

# Inhaltsverzeichnis

Notation . . . . .	2
<b>1 Paare algebraisch abgeschlossener Körper</b>	<b>3</b>
1.1 Algebraische und lineare Disjunktheit von Körpern . . . . .	3
1.2 Paare algebraisch abgeschlossener Körper . . . . .	7
<b>2 Dichte Paare o-minimaler Strukturen</b>	<b>15</b>
2.1 Allgemeine Betrachtungen und Anforderungen an die Theorien . . . . .	15
2.2 Kleine Mengen . . . . .	15
2.3 Formelreduzierung in $T^d$ . . . . .	19
2.4 Folgen der Existenz des B&F-Systems . . . . .	24
2.5 Definierbare Teilmengen von $A^n$ . . . . .	26
2.6 Definierbare eindimensionale Mengen . . . . .	27
2.7 Definierbare Funktionen . . . . .	35
2.8 Offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ . . . . .	38
2.9 TODO: Noch woanders einsortieren oder löschen . . . . .	41
<b>Anhang</b>	<b>44</b>
A Ein Alternativbeweis zur $\omega$ -Stabilität von ACP . . . . .	44
Literaturverzeichnis . . . . .	46

## Notation

Im Folgenden seien, wenn nicht weiter erklärt, mit  $i, j, k, l, m, n$  immer natürliche Zahlen gemeint, mit hebräischen Buchstaben immer unendliche Kardinalzahlen.

Oftmals wird nicht zwischen Strukturen und deren Trägermengen unterschieden, insbesondere bei Paaren von Strukturen. Wenn von  $\mathcal{L}$ -Definierbarkeit in einem Modell  $\mathcal{M}$  die Rede ist, ist Definierbarkeit mit  $\mathcal{L}_M$ -Formeln gemeint, bei  $\mathcal{L}_S$ -Definierbarkeit für ein  $S \subseteq M$  nur Definierbarkeit mit  $\mathcal{L}_S$ -Formeln.

Als Topologie wird immer die Ordnungstopologie bzw. deren Produkttopologie verstanden, mit „Intervall“ ist immer ein offenes, nichtleeres Intervall mit Randpunkten in der Struktur oder  $\pm\infty$  gemeint. Außerdem sei für  $A \prec B$  und  $X \subseteq B$   $A$ -definierbar in  $T$  die Menge  $X_A$  die durch dieselbe definierende Formel in  $B$  definierbare Menge (für  $X \subseteq A$  und  $X_B$  natürlich analog). Außerdem sei für Relationen  $P$  mit „ $\exists/\forall x \in P(\dots)$ “ die Formel „ $\exists x(P(x) \wedge \dots)/\forall x(P(x) \rightarrow \dots)$ “ gemeint.

Mit  $|\bar{a}|$  ist je nach Kontext unterschiedliches gemeint, einerseits die Supremumsnorm von  $\bar{a}$ , andererseits die Anzahl der Einträge. Da das eine ein Element der Struktur ist und das andere eine natürliche Zahl, ist immer klar erkennbar, was gemeint ist. Im Allgemeinen wird auch nicht immer zwischen Tupeln und Elementen unterschieden, außer, wenn das für das Verständnis notwendig ist.

Im modelltheoretischen Kontext ungewöhnlich sind Mengen der Form  $\{f = a\}, \{f > a\}$  und  $\{f < a\}$  für eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ . Hiermit sind die maßtheoretischen Interpretationen dieser Ausdrucksweise ( $\{x \in X \mid f(x) = a\}, \{x \in X \mid f(x) > a\}$  und  $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ ) gemeint.

# 1 Paare algebraisch abgeschlossener Körper

## 1.1 Algebraische und lineare Disjunktheit von Körpern

In diesem Teil richten wir uns im Aufbau etwas nach [Del12] und in manchen Beweisen nach [Lan73].

**Definition 1.1.1.** Gegeben Körperinklusionen  $C \subseteq K, L \subseteq M$  in Rautenform, nenne  $K$  und  $L$  **linear disjunkt über**  $C$ , falls alle Basen von  $K$  als  $C$ -Vektorraum auch über  $L$  linear unabhängig bleiben. Nenne  $K$  und  $L$  **algebraisch disjunkt über**  $C$ , falls alle Transzendenzbasen von  $K$  über  $C$  auch algebraisch unabhängig über  $L$  bleiben. Schreibe  $K \text{ ld}_C L$  bzw.  $K \text{ ad}_C L$ .

**Bemerkung.** Es reicht, lineare Disjunktheit für eine Basis zu zeigen. Denn wenn man die lineare Unabhängigkeit über  $L$  für eine Basis verliert, verliert man sie per  $C$ -Basiswechsel auch für alle anderen.

**Bemerkung.** Es reicht, die Erhaltung der linearen/algebraischen Unabhängigkeit nur für beliebige endliche Mengen zu prüfen, weil lineare/algebraische Unabhängigkeit einer Menge genau dann gilt, wenn sie für alle endlichen Teilmengen gilt.

**Bemerkung.** Der Körper  $M$  kommt in der Definition nur vor, damit die Rechenoperationen zwischen  $K$  und  $L$  wohldefiniert sind. Die genaue Wahl ist irrelevant und daher nicht in der Notation berücksichtigt. Wir nehmen für die Zukunft einfach an, dass die Multiplikation klar definiert ist.

**Lemma 1.1.2.** Sei  $C$  ein Körper und  $C \subseteq R, S$  Ringerweiterungen von Integritätsbereichen. Dann gilt  $\text{Frac}(R) \text{ ld}_C \text{Frac}(S)$  genau dann wenn linear unabhängige Mengen in  $R$  über  $C$  auch linear unabhängig über  $S$  bleiben.

*Beweis.* Die Hinrichtung folgt leicht aus  $R \subseteq \text{Frac}(R), S \subseteq \text{Frac}(S)$ . Für die Rückrichtung seien  $r_1 x_1^{-1}, \dots, r_n x_n^{-1} \in \text{Frac}(R)$  linear unabhängig über  $C$ , aber linear abhängig über  $\text{Frac}(S)$  mit nichttrivialer Linearkombination

$$(s_1 y_1^{-1}) r_1 x_1^{-1}, \dots, (s_n y_n^{-1}) r_n x_n^{-1} = 0.$$

Dann gilt aber nach Multiplikation mit  $\prod_{i=1}^n x_i y_i \neq 0$  die lineare Abhängigkeit über  $S$

der über  $C$  unabhängigen Elemente  $((\prod_{i \neq j} x_i) r_j)_{1, \dots, n} \in R$  mit der folgenden Gleichung:

$$0 = \sum_{j=1}^n (\prod_{i \neq j} x_i) r_j (\prod_{i \neq j} y_i) s_j$$

□

**Bemerkung.** Es reicht wieder, sich auf endliche Mengen zu beschränken. Alternativ kann man es auch wieder nur für eine  $C$ -Basis von  $R$  zeigen.

**Lemma 1.1.3.** Für Körper  $C, K, L$  wie oben gilt  $K \text{ ld}_C L$  genau dann wenn  $K[L] = L[K] \cong K \otimes_C L$  mit kanonischem Isomorphismus, daher ist  $\text{ld}$  symmetrisch.

*Beweis.* Der aufgespannte Ring erfüllt

$$K[L] = \{ \sum_{(k,l) \in X} kl \mid X \subset K \times L \text{ endlich} \} = L[K].$$

Wenn  $(k_i)_I, (l_j)_J$  Basen von  $K, L$  über  $C$  sind, ist  $(k_i \otimes l_j)_{i \in I, j \in J}$  eine Basis von  $K \otimes_C L$ . Der  $C$ -Homomorphismus

$$\sum_{i \in I_0, j \in J_0} c_{ij} k_i \otimes l_j \mapsto \sum_{i \in I_0, j \in J_0} c_{ij} k_i l_j$$

für  $I_0 \subseteq I, J_0 \subseteq J$  endlich ist immer surjektiv, da klarerweise  $E := (k_i l_j)_{i \in I, j \in J}$  ein Erzeugendensystem von  $K[L]$  ist. Er ist injektiv genau dann, wenn  $E$  auch linear unabhängig über  $C$  ist, also keine Linearkombination

$$0 = \sum_{i \in I_0, j \in J_0} c_{ij} k_i l_j = \sum_{i \in I_0} (\sum_{j \in J_0} c_{ij} l_j) k_i$$

existiert mit  $c_{ij} \neq 0$  für mindestens ein Paar  $(i, j)$ . Aber das ist genau dann der Fall, wenn keine  $\tilde{c}_i = \sum_{j \in J_0} c_{ij} l_j \in L$  existieren für  $i \in I_0$  mit  $\tilde{c}_i \neq 0$  für mindestens ein  $i$  und  $0 = \sum_{i \in I_0} \tilde{c}_i k_i$ , also wenn die  $(k_i)_I$  linear unabhängig über  $L$  sind. □

**Bemerkung.** Auch  $\text{ad}$  ist symmetrisch, denn  $K \text{ ad}_C L$  genau dann, wenn  $\dim(\bar{k}/C) = \dim(\bar{k}/L)$  für alle  $\bar{k} \in K$  im Sinne der  $\text{acl}$ -Dimension in  $\text{ACF}$ , also gerade dann, wenn  $K$  und  $L$  unabhängig über  $C$  im modelltheoretischen Sinn als Teilmengen eines algebraisch abgeschlossenen Körpers.

**Definition 1.1.4.** • Eine Körpererweiterung  $K \subseteq L$  heiße **regulär**, wenn  $\bar{K} \text{ ld}_K L$ .

- Für Körper  $K, L \subseteq M$  sei  $KL := K(L) = L(K)$ .

Wir können einige Folgerungen und „Rechenregeln“ aus den definierten Eigenschaften ziehen:

**Lemma 1.1.5.** Gegeben die Körperinklusionen  $C \subseteq L \subseteq M$  und  $C \subseteq K$ . Dann gilt  $K \text{ld}_C M$  genau dann, wenn  $K \text{ld}_C L$  und  $KL \text{ld}_L M$ .

*Beweis.* Sei  $(k_h)_H$  eine Basis von  $K$  über  $C$ ,  $(l_i)_I$  eine von  $L$  über  $C$  und  $(m_j)_J$  eine von  $M$  über  $L$ .  $K \text{ld}_C M$  bedeutet, dass die  $C$ -Basis von  $K$  auch  $M$ -Basis von  $K$  ist, aber dann ist sie natürlich auch  $L$ -Basis, da  $C \subseteq L \subseteq M$ . Dann kann man sich überlegen, dass  $(l_i m_j)_{I \times J}$  eine Basis von  $M$  über  $C$  ist und nach dem letzten Satz  $(k_h)_H$  eine Basis von  $L[K]$  als  $L$ -Vektorraum.

Wenn  $KL \text{ld}_L M$  nicht gelten würde, würde nach den Bemerkungen oben auch schon die Basis  $(k_h)_H$  von  $L[K]$  über  $L$  linear abhängig über  $M$  werden, es gäbe also eine Linearkombination

$$\sum_{h \in H} \lambda_h k_h = 0, \quad M \ni \lambda_h = 0 \text{ für fast alle, aber nicht alle } h \in H.$$

Da  $(k_h)_H$  aber die Basis von  $K$  über  $C$  ist, widerspricht das  $K \text{ld}_C L$ .

Für die Rückrichtung ist zu zeigen, dass  $(l_i m_j)_{I \times J}$  linear unabhängig über  $K$  bleibt.

Wenn das nicht so ist und die Linearkombination

$$0 = \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{ij} l_i m_j, \quad K \ni \lambda_{ij} = 0 \text{ für fast alle, aber nicht alle } (i,j) \in I \times J$$

das bezeugt, schreibe

$$\lambda_{ij} =: \sum_{h \in H} c_{hij} k_h$$

als  $C$ -Basisdarstellung für alle  $(i,j) \in I \times J$ . Einsetzen und Umklammern bringt uns die Linearkombination

$$0 = \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{ij} l_i m_j = \sum_{(i,j) \in I \times J} \left( \sum_{h \in H} c_{hij} k_h \right) l_i m_j = \sum_{i \in I} \left( \sum_{(h,j) \in H \times J} c_{hij} k_h l_i \right) m_j,$$

$C \ni c_{hij} = 0$  für fast alle, aber nicht alle  $(h,i,j) \in H \times I \times J$ .

Da wir aber  $KL \text{ld}_C M$  annehmen, muss

$$\sum_{(h,j) \in H \times J} c_{hij} k_h l_i = 0 \text{ sein für alle } j \in J$$

, da wir  $K \text{ld}_C L$  annehmen, folgt daraus  $c_{hij} = 0$  für alle  $h, i, j$ .  $\square$

**Lemma 1.1.6.** Wenn  $C \subseteq K$  regulär ist und  $K \text{ad}_C L$ , folgt  $K \text{ld}_C L$ .

*Beweis.* Geht mit Bewertungen, steht zum Beispiel in [Lan73] (Seite 57, Theorem 3).  $\square$

**Lemma 1.1.7.** 1.  $K \text{ld}_C L$  impliziert  $K \cap L = C$ .

2. Wenn  $C \subseteq K$  algebraisch und  $C \subseteq L$  regulär, dann ist  $K \text{ld}_C L$ .

3.  $K \text{ld}_C L$  impliziert  $K \text{ad}_C L$ .

4.  $K \text{ad}_C L$  impliziert  $\overline{K} \text{ad}_C \overline{L}$ .

5. Wenn  $K \text{ld}_C L, K \subset M$  und  $X \subset M$  algebraisch unabhängig über  $KL$ , dann  $K(X) \text{ld}_K KL$ .

6. Wenn  $C \subseteq K$  regulär ist und  $K \text{ld}_C L$ , folgt  $K \text{ld}_C \overline{L}$  bzw.  $L \subseteq KL$  regulär.

*Beweis.* 1. Die eine Inklusion ist klar. Für die Rückrichtung sei  $x \in K \cap L \setminus C$ . Dann ist  $(1, x) \in K^2$  linear abhängig über  $L$  und somit über  $C$ . Aber dann ist  $x$  schon in  $C$ .

2. Wegen der Regularität gilt  $L \text{ld}_C \overline{C}$  und wegen  $C \subseteq K \subseteq \overline{C}$  und dem Lemma 1.1.5 gilt  $L \text{ld}_C K$ .

3. Seien  $k_1, \dots, k_n \in K$  algebraisch abhängig über  $L$ , das heißt, es gibt ein Polynom  $0 \neq f(X) = \sum_{|\alpha| \leq m} l_\alpha X^\alpha \in L[X_1, \dots, X_n]$  mit  $f(k) = 0$ , also insbesondere  $(k^\alpha)_{|\alpha| \leq m}$  linear abhängig über  $L$ , per Annahme also auch über  $C$ . Dann existiert aber eine Linearkombination  $\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha k^\alpha = 0$  mit  $c_\alpha \in C$  nicht alle Null, und diese bezeugt die algebraische Abhängigkeit über  $C$ .

4. Folgt aus  $\dim(\cdot/L) = \dim(\cdot/\text{acl}(L))$  als Matroideneigenschaft.

5. Wegen algebraischer Unabhängigkeit ist  $|\overline{x}| = \dim(\overline{x}/KL) \leq \dim(\overline{x}/K) \leq |\overline{x}|$  für alle  $\overline{x} \in X$ , also sind  $X$  und  $KL$  im modelltheoretischen Sinne unabhängig über  $K$ . Das gilt dann aber auch für  $K \cup X$  und  $KL$ ,  $\text{acl}(K \cup X)$  und  $KL$  und auch für  $K(X)$  und  $KL$ , also  $K(X) \text{ad}_K KL$ .

$K(X) \supseteq K$  ist außerdem regulär, denn  $K[X]$  hat als  $K$ -Basis  $(x^n)_{x \in X, n \in \mathbb{N}}$ , wie man wegen algebraischer Unabhängigkeit sieht. Diese Basis bleibt aber linear unabhängig über  $\overline{K}$ , denn sonst wäre ein Polynom in  $\overline{K}[X_1, X_2, \dots]$  gefunden,

was ein  $x \in X$  algebraisiert, also  $x \in \text{acl}(X \setminus \{x\} \cup \overline{K}) = \text{acl}(X \setminus \{x\} \cup K)$ , also wäre  $X$  nicht mehr algebraisch unabhängig über  $K$ . Lemma 1.1.2  $K(X) = \text{Frac}(K[X]) \text{ld}_K \overline{K}$ .

Also haben wir  $K(X) \text{ad}_K KL$  und  $K(X) \supseteq K$  regulär, woraus nach Lemma 1.1.6  $K(X) \text{ld}_K KL$  folgt.

6. Mit 3. folgt  $K \text{ad}_C L$ , mit 4.  $\overline{K} \text{ad}_C \overline{L}$ , mit Lemma 1.1.5  $K \text{ad}_C \overline{L}$ , mit Lemma 1.1.6  $K \text{ld}_C \overline{L}$  (benutze  $C \subseteq K$  regulär) und mit noch einmal Lemma 1.1.5 gilt schließlich für die Einbettungskette  $C \subseteq L \subseteq \overline{L}$  die Regularitätsbedingung  $LK \text{ld}_L \overline{L}$ .  $\square$

## 1.2 Paare algebraisch abgeschlossener Körper

Wir wollen Paare  $(K, E_K)$  von Körpern betrachten, wobei  $E_K \subseteq K$ . In der richtigen Sprache haben lassen diese sich axiomatisieren, dort haben echte Paare (d.h.  $K \neq E_K$ ) algebraisch abgeschlossener Körper sogar Quantorenelimination und sind in einer kleineren Sprache modellvollständig. Diese Sprachen und einige der Folgerungen für ihre Strukturen wollen wir hier (angelehnt an [Del12]) einführen:

**Definition 1.2.1.** Wir definieren die Sprachen  $\mathcal{L}^{ld} := \{0, 1, +, -, \cdot, (l_n)_{n \geq 2}\}$ ,  $\mathcal{L}^f := \mathcal{L}^{ld} \cup \{f_{i,n} \mid n \geq 2, 1 \leq i \leq n\}$  und  $\mathcal{L}^{f,c} := \mathcal{L}^f \cup \{-1\}$ , wobei die  $(l_n)$   $n$ -stellige Relationen sein sollen und die  $f_{i,n}$   $n+1$ -stellige partielle Funktionen.

