ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 3

Εργασία Μαθήματος 2022-2023

Τμήμα Α & Β

- Ονοματεπώνυμο: Κυπριανίδης Άρης-Ευτύχιος
- ΑΕΜ: 10086
- Email: akyprian@ece.auth.gr

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2022

Τμήμα A

Αρχείο: part1.m

Ερώτημα i)

Η δυναμική του συστήματος μας είναι:

$$m\ddot{x} + \mu mg sign(\dot{x}) + kx = 0$$

με μεταβλητές κατάστασεις $x_1 = x$, $x_2 = \frac{\dot{x}}{\omega}$.

Υπολογιζούμε πρώτα την συχνότητα ταλάντωσης ω θέτοντας $\mu = 0$. Οπότε έχουμε:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \text{ με } \dot{x}_1 = x_2 , \dot{x}_2 = \frac{\ddot{x}}{\omega} = -\frac{kx_1}{m}.$$

Παίρνουμε το $det(sI - A) = s^2 + \frac{k}{m}$. Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ βγάζουμε

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

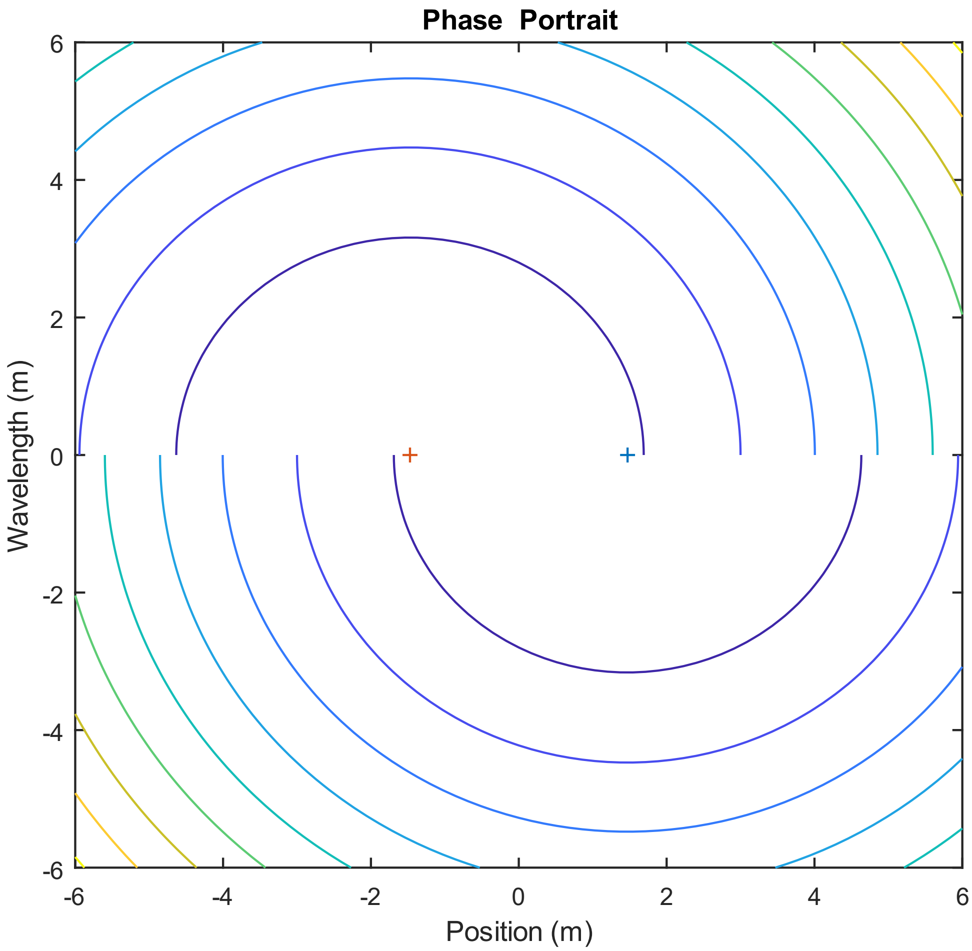
Για να βρούμε το φασικό πορτραίτο για $\dot{x} > 0$:

$$\frac{\frac{dx_1}{dt}}{\frac{dx_2}{dt}} = \frac{x_2\,\omega}{-\frac{kx_1 + \mu mg}{m\omega}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(kx_1 + \mu mg)dx_1 = m\omega^2 x_2\, dx_2 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{ολοκλήρωση} (x_1 + \frac{\mu mg}{k})^2 + {x_2}^2 = c.$$

Παρατηρούμε πως το φασικό πορτραίτο είναι ένα ημικύκλιο με κέντρο το $(-\frac{\mu m g}{k}\ ,0\ )$. Αντίστοιχα, για



$\dot{x} < 0$ έχουμε $(x_1 - \frac{\mu m g}{k})^2\ + {x_2}^2 = c$ με κέντρο το $(\frac{\mu m g}{k}\ ,0\ )$. Ακολουθεί ένας σχεδιασμός για τιμές του $\frac{\mu m g}{k}$ και διάφορα c.

Η κίνηση στο διάγραμμα έχει ωρολογιακή φορά.

Ερώτημα ii)

Για να βρούμε το σύνολο ισορροπίας, μηδενίζουμε τις παραγώγους:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2\omega = 0 \\ \dot{x_2} = -\dfrac{kx_1}{m\omega} - \dfrac{\mu g sign(x_2\omega)}{\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -\dfrac{m\mu g sign(x_2\omega)}{k} \end{cases}$$

Πρέπει να δούμε τι γίνεται στο σύστημα όταν η ταχύτητα είναι 0, δηλαδή $< 10^{-8}$. Όταν το ελατήριο ασκεί μεγαλύτερη δύναμη από τη στατική τριβή, τότε το σώμα έχει επιτάγχυνση , αλλιώς το σύστημα σταματάει. Άρα $|kx_1| < \; |m\mu g sign(x_2\omega)|$ $\Rightarrow -\frac{m\mu g}{k} < x_1 < \frac{m\mu g}{k}$.

Για την ευστάθεια παίρνουμε συνάρτηση Lyapunov $V(x) = \frac{1}{2}{x_1}^2 + \frac{1}{2}{x_2}^2 \Rightarrow \dot{V}(x) = \; -cx_2 sign(x_2\omega), c > 0$. Το $V > 0$, αλλά για το $\dot{V}$ παίρνουμε περιπτώσεις:

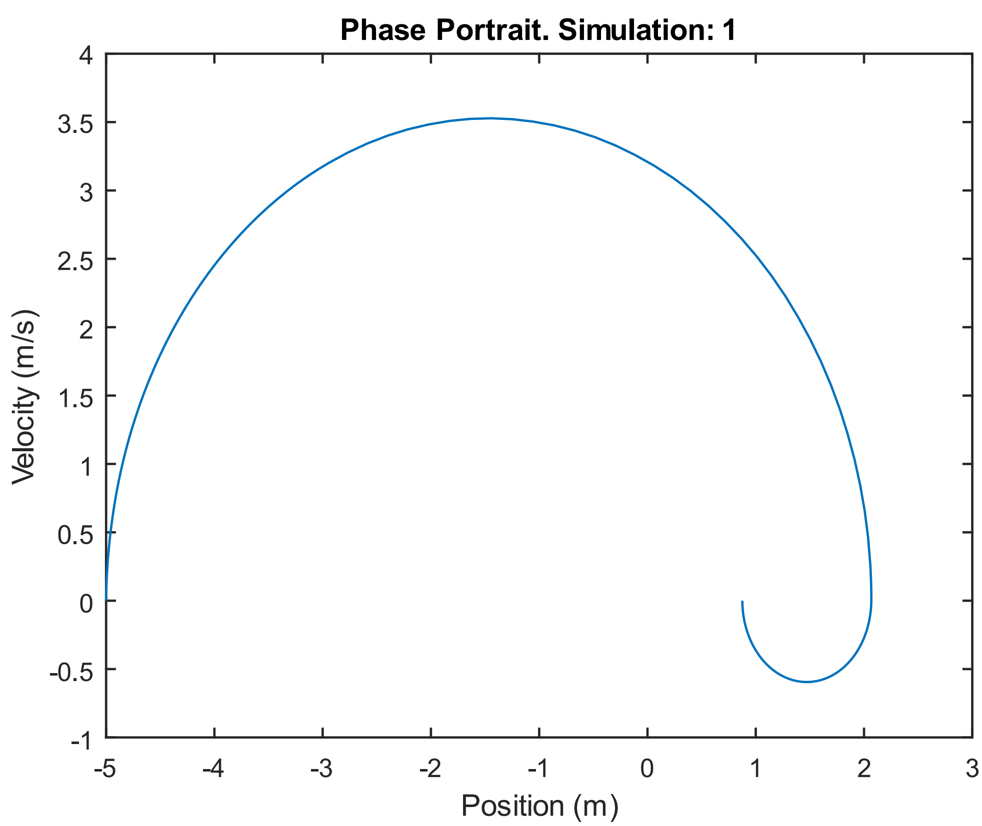
- για $x_2 > 0$: $\dot{V}(x) = \; -cx_2 < 0$
- για $x_2 < 0$: $\dot{V}(x) = \; cx_2 < 0$
- για $x_2 = 0$: $\dot{V}(x) = \; 0$

