ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

3η Εργαστηριακή Άσκηση

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

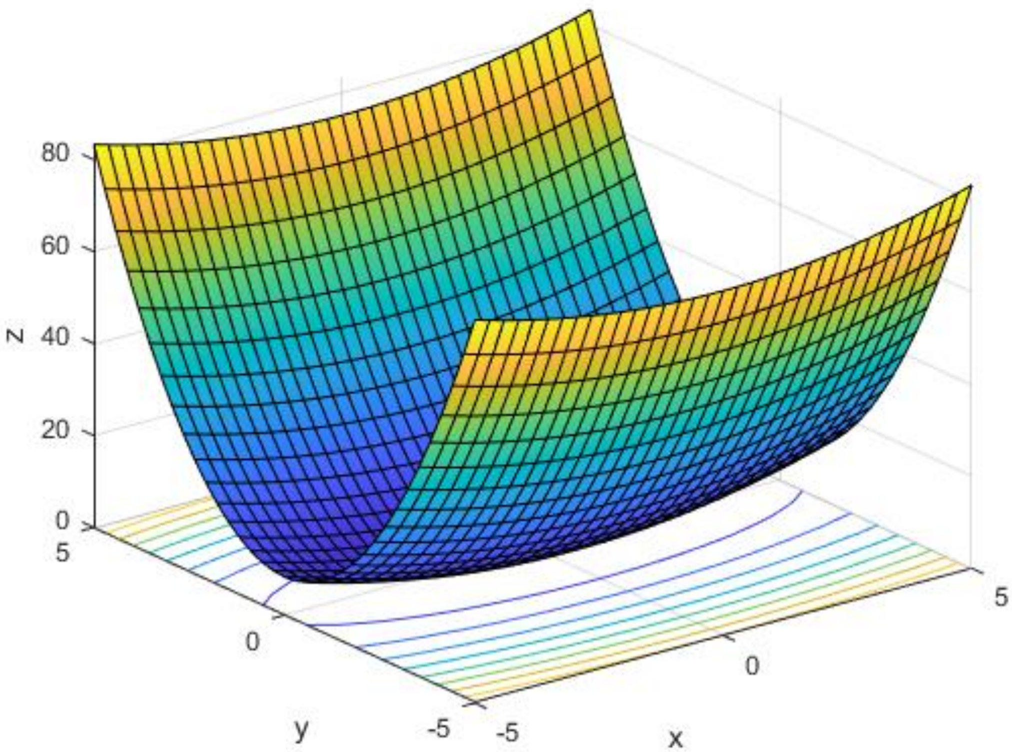
- Ονοματεπώνυμο: Κυπριανίδης Άρης-Ευτύχιος
- ΑΕΜ: 10086
- Email: akyprian@ece.auth.gr

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2022

Θέμα 1

Αρχεία: thema_1.m , steepest_descent.m

Η συνάρτηση μας είναι η $f(x) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2$.



Το ελάχιστο βρίσκεται στο σημείο (0,0). Η παράγωγος της συνάρτησης είναι: $\nabla f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x_1 \\ 6x_2 \end{cases}$. Για να δούμε αν θα συγκλίνει η συνάρτηση για βήμα γ_κ παίρνουμε:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla f(x_k) =>$$

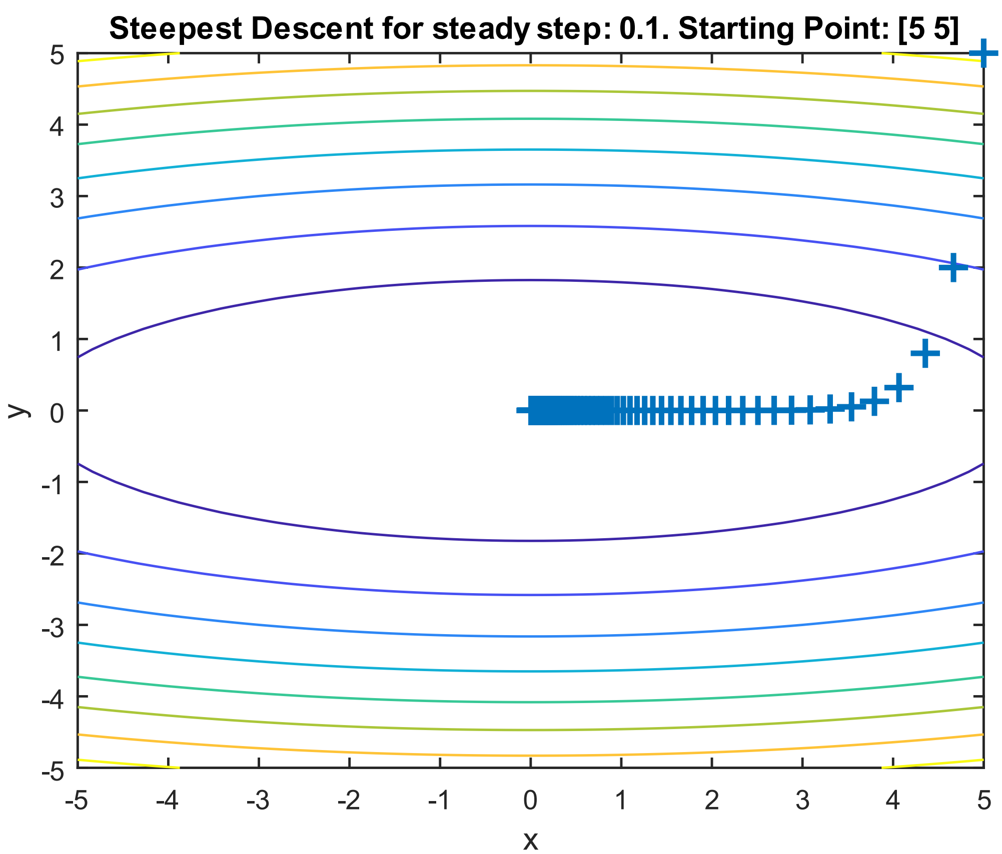
$$\begin{cases} x_{1,k+1} = x_{1,k}\left(1 - \frac{2\gamma_k}{3}\right) \\ x_{2,k+1} = x_{2,k}(1 - 6\gamma_k) \end{cases}$$