**Lemma 1.2.2.** Beliebige Paare  $(K, E_K)$  von Körpern werden kanonisch zu  $\mathcal{L}^{ld}$ -Strukturen, indem man folgendes setzt:

$$\models l_n(x_1, \dots, x_n) :\Leftrightarrow x_1, \dots, x_n \text{ sind linear unabhängig über } E_K$$

Dann kann man die Substruktur  $E_K$  auch definieren, da  $x \in E_K \Leftrightarrow \models \neg l_2(1, x) =: E(x)$  und noch viel weitergehender auch

$$y \in \langle \overline{x} \rangle_{E_K} \text{ für } x_1, \dots, x_n \text{ linear unabhängig über } E_K \Leftrightarrow \models l_n(\overline{x}) \wedge \neg l_{n+1}(\overline{x}, y) =: \phi(\overline{x}, y).$$

Mit diesem Wissen setzt man jetzt in  $\mathcal{L}^f, \mathcal{L}^{f,c}$

$$\models (z = f_{n,i}(y, \overline{x})) :\Leftrightarrow \models \phi(\overline{x}, y) \text{ und } z \text{ ist die } i\text{-te Koordinate von } y \text{ in der Basisdarstellung,}$$

wobei letzteres durch

$$\exists z_1, \dots, z_n (z = z_i \wedge y = x_1 z_1 + \dots + x_n z_n \wedge z_1, \dots, z_n \in E_K)$$

oder aber auch

$$\forall z_1, \dots, z_n (y = x_1 z_1 + \dots + x_n z_n \wedge z_1, \dots, z_n \in E_K \rightarrow z_i = z)$$

definierbar ist.

**Lemma 1.2.3.** Mit dem Ganzen sind echte algebraisch abgeschlossene Paare von Körpern definierbar in allen drei Sprachen  $\mathcal{L}^{ld}$ ,  $\mathcal{L}^f$ ,  $\mathcal{L}^{f,c}$ , nenne die Theorien  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}$ ,  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^f}$ ,  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$ . Das einzig nicht offensichtliche hierbei ist, dass man in der Theorie sagen muss, dass  $\neg l_2(1, x)$  einen Körper definiert.

An sich wird alles sowieso interdefinierbar zwischen Sprachen sein, aber manchmal ist es klüger, eine spezielle Sprache zu betrachten. Das Ziel ist jetzt, zu beweisen, dass  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^f}$ ,  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$  Quantorenelimination haben und  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}$  immerhin modellvollständig ist.

Dazu müssen wir erst einmal verstehen, wie  $\mathcal{L}^{f,c}$ -Unterstrukturen von  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$ -Modellen aussehen.

**Lemma 1.2.4.** Betrachte einen Paar von Körpern  $(K, E_K)$  und eine Teilmenge  $A \subseteq K$  sowie eine  $\mathcal{L}^{f,c}$ -Struktur  $\mathcal{A} := (A, 0, 1, +, -, \cdot, {}^{-1}, (l_n)_{n \geq 2}, (f_{i,n})_{n \geq 2, 1 \leq i \leq n})$ . Dann ist  $\mathcal{A} \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$  genau dann, wenn  $A$  ein Unterkörper von  $K$  ist,  $\mathcal{A} = (A, E_A)$  für  $E_A := A \cap E_K$ , und  $\text{Ald}_{E_A} E_K$ .

*Beweis.*  $A$  ist genau dann Unterkörper von  $K$ , wenn es  $0, 1$  enthält, unter  $+, -, \cdot, {}^{-1}$  abgeschlossen ist und die entsprechenden Abbildungsvorschriften erbt.

Außerdem ist  $\text{Ald}_{E_A} E_K$  genau dann, wenn für alle  $\bar{a} \in A$  aus  $\bar{a}$  linear abhängig über  $E_K$  schon äquivalent zu linearer Abhängigkeit über  $E_A$  ist; per kanonischer Definition also genau dann wenn  $(A, E_A) \models l_{|\bar{a}|}(\bar{a}) \Leftrightarrow (K, E_K) \models l_{|\bar{a}|}(\bar{a})$ .

Wenn  $\mathcal{A}$  Unterstruktur ist, dann gilt für alle  $\bar{a} \in A$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models l_{|\bar{a}|}(\bar{a}) &\Leftrightarrow (K, E_K) \models l_{|\bar{a}|}(\bar{a}) \\ &\Leftrightarrow \bar{a} \text{ linear unabhängig über } E_K \Leftrightarrow \bar{a} \text{ linear unabhängig über } E_A, \end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz davon herrührt, dass die lineare Abhängigkeit bezeugende Linearkombination sich z.B. durch Projektionen und Nullen als Koeffizienten schreiben lässt und Projektionen von Elementen aus  $A$  wegen Unterstruktureigenschaft wieder in  $A$  sind. Also stimmen die Interpretationen der  $l_n$  in  $\mathcal{A}$  mit denen in  $(A, E_A)$  überein und es ist  $\text{Ald}_{E_A} E_K$ . Da die definierende Formel der  $(f_{i,n})$  bis auf die Angabe des Bildbereiches eine Ringformel ist, und da  $f_{i,n}(\bar{a}) \in E_K \cap A$ , stimmen auch die Interpretationen der  $f_{i,n}$  in  $\mathcal{A}$  und in  $(A, E_A)$  überein. Damit ist  $\mathcal{A} = (A, E_A)$ .



Die Rückrichtung folgt mit den ersten Zeilen dieses Beweises und, da die definierende Eigenschaft der  $f_{n,i}$  „fast nur“ als Ringformel gegeben ist (s.o.).  $\square$

**Lemma 1.2.5.** Wenn  $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$  und  $X \subseteq K$  algebraisch unabhängig über  $AE_K$  ist, dann ist  $(A(X), E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ .

*Beweis.* Nach vorigem Lemma ist  $A \text{ld}_{E_A} E_K$ , daher gilt mit Lemma 1.1.7 (5.)  $A(X) \text{ld}_{E_A} E_K$  und da  $A(X)$  Unterkörper von  $K$  ist, gilt mit der Rückrichtung des letzten Lemmas  $(A(X), E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ .  $\square$

**Lemma 1.2.6.** Sei  $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$  und  $E_A \subseteq B \subseteq E_K$  ein Zwischenkörper. Dann ist  $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (AB, B) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ .

*Beweis.* Es ist nur  $A \text{ld}_{E_A} B, AB \text{ld}_B E_K$  zu zeigen. Wegen  $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$  gilt  $A \text{ld}_{E_A} E_K$  und mit Lemma 1.1.5 gilt schon beides.  $\square$

**Lemma 1.2.7.** Im Falle dass das vorige Lemma auf  $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$ ,  $(\tilde{A}, E_{\tilde{A}}) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (\tilde{K}, E_{\tilde{K}})$ ,  $E_A \subseteq B \subseteq E_K$  und  $E_{\tilde{A}} \subseteq \tilde{B} \subseteq E_{\tilde{K}}$  angewendet wird und dass gilt  $A \cong \tilde{A}, B \cong \tilde{B}, E_A \cong E_{\tilde{A}}$  (wobei die ersten Isomorphismen den dritten fortsetzen), sind  $(AB, B)$  und  $(\tilde{A}\tilde{B}, \tilde{B})$  schon isomorph als  $\mathcal{L}^{f,c}$ -Strukturen.

*Beweis.* Mit Lemma 1.1.3 erhält man wegen  $A \text{ld}_{E_A} B, \tilde{A} \text{ld}_{E_{\tilde{A}}} \tilde{B}$  den Isomorphismus

$$A[B] \cong A \otimes_{E_A} B \cong \tilde{A} \otimes_{E_{\tilde{A}}} \tilde{B} \cong \tilde{A}[\tilde{B}],$$

der sich zu einem Isomorphismus der Quotientenkörper  $AB$  und  $\tilde{A}\tilde{B}$  fortsetzt und  $A$  auf  $\tilde{A}$ ,  $B$  auf  $\tilde{B}$  und  $E_A$  auf  $E_{\tilde{A}}$  abbildet. Als Körperisomorphismus erhält er auch lineare Disjunktheit, weswegen er auch ein  $\mathcal{L}^{f,c}$ -Isomorphismus ist.  $\square$

**Lemma 1.2.8.** Wenn  $(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$  und  $(K, E_K)$  Paar algebraisch abgeschlossener Körper ist, ist  $E_A \subseteq A$  regulär.

*Beweis.* Die Aussage folgt aus  $A \text{ld}_{E_A} E_K$  und der Körperinklusion  $E_A \subseteq \overline{E_A} \subseteq E_K$  mit dem Lemma 1.1.5.  $\square$

**Lemma 1.2.9.** Unter denselben Bedingungen wie im vorigen Lemma ist  $(\overline{A}, \overline{E_A})$  Zwischenstruktur.

*Beweis.* Laut Lemma 1.2.6 ist  $(\overline{AE_A}, \overline{E_A})$  Zwischenstruktur und damit insbesondere

$$A \text{ld}_{E_A} \overline{E_A}, \overline{AE_A} \text{ld}_{\overline{E_A}} E_K.$$

Klarerweise ist

$$(A, E_A) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (\overline{AE_A}, \overline{E_A}) = (\overline{A}, \overline{E_A}),$$

weil  $\overline{AE_A}$  in der Bedingung  $A \text{ld}_{E_A} \overline{E_A}$  gar nicht vorkommt und die Erweiterung also nichts ändert.

Lemma 1.1.7 (6.) ergibt wegen  $\overline{E_A} \subseteq E_K$  regulär

$$\overline{A} = \overline{AE_A} \text{ld}_{\overline{E_A}} E_K,$$

was  $(\overline{A}, \overline{E_A}) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$  beweist.  $\square$

**Satz 1.2.10.**  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$  hat Quantorenelimination und ist vollständig, wenn man noch eine Charakteristik vorgibt.

*Beweis.* Gegeben sei eine beliebige unendliche Kardinalität  $\kappa$ . Zeige die Aussage mit dem Back&Forth-System der Isomorphismen zwischen maximal  $\kappa$  großen Unterstrukturen von  $\kappa^+$ -saturierten Modellen  $(K, E_K), (L, E_L)$ : Dieses ist nichtleer, denn wenn  $\mathbb{P}$  der Primkörper der Charakteristik ist, ist  $(\mathbb{P}, \mathbb{P})$  Unterstruktur von allen Modellen (wegen Gleichheit des Paares ist lineare Disjunktheit klar), bilde das als Unterstruktur von  $K$  auf sich selbst als Unterstruktur von  $L$  ab. Sei  $(M, E_M) \rightarrow (N, E_N)$  im B&F-System.  $K \supset E_K, L \supset E_L$  haben Transzendenzgrad  $\infty$ .

Das kann man zum Beispiel erreichen, indem die Erweiterung offenkundig transzendent ist, und man dann jeweils den partiellen Typ über  $\emptyset$  betrachtet, der die algebraische Unabhängigkeit von  $n$  Elementen über  $E_K$  bzw.  $E_L$  beschreibt, dieser hat folgende Gestalt:

$$\{\forall \bar{e} \in E \setminus \{0\} (f(\bar{e}, \bar{x}) \neq 0) \mid 0 \neq f \in \mathbb{P}(T_1, T_2, \dots, \bar{x})\}$$

Er ist endlich erfüllbar, da für  $m$  größer als der größte Polynomgrad im endlichen Teilfragment und  $x$  transzendent über  $E_K$  bzw.  $E_L$  die Elemente  $x, x^m, x^{m^2}, \dots$  algebraisch unabhängig über Polynome von Grad kleiner  $m$  sind.

(E ist  $(M, E_M)(N, E_N)$  jeweils algebraisch abgeschlossen. Denn Lemma 1.2.6 erzeugt einen Isomorphismus zwischen den Zwischenstrukturen

$$(ME_M^{\text{alg } K}, E_M^{\text{alg } K}) \text{ und } (NE_N^{\text{alg } L}, E_N^{\text{alg } L}),$$

der sich auf einen Isomorphismus

$$(M^{\text{alg } K}, E_M^{\text{alg } K}) \cong (N^{\text{alg } L}, E_N^{\text{alg } L})$$

fortsetzt.

Sei jetzt  $a \in K$ . Wenn  $a \in M$  liegt, dann kann man die Abbildung auf triviale Weise auf  $a$  fortsetzen.

Wenn ansonsten  $a$  algebraisch über  $E_K M$  ist, ist  $a \in \text{acl}(E_K M)$ , also existiert  $X \subset E_K$  endlich mit  $a \in \text{acl}(MX)$ . OBdA sei  $X$  jetzt schon ein Oberkörper von  $E_M$ , wichtig ist nur der endliche Transzendenzgrad über  $E_M$ . Für einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Zwischenkörper  $E_N \subseteq Y \subseteq E_L$  von gleichem Transzendenzgrad (den gibt es, da die Saturation Transzendenzgrad  $\infty$  von  $E_N \subset E_L$  ergibt) kann  $E_M \cong E_N$  fortgesetzt werden zu einem Isomorphismus  $X \cong Y$ . Diesen kann man wie in Lemma 1.2.7 fortsetzen zu einem  $\mathcal{L}^{f,c}$ -Isomorphismus zwischen den Zwischenstrukturen  $(\overline{MX}, X), (\overline{NY}, Y)$ , wobei die erste  $a$  enthält.

Wenn  $a$  transzendent über  $E_K M$  ist, gibt es ein  $b \in L$  transzendent über  $E_L M$ , denn der entsprechende Typ ist konsistent, wenn  $|L| > |E_L|$ . So etwas lässt sich aber in einer elementaren Oberstruktur erreichen (für die endliche Konsistenz ist die genaue Kardinalität des Transzendenzgrads von  $E_L \subset L$  egal) und wenn der Typ dort konsistent ist, dann auch unten.

$a$  und  $b$  erzeugen dann einen Isomorphismus  $C := \overline{M(a)} \stackrel{\phi}{\cong} \overline{N(b)}$ . Setze

$$E := \overline{M(a)} \cap E_K \cap \phi^{-1}(E_L \cap \overline{N(b)}),$$

dann gilt  $(C, E) \cong_{\mathcal{L}^{f,c}} (\phi(C), \phi(E))$  und  $b \in \phi(C)$ .

Zu zeigen ist nun nur noch

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (C, E) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K), (N, E_N) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (\phi(C), \phi(E)) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K) :$$

Aus  $(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K)$  folgt mit Lemma 1.2.5

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (M(a), E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K),$$

daraus mit Lemma 1.2.6 und  $E_M \subseteq E \subseteq E_K$

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (M(a)E, E) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K),$$

daraus folgt mit Lemma 1.2.9 und  $E \subseteq \overline{M(a)} = C$  schließlich

$$(M, E_M) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (C, E) \subseteq_{\mathcal{L}^{f,c}} (K, E_K).$$

□

**Lemma 1.2.11.** Es gilt:

$$\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall x_1, \dots, x_n \forall y_1, \dots, y_n \neq 0 (l_n(x_1 y_1^{-1}, \dots, x_n y_n^{-1})$$

$$\leftrightarrow l_n(x_1 \prod_{i=1 \dots n, i \neq 1} y_i, \dots, x_n \prod_{i=1 \dots n, i \neq n} y_i)$$

$$\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall x_1, \dots, x_n \forall e_1, \dots, e_n \in E (l_n(e_1 x_1, \dots, e_n x_n) \leftrightarrow l_n(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall x_1, \dots, x_n, y \forall e_1, \dots, e_n, e \in E (f_{n,i}(e y, e_1 x_1, \dots, e_n x_n) = f_{n,i} \frac{e}{e_i} f_{n,i}(y, x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall a, b, x_2, \dots, x_n (\neg t_n(a + b, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow \neg t_{n-1}(x_2, \dots, x_n) \vee$$

$$t_{n-1}(x_2, \dots, x_n) \wedge ((l_n(b, x_2, \dots, x_n) \wedge \neg l_{n+1}(a, b, x_2, \dots, x_n)) \vee$$

$$(\neg l_n(b, x_2, \dots, x_n) \wedge l_n(a, x_2, \dots, x_n)))$$

$$\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall a, b, x_1, \dots, x_n (f_{i,n}(a + b, x_1, \dots, x_n) = f_{i,n}(a, x_1, \dots, x_n) + f_{i,n}(b, x_1, \dots, x_n))$$

für alle  $i = 1, \dots, n$

$$\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall a, b, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, z (f_{i,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a + b, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_{i,n+1}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a, b, x_{i+1}, \dots, x_n) & a, b, \bar{x} \text{ unabhängig} \\ f_{i,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) & \text{wenn nicht und } b \in \langle \bar{x} \rangle_E \\ f_{i,n-1}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) & \text{wenn nicht und } z \in \langle \bar{x} \rangle_E \\ \frac{f_{i,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \dots, x_n)}{1 + f_{i,n}(a, x_1, \dots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \dots, x_n)} & \text{wenn nicht} \end{array} \right)$$

für alle  $i = 1, \dots, n$

$$\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}} \models \forall a, b, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, z (f_{j,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a + b, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{j+1_{j>i}, n+1}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a, b, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ a, b, \bar{x} \text{ unabhängig} \\ f_{j,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ -f_{i,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) f_{j-1_{j>i}, n-1}(b, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ \text{wenn nicht und } b \in \langle \bar{x} \rangle_E \\ f_{j,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ -f_{i,n}(z, x_1, \dots, x_{i-1}, a + b, x_{i+1}, \dots, x_n) f_{j,n}(a, x_1, \dots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ \text{wenn nicht} \end{array} \right)$$

für alle  $i = 1, \dots, n$  für alle  $j \neq i$

*Beweis.* Die Rechnung will keiner sehen :)

□

**Folgerung 1.2.12.** Man kann jede Formel mit Parametern aus  $X$  modulo  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$  schreiben als

1. quantorenfreie Formel in  $\mathcal{L}_X^f$  oder
2. boolesche Kombination aus „ $l_n$ (Monome mit Koeffizienten in  $X$ )“ und „(Polynom in  $\mathbb{P}[X])(f_{i_1,n_1}(\text{Monome in } X), \dots, f_{i_m,n_m}(\text{Monome in } X)) = 0$ “,

wobei  $\mathbb{P}$  den Primkörper der entsprechenden Charakteristik bezeichne.