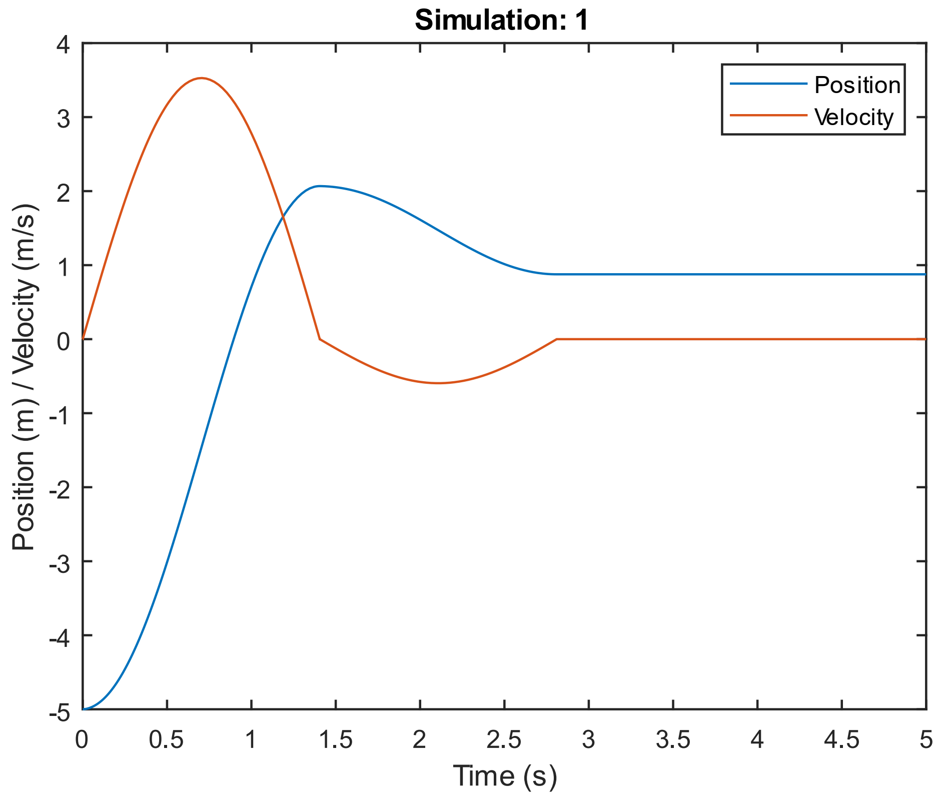
Άρα $\dot{V}(x) \leq 0$ για $x^* = [x_1{}^*, 0]$. Χρησιμοποιώντας LaSalle βλέπουμε πως $\dot{V}(x) = \ 0 \Rightarrow x_2 = 0$, και οι τιμές του x_1 που κρατάν το x_2 στο 0 είναι, όπως είδαμε $-\frac{m\mu g}{k} < x_1 < \frac{m\mu g}{k}$. Άρα για το ευθύγραμμο τμήμα $-\frac{m\mu g}{k} < x_1 < \frac{m\mu g}{k}$ και $x_2 = 0$ έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια.

Ερώτημα iii)

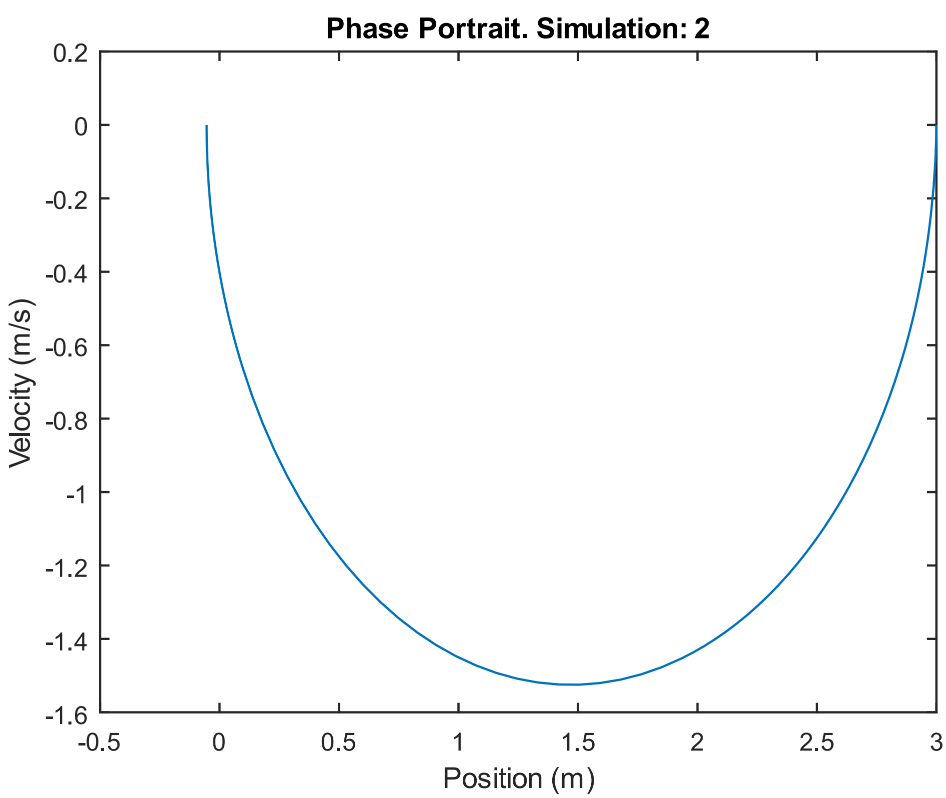
Οι προσωμοιώσεις μπορούν να επιλεχτούν αλλάζοντας την μεταβλητή number από 1 εώς 5.
Για τις ταχυτητές μικρότερες από 10^{-8}, αν το ελατήριο ασκεί παραπάνω δύναμη από την στατική τριβή, έχουμε $\dot{x_1} = 0$, $\dot{x_2} = -\frac{kx_1}{m\omega} - \frac{\mu g sign(x_2\omega)}{\omega}$, αλλιώς $\dot{x_1} = \dot{x_2} = 0$.

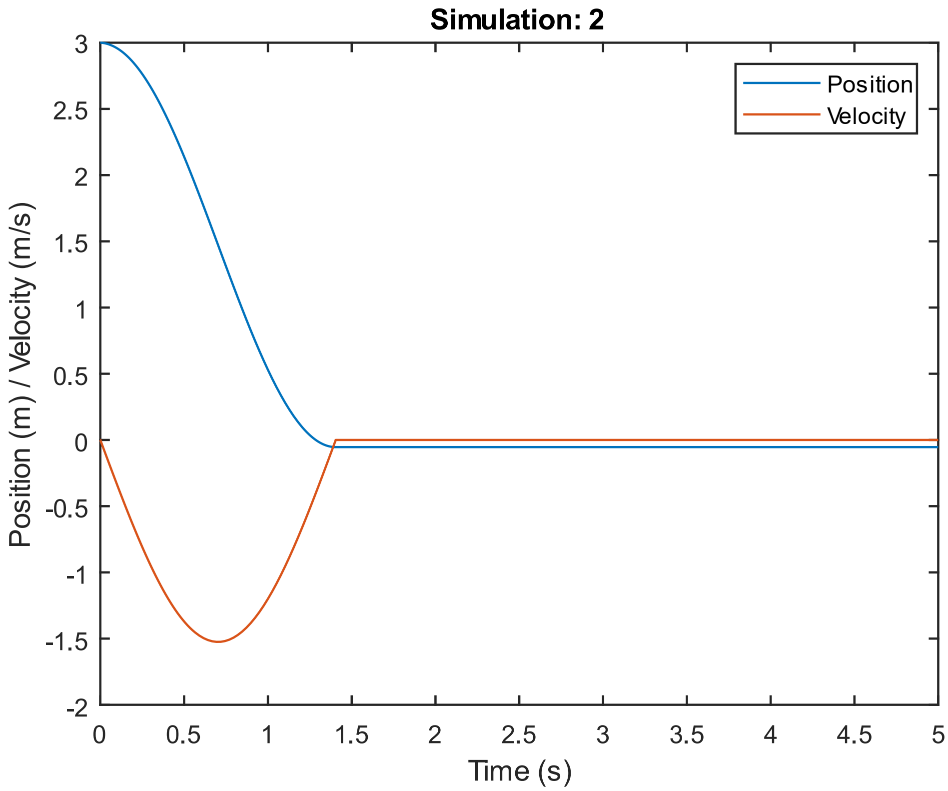
- Προσομοίωση 1:



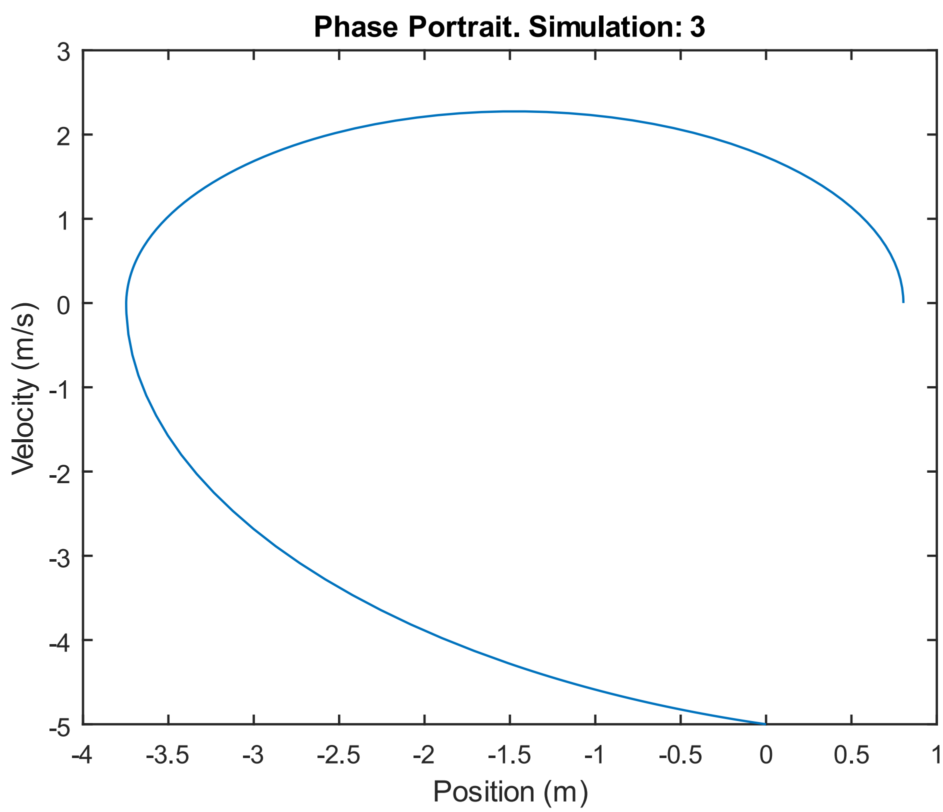


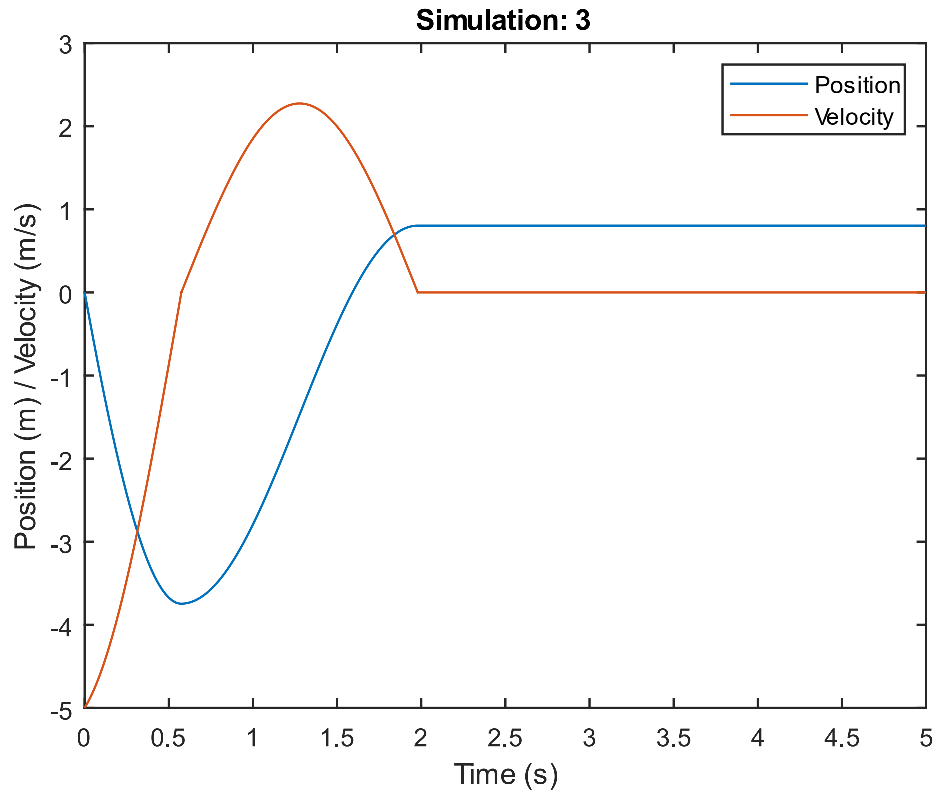
- Προσομοίωση 2:



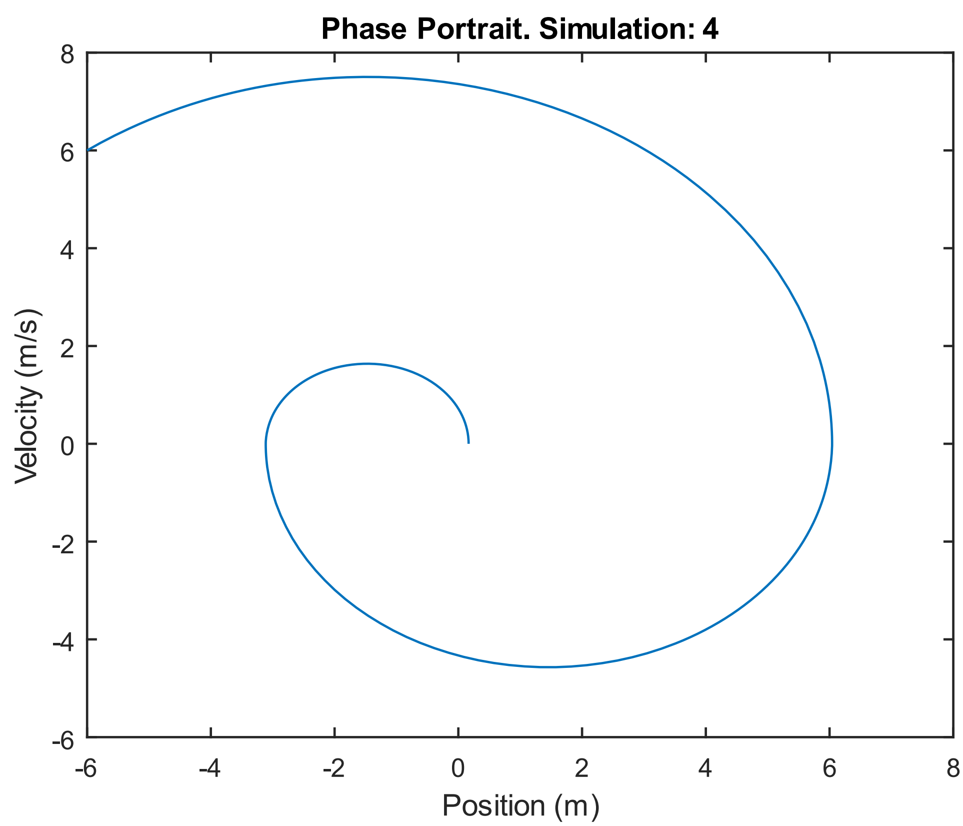


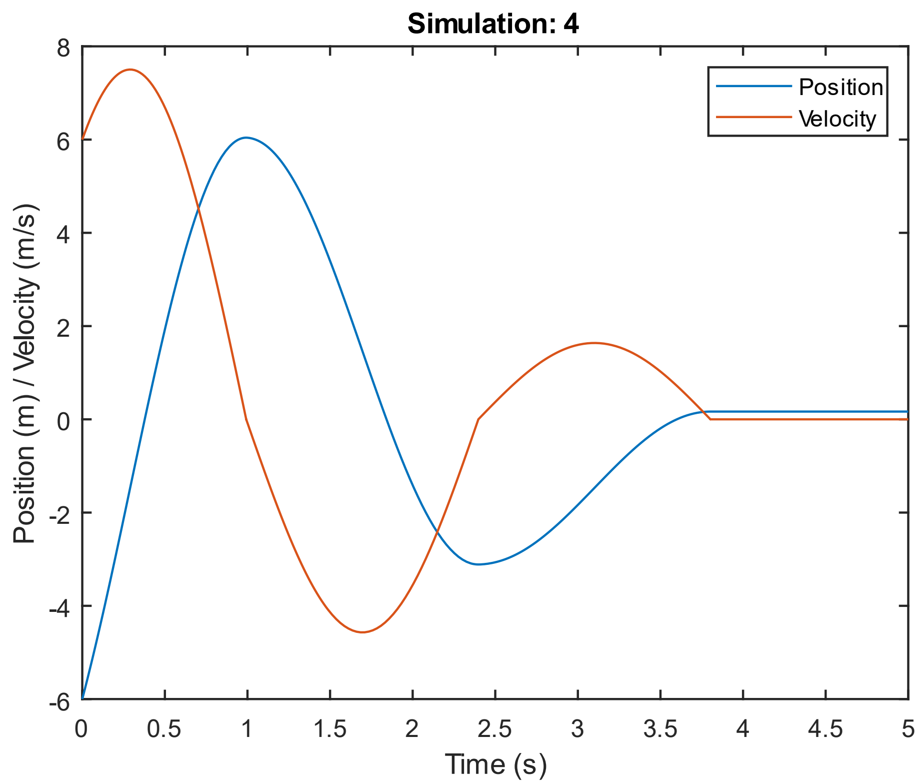
- Προσομοίωση 3 :



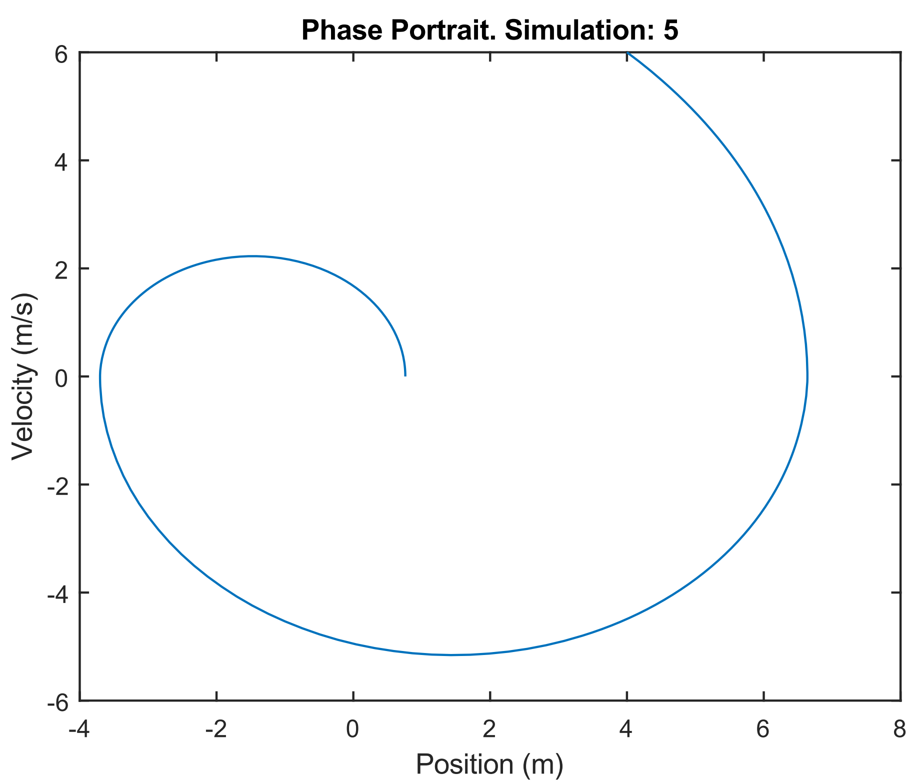


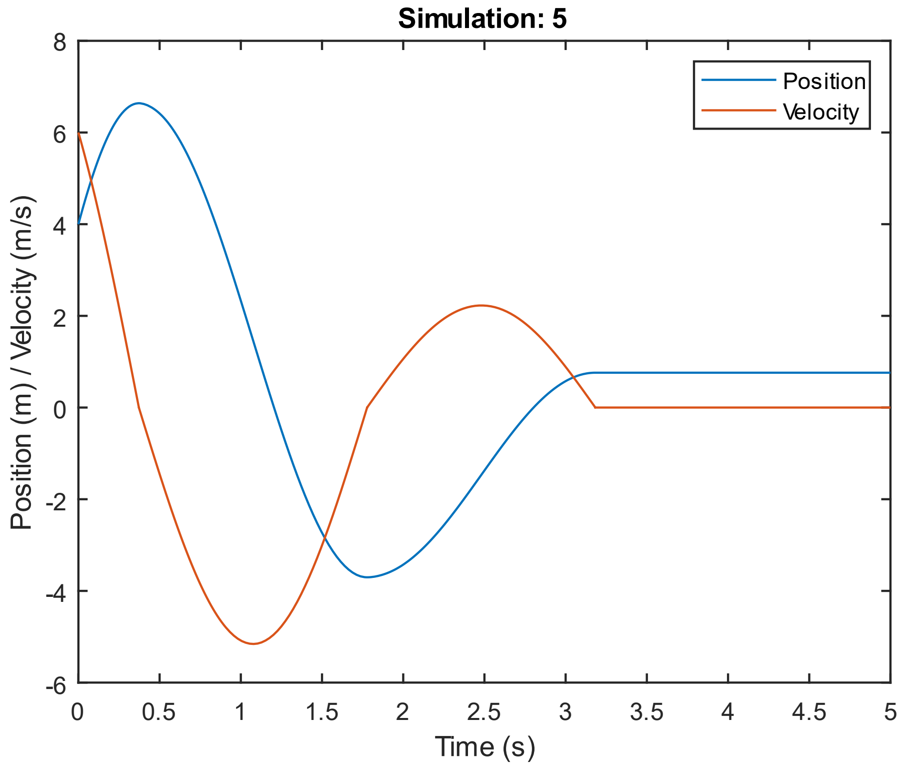
- Προσομοίωση 4 :





- Προσομοίωση 5:





Στα φασικά πορτραίτα φαίνεται όταν φτάνουν στην ταχύτητα 0 «αλλάζουν» ημικύκλιο, μέχρι τελικά να μπει στην περιοχή $-\frac{m\mu g}{k} < x_1 < \frac{m\mu g}{k}$ με ταχύτητα 0.

Ένας γρήγορος τρόπος για να βρούμε στο περίπου τον χρόνο που θέλει το σύστημα για να σταματήσει είναι, επειδή κάνει τον ίδιο χρόνο για κάθε ταλάντωση, να βρούμε το πόσες ταλαντώσεις θα κάνει. Γι'αυτό καταρχάς βρίσκουμε την αρχική ακτίνα του ημικυκλίου από τις αρχικές τιμές στον τύπο $\sqrt{(x_1 + \frac{\mu m g}{k})^2 \ + {x_2}^2} = r$ και μετά βρίσκουμε το μέγιστο n για να ισχύει $r - 2(n-1)\frac{m\mu g}{k} > 0$. Αυτή η σχέση δείχνει ουσιαστικά πόσο χάνεται από την ακτίνα κάθε φορά που αλλάζει πρόσημο η ταχύτητα. Το n είναι δηλαδή οι ημιταλαντώσεις, οπότε πολλαπλασιάζοντας το με το $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = 1.4\ seconds$ βρίσκεις τον χρόνο που θα κάνει αν η αρχική του θέση είναι με ταχύτητα 0. Άρα υπάρχει μέχρι και 1.4 δευτερόλεπτα λάθος αν είναι κάπου μέσα στην τροχιά.

Τμήμα Β

Αρχείο: part2.m

Ερώτημα i)

Φτιάχνουμε ελεγκτή με μέθοδο ολίσθησης ώστε να επιτυγχάνεται η παρακολούθηση της επιθυμιτής τροχιάς x_d. Για το $1^{ο}$ σενάριο έχουμε:

$$f(x) = \left(\kappa + \Delta\kappa\left(1 - e^{-\beta t}\right)\right) x(1 + \alpha x^2)$$

και η δυναμική του συστήματος είναι:

$$m\ddot{x} + \mu mgsign(\dot{x}) + f(x) = u$$

Οι μεταβλητές κατάστασεις:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}, \begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = \frac{u - f(x) - m\mu gsign(\dot{x})}{m} \end{cases}$$

Οι πίνακες A και B άρα είναι $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,αν θεωρήσουμε το $f(x)$ άγνωστο, και $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Πριν ξεκινήσουμε με τον ελεγκτή, πρέπει να βεβαιωθούμε ότι είναι ελέγξιμο το σύστημα.
Έχουμε: $M = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, άρα ελέγξιμο.