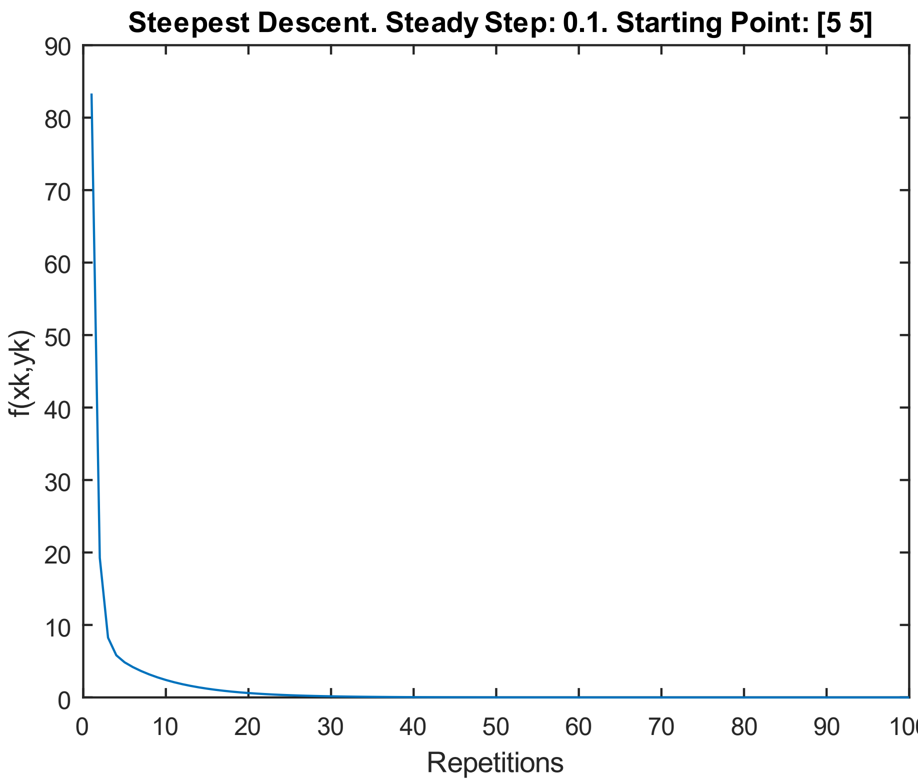
Για να συγκλίνει πρέπει $\frac{|x_{1,k+1}|}{|x_{1,k}|} < 1$ και $\frac{|x_{2,k+1}|}{|x_{2,k}|} < 1$, άρα $\left|1 - \frac{2\gamma_k}{3}\right| < 1$ => $\gamma_k < 3$ και $|1 - 6\gamma_k| < 1$ => $\gamma_k < \frac{1}{3}$.

Άρα για $\gamma_k < \frac{1}{3}$, η συνάρτηση συγκλίνει στο ελάχιστο.

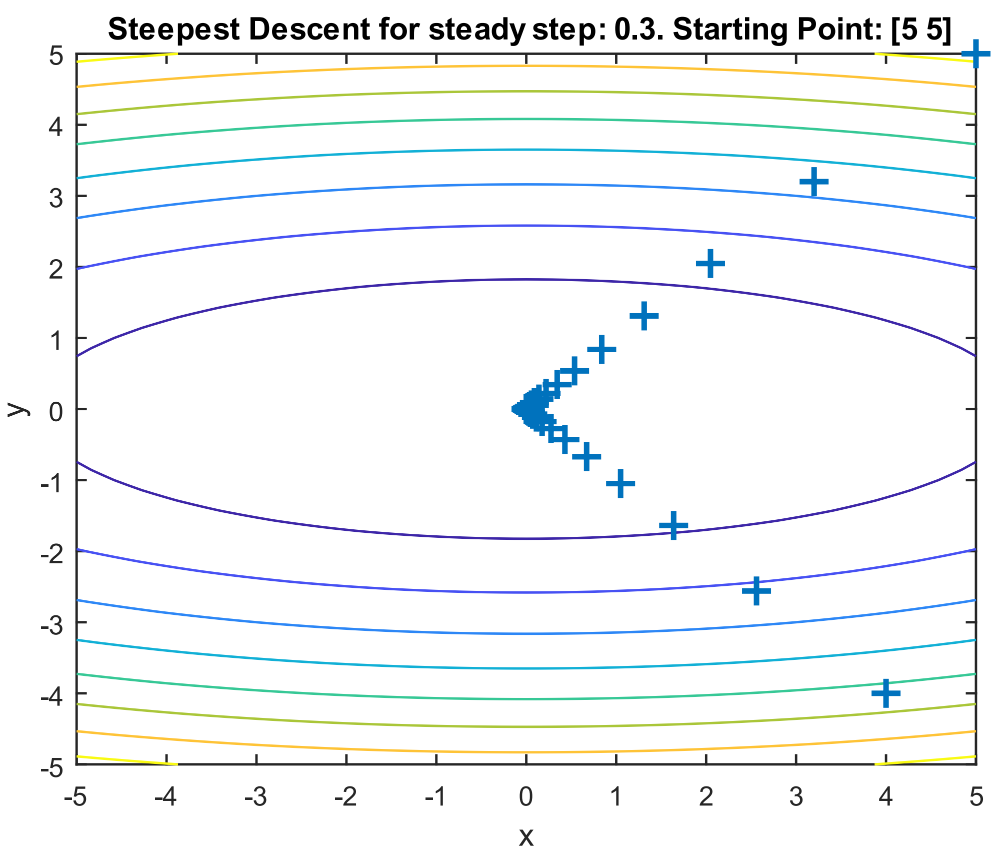
Οπότε για την μέθοδο μέγιστης καθόδου χωρίς προβολή με ε = 0.001 για το σημείο (5,5) έχουμε:

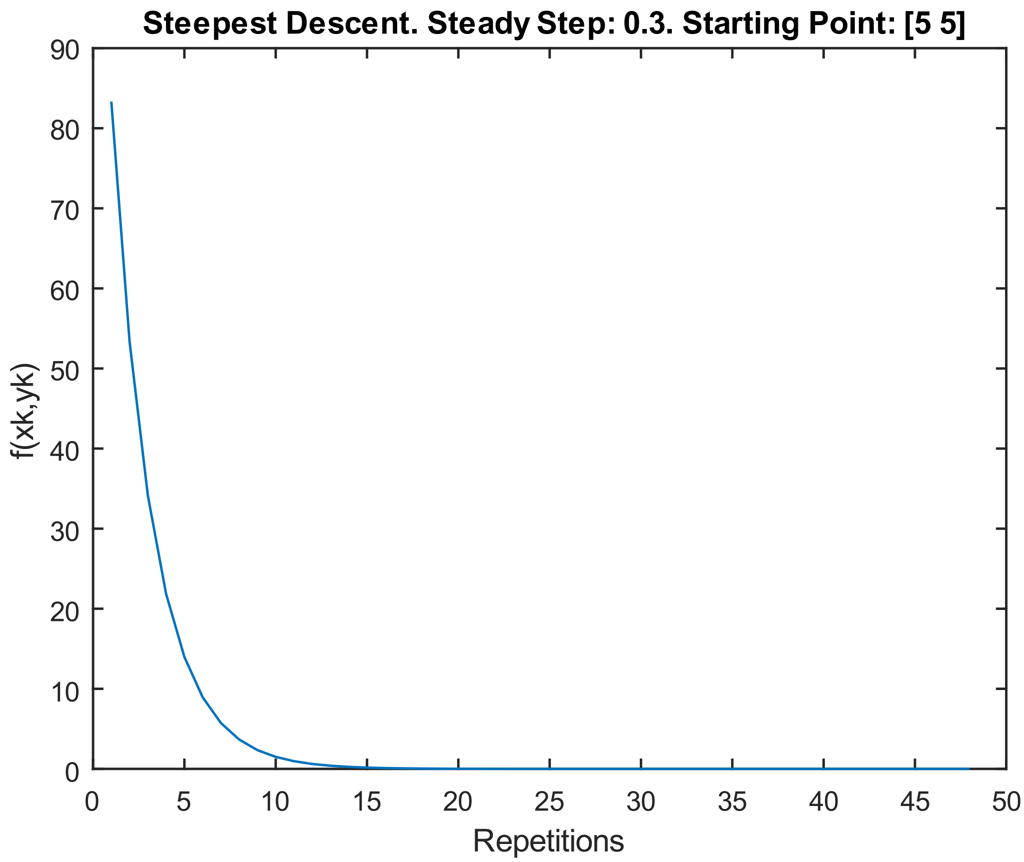
I. Για $\gamma_\kappa = 0.1$:



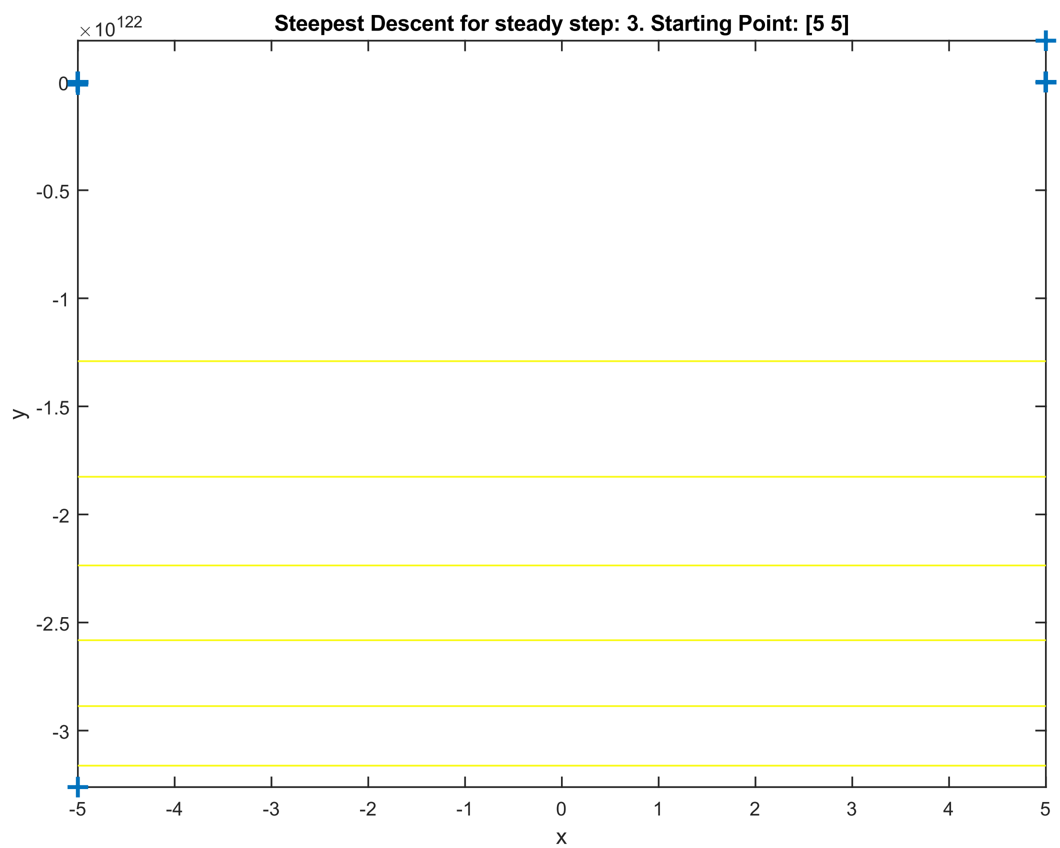


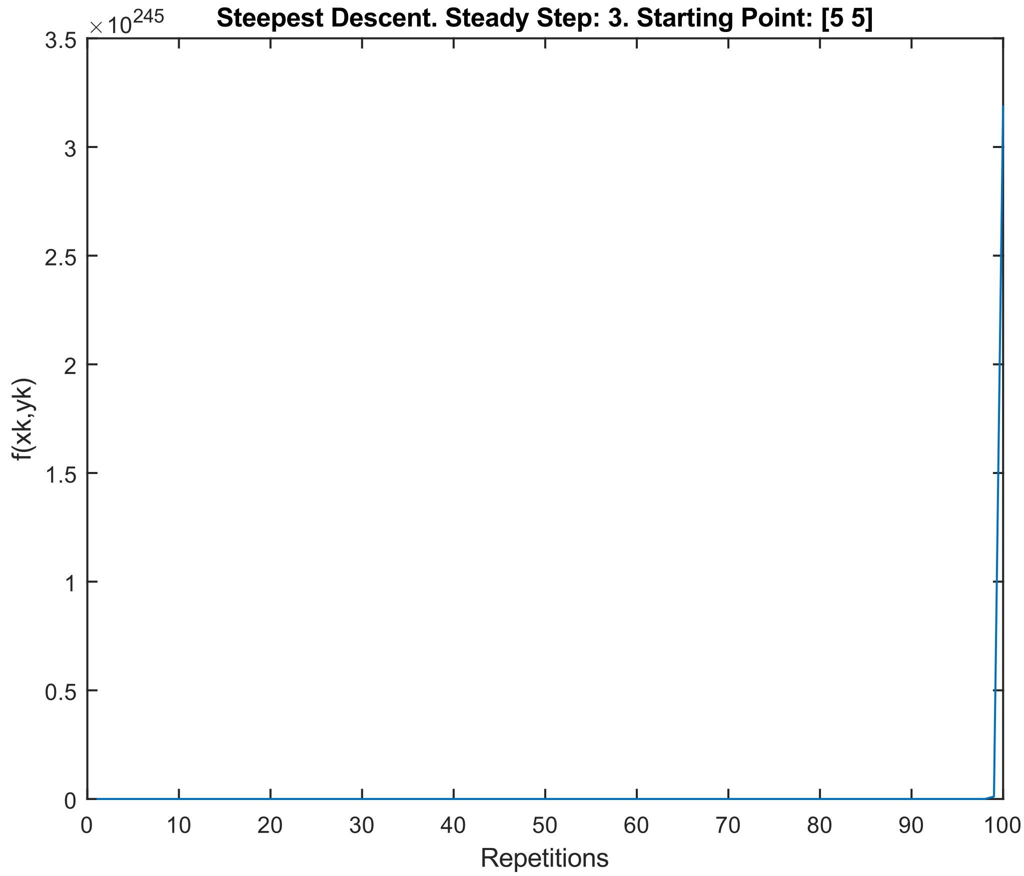
II. Για $\gamma_\kappa = 0.3$:



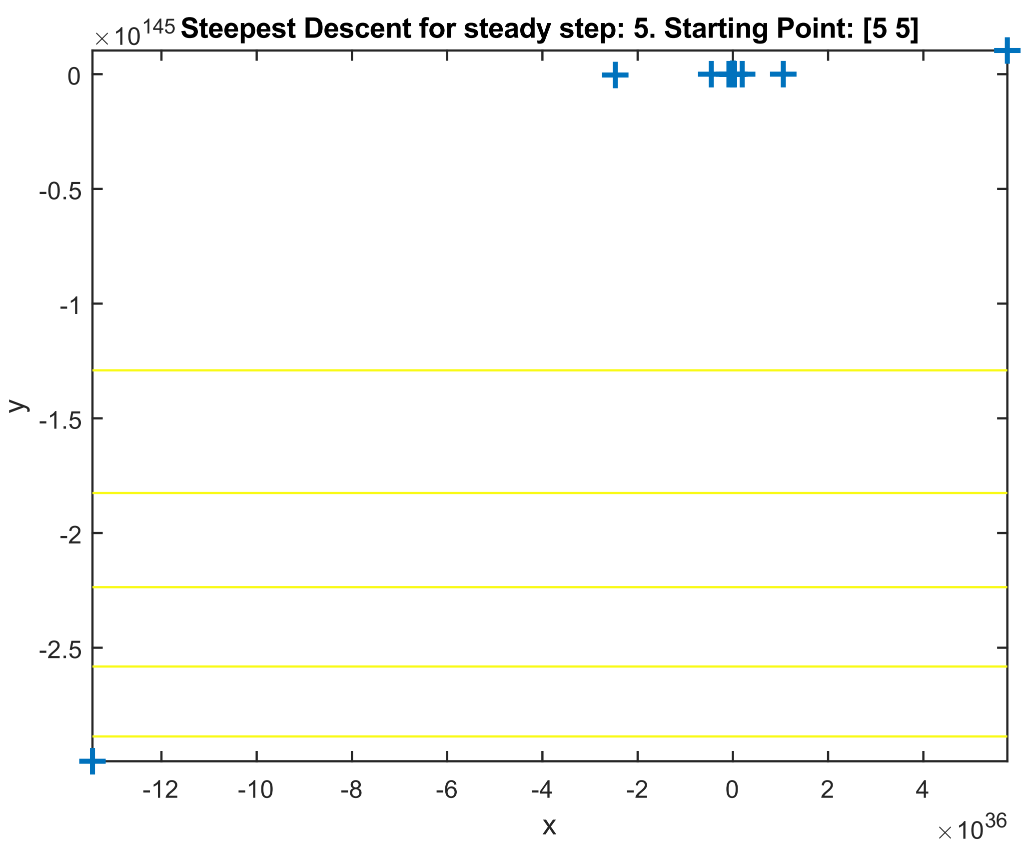


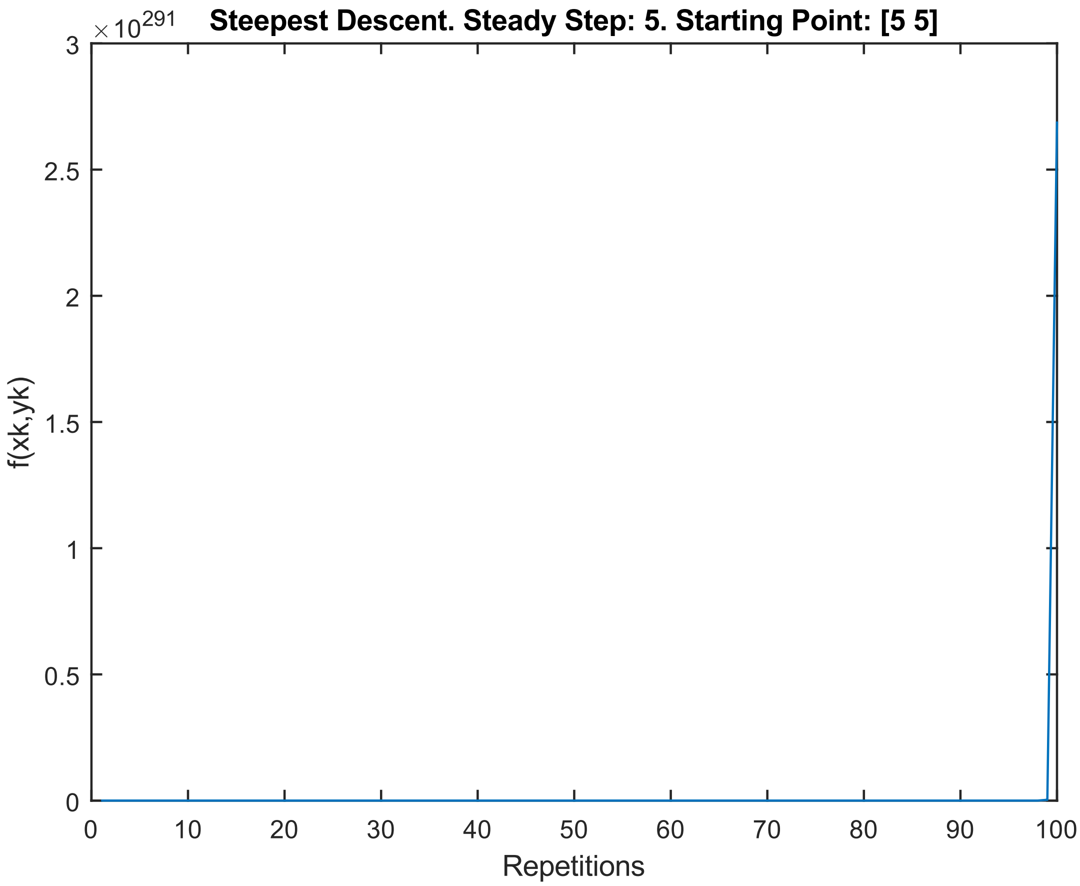
III. Για $\gamma_\kappa = 3$:





IV. Για $\gamma_\kappa = 5$:





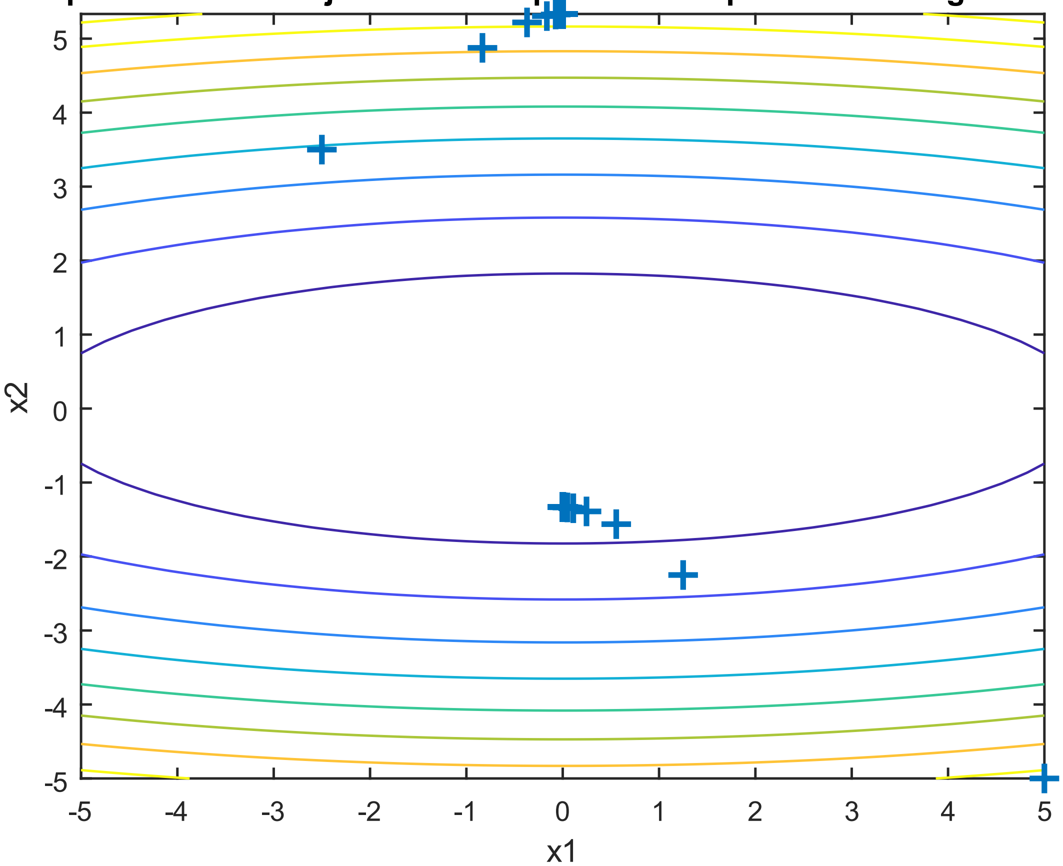
Παρατηρούμε ότι για τις τιμές 0.1 και 0.3 η συνάρτηση συγκλίνει ενώ για 3 και 5 όχι, όπως και αποδείξαμε παραπάνω. Στα διαγράμματα όπου x_k, y_k εννοούμε $x_{1,k}, x_{2,k}$.