**Folgerung 1.2.13.** In jedem Modell  $(K, E_K)$  ist jede definierbare Menge  $X \subset E_K^n$  schon beschreibbar als  $X = E_K^n \cap Z$ , wobei  $Z$  definierbar in der Ringsprache ist. Dementsprechend ist  $E(x)$  eine streng minimale Formel und für  $e_1, \dots, e_n \in E_K$  ist  $\text{RM}(\bar{e}) = \dim_{\text{ACL}}(\bar{e})$ .

**Folgerung 1.2.14.**  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^f}$  hat ebenfalls Quantorenelimination. Da in Lemma 1.2.2 gezeigt wurde, dass die  $f_{i,n}$  sowohl existenziell als auch universell definierbar sind, ist jede Formel modulo  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}$  immerhin universell und  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^{ld}}$  ist modellvollständig.

**Definition 1.2.15.** Wenn es keine Rolle spielt, in welcher Sprache man gerade ist, schreibe einfach **ACP** für die drei Theorien.

**Folgerung 1.2.16.** Man kann sich leicht überlegen, dass  $\text{ACP} \cup \{„\text{Charakteristik} = p“\}$  das Primmodell  $(\overline{\mathbb{P}(e)}, \overline{\mathbb{P}})$  hat für  $\mathbb{P}$  als Primkörper und ein beliebiges  $e$  transzendent über  $\mathbb{P}$ .

**Satz 1.2.17.** ACP ist  $\omega$ -stabil.

*Beweis.* Betrachte die Menge der Typen in einem Modell  $(K, E_K)$  über einer vorgegebenen Menge  $S \subset K$  und wähle als Sprache  $\mathcal{L}^{f,c}$ .  $\mathfrak{C}$  ist das Modell schon  $|S|^+$ -saturiert und  $S$  Träger einer Unterstruktur. Aus dem B&F-System in Satz 1.2.10 geht hervor, dass es die folgenden Typen über  $S$  gibt:

- Den Typ eines Elementes in  $S$
- Die Typen eines Elementes  $a$  in  $\overline{SE_K} \setminus S$  (bestimmt durch den endlichen Transzendenzgrad über  $S$  des minimalen Unterkörpers  $E_S \subseteq X \subseteq E_K$ , sodass  $a \in \overline{SX}$ , sowie durch den Isomorphietyp des Minimalpolynoms von  $a$  über  $SX$ )
- Den Typ eines Elementes in  $K \setminus \overline{SE_K}$

Der erste Typ hat klarerweise Morleyrang 0. Sei  $a$  ein Realisator eines Typen der zweiten Art. Dann ist  $a$  algebraisch über  $S\bar{e}$  für gewisse  $e_1, \dots, e_n \in E_K$ , also

$$\text{RM}(a) \leq \text{RM}(\bar{e}) = \dim_{\text{ACL}}(\bar{e}) < \omega.$$

Der dritte Typ kann keinen Morleyrang  $> \omega$  haben, denn dann müsste es einen Typen mit Morleyrang  $\omega$  geben, die anderen Arten von Typen haben aber endlichen Rang. Sei  $(a_n)$  eine Folge von Elementen, sodass  $n < \text{RM}(a_n) < \omega$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (TODO: sowas gibt es). Dann ist im Stoneraum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tp}(a_n) = p$  für den Typen  $p$  der dritten Art: Denn  $a_n$  kann jeweils nicht mehr algebraisch über  $SX$  sein für alle  $E_S \subset X$  von Transzendenzgrad  $\leq n$ . Also sind für jede Umgebung, die das Nichterfüllen einer bestimmten Art von Polynom über  $SE_K$  beschreibt, fast alle  $a_n$  enthalten. Aber diese Umgebungen bestimmen den Typen  $p$  eindeutig, also sind für jedes  $\phi \in p$  fast alle  $\text{tp}(a_n)$  in  $\mathcal{U}_\phi$ .

Jedes  $\phi \in S_1(S)$  mit  $\text{RM}(\phi) < \omega$  ist dann nur in endlich vielen  $\text{tp}(a_n)$  enthalten (nämlich maximal  $\text{RM}(\phi)$  vielen), also ist  $\text{RM}(p) \geq \omega$ , damit herrscht Gleichheit.

Da alle Typen Morleyrang  $< \infty$  haben, haben alle Formeln in einer freien Variable Morleyrang  $< \infty$  und die Theorie ist  $\omega$ -stabil.  $\square$

## 2 Dichte Paare o-minimaler Strukturen

### 2.1 Allgemeine Betrachtungen und Anforderungen an die Theorien

Viele Techniken und Gedanken aus dem vorigen Kapitel werden jetzt auf o-minimale Theorien übertragen: Im Folgenden halten wir eine vollständige o-minimale Theorie  $T$  mit dichter Ordnung in der Sprache  $\mathcal{L}$  fest und betrachten die Theorie  $T^2$  in der Sprache  $\mathcal{L}_P := \mathcal{L} \cup \{P(x)\}$ , sodass die Modelle von  $T^2$  Modelle von  $T$  sind und in jedem Modell  $\mathcal{M}$  die Menge  $P(M)$  ebenfalls Modell von  $T$  ist. Schreibe so ein Paar dann als  $(B, A)$  mit  $A = P(B)$ .

Wir setzen voraus, dass  $T$  RCF erweitert, insbesondere gilt Definable Choice. Dann sind die Skolemfunktionen definierbar und  $\mathcal{C}\mathcal{E}$  ist  $\mathcal{L}$  schon so eine definitorische Erweiterung, dass  $T$  Quantorenelimination hat und universell axiomatisierbar ist (wobei bei einzelnen Theorien die Frage interessant wäre, welche Skolemfunktionen man dafür überhaupt hinzufügen muss). TODO: braucht man das? Außerdem seien alle Modelle genug saturiert, dass die üblichen Rechenregeln für die Dimension gelten.

Aus  $T$  universell mit Quantorenelimination folgt, dass Unterstrukturen von Modellen von  $T$  schon elementare Unterstrukturen sind. Also ist für jede Teilmenge  $S$  eines Modells  $\text{dcl}(S)$  schon eine elementare Substruktur; zur Vereinfachung bezeichne in Zukunft  $AB := \text{dcl}(A \cup B)$  für zwei Teilmengen  $A, B$  eines Modells.

$P$  beschreibt also eine elementare Unterstruktur, mit  $T^d$  wird nun die Theorie beschrieben, die ausdrückt, dass  $P$  eine dichte echte Unterstruktur ist (diese zwei Sachen oder deren Gegenteil müssen auf jeden Fall von der Theorie beschrieben werden, wenn sie vollständig sein soll). Klar ist dann, dass Unterstrukturen von  $T^d$  automatisch Modelle von  $T^2$  sind.

Der Arbeit [vdD98] folgend, wird die Vollständigkeit und eine Art von Quantorenelimination für  $T^d$  gezeigt, die mittels eines Back&Forth-Systems bewiesen wird, bevor genauer auf einige Eigenschaften von definierbaren Mengen und Abbildungen in  $T^d$  eingegangen wird. Zunächst ist aber eine genauere Betrachtung von sogenannten kleinen Mengen vonnöten.

### 2.2 Kleine Mengen

**Definition 2.2.1.** Sei  $(B, A) \models T^d$ , dann ist eine  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Menge  $S \subseteq B$  **klein**, wenn eine  $\mathcal{L}$ -definierbare Funktion  $f : B^n \rightarrow B$  existiert mit  $S \subseteq f(A^n)$ .

In dem folgenden Lemma meint  $+, \cdot$  nicht die Operationen aus  $\mathcal{L}$ , sondern neue, beliebige Operationen.

**Lemma 2.2.2.** Seien  $A \prec B \models T$ ,  $f : B^{n+1} \rightarrow B$   $A$ -definierbar,  $b \in B \setminus A$ ,  $\beta, \gamma \in A \cup \{\pm\infty\}$  mit  $\beta < b < \gamma$  und einer angeordneten  $A$ -definierbaren Körperstruktur  $(\cdot, +)$  auf  $(\beta, \gamma) =: I$ . Dann existieren  $a_0, \dots, a_n \in I_A$  mit

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots, a_0 \in I \setminus f(A^n \times \{b\}).$$

*Beweis.* Wenn die Aussage nicht gilt, dann gilt mit  $p(x, y) := x_n y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \dots, x_0$ , dass für jedes  $a \in (I_A)^{n+1}$  ein  $\alpha \in A^n$  existiert mit  $p(a, b) = f(\alpha, b)$ . Es muss für festes  $a \in I_A$  ein Intervall um  $b$  in  $I_A$  mit dieser Eigenschaft geben, denn sonst wäre  $b \in \text{del}(A) = A$ .

Sei jetzt  $a$  nicht mehr fixiert, dann existiert mit Definable Choice in  $I_A$  eine definierbare Zuordnung  $a \mapsto \alpha(a)$ , sodass  $p(a, \cdot) = f(\alpha(a), \cdot)$  auf einem Intervall gilt. Da jedes  $a$   $n+1$  viele Einträge hat und jedes  $\alpha(a)$   $n$  viele, müssen unendlich viele  $a \in (I_A)^{n+1}$  existieren, die durch  $\alpha$  auf das selbe Element abgebildet werden. Denn wenn das nicht so wäre, wäre ein generisches Element aus  $(I_A)^{n+1}$  algebraisch über einem Element aus  $A^n$ , was der Generizität widerspricht. Da es unendlich viele Elemente gibt, sodass  $\alpha$  auf ihnen konstant ist, gibt es schon eine Zelle von Dimension  $> 0$  mit der Eigenschaft und damit insbesondere eine Zelle  $E$  von Dimension 1 (Als Teilmenge einer Zelle lässt sich immer eine von kleinerer Dimension finden). Nenne den konstanten Wert dann  $\alpha^*$ . Da also gilt: Für alle  $a \in E$  existiert ein Intervall  $J$  mit  $p(a, \cdot) = f(\alpha^*, \cdot)$  auf  $J$ ; existieren mit Definable Choice  $\beta^*, \gamma^* : E \rightarrow I_A$ , sodass  $p(a, \cdot) = f(\alpha^*, \cdot)$  auf  $(\beta^*(a), \gamma^*(a))$  gilt. (Seien  $\beta^*$  und  $\gamma^*$  jetzt schon stetig auf  $E$  und ein  $e \in E$  beliebig. Dann existiert für  $\varepsilon$  hinreichend klein eine  $E$ -Umgebung  $U$  um  $e$ , sodass

$$\beta^* < \frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) - \varepsilon, \quad \frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) + \varepsilon < \gamma^*$$

auf  $U$ , also

$$p(a, x) = f(\alpha^*, x) \text{ für alle } a \in U, x \in (\frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) - \varepsilon, \frac{1}{2}(\beta^*(e) + \gamma^*(e)) + \varepsilon)$$

gilt. Es kann aber nicht  $p(a - a', x) = p(a, x) - p(a', x) = f(\alpha^*, x) - f(\alpha^*, x) = 0$  für  $a, a' \in U$  verschieden und unendlich viele  $x$  sein, weil ein Nichtnullpolynom nicht unendlich viele Nullstellen haben kann.  $\square$



**Folgerung 2.2.3.** Es sei  $(A, B) \models T^d$ ,  $f : B^{n+1} \rightarrow B$   $A$ -definierbar in  $B$  und  $b \in B \setminus A$ . Dann enthält  $f(A^n \times \{b\})$  kein Intervall um  $b$ .

*Beweis.* Nimm an, dass das Gegenteil gelte für das Intervall  $J$  ( $\mathbb{E}$  mit Randpunkten  $c < d \in A$ ): Dann ist  $x \mapsto \frac{1}{c-x} + \frac{1}{d-x}$  eine ordnungstreu  $A$ -definierbare Bijektion  $(c, d) \rightarrow A$ . Diese erzeugt in  $A$  eine definierbare angeordnete Körperstruktur auf  $(c, d) = J_A$ , also auch auf  $J$  eine  $A$ -definierbare angeordnete Körperstruktur. Mit dem vorigen Lemma existiert ein Element aus  $J \setminus f(A^n \times \{b\})$ .  $\square$

**Satz 2.2.4.** Wenn  $(B, A) \models T^d$ , dann ist kein Intervall eine kleine Teilmenge.

*Beweis.* Sei  $f : B^n \rightarrow B$  eine durch  $\varphi(x, y, b)$  definierbare Abbildung mit  $\varphi$  eine  $\mathcal{L}_A$ -Formel und  $b \in B^m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  definiert. Für  $\dim(b/A) = 0$  ist  $f(A^n) \subseteq A$  klar, deswegen sei  $\mathbb{E} \dim(b/A) \geq 1$ . Definiere

$$g(x, z) := \begin{cases} \text{das eindeutige } y \in B & \text{für alle } z, \text{ für die } \varphi(x, y, z) \\ \text{mit } B \models \varphi(x, y, z) & \text{bei festem } \text{ eine Funktion definiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

Dann ist  $g$  in  $B$   $A$ -definierbar und  $g(\cdot, b) = f$ . Falls  $\dim(b/A) > 1$ , füge genug Komponenten von  $b$  zu  $A$  hinzu, sodass  $\dim(b/A) = 1$ . Das Hinzufügen einer Komponente  $b_j$  ändert nichts, denn  $Ab_j$  ist nach den Eingangsbemerkungen Modell von  $T$  und  $Ab_j$  ist erst recht dicht in, aber nicht gleich  $B$  (sonst hätte man die Dimension mit diesem Schritt schon zu sehr verkleinert).

Finde also  $b_i$ , sodass  $A$ -definierbare  $(h_j)$  existieren mit  $b_j = h_j(b_i)$  für alle  $j$ . Wenn jetzt  $J \subseteq f(A^n) = g(A^n, b) = g(A^n, h(b_i))$  für ein Intervall  $J$ , dann widerspricht das der Aussage des letzten Lemmas für die Funktion  $(x, y) \mapsto g(x, h(y))$ .  $\square$

**Definition 2.2.5.** Schreibe ab jetzt  $P(\bar{x}) := \bigwedge_{i=1}^{|\bar{x}|} P(x_i)$ .

**Lemma 2.2.6.** Wenn  $(B, A)$  für ein unendliches  $\kappa > |T|$  ein  $\kappa$ -saturiertes Modell von  $T^d$  ist, ist  $\dim(B/A) \geq \kappa$ .

*Beweis.* Sei  $S$  eine Basis von  $B/A$  mit  $|S| < \kappa$ ; zeige nun, dass es kein Erzeugendensystem sein kann. Das folgt aus der Saturation angewandt auf den partiellen Typen

$$\{\forall \bar{y} \in P(x \neq t(\bar{y})) \mid t \text{ } \mathcal{L}_S\text{-Term}\},$$

der endlich erfüllbar ist, weil die Negation jeder dieser Formeln „ $x$  ist in einer kleinen Menge“ impliziert. Wenn der Typ also nicht endlich erfüllbar wäre, würde eine endliche Vereinigung von kleinen Mengen ganz  $B$  überdecken. Das kann aber nicht gelten, denn eine endliche Vereinigung von kleinen Mengen ist wieder klein (in der das bezeugenden Abbildung kann man das durch Erhöhen der Dimension des Definitionsbereiches und Fallunterscheidung über eine Koordinate beweisen). TODO: ausführen!  $\square$

**Folgerung 2.2.7.** Da Intervalle nicht klein sind, zeigt der Beweis sogar, dass in einem  $\kappa$ -saturiertem Modell  $(B, A) \models T^d$ , gegeben Menge,  $S, S', S'' \subset B$  mit  $|S|, |S'|, |S''| < \kappa$ , ein transzendentes Element  $b$  über  $SA$  gefunden werden kann mit  $a < b$  für alle  $a \in S'$  und  $b < c$  für alle  $c \in S''$ , sofern dieser Ordnungstyp von  $b$  überhaupt konsistent ist.

## 2.3 Formelreduzierung in $T^d$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich  $\mathcal{L}_P$ -Formeln modulo  $T^d$  sehr stark vereinfachen lassen. Indem dieses mit einem Back&Forth-System gezeigt wird, erhält man zusätzlich eine sehr große Klasse von elementaren Abbildungen zwischen Modellen von  $T^d$ .

In diesem Kontext wird wieder die acl-Unabhängigkeit in einem Modell von  $T$  relevant, die im ersten Kapitel mit „algebraisch disjunkt“ bezeichnet wurde. Man kann sich dafür folgende (teilweise schon bekannte) Fakten überlegen.