Ορίζουμε σφάλμα παρακολούθησης $e = x - x_d$,$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x_d}$ και επιφάνεια ολίσθησης $s = \dot{e} + \lambda e$,$\dot{s} = \ddot{e} + \lambda\dot{e} = \ddot{x} - \ddot{x_d} + \lambda\dot{e} = \frac{u - f(x) - m\mu g sign(\dot{x})}{m} - \ddot{x_d} + \lambda\dot{e}$.

Παίρνω $\dot{s} = 0 \Rightarrow u_{eq} = m\mu g sign(\dot{x}) + f(x) + m(\ddot{x_d} + \lambda\dot{e})$ και επιλέγω ισοδύναμο νόμο ελέγχου:

$$\hat{u}_{eq} = \widehat{m}\hat{\mu} g sign(\dot{x}) + \hat{f}(x) + \widehat{m}(\ddot{x_d} + \lambda\dot{e}) \ .$$

Νόμος ελέγχου: $u = \hat{u}_{eq} - p(x, \dot{x}) sign(s)$.

Από την δυναμική άρα:

$$m\ddot{x} + m\mu g sign(\dot{x}) + f(x) = \\ = \widehat{m}\hat{\mu} g sign(\dot{x}) + \hat{f}(x) + \widehat{m}(\ddot{x_d} + \lambda\dot{e}) - p sign(s)$$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$

$$m s\dot{s} = s\big[(\widehat{m}\hat{\mu} - m\mu) g sign(\dot{x}) + \big(\hat{f} - f\big) \\ + (\widehat{m} - m)(\ddot{x_d} + \lambda\dot{e})\big] - p|s|$$

Βρίσκω άνω όρια για τις άγνωστες παραμέτρους:

- $0.5 \leq m \leq 2 \Rightarrow \widehat{m} = 1.25$

άρα $|\widehat{m} - m| = |1.25 - m| \leq 0.75$.

- $0.25 \leq \mu \leq 1 \Rightarrow 0.125 \leq \widehat{m}\mu \leq 2 \Rightarrow \hat{\mu} = 0.85$

άρα $|\widehat{m}\hat{\mu} - m\mu|$ = $|1.0625 - m\mu| \leq 0.9375$.

- $0 \leq 1 - e^{-\beta t} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \Delta\kappa\left(1 - e^{-\beta t}\right) \leq 1 \Rightarrow$

$$4 \leq \kappa + \Delta\kappa\left(1 - e^{-\beta t}\right) \leq 11 \Rightarrow$$

$$2 \leq \alpha(\kappa + \Delta\kappa\left(1 - e^{-\beta t}\right)) \leq 11$$

άρα

$$f(x) = \left(\kappa + \Delta\kappa\left(1 - e^{-\beta t}\right)\right)x + \alpha(\kappa + \Delta\kappa\left(1 - e^{-\beta t}\right))x^3$$

$$\hat{f}(x) = 7.5x + 6.5x^3$$

άρα $\left|\hat{f} - f\right| = |x||7.5 - (\ldots)| + |x^3||6.5 - (\ldots)|$

$$\leq 3.5|x| + 4.5|x^3|$$

Οπότε έτσι βρήκα τις απαραίτητες παραμέτρους.

Από την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$ms\dot{s} \leq s\left[|\widehat{m}\hat{\mu} - m\mu|g + \left|\hat{f} - f\right| + |\widehat{m} - m||\ddot{x_d} + \lambda\dot{e}| - p\right] \Rightarrow$$

$$ms\dot{s} \leq s[0.9375g + 3.5|x| + 4.5|x|^3 + 0.75|\ddot{x_d} + \lambda\dot{e}| - p] \Rightarrow$$

$$p = 0.9375g + 3.5|x| + 4.5|x|^3 + 0.75|\ddot{x_d} + \lambda\dot{e}| + c$$

άρα $s\dot{s} \leq -\frac{c}{m}|s|$, $m > 0$, $c > 0$

Έτσι στην Lyapunov $V = \frac{1}{2}s^2 > 0$,$\dot{V} = s\dot{s} \leq -\frac{c}{m}|s| \leq 0$,

καταφέραμε ασυμπτωτική ευστάθεια για $x \to x_d$ με $u = 1.0625gsign(\dot{x}) + 7.5|x| + 6.5|x|^3 + 1.25|\ddot{x_d} + \lambda\dot{e}|$.

Για την επιλογή των εκτιμήσεων των παραμέτρων διαλέχτηκε η μέση τιμή των ορίων.

Στο 2° σενάριο όπου γνωρίζουμε μόνο ότι

$$|f(x)| \leq 22|x|^3$$

δεν αλλάζουν πολλά μόνο το

$$\hat{u}_{eq} = \widehat{m}\hat{\mu}gsign(\dot{x}) + \widehat{m}(\ddot{x_d} + \lambda\dot{e})$$

$$ms\dot{s} = s[(\widehat{m}\hat{\mu} - m\mu)gsign(\dot{x}) + (-f) + (\widehat{m} - m)(\ddot{x_d} + \lambda\dot{e})] - p|s|$$

$$|-f| \leq 22|x|^3$$

$$ms\dot{s} \leq s[0.9375g + 22|x|^3 + 0.75|\ddot{x_d} + \lambda\dot{e}| - p] \Rightarrow$$

$$p = 0.9375g + 22|x|^3 + 0.75|\ddot{x_d} + \lambda\dot{e}| + c$$

και πετυχαίνουμε ασυμπτωτική ευστάθεια για $x \to x_d$ με $u = 1.0625gsign(\dot{x}) + 22|x|^3 + 1.25|\ddot{x_d} + \lambda\dot{e}|$.

Ερώτημα ii)

Φτιάχνουμε ελεγκτή με την μέθοδο επανασχεδίασης Lyapunov ώστε να επιτυγχάνεται η παρακολούθηση της επιθυμιτής τροχιάς x_d. Όπως στο προηγούμενο, το σύστημα είναι ελέγξιμο.

Έχουμε μεταβλητές καταστάσεις:

$$e_1 = x - x_d \,, e_2 = \dot{x} - \dot{x_d}$$

$$\dot{e_1} = e_2 \,, \dot{e_2} = \frac{1}{m}\big(u - m\mu g sign(e_2 + \dot{x_d}) - f(e_1)\big) - \ddot{x_d}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e_1} \\ \dot{e_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e + \frac{1}{m}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \frac{1}{m}\begin{bmatrix} 0 \\ -m\mu g sign(e_2 + \dot{x_d}) - f(e_1) - \ddot{x_d} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{e} = Ae + \frac{B}{m}(u - \varphi(e) - m\ddot{x_d})$$

όπου $\varphi(e) = \ m\mu g sign(e_2 + \dot{x_d}) + f(e_1)$

Θεωρούμε $u = \ \hat{\varphi}(e) + (v + \delta v)\widehat{m}$, όπου $\hat{\varphi}(e) = \widehat{m}\hat{\mu} g sign(e_2 + \dot{x_d}) + \hat{f}(e_1)$. Θέτουμε $v = -F^T e$.

Έχουμε $\dot{e} = Ae + \frac{B}{m}(\hat{\varphi}(e) - \varphi(e) + (v + \delta v)\widehat{m} - m\ddot{x_d}) =$

$$= (A - BF^T)e + B\left(\frac{\Delta\varphi}{m} + \left(\frac{\widehat{m}}{m} - 1\right)(v + \delta v) + \delta v - \ddot{x_d}\right) =$$

$$= \tilde{A}e + B(n(e) + \delta v - \ddot{x_d}), όπου\ n = \frac{\Delta\varphi}{m} + \left(\frac{\widehat{m}}{m} - 1\right)(v + \delta v)$$

Παίρνουμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V(e) = \ e^T P e \,, όπου\ P^T = P > 0$$

Από την εξίσωσγη Lyapunov $\tilde{A}^T P + P\tilde{A} = -Q, όπου$

$$Q^T = Q > 0$$

Έχουμε:

$$\dot{V}(e) = \cdots = -e^TQe + 2e^TPBn + 2e^TPB\delta v - 2e^TPB\ddot{x_d} \leq$$

$$\leq -e^TQe + 2(\|e^TPB\|\rho + e^TPB\delta v) - 2\|e^TPB\|\ddot{x_d} < 0$$

θεωρώντας το n φραγμένο. Από το παραπάνω παίρνουμε

$$\delta v = -\rho sign(e^TPB)\,.$$

Αρκεί τώρα να αποδείξω ότι το n είναι φραγμένο.

