \cup (p \cap B) \cup (p \cap \neg A) \cup (p \cap \neg B)$$

festgelegt wird.
Das bedeutet, in einem vorgegebenen Modell $\mathcal{M}$ mit $X \subseteq M$, $|X| \leq \omega$ zerfällt $S_n(X)$ in folgende Teilmengen:

1. Typen, die eine Formel aus A und eine aus B enthalten.
2. Typen, die eine Formel aus A und keine aus B enthalten.
3. Typen, die eine Formel aus B und keine aus A enthalten.
4. Typen, die keine Formel aus $A \cup B$ enthalten.

Für einen Typen p ist im Fall 3./4. $p \cap A = \emptyset$, also $p \cap (A \cup \neg A)$ eindeutig gegeben durch die Verneinung aller möglichen Formeln in A mit n freien Variablen. Analog ist in Fall 2./4. $p \cap (B \cup \neg B)$ eindeutig bestimmt.
Es bleibt nun noch zu zeigen, dass es im Fall 1./2. jeweils nur abzählbar viele Möglichkeiten für Einschränkungen $p \cap (A \cup \neg A)$ geben kann und im Fall 1./3. nur abzählbar viele Möglichkeiten für Einschränkungen $p \cap (B \cup \neg B)$.
Zunächst zum ersten Teil: Definiere für ein Polynom $g \in E(X)[\overline{x}]$ die Relation

$$g \in\in p :\Leftrightarrow \text{ es existiert } f(\overline{T}, \overline{x}) \in \mathbb{P}(\overline{T})[\overline{x}], \text{ es existieren } a_1, \ldots, a_n \in E \text{ mit}$$
$$f(\overline{a}, \overline{x}) = g(\overline{x}) \text{ und } \exists \overline{e} \in E(f(\overline{e}, \overline{x}) = 0) \in p.$$

$I := \{g \in E(X)[\overline{x}] \mid g \in\in p\}$ ist offenbar ein Ideal im Noetherschen Ring $E(X)[\overline{x}]$ (es ist nichtleer im Fall 1./2.) und daher endlich erzeugt durch $h_1, \ldots, h_m \in I$. Da jedes Element $g \in I$ mit einem Element $\exists \overline{e} \in E(\overline{g}(\overline{e}, \overline{x}) = 0) \in p$ korrespondiert, ist $p \cap (A \cup \neg A)$ isoliert durch die übertragenen Erzeuger $\exists \overline{e} \in E(\overline{h_1}(\overline{e}, \overline{x}) = 0), \ldots, \exists \overline{e} \in E(\overline{h_m}(\overline{e}, \overline{x}) = 0)$, also gibt es nur abzählbar viele Möglichkeiten für $p \cap (A \cup \neg A)$.
Formeln der zweiten Art kann man in Konjunktionen von Formeln der ersten Art umwandeln, indem man $(z_{l,i_l-1})_{l=1\ldots k}$ zu freien Variablen macht. Auf diese Weise kann man partielle Typen in B zu partiellen Typen in A in mehr Variablen umformen (am angenehmsten geht es wahrscheinlich, wenn man annimmt, dass $\mathcal{M}$ schon hinreichend saturiert ist und einen Erfüller $\overline{a}$ von einem p der Art 1./3. betrachtet, eine Belegung $(b_{i,j})$ für die $(z_{i,j})$ in einer der Formeln findet und dann $\mathrm{tp}(\overline{a}, (b_{l,i_l-1})_{l=1\ldots k}/X)$ betrachtet). Aber wie auch immer man das macht, es können nur mehr Typen werden, dafür landet man wieder in Fall 1./2., wo wir wissen, dass es nur abzählbar viele Möglichkeiten gibt. $\square$

Literaturverzeichnis

[Del12] Françoise Delon. *Elimination Des Quantificateurs Dans Les Paires De Corps Algébriquement Clos*. World Scientific Publishing Company, 2012.

[Lan73] Serge Lang. *Introduction To Algebraic Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1973.

[PS97] Ya'akov Peterzil and Sergei Starchenko. *A Trichotomy Theorem for o-minimal Structures*. Proceedings of the London Mathematical Society, 1997.

[vdD98] Lou van den Dries. *Dense Pairs of o-minimal Structures*. Fundamenta Mathematicae, 1998.