**Lemma 2.3.1.** Seien  $A, B, C, D$  Mengen in irgendeinem Modell von  $T$ .

1. Wenn  $A$  und  $B$  unabhängig über  $C$  sind, sind  $B$  und  $A$  unabhängig über  $C$  und  $A \cap B \subseteq \text{acl}(C)$  (in fast allen betrachteten Fällen wird sowieso  $A, B \supseteq C$  und  $C = \text{acl}(C)$  gelten).
2. Wenn  $A$  und  $B$  unabhängig über  $C$  sind und  $S \subseteq B$ , dann sind auch  $A \cup S$  und  $B$  unabhängig über  $C \cup S$ .
3. Wenn  $A$  und  $B$  unabhängig über  $C$  sind,  $A \subseteq S \subseteq \text{acl}(A)$ ,  $B \subseteq S' \subseteq \text{acl}(B)$ , dann sind  $S$  und  $S'$  unabhängig über  $C$ .
4. Wenn  $A$  und  $B$  unabhängig über  $C$  sind und  $D$  (algebraisch) unabhängig über  $AB$ , dann sind  $A \cup D$  und  $B$  unabhängig über  $C$ .
5. Wenn  $(D, C) \preceq (B, A) \models T^2$ , dann sind  $A$  und  $D$  unabhängig über  $C$ .
6. Wenn  $(D, C) \subseteq (B, A) \models T^2$ ,  $S \subseteq A$  und  $A$  und  $D$  unabhängig über  $C$  sind, dann sind  $A$  und  $DS$  unabhängig über  $CS$ ,  $\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}_P} = (DS, CS)$  und

$$(D, C) \subseteq (DS, CS) \subseteq (B, A).$$

7. Wenn  $(D, C) \subseteq (B, A) \models T^2$  und  $S \subseteq B$  unabhängig über  $DA$  ist, dann sind  $A$  und  $DS$  unabhängig über  $C$ ,  $\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}_P} = (DS, C)$  und

$$(D, C) \subseteq (DS, C) \subseteq (B, A).$$

*Beweis.* 1.-4. sind bekannt.

5. Wenn  $\bar{d} \in D$  algebraisch unabhängig über  $C$  ist, aber nicht über  $A$ , dann existiert eine  $\mathcal{L}_A$ -Formel  $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ , sodass  $\exists d_1$  von  $\varphi(x_1, d_2, d_3 \dots, \bar{a})$  algebraisiert wird ( $\exists$  wird  $d_1$  schon durch  $\varphi$  definiert). Also erfüllt  $\bar{d}$  die  $\mathcal{L}_P$ -Formel

$$\exists \bar{y} \in P(\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \forall z_2, z_3, \dots \exists! z_1(\varphi(\bar{z}, \bar{y})))$$

in  $(B, A)$ , also auch in  $(D, C)$ . Es existiert also  $\bar{c} \in C$  mit

$$B \models \varphi(\bar{d}, \bar{c}) \wedge \forall z_2, z_3, \dots \exists! z_1(\varphi(\bar{z}, \bar{c})),$$

was im Widerspruch zur Unabhängigkeit von  $\bar{d}$  über  $C$  steht.

6. Dass  $A$  und  $DS$  unabhängig über  $CS$  sind, ergibt sich in der Kombination von 2. und dann 3.

Dass die Trägermenge von  $\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}_P}$  die Menge  $DS$  ist, ergibt sich direkt per Definition als  $DS = \text{dcl}(D \cup S) = \langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}}$ . Weil  $A$  und  $DS$  unabhängig über  $CS$  sind, folgt

$$P(\langle D \cup S \rangle_{\mathcal{L}_P}) = DS \cap P(B) = DS \cap A = CS.$$

- 7 Es ergibt sich aus 4. und 3. dass  $A$  und  $DS$  unabhängig über  $CS$  sind. Der Rest geht analog zu 6. □

Zu bemerken ist, dass ein Spezialfall von Unabhängigkeit viele nützliche Eigenschaften hat. Auf diesen wird später noch oft zurückgegriffen werden.

**Definition 2.3.2.** Seien  $(D, C) \subseteq (B, A)$  zwei Modelle von  $T^2$ . Dann heiße diese Inklusion **frei**, wenn  $D$  und  $A$  unabhängig über  $C$  sind.

**Lemma 2.3.3.** Sei  $(B, A) \models T^d$ . Dann ist  $A$  auch kodicht in  $B$ .

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass für alle  $a, c \in B$  ein  $b \in B \setminus A$  existiert mit  $a < b < c$ . Durch Translation und additive Inversion kann man annehmen, dass  $a = 0$ . Wähle jetzt ein  $d \in B \setminus A$  beliebig und  $e \in A$  mit  $d - c < e < d$ . Dann ist  $d - e$  nicht in  $A$  (denn sonst wäre es  $d$ ) und  $0 = e - e < d - e < d - (d - c) = c$ . □

Für die Konstruktion des gewünschten Back&Forth-Systems sei  $\kappa > |T|$  eine beliebige, aber feste Kardinalzahl und  $(B, A), (D, C) \models T^d$  zwei  $\kappa$ -saturierte Modelle.

**Satz 2.3.4.** Sei  $S$  die Menge aller partiellen Isomorphismen zwischen Unterstrukturen  $(B', A')$  von  $(B, A)$  und  $(D', C')$  von  $(D, C)$  der Mächtigkeit  $< \kappa$ , sodass die Inklusionen frei sind. Dann bildet  $S$  ein nichtleeres B&F-System und  $T^d$  ist insbesondere vollständig.

*Beweis.* Das System ist nichtleer, denn es gibt ein Primmodell  $\mathcal{M}$  von  $T$ , weil  $T$  vollständig ist und in jedem Modell  $A$  alle Eigenschaften von  $\mathcal{M}_A := \langle \emptyset \rangle_{\mathcal{L}}$  in  $T$  beschrieben werden. Klarerweise ist  $|M| = |T| < \kappa$ . Der Isomorphismus  $(\mathcal{M}_A, \mathcal{M}_A) \cong (\mathcal{M}_C, \mathcal{M}_C)$  liegt in  $S$ , denn Unabhängigkeit ist bei zwei gleichen Mengen offensichtlich.

Sei jetzt  $S \ni i : (B', A') \rightarrow (D', C')$  und  $b \in B$ . Wenn  $b \in B'$  ist, ist nichts zu zeigen. Wenn  $b \in A \setminus B'$ , betrachte den partiellen Typ über  $D'$

$$\{\alpha < x \mid i^{-1}(\alpha) < b\} \cup \{x < \beta \mid b < i^{-1}(\beta)\} \cup \{P(x)\}.$$

Dieser ist konsistent, da  $i$  ein Isomorphismus ist und  $C$  dicht in  $D$ ; mit Saturation existiert ein  $d \in C \setminus D'$  mit diesem Ordnungstyp.  $i$  setzt sich dann eindeutig zu einem Isomorphismus  $i' : (B'b, A'b) \rightarrow (D'd, C'd)$  mit  $i(b) = d$  fort, der gegeben ist durch die Abbildung  $t(b) \mapsto i(t)(d)$  für  $t$  einen  $\mathcal{L}_{B'}$ -Term und  $i(t)$  den durch  $i$  geshifteten Term. Die Surjektivität dieser Abbildung ist klar, ebenso dass  $i'(A'b) = C'd$ . Wohldefiniertheit, Injektivität und Isomorphismuseigenschaft gelten, denn:

$Rt_1(b) \dots t_n(b)$  gilt für  $\mathcal{L}_{B'}$ -Terme  $t_1, \dots, t_n$  und eine Relation  $R$  genau dann, wenn es ein  $B'$ -definierbares Intervall  $I$  um  $b$  mit dieser Eigenschaft gibt (denn sonst wäre  $b$  definierbar über  $B'$  und somit in  $B'$ ). Schickt man  $I \cap B'$  mit  $i$  nach  $J := i(I \cap B')$ , so gilt für alle Elemente  $z \in J$ , dass  $Ri(t_1)(z) \dots i(t_n)(z)$ , da  $i$  ein Isomorphismus ist. Wäre jetzt nicht  $Ri(t_1)(d) \dots i(t_n)(d)$ , so gäbe es ein  $D'$ -definierbares Intervall  $I'$  um  $d$ , sodass das nicht gilt; insbesondere ist  $I'$  disjunkt zu  $J$ . Allerdings ist

$$d \in I' \cap \text{convex}(J) = I' \cap (i(\inf I), i(\sup I)),$$

also können  $I'$  und  $J$  nicht disjunkt sein. Es gilt also  $Ri(t_1)(d) \dots i(t_n)(d)$ .

Die Rückrichtung geht analog.

Zu zeigen ist nun, dass  $B'b$  und  $A$  frei über  $A'b$  sowie  $D'd$  und  $C$  frei über  $C'd$  sind, ebenso zu zeigen ist noch, dass  $(B'b, A'b) \subseteq (B, A), (D'd, C'd) \subseteq (D, C)$ . Das alles folgt aber aus Lemma 2.3.1 (6.). Außerdem gilt  $|D'd| = |B'b| = |B'| + |T| < \kappa$ .

Sei jetzt  $b \in B'A \setminus (A \cup B')$ . Dann gibt es  $\bar{a} \in A$  mit  $b \in B'\bar{a}$ . Erweitere wie schon bekannt  $i$ , sodass  $\bar{a} \in \text{dom}(i)$ ; dann ist schon ganz  $B'\bar{a} \subseteq \text{dom}(i)$ , also auch  $b$ .

Abschließend sei  $b \in B \setminus B'A$ ; wie oben erfülle dann den mit  $i$  geshifteten Ordnungstyp

von  $b$  über  $B'$  mit einem Element  $d \in D \setminus D'C$  (mit Folgerung 2.2.7 geht das). Wie oben kann  $i$  dann auf einen Isomorphismus  $(B'b, A') \rightarrow (D'd, C')$  fortgesetzt werden und nach Lemma 2.3.1 (7.) erfüllen  $(B'b, A'), (D'd, C')$  auch die hinreichenden Eigenschaften.  $\square$

Dieses B&F-System beweist die Formelreduzierung in  $T^d$ .

**Satz 2.3.5.** Jede  $\mathcal{L}_P$ -Formel ist modulo  $T^d$  äquivalent zu einer booleschen Kombination von Formeln der Gestalt

$$\exists \bar{y} \in P(\phi(\bar{x}, \bar{y}))$$

für  $\phi$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel. Nenne eine solche boolesche Kombination eine **gute Formel** und eine Formel der Gestalt wie beschrieben eine **gute Formel in Reinform**.

*Beweis. Hilfsaussage:*

Es reicht zu zeigen, dass für alle Modelle  $(B, A), (D, C) \models T^d$  und für alle  $b \in B^n, d \in D^n$  gilt: Wenn  $b$  und  $d$  dieselben guten Formeln erfüllen, sind ihre Typen in  $(B, A)$  und  $(D, C)$  dieselben.

Dass dies ausreicht, erkennt man mit dem Ziegler'schen Trennungslemma: Sei  $\psi \in \mathcal{F}_n(\mathcal{L}_P)$  nicht äquivalent zu einer guten Formel und nenne die Menge aller guten Formeln in  $n$  freien Koordinaten  $K$ . Dann ist  $K$  abgeschlossen unter  $\wedge, \vee$  und enthält  $\top, \perp$ . Wenn  $\psi$  nicht äquivalent zu einer Formel aus  $K$  ist, sind  $T^d \cup \{\psi\}$  und  $T^d \cup \{\neg\psi\}$  nicht durch  $K$  trennbar, also existieren  $(B, A), (D, C) \models T^d, b \in B^n, d \in D^n$ , so dass  $(B, A) \models \psi(b)$  und  $(D, C) \models \neg\psi(d)$ , aber  $(B, A) \models \chi(b)$  genau dann, wenn  $(D, C) \models \chi(d)$  für alle  $\chi \in K$ . Dann erfüllen  $b$  und  $d$  dieselben guten Formeln, aber haben nicht denselben Typ - ein Widerspruch!

*Beweis der Hilfsaussage.* Seien  $b, d$  wie verlangt und  $(B, A), (D, C)$  schon  $(\mathbb{E} |T|^+)$ -saturiert (das ändert nichts an Typen und dem Erfüllen von guten Formeln). Sei  $a \in A^m$  für ein hinreichend großes  $m$ , mit der Eigenschaft dass  $\dim(b/a) \leq \dim(b/A)$  (es folgt dann Gleichheit, da über einer kleineren Menge nicht mehr interdefinierbar werden kann). Für  $A' := \text{dcl}(a), B' := \text{dcl}(a, b)$  gilt dann, dass  $A$  und  $B'$  unabhängig über  $A'$  sind. Es sind nämlich per Definition von  $a$  die Mengen  $A$  und  $b$  unabhängig über  $a$  (eben wegen  $\dim(b/a) = \dim(b/A)$ ), mit Lemma 2.3.1 (2.) sind dann auch  $A$  und  $b \cup (A')$  unabhängig über  $A'$  und mit 3. sind  $A$  und  $B' = \text{dcl}(b \cup A')$  unabhängig über  $A'$ . Außerdem sind  $A'$  und  $B'$  maximal  $|T|$  groß.

Wenn man den partiellen  $\mathcal{L}_P$ -Typ  $\text{tp}_{\mathcal{L}}(a/b) \cup \{P(\bar{x})\}$  betrachtet, bleibt er konsistent unter der Ersetzung  $b \mapsto d$  in den Formeln. Seien nämlich  $\psi_1(\bar{x}, b), \dots, \psi_n(\bar{x}, b) \in \text{tp}_{\mathcal{L}}(a/b)$ , dann ist

$$\exists \bar{x} \in P\left(\bigwedge_{i=1}^n \psi_i(\bar{x}, \bar{y})\right)$$

eine gute Formel, die von  $b$  und daher auch von  $d$  erfüllt wird. Also ist der ersetzte partielle Typ endlich konsistent, wegen Saturation habe er den Erfüller  $c \in C$  und es gilt  $\text{tp}_{\mathcal{L}}(a, b) = \text{tp}_{\mathcal{L}}(c, d)$ . Wegen der Typengleichheit folgt insbesondere  $\dim(b/a) = \dim(d/c)$ ; es bleibt noch zu zeigen, dass  $\dim(b/A) = \dim(d/C)$ , damit dann gilt  $\dim(d/C) = \dim(b/A) = \dim(b/a) = \dim(d/c)$  und wie oben  $C$  und  $D' := \text{dcl}(c, d)$  frei über  $C' := \text{dcl}(c)$  sind. Die Gleichheit  $\dim(b/A) = \dim(d/C)$  gilt aber, da für jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\psi$  und  $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$  die Formel zu

„es existiert  $\bar{y} \in P$ , sodass  $\psi(\bar{x}, \bar{y})$   $x_i$  über  $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$  definiert“

eine gute Formel ist, die also genau dann von  $b$  erfüllt wird, wenn sie von  $d$  erfüllt wird. Da  $(a, b)$  und  $(c, d)$  den gleichen  $\mathcal{L}$ -Typ haben, gibt es einen partiellen Isomorphismus  $i$  von  $B' = \text{dcl}(a, b)$  nach  $D' = \text{dcl}(c, d)$  mit  $i((a, b)) = (c, d)$ , die Einschränkung auf  $A' = \text{dcl}(a)$  bildet einen Isomorphismus nach  $C' = \text{dcl}(c)$ . Also ist  $i$  partieller Isomorphismus  $(B, A) \rightarrow (D, C)$ , damit im B&F-System, also elementare Abbildung, weswegen  $b$  und  $d$  denselben  $\mathcal{L}_P$ -Typen haben.  $\square$

$\square$

**Folgerung 2.3.6.** Für ein dichtes Paar  $(B, A)$  und  $S \subseteq B^n$  eine  $A_0$ -definierbare Menge in  $\mathcal{L}_P$  (wobei  $A_0 \subseteq A$ ) ist  $S \cap A^n$  eine  $A_0$ -definierbare Menge in  $\mathcal{L}$ .

*Beweis.* Nach der Formelreduzierung sei  $S$   $\mathbb{C}$  durch eine gute Formel definiert. Da die Definierbarkeit abgeschlossen unter booleschen Kombinationen ist, reicht es, eine Formel in Reinform zu betrachten.

Da aber für jede  $\mathcal{L}_{A_0}$ -Formel  $\varphi(x, y, a')$  und jedes  $a \in A^n$  die Aussagen

„Es existiert ein  $y \in A^m$  mit  $(B, A) \models \varphi(a, y, a')$ “,

„Es existiert ein  $y \in A^m$  mit  $B \models \varphi(a, y, a')$ “,

„Es existiert ein  $y \in A^m$  mit  $A \models \varphi(a, y, a')$ “

äquivalent sind wegen  $\varphi$  als  $\mathcal{L}$ -Formel und  $A \prec B$ , folgt, dass

$$\exists y \in P(\varphi(x, y, a'))(B) \cap A^n = \exists y(\varphi(x, y, a'))(A).$$

□

## 2.4 Folgen der Existenz des B&F-Systems

Im Folgenden werden einige Anordnungen von wechselseitigen Inklusionen von Modellen von  $T$  betrachtet, in der Gleichheit von bestimmten Typen folgt.

**Lemma 2.4.1.** Für dichte Paare  $(B, A), (D, C)$  mit  $(D, C) \subseteq (B, A)$  sind folgende Eigenschaften äquivalent:

1.  $(D, C) \preceq (B, A)$
2. Die Inklusion ist frei.

*Beweis.* „1.  $\Rightarrow$  2.“ : Diese Richtung ist schon aus Lemma 2.3.1 (5.) bekannt.