$$n(e) = \frac{\Delta\varphi}{m} + \left(\frac{\widehat{m}}{m} - 1\right)(v + \delta v) =$$

$$= \left(\frac{\widehat{m}}{m} - 1\right)\left(-F^Te - \rho sign(e^TPB)\right) + \frac{\widehat{\varphi}(e) - \varphi(e)}{m}\ .$$

Για να υπολογιστεί το ρ θέλουμε το $\left|\frac{\widehat{m}}{m} - 1\right| < 1$, άρα

- $\widehat{m} = 0.75 \Rightarrow -0.625 < \left(\frac{\widehat{m}}{m} - 1\right) < 0.5 \Rightarrow$

$$\left|\frac{\widehat{m}}{m} - 1\right| < 0.625$$

Για το $\hat{\varphi}(e) - \varphi(e)$ έχουμε:

- $\frac{3}{16} \leq \widehat{m}\mu \leq 0.75 \Rightarrow \hat{\mu} = 0.46875 \Rightarrow |\widehat{m}\hat{\mu} - m\mu| \leq 1{,}6484375$
- όπως στο προηγούμενο ερώτημα για το 1ο σενάριο έχουμε $|\hat{f} - f| \leq 3.5|x| + 4.5|x^3|$, και για το 2ο διαγράφουμε το $\hat{f}$ και έχουμε $|-f| \leq 22|x|^3$, όπου $x = e_1 + x_d$.

Από τις υπολογισμένες εκτιμήσεις έχουμε:

$$|n| \leq 0.625(\|F^T e\| + \rho) + 2(1.6484375g + \begin{cases} 3.5|x| + 4.5|x|^3 \\ 22|x|^3 \end{cases}) = \rho$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{0.375}[0.625\|F^T e\| + 2(1.6484375g + \begin{cases} 3.5|x| + 4.5|x|^3 \\ 22|x|^3 \end{cases})]$$

ανάλογα με το κάθε σενάριο.

Έτσι έχουμε βρει τον ελεγκτή ώστε να καταφέρουμε

ασυμπτωτική ευστάθεια για $x \rightarrow x_d$ με

$$u = \hat{\varphi}(e) + (v + \delta v)\hat{m}$$

, όπου $\hat{\varphi}(e) = \hat{m}\hat{\mu}g sign(e_2 + \dot{x_d}) + \hat{f}(e_1)$ (στην περίπτωση του 2ου σεναρίου διαγράφουμε το $\hat{f}$), $v = -F^T e$, $\delta v = -\rho sign(e^T PB)$.

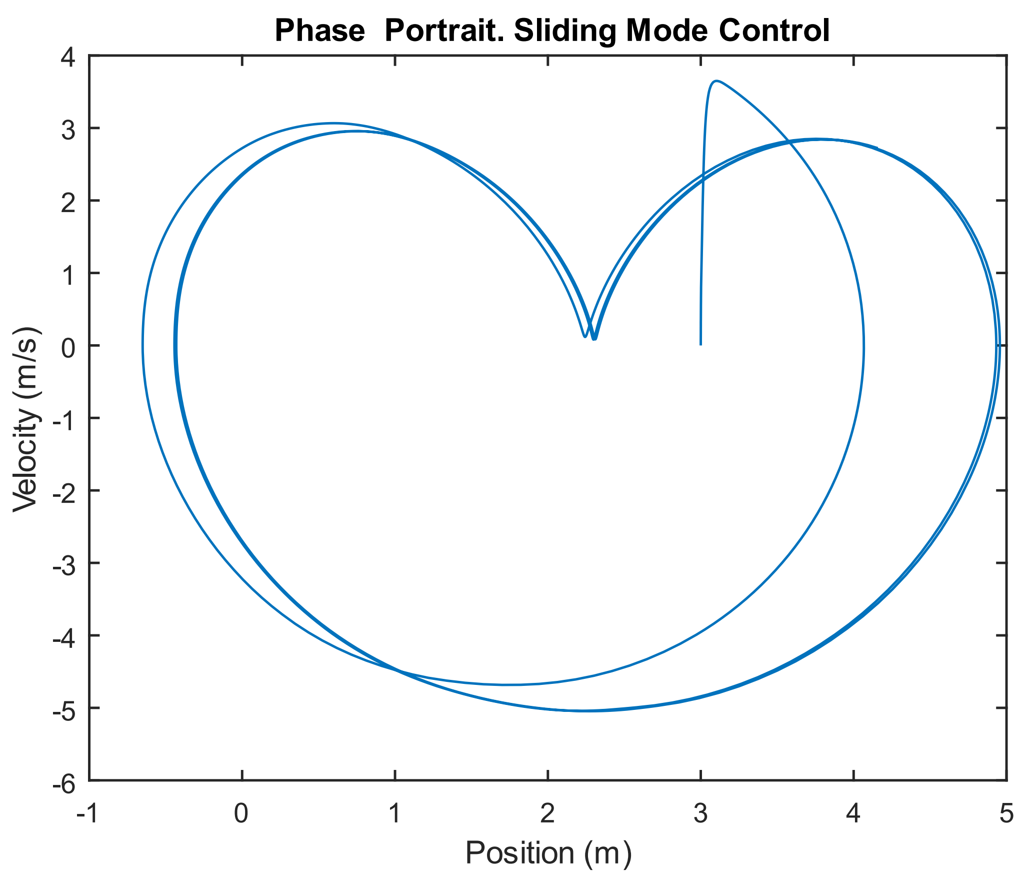
Για το F , P επιλέγουμε $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, ώστε να ισχύει

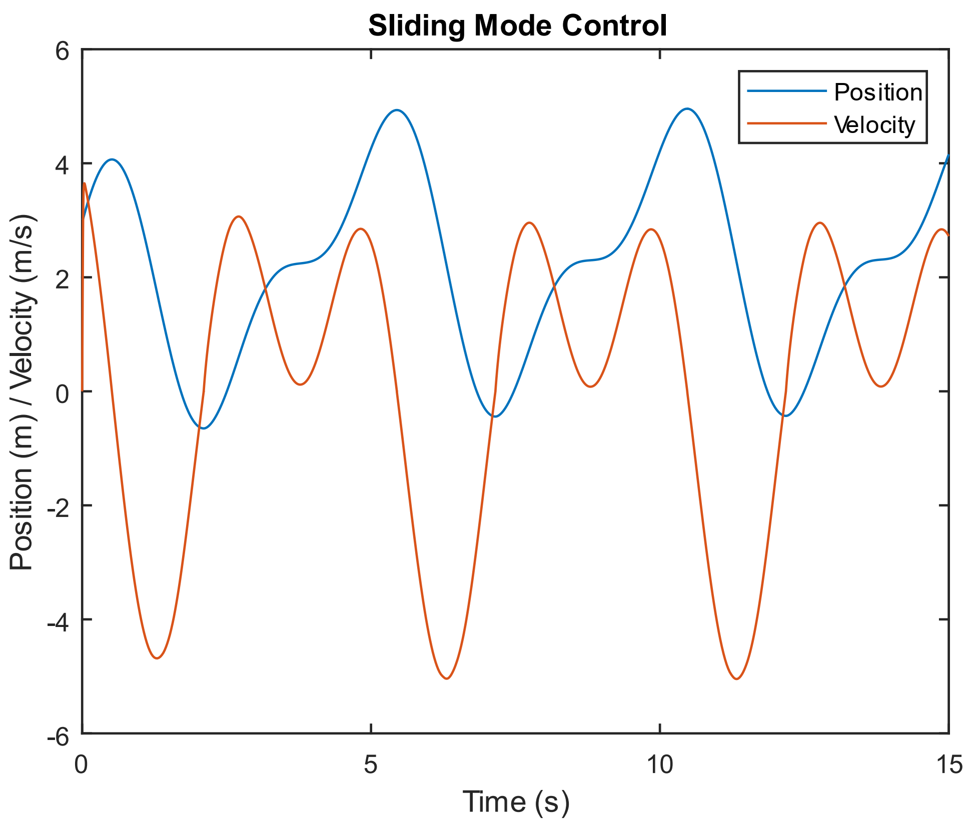
η εξίσωση Lyapunov για $Q = I$ και $P^T = P > 0$.