Θέμα 2

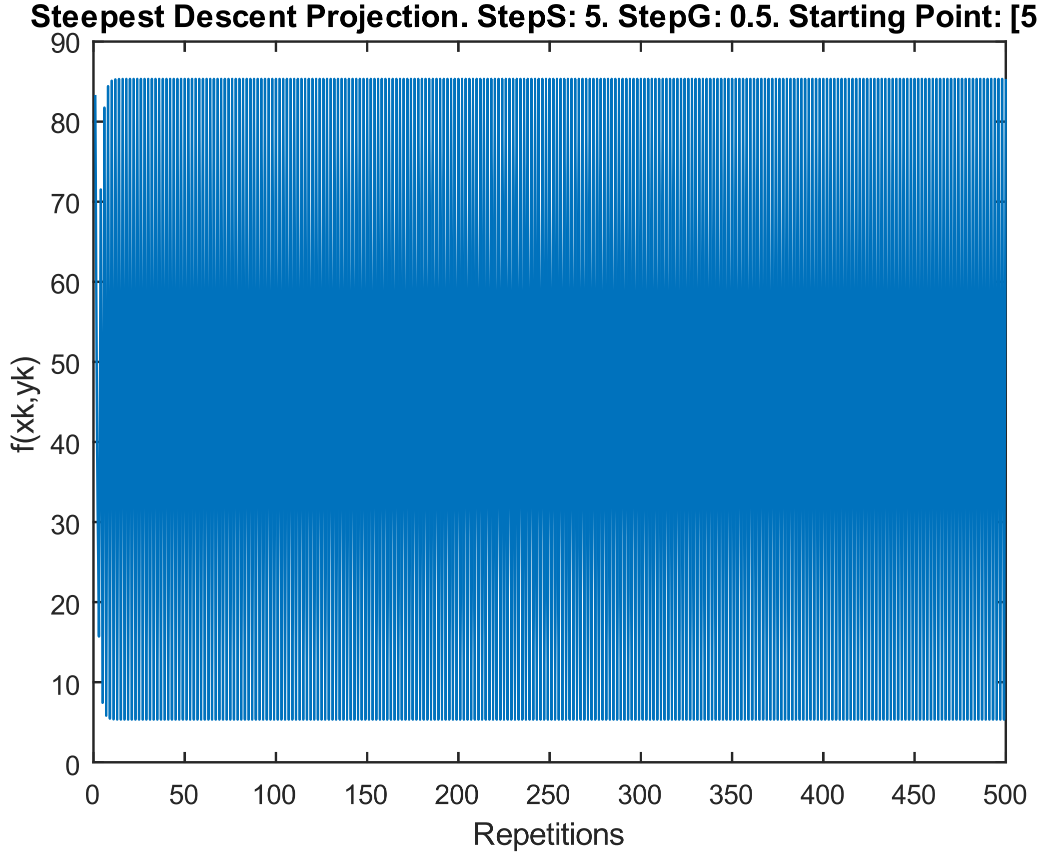
Αρχεία: thema_2.m , steepest_descent_projection.m

Για το θέμα 2 και τα επόμενα χρησιμοποιούμαι την μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή. Έχουμε $s_k = 5$, $\gamma_k = 0.5$, $\varepsilon = 0.01$, για το σημείο (5,-5) :

Steepest Descent Projection for stepS: 5 and stepG: 0.5. Starting Point: [5 -5]



Steepest Descent Projection. StepS: 5. StepG: 0.5. Starting Point: [5 -5]