„2.  $\Rightarrow$  1.“ : Finde  $(|B| + |T|)^+$ -saturierte Strukturen

$$(B, A) \preceq (B', A'), (D, C) \preceq (D', C');$$

es ist dann  $(D, C)$  eine gemeinsame Unterstruktur und  $(D, C) \subseteq (D', C')$  ist frei nach dem Beweis der Gegenrichtung. Außerdem sind nach Voraussetzung  $D$  und  $A$  unabhängig über  $C$ , da aber Unabhängigkeit von Tupeln in  $D$  über  $A$  auch über  $A'$  erhalten bleibt (da  $(B', A')$  elementare Oberstruktur), ist auch  $(D, C) \subseteq (B', A')$  frei. Also ist die Identität auf  $(D, C)$  im Back&Forth-System, daher elementare Abbildung. Daraus folgt für alle  $(\mathcal{L}_P)_D$ -Formeln  $\varphi$ , dass

$$(D, C) \models \phi \Leftrightarrow (D', C') \models \varphi \Leftrightarrow (B', A') \models \varphi \Leftrightarrow (B, A) \models \varphi.$$

□



**Lemma 2.4.2.** Seien  $(B_1, A_1), (B_2, A_2) \models T^d$  und  $(B, A)$  eine gemeinsame Unterstruktur, sodass die Inklusionen frei sind. Wenn  $a \in (A_1)^n$  und  $b \in (A_2)^n$  denselben  $\mathcal{L}$ -Typen über  $B$  erfüllen, erfüllen sie auch denselben  $\mathcal{L}_P$ -Typen über  $B$ .

*Beweis.*  $\mathbb{E}$  seien  $(B_1, A_1)$  und  $(B_2, A_2)$  schon genügend saturiert, das ändert nichts an Typen über  $B$  und (nach derselben Argumentation wie im vorigen Lemma) auch nichts an der Unabhängigkeit. Da  $a$  und  $b$  denselben Typen über  $B$  erfüllen, kann man wieder  $\mathcal{L}_B$ -Terme mit eingesetztem  $a$  auf  $\mathcal{L}_B$ -Terme mit eingesetztem  $b$  abbilden (Wohldefiniertheit und Injektivität wird durch die Typengleichheit ermöglicht) und bekommt einen partiellen Isomorphismus  $i : Ba \cong Bb$ , dessen Einschränkung auf die  $\mathcal{L}_A$ -Terme einen partiellen Isomorphismus  $Aa \cong Ab$  induziert und sodass  $i(a) = b$ . Also gilt  $i : (Ba, Aa) \cong (Bb, Ab)$ , da außerdem die Inklusionen  $(Ba, Aa) \subseteq (B_1, A_1)$  und  $(Bb, Ab) \subseteq (B_2, A_2)$  frei sind nach Lemma 2.3.1 (6.), ist  $i$  im Back&Forth-System, also elementar, also haben  $a$  und  $b$  denselben  $\mathcal{L}_P$ -Typen über  $B$ .  $\square$

**Folgerung 2.4.3.** Wenn man sich solch ein Paar  $(a, b)$  beliebig wählt (z.B.  $a = b = 0$ ), sind in dem Typen auch die parameterfreien  $(\mathcal{L}_P)_B$ -Formeln, die in  $(B_1, A_1)$  bzw.  $(B_2, A_2)$  gelten. Also gelten dieselben Formeln, was als  $(B_1, A_1) \equiv_B (B_2, A_2)$  geschrieben wird.

**Lemma 2.4.4.** Seien  $(B_1, A_1), (B_2, A_2)$  zwei dichte Paare und  $A \subseteq A_1 \cap A_2$  eine gemeinsame Substruktur, sowie  $a \in B_1 \setminus A_1$ ,  $b \in B_2 \setminus A_2$ , die den gleichen Ordnungstyp über  $A$  haben. Dann haben  $a$  und  $b$  sogar den gleichen  $\mathcal{L}_P$ -Typ über  $A$ .

*Beweis.* Es sind trivialerweise  $A_i$  und  $A$  unabhängig über  $A$  für  $i = 1, 2$ , außerdem ist  $a$  transzendent über  $A_1$  und  $b$  transzendent über  $A_2$ . Nach Lemma 2.3.1 (4.) sind also die Einbettungen  $(Aa, A) \subseteq (B_1, A_1)$  und  $(Ab, A) \subseteq (B_2, A_2)$  frei. Nach dem Beweis zu Satz 2.3.4 gibt es also einen Isomorphismus  $Aa \cong Ab$ , der  $A \cong A$  fortsetzt und für den  $i(a) = b$  gilt, also gibt es einen Isomorphismus  $i : (Aa, A) \cong (Ab, A)$ .

Wenn  $\mathbb{E}$  die beiden Modelle von  $T^d$  genügend saturiert sind, ist  $i$  im B&F-System, also erfüllen  $a$  und  $b$  dieselben Formeln.  $\square$

## 2.5 Definierbare Teilmengen von $A^n$

Wir interessieren uns für die Gestalt von  $\mathcal{L}_P$ -definierbaren Teilmengen von  $A^n$ . Dafür braucht man zuerst eine Hilfsaussage für definierbare Mengen in o-minimalen Strukturen.

**Lemma 2.5.1.** Sei  $\mathcal{M}$  eine o-minimale Struktur, die eine angeordnete Gruppenoperation  $+$  mit positivem Element 1 hat und  $Y \subseteq M^n$  definierbar. Dann ist  $Y$  eine endliche Vereinigung von Mengen der Form  $\{f(b, \cdot) = 0, g(b, \cdot) > 0\}$ , wobei  $b \in M^m$  und  $f, g$  stetige, 0-definierbare Abbildungen  $M^{m+n} \rightarrow M$  sind.

*Beweis.* Schreibe  $Y = \phi(b, \mathcal{M})$  für ein  $b \in M^m$  und definiere  $Z := \phi(\mathcal{M})$ . Wenn man  $Z$  in Zellen  $(Z_i)_i$  zerlegt, erhält man  $Y$  als endliche Vereinigung von  $((Z_i)_b)_i$ . Es sei also o.B.d.A.  $Z$  schon eine 0-definierbare Zelle.

Definiere

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{|x - d| \mid d \in Z\} & Z \text{ nichtleer} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$g(x) := \begin{cases} \inf\{|x - d| \mid d \in \overline{Z} \setminus Z\} & Z \text{ nichtleer} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases},$$

das sind lipschitzstetige Funktionen.

Klar ist, dass  $\overline{Z} = \{f = 0\}$ ; da Zellen lokal abgeschlossen sind, ist  $\overline{Z} \setminus Z = \overline{\overline{Z} \setminus Z} = \{g = 0\}$ . Also erhalten wir

$$Z = \overline{Z} \setminus (\overline{Z} \setminus Z) = \{f = 0\} \setminus \{g = 0\} = \{f = 0\} \cap \{g > 0\}$$

und

$$Y = Z_b = \{f(b, \cdot) = 0\} \cap \{g(b, \cdot) > 0\}.$$

□

**Satz 2.5.2.** Für ein dichtes Paar  $(B, A)$  und  $Y \subseteq A^n$  ist folgendes äquivalent:

1.  $Y$  ist  $\mathcal{L}_P$ -definierbar.
2. Es existiert ein  $\mathcal{L}$ -definierbares  $Z \subseteq B^n$ , sodass  $Y = Z \cap A^n$ .
3.  $Y$  ist definierbar in  $(A, (R_b)_{b \in B})$  mit der Interpretation  $A \models R_b(a)$  genau dann, wenn  $0 < a < b$  in  $B$ .

*Beweis.* „1.  $\Rightarrow$  2.“ : Sei  $\varphi$  eine  $(\mathcal{L}_P)_B$ -Formel mit  $\varphi(B) = Y$ . Zu zeigen ist, dass eine  $\mathcal{L}_B$ -Formel  $\psi$  existiert mit  $(B, A) \models P(x) \rightarrow (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$ ; das ist genau dann der Fall, wenn  $\mathfrak{Th}(B, A)_B \cup \{P(x)\} \cup \{\varphi(x)\}$  und  $\mathfrak{Th}(B, A)_B \cup \{P(x)\} \cup \{\neg\varphi(x)\}$  in  $\mathcal{L}_B$  getrennt werden können. Nach dem Trennungslemma gilt das genau dann, wenn für alle  $(B, A) \preceq (D_1, C_1), (D_2, C_2)$  und alle  $c_i \in C_i$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $(D_1, C_1) \models \varphi(c_1), (D_2, C_2) \models \neg\varphi(c_2)$  eine  $\mathcal{L}_B$ -Formel  $\chi$  existiert mit  $(D_1, C_1) \models \chi(c_1), (D_2, C_2) \models \neg\chi(c_2)$ .

Seien solche  $(D_i, C_i)$  und  $c_i$ , die die Voraussetzungen von oben erfüllen. Dann ist das die Situation aus Lemma 2.4.2, denn elementare Erweiterungen sind frei. Also muss ein trennendes  $\chi$  wie verlangt existieren, denn ansonsten würden  $c_1$  und  $c_2$  denselben  $\mathcal{L}$ -Typ erfüllen, aber nicht denselben  $\mathcal{L}_P$ -Typ.

„2.  $\Rightarrow$  3.“ : Sei  $Y = Z \cap A^n$ . Nach dem letzten Lemma ist  $Z$  eine boolesche Kombination aus Mengen der Form  $\{f(b, \cdot) = 0\}$  und  $\{g(b, \cdot) > 0\}$  für stetige 0- $\mathcal{L}$ -definierbare Funktionen  $f, g$  und passende  $b \in B^m$ . Es reicht also die Aussage für Mengen in diesen Formen zu zeigen. Wegen der Stetigkeit der Funktionen und  $A$  dicht in  $B$  gilt aber in  $B$

$f(b, z) = 0 \Leftrightarrow$  Für alle  $0 < \varepsilon \in A$  existiert  $A^m \ni a < b$  (koordinatenweise),

sodass für alle  $a' \in A^m$  mit  $a < a' < b$  (koordinatenweise)

gilt, dass  $|f(a', z)| < \varepsilon$ ,

$g(b, z) > 0 \Leftrightarrow$  Es existiert ein  $0 < \varepsilon \in A$  und ein  $A^m \ni a < b$  (koordinatenweise),

sodass für alle  $a' \in A^m$  mit  $a < a' < b$  (koordinatenweise)

gilt, dass  $|f(a', z)| > \varepsilon$ .

Die rechten Bedingungen sind jeweils in  $(A, (R_b)_{b \in B})$  definierbar.

„3.  $\Rightarrow$  1.“ : Da  $A$  und alle  $R_b$  in  $(B, A)$  definierbar sind, ist  $Y$  auch in  $(B, A)$  definierbar.  $\square$

## 2.6 Definierbare eindimensionale Mengen

In diesem Abschnitt wird eine zur o-Minimalität ähnliche Charakterisierung von eindimensionalen Mengen in Modellen von  $T^d$  hergeleitet. Hierbei sei  $(B, A)$  vorerst ein beliebiges dichtes Paar, als Konvention nehmen wir an, dass  $A^0 = \{0\}$ . TODO: Das noch überarbeiten, [BMP21] erwähnen

**Lemma 2.6.1.** Sei  $(U_y)_{y \in Y}, Y \subseteq B^n$  eine Familie von offenen, eindimensionalen, in

$(B, A)$  uniform  $\mathcal{L}$ -definierbaren Mengen. Dann ist

$$S := \bigcup_{y \in Y \cap A^n} U_y$$

auch  $\mathcal{L}$ -definierbar.

*Beweis.* Wir führen eine Induktion über  $\dim Y$ , man kann schon annehmen, dass alle  $U_y$  nichtleer sind, sonst muss man entsprechend aus  $Y$  aussondern. Wenn  $\dim Y = 0$  ist, ist  $Y$  endlich und es ist schon  $Y \cap A^n$  definierbar, also auch  $S$ .

Zerlege  $Y$  in Zellen, das ändert nichts an irgendwelchen Definierbarkeiten, also kann man annehmen, dass  $Y$  selbst schon Zelle ist. Wenn  $Y$  keine offene Zelle ist und  $\pi : Y \rightarrow Z$  der kanonische homöomorphe Projektion zu einer offenen Zelle von Dimension  $m < \dim Y$ , existiert nach Satz 2.5.2 ein  $\mathcal{L}$ -definierbares  $Z' \subseteq B^m$  mit  $\pi(Y \cap A^n) = Z' \cap A^m$ , da  $\pi(Y \cap A^n) \subseteq A^m$  eine  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Menge ist. Definiere dann  $Y' := Z \cap Z'$ , sodass man die Menge umparametrisieren kann:

$$\bigcup_{y' \in Y' \cap A^m} U_{\pi^{-1}(y')} = \bigcup_{y \in \pi^{-1}(Y' \cap A^m)} U_y = \bigcup_{y \in Y \cap A^n} U_y = S$$

Da  $(U_{\pi^{-1}(y')})_{y' \in Y'}$  die gleichen Dinge erfüllt wie  $(U_y)_{y \in Y}$  und  $\dim Y' \leq \dim Z < \dim Y$ , gilt die Aussage per Induktion.

Für den Beweis für offene Zellen wird die Endlichkeit einer bestimmten Menge benötigt:

**Lemma 2.6.2.** Seien die drei  $\mathcal{L}$ -definierbare Mengen

$$U := \bigcup_{y \in Y} U_y,$$

$$Y_x := \{y \in Y \mid x \in U_y\},$$

$$B := \{x \in U \mid \text{int}(Y_x) \neq \emptyset\},$$

dann ist  $B$  endlich.

*Beweis.* Wenn  $B$  nicht endlich ist, hat es als definierbare Teilmenge von  $B$  nichtleeres Inneres und daher ist  $A := \bigcup_{x \in \text{int } B} Y_x$  nichtleer, denn jedes  $Y_x$  ist nichtleer (sonst wäre  $x \notin U \supseteq B$ ). Es gilt außerdem

$$A = \bigcup_{x \in U} \{y \in Y \mid x \in U_y \cap \text{int } B\} = \{y \in Y \mid U_y \cap \text{int } B \neq \emptyset\}.$$

Wir wollen jetzt den Widerspruch herleiten, dass  $A$  leer sein muss. Seien dafür mit

Definable Choice die  $\mathcal{L}$ -definierbaren Funktionen  $f, g_1, g_2 : A \rightarrow M$  gegeben mit

$$f(y) \in (g_1(y), g_2(y)) \subseteq U_y \cap \text{int } B.$$

Sei  $\mathbb{E} A$  offen (TODO: warum ist  $\text{int } A$  nichtleer?) und  $f, g_1, g_2$  stetig auf  $A$ . Sei außerdem  $d, e \in U_y \cap \text{int } B, (c, k) \subseteq U_y \cap \text{int } B$  (das ist offen), sodass

$$c < g_1(y) < d < f(y) < e < g_2(y) < k.$$

Setze

$$V := g_1^{-1}((c, d)) \cap f^{-1}((d, e)) \cap g_2^{-1}((e, k)),$$

das ist dann eine offene Umgebung um  $y$  in  $B^n$ . Für alle  $z \in V$  ist

$$f(y) \in (d, e) \subseteq (g_1(z), g_2(z)) \subseteq U_z,$$

also ist  $z \in Y_{f(y)}$ . Das heißt, es gilt  $V \subseteq Y_{f(y)}$ ; da aber  $f(y) \in B$ , ist das unmöglich, weil  $V$  offen ist.  $\square$

Da  $B$  endlich ist, ist auch seine Teilmenge

$$B' := B \cap \bigcup_{y \in Y \cap A^n} U_y$$

endlich und damit  $\mathcal{L}$ -definierbar. Es gilt

$$\bigcup_{y \in Y \cap A^n} (U_y \setminus B) = \bigcup_{y \in Y} (U_y \setminus B) :$$

In einer Richtung herrscht per Konstruktion eine Inklusion, für die andere Richtung sei  $x \in U_y \setminus B$  für ein  $y \in Y$ . Dann ist  $\text{int } Y_x$  nichtleer, also existiert wegen der Dichte des Paares ein  $z \in Y_x \cap A^n$ , also ein  $z \in Y \cap A^n$  mit  $x \in U_z$ . Also ist  $x \in \bigcup_{y \in Y \cap A^n} (U_y \setminus B)$ .

Da  $\bigcup_{y \in Y} (U_y \setminus B)$  definierbar ist, ist auch

$$S = \bigcup_{y \in Y \cap A^n} U_y = \bigcup_{y \in Y \cap A^n} (U_y \setminus B) \cup \bigcup_{y \in Y \cap A} (U_y \cap B) = \bigcup_{y \in Y} (U_y \setminus B) \cup B'$$

definierbar.  $\square$

**Lemma 2.6.3.** Sei eine  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Menge  $X \subseteq B$ . Dann stimmt  $X$  bis auf eine kleine Menge mit einer  $\mathcal{L}$ -definierbaren Menge  $X'$  überein.