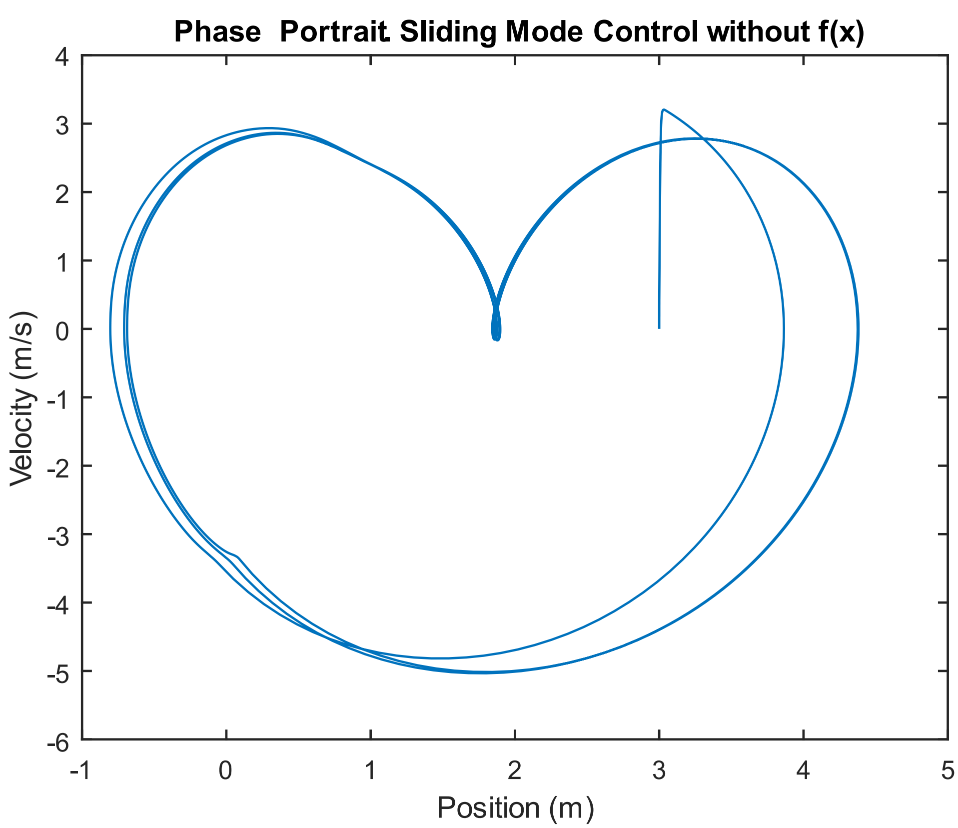
Ερώτημα iii)

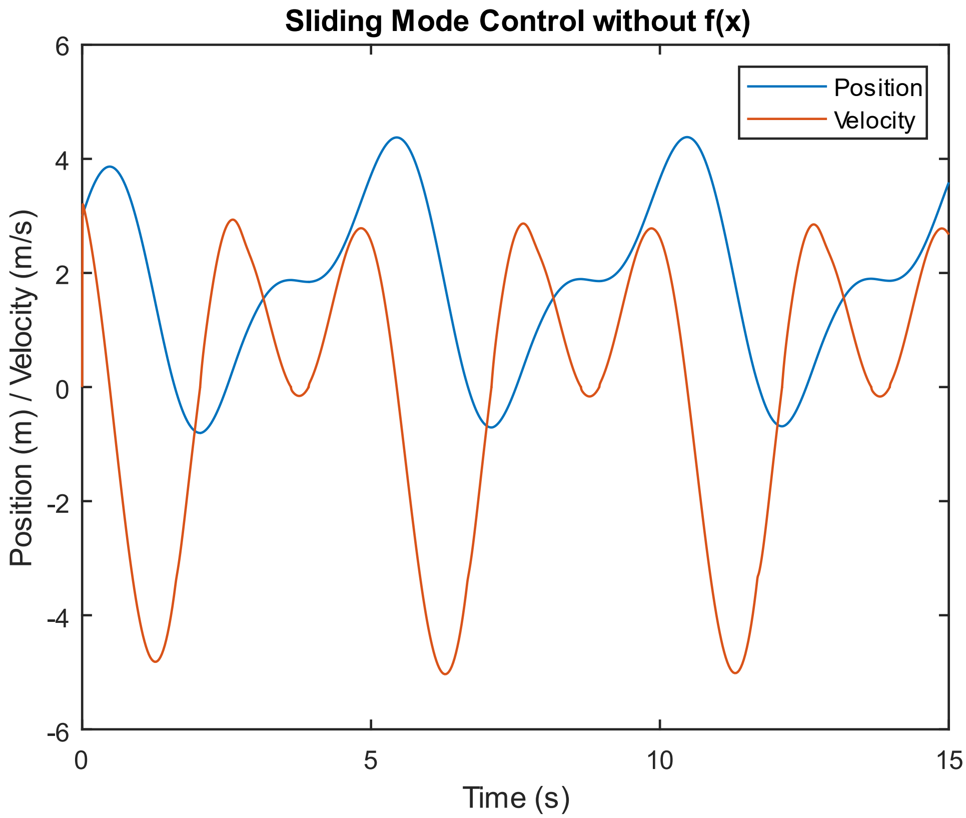
Η τροχιά που θα παρακολουθήσουμε είναι η $x_d = 2 + \sin 2.5t + 2 \cos 1.25t$ με δύναμη ελατηρίου $f(x) = (5 + 0.6e^{-0.045t})x(1 + 0.9x^2)$.

Η προσομοίωση με τον ελεγκτή ολίσθησης:



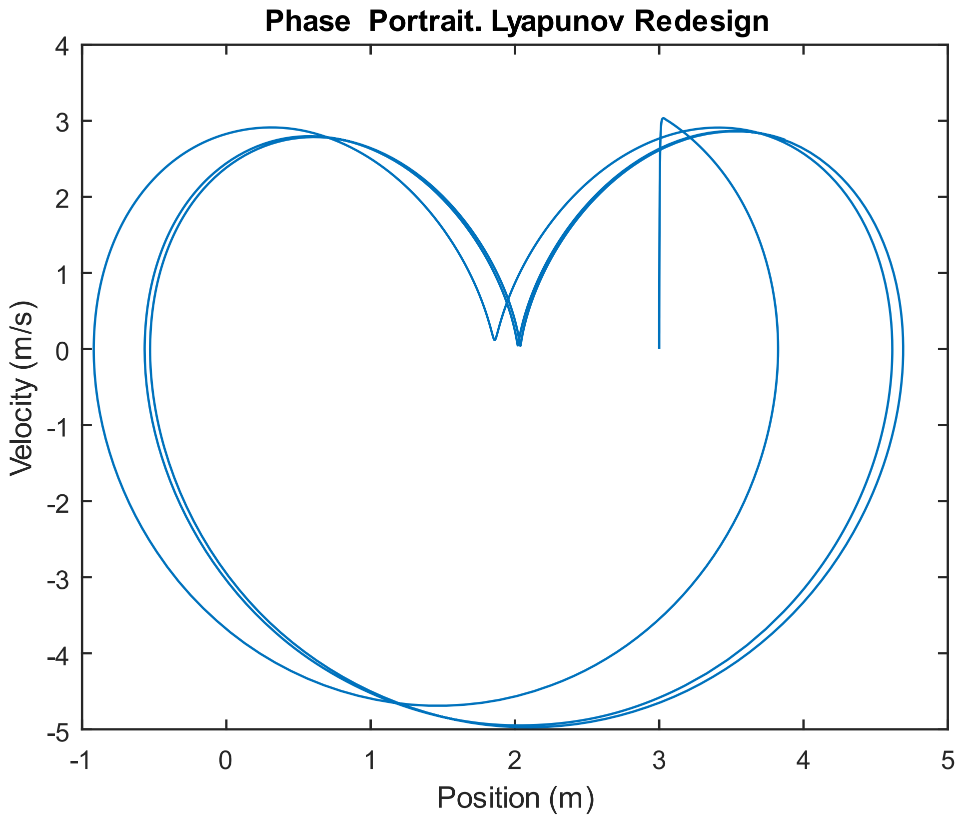

Sliding Mode Control
Position
Velocity
Position (m) / Velocity (m/s)
Time (s)
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
5
10
15