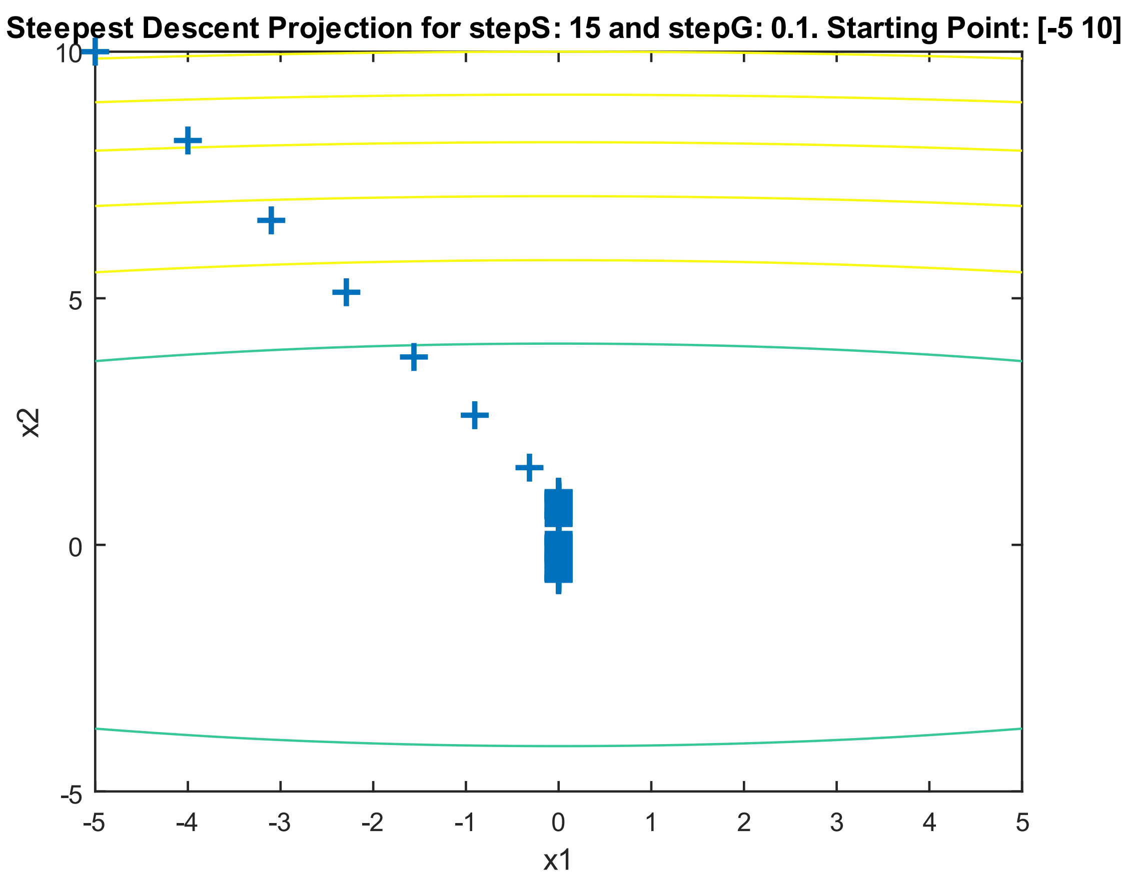


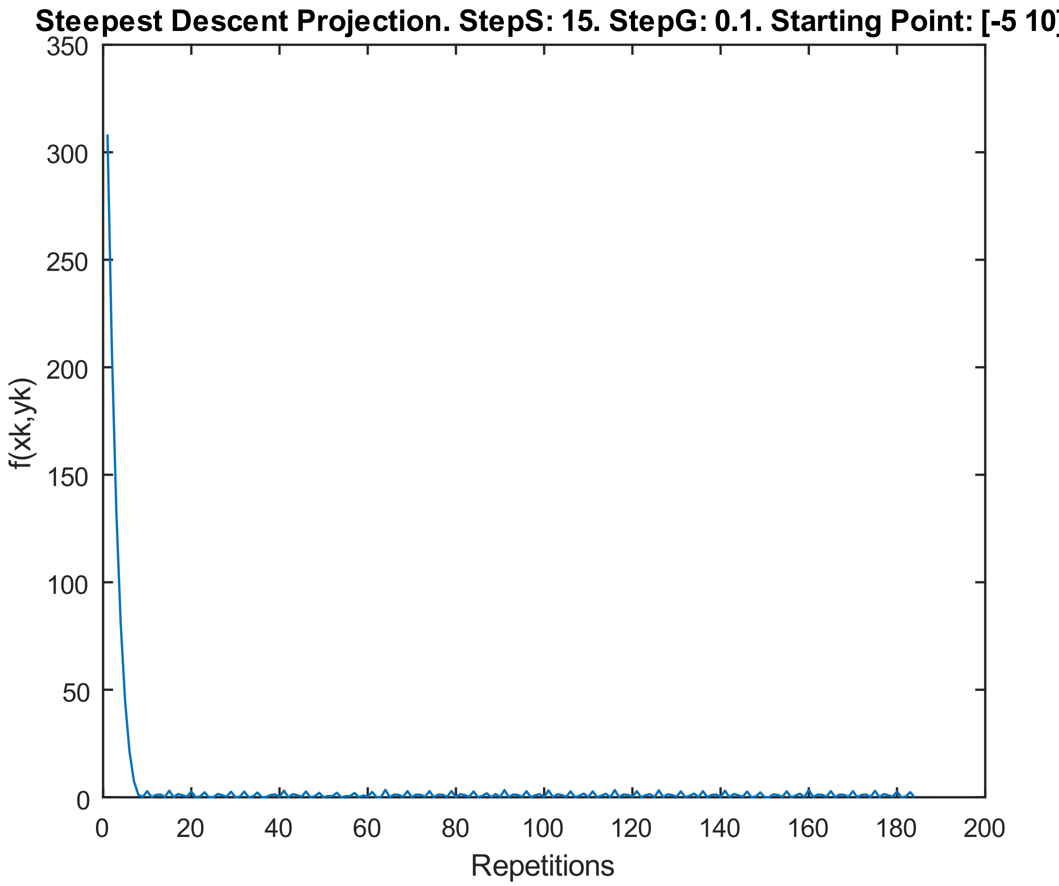
Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με το πρώτο θέμα για μεγάλο βήμα, αυτή η μέθοδος δεν ξεφεύγει στο άπειρο, αλλά μένει μέσα στους αρχικούς περιορισμούς $-10 < x_1 < 5$ και $-8 < x_2 < 12$. Παρόλα αυτά δεν καταφέρνει να συγκλίνει στο ελάχιστο, αλλά ταλαντώνεται σε δύο τιμές επ'άπειρον (έχουμε βάλει μέγιστες επαναλήψεις 500).

Θέμα 3

Αρχεία: thema_3.m , steepest_descent_projection.m

Έχουμε $s_k = 15$, $\gamma_k = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$, για το σημείο (-5,10) :