*Beweis.* Sei zunächst  $X$  gegeben durch  $\exists y \in P(\psi(x, y))$  für eine Formel  $\psi \in \mathcal{F}_{1+n}(\mathcal{L}_B)$ . Die Mengen  $F_y := \psi(B, y) \cap \partial\psi(B, y)$  sind endlich für jedes  $y \in M^n$  und weil o-minimale Theorien  $\exists^\infty$  eliminieren, ist deren Mächtigkeit uniform beschränkt, sagen wir durch  $k$ . Sei  $Y := \exists x \psi(x, B)$  und  $\mathcal{L}$ -definierbare Funktionen  $g_1, \dots, g_k : Y \rightarrow F_y$ , sodass  $F_y = \{g_1(y), \dots, g_k(y)\}$  für alle  $y \in Y$ . Als diese Funktionen kann man zum Beispiel die angeordnete Aufzählung der Elemente in  $F_y$  nehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned} X &= \exists y \in P(\psi(x, y))(B, A) = \bigcup_{y \in A^n} \psi(B, y) = \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \psi(B, y) = \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \psi(B, y) \\ &= \bigcup_{y \in Y \cap A^n} (\psi(B, y \cap \partial\psi(B, y)) \cap \partial\psi(B, y)) \cup \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \text{int } \psi(B, y) \\ &= \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \{g_1(y), \dots, g_k(y)\} \cup \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \text{int } \psi(B, y) = \bigcup_{i=1}^k g_i(Y \cap A^n) \cup \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \text{int } \psi(B, y). \end{aligned}$$

Da  $X' := \bigcup_{i=1}^k g_i(Y \cap A^n)$  klein ist und  $S := \bigcup_{y \in Y \cap A^n} \text{int } \psi(B, y)$  nach dem letzten Lemma  $\mathcal{L}$ -definierbar, stimmen  $X$  und  $X'$  bis auf die kleine Menge  $S$  überein. Da Darstellungen „ $(X \setminus S') \cup S, X$   $\mathcal{L}$ -definierbar,  $S, S'$  klein“ unter booleschen Kombinationen erhalten bleiben, folgt die Aussage für gute Formeln und daher für alle Mengen.  $\square$

**Lemma 2.6.4.** Für jede  $\mathcal{L}$ -definierbare Menge  $S \subseteq B^m$  und Funktion  $g : B^m \rightarrow B^k$  gibt es eine  $\mathcal{L}$ -definierbare Teilmenge  $S' \subseteq S$ , sodass

$$A^m \cap S \cap g^{-1}(A^k) = A^m \cap S'.$$

*Beweis.* Für  $S = \emptyset$ , wähle  $S' = \emptyset$ . Ansonsten führen wir eine Induktion über  $(m, k, \dim S)$  mit elementweiser Halbordnung (die ist fundiert):

Wenn  $m = 0, k = 0$  oder  $\dim S = 0$ , ist  $A^m \cap S \cap g^{-1}(A^k)$  endlich und daher  $\mathcal{L}$ -definierbar, also kann man  $S' = A^m \cap S \cap g^{-1}(A^k)$  wählen. Sei also  $(m, k, \dim S) > (0, 0, 0)$ .

- Wenn  $k > 1$  gilt und  $g$  die Koordinatenfunktionen  $g_1, \dots, g_k$  hat, so existieren  $(S'_i)_{i \leq k}$  mit  $S'_i \subseteq S$  und  $A^m \cap S \cap g_k^{-1}(A) = A^m \cap S'_i$  für alle  $i$  per Induktionsvoraussetzung. Dann gilt

$$A^m \cap S \cap g^{-1}(A^k) = \bigcap_{i=1}^k A^m \cap S \cap g_i^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^k A^m \cap S'_i = A^m \cap \left( \bigcap_{i=1}^k S'_i \right),$$

also erfüllt  $S' := \bigcap_{i=1}^k S'_i$  das Gewünschte.

- Wenn  $k = 1$  gilt, zerlege  $S$  in Zellen  $(Z_i)$ , deren Dimension natürlich  $\leq \dim S$  ist. Wenn man da das Problem löst (induktiv bzw. von Hand) und jeweils ein passendes  $S'_i$  findet, löst  $\bigcup_i S'_i$  das Problem für  $S$ .

Sei also  $S$  jetzt schon eine Zelle.

- Wenn  $n := \dim S < m$  ist und  $\pi$  die entsprechende homöomorphe Projektion auf eine offene Zelle in  $B^n$  bzw. eine  $\mathcal{L}$ -definierbare Fortsetzung davon auf ganz  $B^m$ , sei  $\lambda$  eine  $\mathcal{L}$ -definierbare Fortsetzung der Umkehrfunktion dieser Projektion. Wähle die Fortsetzung  $\lambda$  dabei so, dass  $\lambda(\pi(S))$  und  $\lambda(B^n \setminus \pi(S))$  disjunkt sind. Das ermöglicht die Gleichheit  $\lambda(C \cap D) = \lambda(C) \cap \lambda(D)$  für  $C \subseteq \pi(S)$ . Löse dann mit einem  $\mathcal{L}$ -definierbaren  $S'' \subseteq \pi(S)$  das Problem

$$A^n \cap \pi(S) \cap \lambda^{-1}(A^m) \cap (g \circ \lambda)^{-1}(A) = A^n \cap S''.$$

Das Problem entspricht im Übrigen den Anforderungen, weil man  $\lambda^{-1}(A^m) \cap (g \circ \lambda)^{-1}(A)$  wie im Fall  $k > 1$  umschreiben kann. Schneidet man das mit  $\lambda^{-1}(A^m)$  und wendet darauf  $\lambda$  an, erhält man (mit schrittweiser Verwendung des  $\cap$ -Herausziehens)

$$\begin{aligned} \lambda(A^n) \cap S \cap A^m \cap g^{-1}(A) &= \lambda(A^n \cap \pi(S) \cap \lambda^{-1}(A^m) \cap (g \circ \lambda)^{-1}(A)) \\ &= \lambda(\lambda^{-1}(A^m) \cap A^n \cap S'') \\ &= A^m \cap \lambda(A^n) \cap \lambda(S''), \end{aligned}$$

wegen  $A^m \cap S \subseteq \lambda(A^n)$  aufgrund der Projektionseigenschaft von  $\pi$ , kann man  $\lambda(A^n)$  weglassen und erhält

$$A^m \cap S \cap g^{-1}(A) = A^m \cap \lambda(S''),$$

also löst  $\lambda(S'')$  das Problem für  $S$ .

- Wenn  $\dim S = m$ , finde eine  $\mathcal{L}_A$ -definierbare Funktion  $G : B^{m+n} \rightarrow B$  mit  $g = G(\cdot, b)$  für ein über  $A$  unabhängiges Tupel  $b \in B^n$ . Als nächstes betreiben wir Induktion über  $n$ . Wenn  $n = 0$ , dann ist nichts zu tun, weil dann  $g$  schon  $A$ -definierbar ist, also  $g^{-1}(A) = A^m$  und man dann  $S' = S$  wählen kann. Ansonsten zerlege  $S$  in die Mengen

$S_1 := \{x \in B^{m+n} \mid G(x_1, \dots, x_{m+n-1}, \cdot) \text{ ist streng monoton wachsend auf einem Intervall um } x_n\},$

$S_2 := \{x \in B^{m+n} \mid G(x_1, \dots, x_{m+n-1}, \cdot) \text{ ist streng monoton fallend auf einem Intervall um } x_n\},$

$S_3 := \{x \in B^{m+n} \mid G(x_1, \dots, x_{m+n-1}, \cdot) \text{ ist konstant auf einem Intervall um } x_n\}$

und den Rest  $S_4 := B^{m+n} \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ .  $S_1 \cup S_2 \cup S_3$  ist groß, denn wenn eine offene Menge  $U \subseteq S_4$  existiert, wähle  $x \in U$  beliebig und ein Intervall  $I$  um  $x_n$  mit  $\{(x_1, \dots, x_{n-1})\} \times I \subset U$ . Nach der Charakterisierung  $\mathcal{o}$ -minimaler definierbarer Funktionen existiert ein Subintervall  $J \subseteq I$ , so dass  $G(x_1, \dots, x_{m+n-1}, \cdot)$  entweder streng monoton wachsend, fallend oder konstant ist auf  $J$ . Also ist  $x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$  im Widerspruch zu  $x \in U$ . Partitioniere diese Mengen dann noch in  $A$ -definierbare Zellen  $(Z_i)_i$  und definiere  $Z'_i := \{x \in B \mid (x, b) \in Z_i\}$  für alle  $i$ . Dann ist für jede offene Zelle  $G$  in der letzten Koordinate entweder streng monoton steigend, fallend oder konstant jeweils auf der ganzen Zelle; das folgt, indem offene Zellen schon Teilmenge von  $S_1, S_2$  oder  $S_3$  sind. Die lokale Definition dieser Mengen überträgt sich durch Supremumsbildung oder definierbaren Zusammenhang auf die gesamte Zelle.

Löse das Problem jetzt für alle  $(Z'_i)_i$ , wegen  $S := \bigcup_i Z'_i$  ist es dann auch für  $S$  gelöst: Für nicht-offene Zellen geht das per Induktion bzw. genauso wie im vorigen Unterpunkt. Wenn  $Z'_i$  nun eine offene Zelle ist, gilt für ein generisches Element  $x$  über  $A, b$ , dass  $(x, b)$  generisch von  $B^{m+n}$  ist, also in  $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ . Also ist  $Z_i$  entweder in  $S_1, S_2$  oder  $S_3$  enthalten.

\* Wenn  $Z_i \subseteq S_3$  ist, definiere

$$\tilde{G}(\bar{x}) = z : \Leftrightarrow z = G(\bar{x}, y) \text{ für ein } y \text{ mit } (\bar{x}, y) \in Z_i,$$

dann gilt  $g = \tilde{G}(\cdot, b_1, \dots, b_{n-1})$  und per Induktion kann man das Problem für  $n - 1$  lösen.



\* Wenn  $Z_i \subseteq S_1, S_2$ , also  $G$  auf  $Z_i$  injektiv in der letzten Koordinate ist, wird das Problem durch  $\emptyset$  gelöst: Denn sei  $a \in A^m \cap S'_i \cap g^{-1}(A)$ , also existiert  $a' \in A$  mit  $a' = g(a) = G(a, b)$ , weil  $a \in Z'_i$  ist, ist  $(a, b) \in Z_i$ , also ist wegen Injektivität von  $G$  in der letzten Koordinate  $b_n$  eindeutig bestimmt mit  $(a, b) \in Z_i$  und  $a' = G(a, b)$ . Das ist aber  $A, b_1, \dots, b_{n-1}$ -definierbar, also ist  $b$  nicht unabhängig über  $A$ .

□

**Lemma 2.6.5.** Sei  $X \subseteq B$  eine kleine Teilmenge. Dann ist  $X$  eine endliche Vereinigung von Mengen  $f(A^n \cap E)$  für  $E$  eine offene Zelle und  $f : E \rightarrow B$  eine stetige  $\mathcal{L}$ -definierbare Funktion.

*Beweis.* Wenn  $X$  klein ist, existiert ein  $\mathcal{L}$ -definierbares  $g : B^m \rightarrow B$ , sodass  $X \subseteq g(A^m)$ . Setze  $X' := g^{-1}(X) \cap A^m = (g \upharpoonright A^m)^{-1}(X)$ , das ist  $\mathcal{L}_P$ -definierbar und es gilt  $g(X') = X$  wegen  $X \subseteq \text{im}(g \upharpoonright A^m)$ .

Beweise die Aussage jetzt induktiv über  $m$ : Wenn  $m = 0$  ist, ist  $X$  maximal einelementig und entweder gleich  $f(\{0\})$  für eine konstante Funktion  $f$  oder schon die leere Vereinigung.

Wenn  $m > 0$  ist, schreibe  $X'$  als Teilmenge von  $A^m$  wegen Satz 2.5.2 in der Form  $Y \cap A^m$  für ein  $\mathcal{L}$ -definierbares  $Y$ . Sei eine Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  von  $Y$  in Zellen gegeben, auf denen  $g$  jeweils stetig ist, dann ist

$$X = g(Y \cap A^m) = \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}} g(Z \cap A^m).$$

Für offene Zellen  $Z$  ist so eine Darstellung also schon gefunden. Sei  $Z$  nun eine Zelle der Dimension  $d < m$  und  $\pi : B^d \rightarrow B^m$  eine  $\mathcal{L}$ -definierbare Fortsetzung des kanonischen Homöomorphismus der entsprechenden offenen Zelle  $Z'$  nach  $Z$ , die so gewählt ist, dass  $\pi(Z')$  und  $\pi(M^d \setminus Z')$  disjunkt sind. Dann gilt mit derselben Argumentation wie im letzten Beweis und mit Anwendung des daraus resultierenden Lemmas

$$f(Z \cap A^m) = (f \circ \pi)(A^d \cap Z \cap \pi^{-1}(A^m)) = (f \circ \pi)(A^d \cap S)$$

für ein passendes  $\mathcal{L}$ -definierbares  $S$ . Das ist dann aber schon der Fall eines kleineren  $m$  und mit der Induktionsbehauptung folgt die Aussage. □

**Satz 2.6.6.** Sei  $X \subseteq B$  eine  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Menge. Dann existiert eine endliche Unterteilung von  $B$ , sodass für jedes dadurch erzeugte offene Intervall  $I$  genau einer der folgenden Fälle gilt:

- $I$  ist disjunkt zu  $X$ .
- $I$  ist Teilmenge von  $X$ .
- $X \cap I$  ist dicht & kodicht in  $I$  und entweder ist  $X \cap I$  klein oder  $I \setminus X$ .

Für kleine  $X$  entfallen die Fälle „Teilmenge“ und „koklein“ natürlich.

*Beweis.* Die gesuchte Eigenschaft bleibt unter endlichen Vereinigungen und Differenzen von Mengen erhalten (die Eigenschaft für kleine Mengen nur unter Vereinigungen), man muss nur eine Verfeinerung der Unterteilung durchführen. Deswegen sei  $X$  zunächst klein und nach dem letzten Lemma gegeben als  $X = f(A^n \cap E)$  für ein stetiges,  $\mathcal{L}$ -definierbares  $f : E \rightarrow B$  und eine offene Zelle  $E \subseteq B^n$ . Da definierbarer Zusammenhang unter definierbaren stetigen Funktionen erhalten bleibt, ist  $I := f(E)$  auch definierbar zusammenhängend, weil es  $\mathcal{L}$ -definierbar ist, hat es auch ein Supremum und Infimum in  $B \cup \{\pm\infty\}$ , ist also ein Intervall (ausnahmsweise sei hier auch ein nichtoffenes Intervall mitgemeint). Wenn  $I$  endlich ist, ist auch  $X$  endlich und es ist nichts zu zeigen.  $X$  ist disjunkt zu  $B \setminus I$ , nun muss nur noch gezeigt werden, dass  $X = X \cap I$  dicht und kodicht in  $I$  ist, denn Dichte und Kodichte in nichtoffenen unendlichen Intervallen ist äquivalent zu Dichte und Kodichte in deren Innerem. Aber für dichte Teilmengen werden durch stetige Abbildungen auf dichte Teilmengen abgebildet; da  $A^n$  dicht in  $B^n$  ist, ist auch  $A^n \cap E$  dicht in  $E$  und folglich  $X$  dicht in  $I$ . Andererseits muss auch das Komplement von  $X$  dicht in  $I$  sein, da es sonst ein Intervall ganz in  $X$  gäbe, was der Kleinheit mit Lemma 2.2.4 widerspricht.

Sei jetzt  $X$  nicht mehr klein, dann stimmt es aber bis auf eine kleine Menge mit einer  $\mathcal{L}$ -definierbaren Menge  $X'$  überein. Schreibe also  $X = (X' \setminus Y) \cup Z$  für  $Y$  und  $Z$  klein.  $X'$  hat als  $\mathcal{L}$ -definierbare Menge sowieso schon die gewünschte Gestalt (sogar nur unter Benutzung der ersten zwei Fälle),  $Y$  und  $Z$  nach dem ersten Teil des Beweises auch. Da die Darstellung unter Differenz und Vereinigung erhalten bleibt, hat auch  $X$  die gewünschte Form.  $\square$

**Lemma 2.6.7.**  $T^d$  eliminiert  $\exists^\infty$ : Wenn  $S \subseteq B^{m+n}$  eine  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Menge ist mit  $S_x$  endlich für alle  $x \in B^m$ , dann ist  $(|S_x|)_{x \in B^m}$  beschränkt.

*Beweis.* Für  $n = 1$  gilt das nach Bemerkung 5.33. aus [Met19]. Denn  $S_x$  ist endlich, genau dann, wenn  $S_x$  diskret in  $B$  ist; und das ist uniform  $\mathcal{L}_P$ -ausdrückbar. Die Äquivalenz zur Diskretheit sieht man ein, indem man eine Aufteilung von  $S_x$  wie im letzten Satz vornimmt. Dann ist  $S_x$  genau dann endlich, wenn nur der Fall „ $S_x \cap I = \emptyset$ “ vorkommt; weil dichte Mengen und Intervalle nicht diskret sind, gilt das wiederum genau dann, wenn  $S_x$  diskret ist.

Sei  $n > 1$ . Dann sind für  $\pi_{i_1, \dots, i_k}$  als Projektionsabbildung auf die Koordinaten  $i_1, \dots, i_k$  jeweils auch

$$Y_x := (\pi_{1, \dots, m+1}(S))_x = (\pi_{m+1}(S_x))$$

und

$$Z_x := (\pi_{1, \dots, m, m+2, \dots, m+n}(S))_x = (\pi_{m+2, \dots, m+n}(S_x))$$

endlich und daher ist nach Induktionsvoraussetzung die Mächtigkeit jeweils uniform beschränkt durch irgendwelche  $K, L \in \mathbb{N}$ . Dann gilt aber

$$|S_x| \leq |Y_x \times Z_x| = |Y_x| |Z_x|,$$

was uniform durch  $KL$  beschränkt ist. □

## 2.7 Definierbare Funktionen

Um definierbare Funktionen besser zu verstehen, ist es notwendig, sich mit dem definierbaren Abschluss zu beschäftigen. Damit kann man zeigen, dass definierbare Funktionen in einer Variablen „fast überall“  $\mathcal{L}$ -definierbar sind.