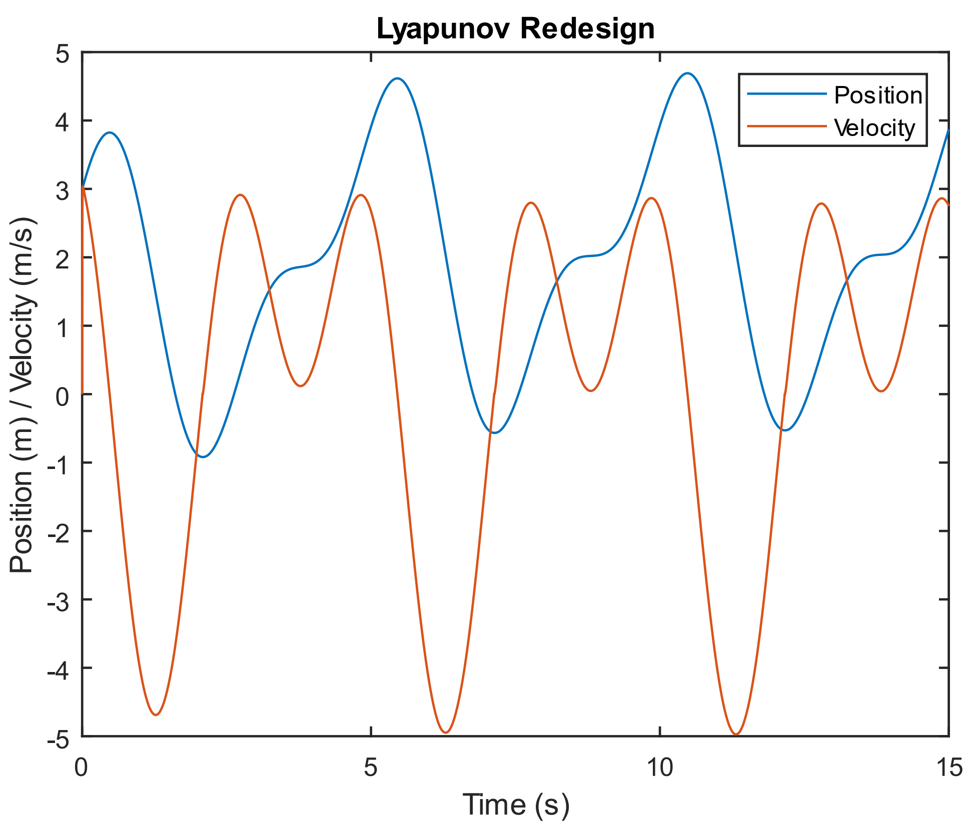

Phase Portrait Sliding Mode Control without f(x)
Velocity (m/s)
Position (m)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-1
0
1
2
3
4
5

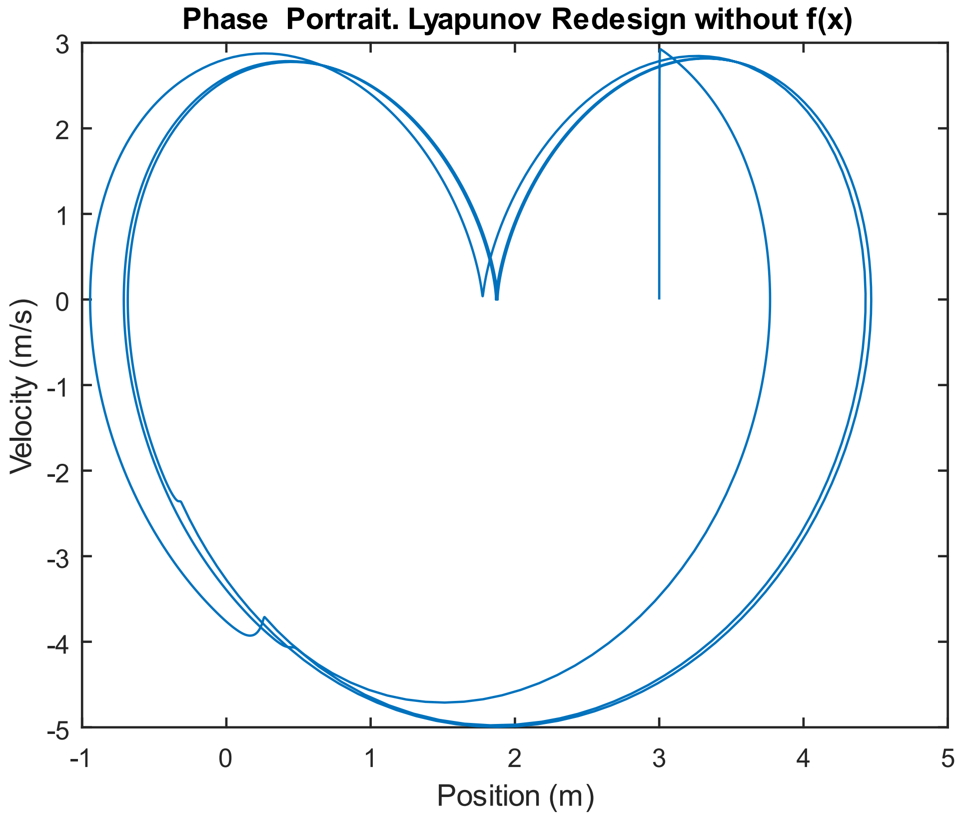


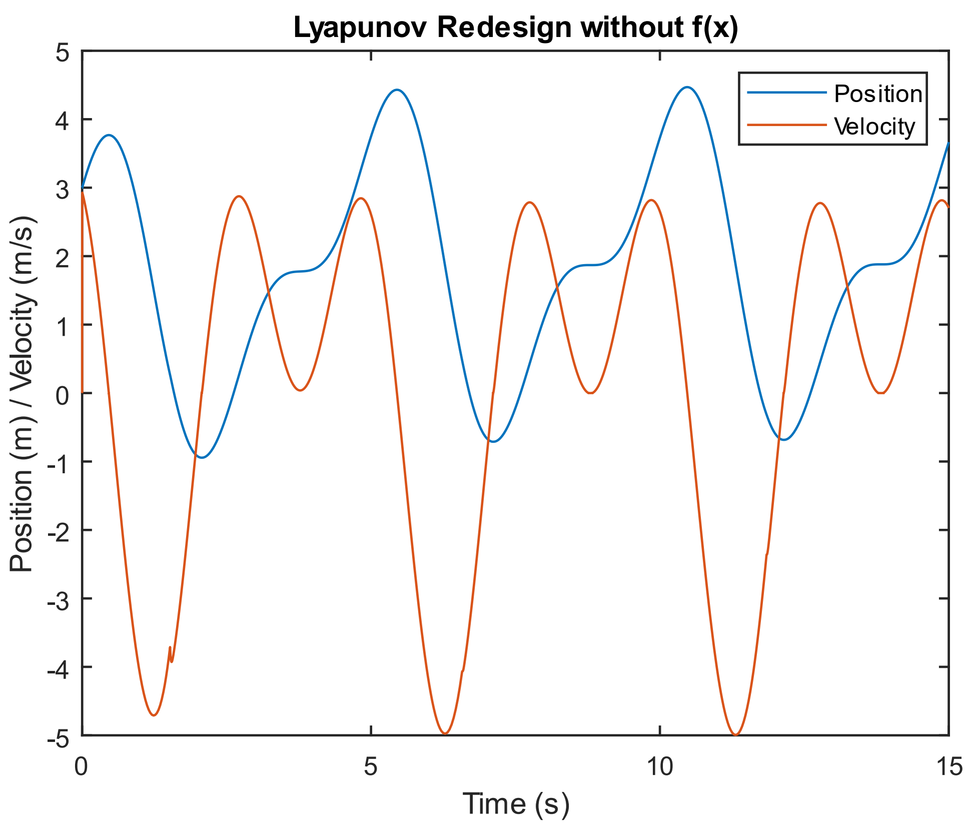
Παρατηρούμε ότι με άγνωστη δύναμη ελατηρίου εμφανίζονται μικρά φαινόμενα chattering επειδή η τιμή του p δεν είναι αρκετά κοντά στο σύστημα.

Οι προσομοιώσεις με τον ελεγκτή επανασχεδίασης Lyapunov:


Phase Portrait. Lyapunov Redesign
Velocity (m/s)
Position (m)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-1
0
1
2
3
4
5


Lyapunov Redesign
Position
Velocity
Position (m) / Velocity (m/s)
Time (s)
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
5
10
15


Phase Portrait. Lyapunov Redesign without f(x)
Velocity (m/s)
Position (m)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-1
0
1
2
3
4
5


Lyapunov Redesign without f(x)
Position
Velocity
Position (m) / Velocity (m/s)
Time (s)
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
5
10
15

Παρόμοια με τον προηγούμενο ελεγκτή, έχουμε φαινόμενα chattering στην περίπτωση με άγνωστη δύναμη ελατηρίου.

Ένα πλεονέκτημα του ελεγκτή ολίσθησης είναι ότι μπορούμε να αλλάξουμε την ταχύτητα ανταπόκρισης αλλάζοντας τις μεταβλητές λ και c. Από τον τύπο:

$$t \leq \frac{|s(0)|}{c}$$

όπου $s(0) = \dot{x}(0) - \dot{x_d}(0) + \lambda\big(x(0) - x_d(0)\big)$,με $\lambda \ = \ 1$ και $c = 1$ παίρνουμε:

$$t \leq 3.5sec$$

τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στην προσομοίωση.