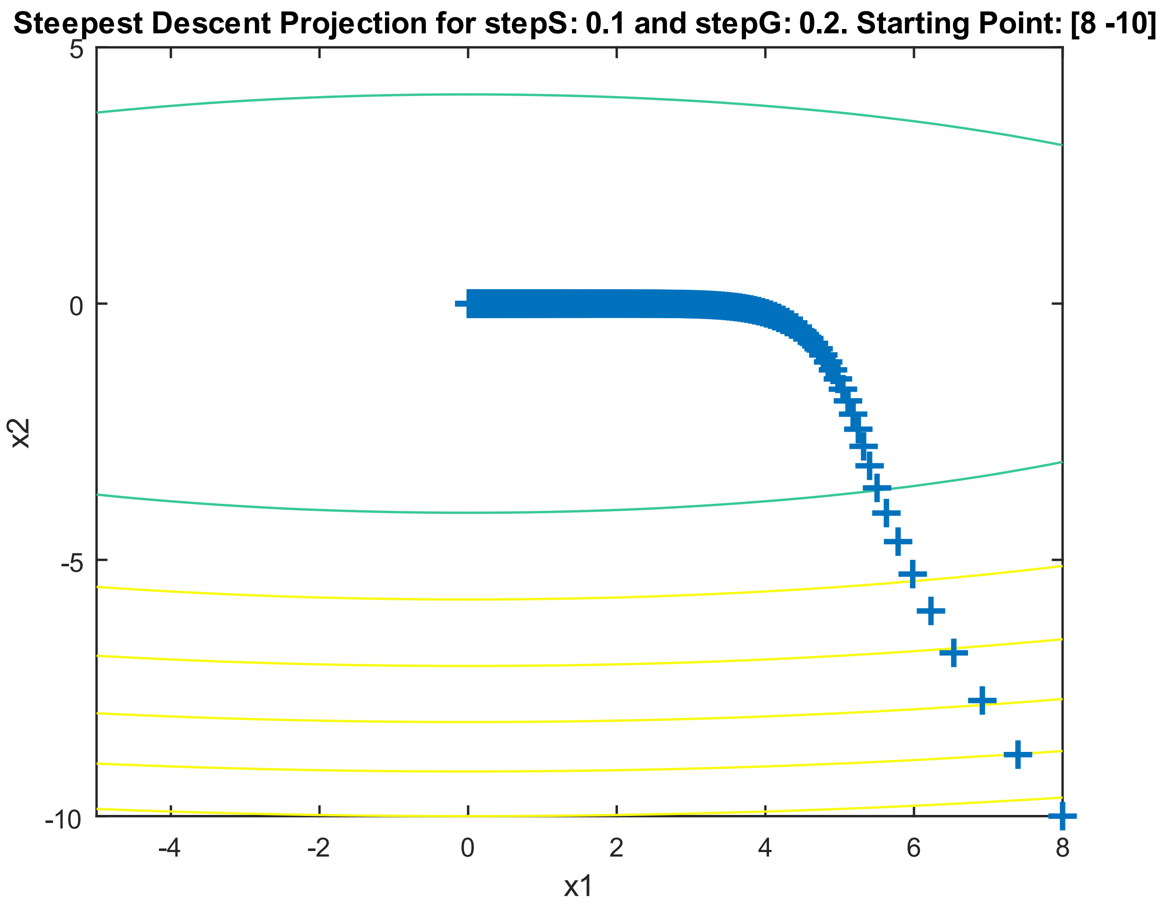


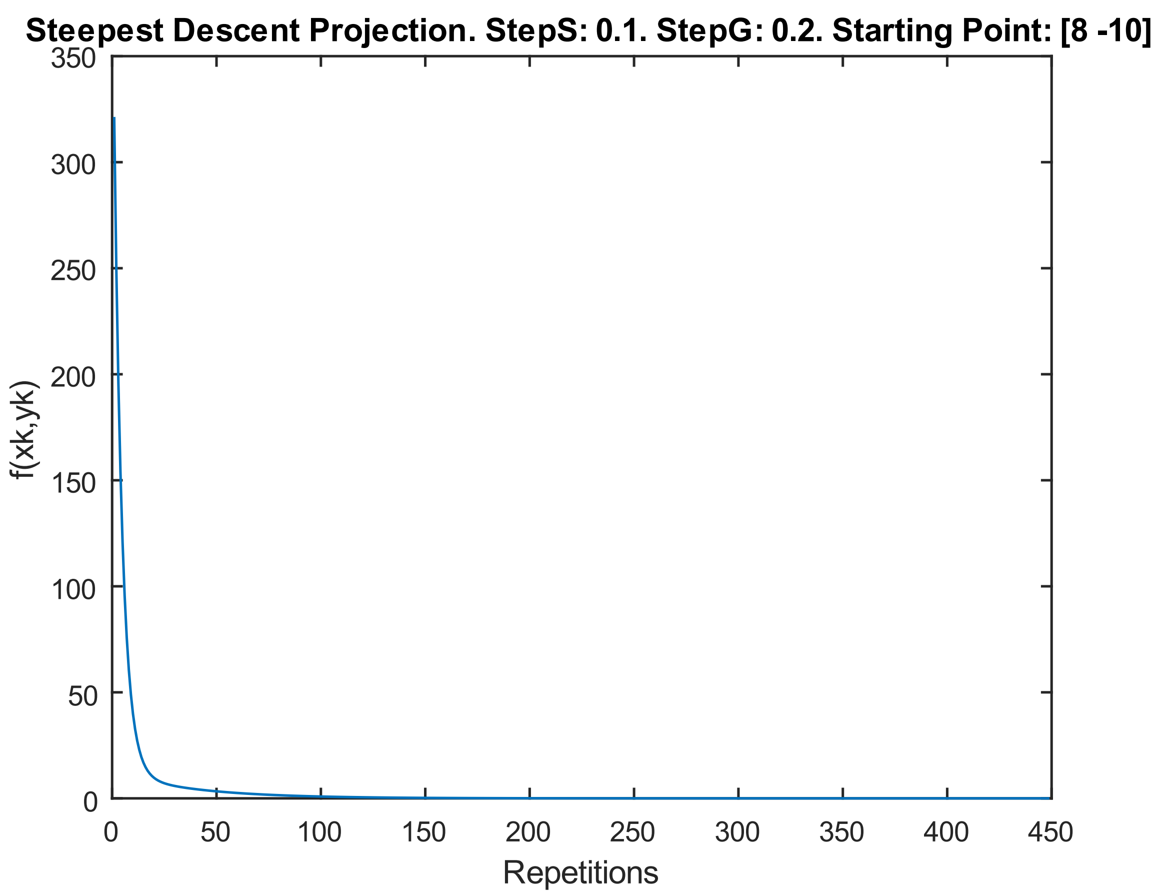
Σε αυτήν την περίπτωση, λόγω του μεγάλου βήματος κάνει λίγες επαναλήψεις αλλά δεν μπορεί να φτάσει εύκολα κοντά στο ελάχιστο, οπότε είναι σαν να ταλαντώνεται το x_2 κοντά στο 0. Με μείωση του s_k μπορεί να λυθεί αυτό, αλλά θα αυξηθούν οι επαναλήψεις.

Θέμα 4

Αρχεία: thema_4.m , steepest_descent_projection.m

Έχουμε $s_k = 0.1$, $\gamma_k = 0.2$, $\varepsilon = 0.01$, για το σημείο (8,-10) :





Το αρχικό μας σημείο είναι μη εφικτό, αλλά η μέθοδος το φέρνει το σημείο μέσα στους περιορισμούς μετά από μερικές επαναλήψεις. Βλέπουμε πως επιτυγχάνεται σύγκλιση λόγω της επιλογής μικρού βήματος.

Συμπεράσματα:

Για μεγάλα βήματα, η μέθοδος μέγιστης καθόδου με προβολή βοηθάει στο να μην ξεφύγει στο άπειρο η συνάρτηση, αλλά δεν συγκλίνει. Για μικρά βήματα δουλεύει επιθυμιτά ο αλγόριθμος.