**Lemma 2.7.1.** In jedem dichten Paar  $(B, A)$  ist  $A$  definierbar abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $b \in B \setminus A$  und  $(B, A) \preceq (D, C)$  eine genügend saturierte Elementarerweiterung. Dann wird der Ordnungstyp von  $b$  über  $A$  auch von einem Element  $D \setminus C \ni d \neq b$  realisiert wegen Dichtheit von  $D \setminus C$  in  $D$  und Saturation.

Nach Lemma 2.4.4 haben  $b$  und  $d$  dann den selben  $\mathcal{L}_P$ -Typen über  $A$ , weswegen  $b$  nicht definierbar über  $A$  in  $(D, C)$  sein kann, also auch nicht in  $(B, A)$ .  $\square$

**Folgerung 2.7.2.** Sei  $(B, A)$  ein dichtes Paar und  $A_0 \preceq A$ . Dann ist  $A_0$  definierbar abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $b$  definierbar über  $A_0$ . Dann ist  $b$  insbesondere definierbar über  $A$ , also in  $A$ . Nach Folgerung 2.3.6 ist dann  $\{a\} = \{a\} \cap A$  schon  $\mathcal{L}$ -definierbar aus  $A_0$ , also in  $A_0$ , da  $A_0$  elementare Substruktur ist.  $\square$

**Lemma 2.7.3.** Sei  $(D, C) \subseteq (B, A)$  frei und  $(B, A)$  dichtes Paar. Dann ist  $D$  definierbar abgeschlossen in  $(B, A)$ .

*Beweis.* Für eine beliebige Struktur  $(B', A') \succeq (B, A)$  gelten die Voraussetzungen ebenso, da acl-Abhängigkeit über  $A$  als Teil vom Typen äquivalent ist zu acl-Abhängigkeit über  $A'$ . Ebenso ist  $D$  in  $(B, A)$  definierbar abgeschlossen genau dann, wenn es in  $(B', A')$  definierbar abgeschlossen ist. Also sei  $(B, A)$  jetzt schon  $\mathbb{E}$  hinreichend saturiert und  $b \in B \setminus D$ .

Nach dem Beweis zur Existenz des B&F-Systems kann der partielle Isomorphismus  $(B, A) \supseteq (D, C) \cong (D, C) \subseteq (B, A)$  insbesondere auf mehrere Weisen auf  $b$  fortgesetzt werden: Wenn  $b \in A$  oder  $b \in B \setminus AD$ , ging es nur um die Erfüllung von transzendenten Ordnungstypen, da hat man also viele Optionen. Wenn  $b \in AD \setminus (A \cup D)$  ist und  $a \in A^n$  unabhängig über  $D$  mit  $b \in Da$ , dann finde  $a'_1$  transzendent über  $Da$  von passendem Ordnungstyp über  $D$ ,  $a'_2$  transzendent über  $Daa'_1$  von passendem Ordnungstyp über  $Da'_1$ , usw. So kann man den Isomorphismus auf  $Da$  fortsetzen mit Bild  $Da'$ ; da aber  $a$  und  $a'$  per Konstruktion unabhängig über  $D$  waren, sind auch  $Da$  und  $Da'$  unabhängig über  $D$ , also  $Da \cap Da' = D$  und das Bild von  $b$  kann nicht  $b$  selbst sein. Also gibt es auch in diesem Fall mehrere Möglichkeiten für eine Fortsetzung, also mehrere elementare Abbildungen, also kann  $b$  nicht definierbar über  $D$  sein.  $\square$

**Lemma 2.7.4.** Sei  $(B, A) \models T^d$  und sei  $F : A^n \rightarrow A$  eine  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Funktion. Dann gibt es in  $A$  definierbare  $f_1, \dots, f_k : A^n \rightarrow A$ , sodass für alle  $a \in A^n$  ein  $f_i$  existiert mit  $F(a) = f_i(a)$ .

*Beweis.* Wenn die Aussage nicht gilt, gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle in  $A$  definierbaren  $f_1, \dots, f_k : A^n \rightarrow A$ , dass ein  $a \in A$  existiert mit  $f_i(a) \neq F(a)$  für alle  $i$ . Also ist der partielle Typ

$$\{P(x)\} \cup \{F(x) \neq f(x) \mid f : A^n \rightarrow A \text{ } \mathcal{L}_A\text{-definierbar}\}$$

konsistent und es existiert  $(B, A) \preceq (B', A')$  und  $a' \in A'^n$  mit  $F(a') \neq f(a')$  für alle in  $A'$   $\mathcal{L}_A$ -definierbaren  $f : A'^n \rightarrow A'$ .

Allerdings ist nach Lemma 2.3.1 (6.) wegen  $a' \in A'^n$  die Inklusion  $(Ba', Aa') \subseteq (B', A')$  frei, nach Lemma 2.7.3 ist  $Ba'$  also  $\mathcal{L}_P$ -definierbar abgeschlossen. Da  $F(a')$   $\mathcal{L}_P$ -definierbar über  $Ba'$  ist, ist es in  $Ba'$ , wegen  $F : A'^n \rightarrow A'$  ist  $F(a') \in A'$ . Wegen Unabhängigkeit liegt also  $F(a') \in Ba' \cap A' = Aa'$  und es gibt eine  $\mathcal{L}_A$ -definierbare Abbildung  $f : A'^n \rightarrow A'$  mit  $f(a') = F(a')$  - ein Widerspruch!  $\square$

**Lemma 2.7.5.** Sei  $(B, A) \models T^d$  und sei  $F : B \rightarrow B$  eine  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Funktion. Dann gibt es  $\mathcal{L}$ -definierbare  $f_1, \dots, f_k : B \rightarrow B$  und eine kleine Menge  $X \subset B$ , sodass für alle  $b \in B \setminus X$  ein  $f_i$  existiert mit  $F(b) = f_i(b)$ .

*Beweis.* Wenn die Aussage nicht gilt, gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$ , alle kleinen Mengen  $X \subset B$  und alle  $\mathcal{L}$ -definierbaren  $f_1, \dots, f_k : B \rightarrow B$ , dass ein  $b \in B \setminus X$  existiert mit  $f_i(b) \neq F(b)$  für alle  $i$ . Also ist der partielle Typ

$$\{x \notin X \mid X \text{ klein in } B\} \cup \{F(x) \neq f(x) \mid f : B \rightarrow B \text{ } \mathcal{L}_B\text{-definierbar}\}$$

konsistent und es existiert  $(B, A) \preceq (B', A')$  und

$$b' \in B' \setminus \bigcup_{f: B'^n \rightarrow B' \text{ } \mathcal{L}_B\text{-definierbar}} f(A'^n) = B' \setminus A'B$$

mit  $F(b') \neq f(b')$  für alle  $\mathcal{L}_B$ -definierbaren  $f : B' \rightarrow B'$ .

Allerdings ist nach Lemma 2.3.1 (7.) wegen  $b' \in B' \setminus A'B$  die Inklusion  $(Bb', A) \subseteq (B', A')$  frei, nach Lemma 2.7.3 ist  $Bb'$  also  $\mathcal{L}_P$ -definierbar abgeschlossen. Da  $F(b')$   $\mathcal{L}_P$ -definierbar über  $Bb'$  ist, ist es in  $Bb'$ , also existiert eine  $\mathcal{L}_B$ -definierbare Abbildung  $f : B' \rightarrow B'$  mit  $f(b') = F(b')$  - ein Widerspruch!  $\square$

**Satz 2.7.6.** Sei  $(B, A) \models T^d$  und sei  $F : B \rightarrow B$  eine  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Funktion. Dann stimmt  $F$  auf bis auf eine kleine Menge mit einer  $\mathcal{L}$ -definierbaren Funktion überein.

*Beweis.* TODO: Muss noch warten  $\square$

**Lemma 2.7.7.** Sei  $f : B \rightarrow B$  stückweise stetig und  $\mathcal{L}_P$ -definierbar. Dann ist  $f$  schon  $\mathcal{L}$ -definierbar.

*Beweis.* Nach Satz 2.7.6 stimmt  $f$  bis auf eine kleine Menge  $X$  mit einer  $\mathcal{L}$ -definierbaren Funktion  $f'$  überein. Wegen o-Minimalität von  $T$  ist  $f'$  auch stückweise stetig. Unterteile  $X$  wie in Satz 2.6.6 und verfeinere die Unterteilung, so dass  $f, f'$  auf jedem Intervall stetig sind. Für jedes Intervall  $I$  dieser Unterteilung gilt dann entweder, dass  $X \cap I$

dicht und kodicht in  $I$  ist oder, dass  $X \cap I = \emptyset$ . Der erste Fall kann nie eintreten, da zwei stetige Funktionen, die auf der dichten Teilmenge  $I \setminus X$  übereinstimmen, schon auf ganz  $I$  übereinstimmen. Also ist  $X$  endlich und  $f$  kann mit  $\mathcal{L}$  definiert werden (nämlich durch  $f'$  außerhalb von  $X$  und ansonsten manuell).  $\square$

## 2.8 Offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

Nach der Beschreibung der Struktur von  $\mathcal{L}_P$ -definierbaren Teilmengen von  $B$  liegt die Vermutung nahe, dass offene und abgeschlossene  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Mengen schon  $\mathcal{L}$ -definierbar sind. Zumindest für Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  kann man das beweisen.

**Definition 2.8.1.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Struktur in einer Sprache  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{B}$  eine Struktur in einer Sprache  $\mathcal{L}'$ . Dann heißt  $\mathcal{B}$  Erweiterung von  $\mathcal{A}$ , wenn  $A = B$  und die Interpretation von  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{A}$  schon  $\mathcal{L}'$ -definierbar in  $\mathcal{B}$  ist. TODO: Muss es sogar schon 0-definierbar sein? sonst später Problem mit dem Typ...

**Lemma 2.8.2.** Sei  $\mathcal{A}$  eine unendliche Struktur, und sei  $\mathcal{B}$  eine  $\aleph_0$ -saturierte o-minimale Erweiterung von  $\mathcal{A}$ , sodass Definable Choice gilt und alle in  $\mathcal{B}$  definierbaren Funktionen  $A \rightarrow A$  schon in  $\mathcal{A}$  definierbar sind. Dann sind die in  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  definierbaren Mengen die gleichen.

TODO: Eigentlich musste  $\mathcal{B}$  nicht o-minimal sein, dafür  $\mathcal{A}$ . Fehler?

*Beweis.* Per Definition einer Erweiterung sind alle  $\mathcal{A}$ -definierbaren Mengen auch  $\mathcal{B}$ -definierbar.

Sei  $S \subseteq A^n$  definierbar in  $\mathcal{B}$ . Wenn  $n = 1$  ist, ist die charakteristische Funktion  $\chi_S : A \rightarrow A$  definierbar in  $\mathcal{B}$ , also per Voraussetzung auch in  $\mathcal{A}$ , also ist auch  $S = \{\chi_S = 1\}$  definierbar in  $\mathcal{A}$ . Wenn 0, 1 nicht in  $A$  enthalten sind, muss man sich stattdessen ein Analogon mit zwei bestimmten Elementen aus  $A$  basteln.

Wenn  $n > 1$  ist, dann zerlege  $S$  in  $\mathcal{B}$ -Zellen. Es reicht daher, die Aussage für eine beliebige  $\mathcal{B}$ -Zelle  $S$  zu beweisen, genauer reicht es sogar aus, die  $\mathcal{A}$ -Definierbarkeit für die definierende(n) partiellen Funktion(en)  $x \mapsto \sup S_x, x \mapsto \inf S_x$  zu beweisen; nach wählen eines willkürlichen noch nicht angenommenen Funktionswertes, reicht es, die  $\mathcal{A}$ -Definierbarkeit für beliebige  $\mathcal{B}$ -definierbare Funktionen  $f : A^{n-1} \rightarrow A$  zu beweisen.

Wenn  $n = 2$  ist, gilt das auch schon per Voraussetzung. Wenn  $n > 2$  ist, definiere die  $\mathcal{B}$ -definierbaren Funktionen  $f_a : A^{n-2} \rightarrow A, x \mapsto f(a, x)$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist jede davon  $\mathcal{A}$  definierbar, sei also  $f_a = F_a(c_a, \cdot)$  für 0- $\mathcal{A}$ -definierbare Funktionen  $F_a : A^{m_a+n-2} \rightarrow A$  und passende  $m_a \in \mathbb{N}, c_a \in A^{n_a}$ . Es ist möglich, bloß endlich viele

unterschiedliche  $F_a$  zu verwenden: Ansonsten ist nämlich

$$\{\forall c(f(a, x) \neq F(c, x)) \mid F : A^{m+n-2} \rightarrow A \text{ 0-}\mathcal{A}\text{-definierbar}, m \in \mathbb{N}\}$$

konsistent in  $\mathcal{B}$ , der Erfüller davon darf nach obigen Erkenntnissen aber nicht existieren. Also existieren 0- $\mathcal{A}$ -definierbare Funktionen  $F_i : A^{m_i+n-2} \rightarrow A$  für  $i = 1, \dots, k$ , sodass für alle  $a \in A$  ein  $i \leq k$  und ein  $c \in A^{m_i}$  existiert mit  $f_a = F_i(c_i, \cdot)$ . Für ein  $b \in A$  und  $z$  von der Dimension  $\max_i m_i$  sei

$$F(z, y, x) := \begin{cases} F_i(y_1, \dots, y_{m_i}, x) & i \text{ ist das einzige } j \text{ mit } z_j = b \\ b & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist  $F$  definierbar in  $\mathcal{A}$  und es gilt, dass für alle  $a \in A$  ein  $(z, y) \in A^{k+\max_i m_i}$  mit  $f_a = F(z, y, \cdot)$ . Da in  $\mathcal{B}$  Definable Choice gilt, existiert eine  $\mathcal{B}$ -definierbare Funktion  $g$ , sodass  $f(a, x) = F(g(a), x)$  gilt. Nach der Voraussetzung sind alle Koordinatenfunktionen von  $g$  definierbar in  $\mathcal{A}$ , also auch  $g$  selbst, also auch  $f$ .  $\square$

**Satz 2.8.3.** Sei  $(B, A) \models T^d, \text{RCF} \subseteq T, \mathbb{R} \subseteq B$  und  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Wenn  $X$  offen und  $\mathcal{L}_P$ -definierbar ist, ist es  $\mathcal{L}$ -definierbar.

**Bemerkung.** Für eindimensionale Mengen ist das trivial, denn in der Darstellung von Satz 2.6.6 kann der Fall  $X \cap I$  dicht und kodicht nicht auftreten, weil offene Mengen niemals kodicht sind. Also sind die definierbaren offenen Teilmengen von  $B$  gerade die endlichen Vereinigungen von Intervallen und das ist  $\mathcal{L}$ -definierbar.

*Beweis des Satzes.* Füge zunächst zu  $\mathcal{L}$   $n$ -stellige Relationen  $O_\varphi$  für jede  $(\mathcal{L}_P)_B$ -Formel  $\varphi$ , die in  $(B, A)$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  definiert, in dieser Sprache  $\mathcal{L}'$  sei  $\tilde{B}$  die Erweiterung von  $B$  durch kanonische Interpretation als  $O_\varphi(B) := \varphi((B, A))$ . Nach der Bemerkung oben sind die eindimensionalen  $\mathcal{L}_P$ -definierbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}$  die Vereinigungen von Intervallen in  $\mathbb{R}$  und daher (TODO: warum?) folgt nach [MS99], dass  $\tilde{B}$  o-minimal ist. Es sei  $(D, C)$  eine  $\aleph_0$ -saturierte Elementarerweiterung von  $(B, A)$  und  $\tilde{D}$  die Erweiterung von  $D$  auf  $\mathcal{L}'$  durch kanonische Interpretation der  $O_\varphi$ . Dann muss  $\tilde{B} \preceq \tilde{D}$  gelten, denn alle  $\mathcal{L}'_B$ -Formeln gehen auf  $(\mathcal{L}_P)_B$ -Formeln zurück und für die gilt per Konstruktion die Elementarität der Inklusion. Also ist  $\tilde{D}$  auch o-minimal, daher ist jede  $\mathcal{L}'$ -definierbare Funktion  $f : D \rightarrow D$  stückweise stetig. Weil sie dann auch  $\mathcal{L}_P$ -definierbar ist, gilt nach Lemma 2.7.7, dass jede  $\mathcal{L}'$ -definierbare Funktion  $f : D \rightarrow D$  schon  $\mathcal{L}$ -definierbar ist.  $\tilde{D}$  ist o-minimal und hat Definable Choice, deswegen erfüllt die Erweiterung  $\tilde{D}/D$  die Voraussetzungen des Lemma 2.8.2 und die definierbaren Mengen

in  $D$  und  $\tilde{D}$  sind die gleichen.

Wenn  $X$  jetzt eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist, die durch  $\chi$  in  $(B, A)$  definiert werde, dann ist  $X_{(D, C)} = \chi((D, C))$  eine definierbare Teilmenge in  $\tilde{D}$ , also definierbar in  $D$  durch eine Formel  $\psi(x, d)$  für ein  $d \in D^m$ . In  $(D, C)$  gilt also  $\exists y(\chi(x) \leftrightarrow \psi(x, y))$ , also existiert wegen  $(B, A) \preceq (D, C)$  ein  $b \in B^m$  mit  $X = \chi((B, A)) = \psi((B, A), d) = \psi(B, d)$ . Das heißt,  $X$  ist definierbar in  $\mathcal{L}$ .  $\square$

**Folgerung 2.8.4.** Auch abgeschlossene  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind  $\mathcal{L}$ -definierbar. Die Definition läuft in diesem Fall über das Komplement.

