Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra 5€. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 5x, & 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500}, & x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a de modo que el precio varíe de forma continua al variar el numero de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran muchísimas unidades?. Nota: El precio de una unidad es $\frac{C(x)}{x}$

a) Debemos hacer $C(x)$ continua $\Rightarrow$

$C(x)$ será continua si $\lim_{x \to 10^-} C(x) = \lim_{x \to 10^+} C(x)$

$$\lim_{x \to 10^-} C(x) = \lim_{x \to 10} 5x = 50$$

$$\lim_{x \to 10^+} C(x) = \lim_{x \to 10} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{a \cdot 100 + 500} =$$

$$= \sqrt{100 \cdot (a+5)} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{a+5} = 10 \cdot \sqrt{a+5}$$

Igualamos: $10 \cdot \sqrt{a+5} = 50 \Rightarrow \sqrt{a+5} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + 5 = 25 \Rightarrow a = 20$

b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2\left(20 + \frac{500}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot \sqrt{20 + \frac{500}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \sqrt{20 + \frac{500}{x^2}} = \sqrt{20 + 0} = \sqrt{20} \simeq 4'47$$