**Folgerung 2.8.5.** Sei  $(B, A)$  wie oben und  $S \subseteq \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}_P$ -definierbar. Dann

- sind  $\text{int } S, \overline{S}$  definierbar in  $B$  nach dem Satz und der Folgerung als offene bzw. abgeschlossene  $\mathcal{L}_P$ -definierbare Mengen.
- ist  $S$  genau dann  $\mathcal{L}$ -definierbar, wenn es eine boolesche Kombination von offenen/abgeschlossenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  ist, von denen jede  $\mathcal{L}_P$ -definierbar ist. Die Rückrichtung folgt dabei aus dem Satz und der Folgerung, da dann jede einzelne Menge in der Kombination  $\mathcal{L}$ -definierbar ist; die Hinrichtung folgt per Zellzerlegung.



## 2.9 TODO: Noch woanders einsortieren oder löschen

**Lemma 2.9.1.** Sei  $\mathcal{A}$  eine o-minimale Erweiterung eines angeordneten Vektorraums über einem angeordneten Körper  $F$  und  $g : A^{p+1} \rightarrow A$  definierbar, außerdem existiere für unendlich viele  $\lambda \in F$  ein  $a_\lambda \in A^p$  mit  $g(a_\lambda, x) = \lambda x$  für unendlich viele  $x \in A$ . Dann existiert ein Intervall  $I$  in  $A$ , sodass auf  $I$  eine  $A$ -definierbare Körperstruktur existiert, die mit  $<$  kompatibel ist (was automatisch einen reell abgeschlossenen Körper impliziert).

*Beweis.* TODO: Geht irgendwie aus [PS97] hervor.  $\square$

**Lemma 2.9.2.** Es sei  $(A, B) \models T^d$ ,  $f : B^{n+1} \rightarrow B$   $A$ -definierbar in  $B$  und  $b \in B \setminus A$ . Dann enthält  $f(A^n \times \{b\})$  kein Intervall um  $b$ .

*Beweis.* Nimm an, dass das Gegenteil gelte für das Intervall  $J$  ( $\mathbb{E}$  mit Randpunkten in  $A$ ): Dann existiert insbesondere für jedes  $q \in \mathbb{Q}$  hinreichend nahe bei 1 ein  $a_q \in A^n$  mit  $f(a_q, b) = qb$ . Dann existiert wieder ein Intervall  $I_q \subseteq J_A$  mit  $f(a_q, x) = qx$  für alle  $x \in I_q$ .  $\mathbb{E}$  ist dieses Intervall schon beschränkt und die Randpunkte seien  $c_q < d_q$ . Definiere dann

$$r_q := \frac{c_q + d_q}{2}, s_q := \frac{d_q - c_q}{2} \in A,$$

$$g : (u, v, x) \mapsto f(u, v + x) - f(u, v) \quad u \in A^n, v, x \in A.$$

Dann gilt für alle  $x \in (-s_q, s_q)$

$$g(a_q, r_q, x) = f(a_q, r_q + x) - f(a_q, r_q) = q(r_q + x) - qr_q = qx.$$

Also existiert nach dem letzten Lemma ein Intervall in  $A$  mit einer  $A$ -definierbaren Körperstruktur als RCF. Durch Translation (benutze Dichtheit) nehme an, dass  $b \in I_B$  liegt. Dann existiert nach Lemma 2.2.2 ein Element  $c \in I_B \setminus f(A^n \times \{b\})$ .  $\mathbb{E}$  sei schon  $\inf J, \sup J \in I$ , sonst ersetze  $J$  durch ein kleineres Intervall.

Seien  $d, e \in I$  mit  $d < c < e$  und  $\varphi$  die orientierungserhaltende,  $A$ -definierbare affine Abbildung in  $I$  mit  $\varphi(d) = \inf J, \varphi(e) = \sup J$ . Dann ist  $\varphi(c) \in J \setminus (\phi \circ f)(A^n \times \{b\})$  und da das Verketteten mit einer  $A$ -definierbaren invertierbaren Abbildung nichts an der Aussage ändert, gibt es einen Widerspruch.  $\square$

**Satz 2.9.3.** Wenn  $(B, A) \models T^d$ , dann ist kein Intervall eine kleine Teilmenge.

*Beweis.* Sei  $f : B^n \rightarrow B$  eine durch  $\varphi(x, y, b)$  definierbare Abbildung mit  $\varphi$  eine  $\mathcal{L}_A$ -Formel und  $b \in B^m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  definiert. Für  $\dim(b/A) = 0$  ist  $f(A^n) \subseteq A$

klar, deswegen sei  $\mathbb{E} \dim(b/A) \geq 1$ . Definiere

$$g(x, z) := \begin{cases} \text{das eindeutige } y \in B & \text{für alle } z, \text{ für die } \varphi(x, y, z) \\ \text{mit } B \models \varphi(x, y, z) & \text{bei festem } x \text{ eine Funktion definiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

Dann ist  $g$  in  $B$   $A$ -definierbar und  $g(\cdot, b) = f$ . Falls  $\dim(b/A) > 1$ , füge genug Komponenten von  $b$  zu  $A$  hinzu, sodass  $\dim(b/A) = 1$ . Das Hinzufügen ändert nichts, denn  $Ab_i$  ist nach den Eingangsbemerkungen Modell von  $T$  und  $Ab_i$  ist erst recht dicht in, aber nicht gleich  $B$  (sonst hätte man die Dimension mit diesem Schritt schon zu sehr verkleinert).

Finde also  $b_i$ , sodass  $A$ -definierbare  $(h_j)$  existieren mit  $b_j = h_j(b_i)$  für alle  $j$ . Wenn jetzt  $J \subseteq f(A^n) = g(A^n, b) = g(A^n, h(b_i))$  für ein Intervall  $J$ , dann widerspricht das der Aussage des letzten Lemmas für die Funktion  $(x, y) \mapsto g(x, h(y))$ .  $\square$

*Beweis.* Wenn  $D = C$ , ist  $D \preceq A$  und die Aussage daher klar nach der vorigen Folgerung. Die Inklusion  $(AD, A) \subseteq (B, A)$  ist trivialerweise frei (zwei gleiche Mengen in der Unabhängigkeit), außerdem ist  $A \preceq AD$  dicht (da  $A$  dicht in  $B \supseteq AD$ ) und eine echte Inklusion, da für  $D = A$  wegen Unabhängigkeit von  $D$  und  $A$  ansonsten  $D = C$  folgen würde. Nach Lemma 2.4.1 ist also  $(AD, A) \preceq (B, A)$  und daher ist  $\text{dcl}(D) \subseteq \text{dcl}(AD) = AD$ , da  $AD$  definierbar abgeschlossen nach Lemma 2.7.1.

Sei jetzt  $d \in AD$   $\mathcal{L}_P$ -definierbar über  $D$  und  $a \in A^n$  minimal mit  $d \in Da$  (insbesondere ist  $a$  unabhängig über  $D$ ). Im Folgenden wird gezeigt, dass dann  $a$  schon das leere Tupel, also  $d \in D$  ist.

Nimm an, dass  $n > 0$  und sei  $f : B^n \rightarrow B$  die definierende Funktion von  $d$ , also ist sie  $D$ -definierbar und  $f(a) = d$ . Seien

$$S_1 := \{x \in B^n \mid f(x_1, \dots, x_{n-1}, \cdot) \text{ ist streng monoton wachsend auf einem Intervall um } x_n\},$$

$$S_2 := \{x \in B^n \mid f(x_1, \dots, x_{n-1}, \cdot) \text{ ist streng monoton fallend auf einem Intervall um } x_n\},$$

$$S_3 := \{x \in B^n \mid f(x_1, \dots, x_{n-1}, \cdot) \text{ ist konstant auf einem Intervall um } x_n\}.$$

$S_1 \cup S_2 \cup S_3$  ist groß, denn wenn eine offene Menge  $U \subseteq B^n \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$  existiert, wähle  $x \in U$  beliebig und ein Intervall  $I$  um  $x_n$  mit  $\{(x_1, \dots, x_{n-1})\} \times I \subset U$ . Nach der Charakterisierung o-minimaler definierbarer Funktionen existiert ein Subintervall  $J \subseteq I$ , sodass  $f(x_1, \dots, x_{n-1}, \cdot)$  entweder streng monoton wachsend, fallend oder konstant ist auf  $J$ . Also ist  $x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$  im Widerspruch zu  $x \in U$ .

Da  $a$  generisch ist, muss es also in der großen Menge liegen.

- Wenn  $a$  in  $S_1$  liegt, nehmen wir an, dass  $(B, A)$  schon hinreichend saturiert ist (das ändert nichts, da  $(B, A)$  ja nur irgendeine Oberstruktur und Modell von  $T^d$  sein muss) und finden in  $A \setminus Da_1 \dots a_{n-1}$  ein  $a' \neq a_n$  mit demselben Ordnungstyp über  $Da_1 \dots a_{n-1}$  (ansonsten wäre  $a_n$  definierbar über  $a_1, \dots, a_{n-1}$ ). Insbesondere ist  $a_1, \dots, a_{n-1}, a' \in S_1$ , weil die Menge aller solchen Elemente  $a'$   $Da_1 \dots a_{n-1}$ -definierbar ist und daher eine  $Da_1 \dots a_{n-1}$ -definierbare Umgebung von  $a_n$  dort drin liegt, in der  $a'$  liegen muss. Da  $f$  streng monoton ist, ist  $f(a_1, \dots, a_{n-1}, a') \neq f(a) = d \in D$ .

Allerdings ist  $d$   $\mathcal{L}_P$ -definierbar über  $D$ , also ist

$$f(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = d \in \text{tp}_{\mathcal{L}_P}(a/Da_1 \dots a_{n-1}) \setminus \text{tp}_{\mathcal{L}_P}(a'/Da_1 \dots a_{n-1})$$

(oder zumindest mit der definierenden Formel für  $d$  eingesetzt), die Typen sind daher nicht gleich.

Da  $a_n, a' \in A$  aber den gleichen Ordnungstyp über  $Da_1 \dots a_{n-1}$  haben, haben sie auch den gleichen  $\mathcal{L}$ -Typ über  $Da_1 \dots a_{n-1}$  nach dem Beweis von Satz 2.3.4. Außerdem ist  $(Da_1 \dots a_{n-1}, Ca_1 \dots a_{n-1}) \subseteq (B, A)$  nach Lemma 2.3.1 (6.) frei, weswegen aus Lemma 2.4.2 folgt, dass  $a_n, a'$  denselben  $\mathcal{L}_P$ -Typ über  $Da_1 \dots a_{n-1}$  haben - Widerspruch!

- Das Fall  $a \in S_2$  geht analog, es wurde eben auch nur streng monoton benutzt.
- Im Falle  $a \in S_3$  ist  $d$   $\mathcal{L}$ -definierbar über  $Da_1 \dots a_{n-1}$  durch

$$„d = f(a_1, \dots, a_{n-1}, x) \text{ für irgendein } (a_1, \dots, a_{n-1}, x) \in S_3.$$

□

## A Ein Alternativbeweis zur $\omega$ -Stabilität von ACP

*Beweis.* Nach Folgerung 1.2.12 kann man jede Formel modulo  $\text{ACP}^{\mathcal{L}^{f,c}}$  schreiben als boolesche Kombination aus „ $l_n(\text{Monome in } \mathbb{P}(X))$ “ und

„ $(\text{Polynom in } \mathbb{P}(X))(f_{i_1, n_1}(\text{Monome in } \mathbb{P}(X)), \dots, f_{i_m, n_m}(\text{Monome in } \mathbb{P}(X))) = 0$ “.

Diese beiden Arten von Formeln lassen sich weiterentwickeln zu Formeln der Art  $\exists \bar{e} \in E(f(\bar{e}, \bar{x}) = 0)$  für  $f(\bar{T}, \bar{x}) \in \mathbb{P}(\bar{T})[\bar{x}]$  und der Art

$$\begin{aligned} \exists z_{1,2}, \dots, z_{1,n_1+1}, z_{2,2}, \dots, z_{2,n_2+1}, \dots \in E(p(z_{1,i_1-1}, \dots, z_{k,i_k-1}) = 0 \\ \bigwedge_{i=1}^k m_{i,1} = z_{i,2}m_{i,2}(\bar{x}) + \dots + z_{i,n_i}m_{i,n_i}(\bar{x})) \end{aligned}$$

für Monome  $(m_{i,j}) \in \mathbb{P}(X)[\bar{x}]$  und ein Polynom  $p \in \mathbb{P}(X)[\bar{x}]$ . Nenne die Menge aller Formeln der ersten Art  $A$  und die aller Formeln der zweiten Art  $B$ . Insbesondere wurde die Menge der „interessanten“ Formeln nur vergrößert, das heißt, dass ein Typ  $p$  eindeutig durch

$$(p \cap A) \cup (p \cap B) \cup (p \cap \neg A) \cup (p \cap \neg B)$$

festgelegt wird.

Das bedeutet, in einem vorgegebenen Modell  $\mathcal{M}$  mit  $X \subseteq M$ ,  $|X| \leq \omega$  zerfällt  $S_n(X)$  in folgende Teilmengen:

1. Typen, die eine Formel aus  $A$  und eine aus  $B$  enthalten.
2. Typen, die eine Formel aus  $A$  und keine aus  $B$  enthalten.
3. Typen, die eine Formel aus  $B$  und keine aus  $A$  enthalten.
4. Typen, die keine Formel aus  $A \cup B$  enthalten.

Für einen Typen  $p$  ist im Fall 3./4.  $p \cap A = \emptyset$ , also  $p \cap (A \cup \neg A)$  eindeutig gegeben durch die Verneinung aller möglichen Formeln in  $A$  mit  $n$  freien Variablen. Analog ist in Fall 2./4.  $p \cap (B \cup \neg B)$  eindeutig bestimmt.

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass es im Fall 1./2. jeweils nur abzählbar viele Möglichkeiten für Einschränkungen  $p \cap (A \cup \neg A)$  geben kann und im Fall 1./3. nur abzählbar viele Möglichkeiten für Einschränkungen  $p \cap (B \cup \neg B)$ .

Zunächst zum ersten Teil: Definiere für ein Polynom  $g \in E(X)[\bar{x}]$  die Relation

$$\begin{aligned} g \in \in p : \Leftrightarrow \text{es existiert } f(\bar{T}, \bar{x}) \in \mathbb{P}(\bar{T})[\bar{x}], \text{ es existieren } a_1, \dots, a_n \in E \text{ mit} \\ f(\bar{a}, \bar{x}) = g(\bar{x}) \text{ und } \exists \bar{e} \in E(f(\bar{e}, \bar{x}) = 0) \in p. \end{aligned}$$

$I := \{g \in E(X)[\bar{x}] \mid g \in p\}$  ist offenbar ein Ideal im Noetherschen Ring  $E(X)[\bar{x}]$  (es ist nichtleer im Fall 1./2.) und daher endlich erzeugt durch  $h_1, \dots, h_m \in I$ . Da jedes Element  $g \in I$  mit einem Element  $\exists \bar{e} \in E(\bar{g}(\bar{e}, \bar{x}) = 0) \in p$  korrespondiert, ist  $p \cap (A \cup \neg A)$  isoliert durch die übertragenen Erzeuger  $\exists \bar{e} \in E(\bar{h}_1(\bar{e}, \bar{x}) = 0), \dots, \exists \bar{e} \in E(\bar{h}_m(\bar{e}, \bar{x}) = 0)$ , also gibt es nur abzählbar viele Möglichkeiten für  $p \cap (A \cup \neg A)$ .

Formeln der zweiten Art kann man in Konjunktionen von Formeln der ersten Art umwandeln, indem man  $(z_{l,i_l-1})_{l=1\dots k}$  zu freien Variablen macht. Auf diese Weise kann man partielle Typen in  $B$  zu partiellen Typen in  $A$  in mehr Variablen umformen (am angenehmsten geht es wahrscheinlich, wenn man annimmt, dass  $\mathcal{M}$  schon hinreichend saturiert ist und einen Erfüller  $\bar{a}$  von einem  $p$  der Art 1./3. betrachtet, eine Belegung  $(b_{i,j})$  für die  $(z_{i,j})$  in einer der Formeln findet und dann  $\text{tp}(\bar{a}, (b_{l,i_l-1})_{l=1\dots k}/X)$  betrachtet). Aber wie auch immer man das macht, es können nur mehr Typen werden, dafür landet man wieder in Fall 1./2., wo wir wissen, dass es nur abzählbar viele Möglichkeiten gibt.  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [BMP21] Elias Baro and Amador Martin-Pizarro. *Open Core and Small Groups in Dense Pairs of Topological Structures*. Annals of Pure and Applied Logic, 2021.
- [Del12] Françoise Delon. *Elimination Des Quantificateurs Dans Les Paires De Corps Algébriquement Clos*. World Scientific Publishing Company, 2012.
- [Lan73] Serge Lang. *Introduction To Algebraic Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1973.
- [Met19] Lukas Metzger. Notizen zur Vorlesung Modelltheorie bei Markus Junker im Wintersemester 2018/2019. [https://github.com/loewexy/mathe-modelltheorie/blob/master/skript\\_modelltheorie.pdf](https://github.com/loewexy/mathe-modelltheorie/blob/master/skript_modelltheorie.pdf), 2019.
- [MS99] Chris Miller and Patrick Speissegger. *Expansions of the Real Line by Open Sets: O-Minimality and Open Cores*. Fundamenta Mathematicae, 1999.
- [PS97] Ya'akov Peterzil and Sergei Starchenko. *A Trichotomy Theorem for o-minimal Structures*. Proceedings of the London Mathematical Society, 1997.
- [vdD98] Lou van den Dries. *Dense Pairs of o-minimal Structures*. Fundamenta Mathematicae, 1998.