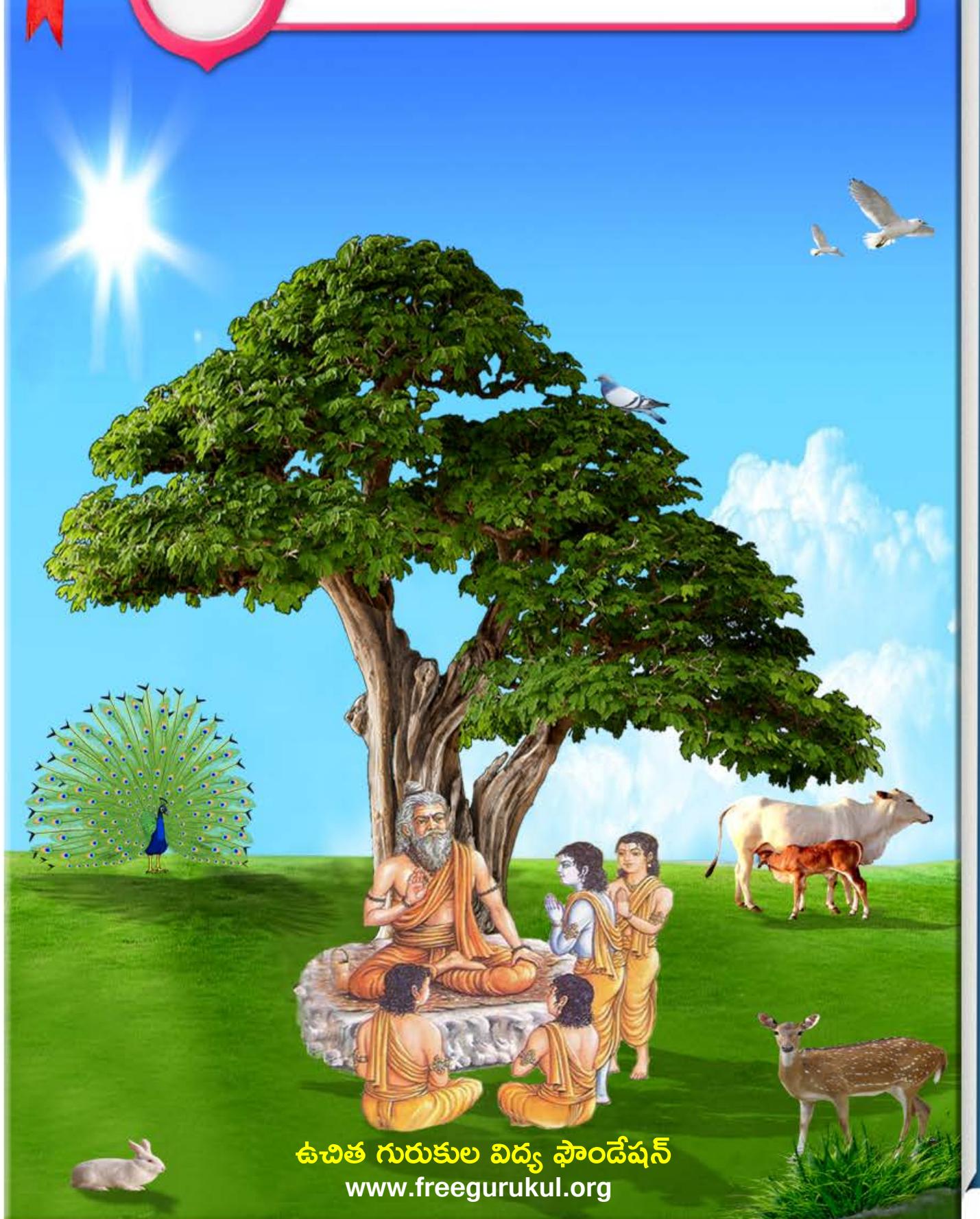




వేదములు

వేద గణితము



ఉచిత గురుకుల విద్య పొందేష్టన్
www.freegurukul.org

సదాశివ సమారంభం



గురు దిక్షితాముహ్రి

గురు వెన్కటేశ్వర ముహ్రి

గురు శుక ముహ్రి

గురు నారద ముహ్రి

గురు వాస్తవికీ ముహ్రి

గురు కృప

శంకరాచార్య మధ్యమం



గురు దివిదాస్

గురు కశ్చేర్ దాస్

గురు తైతిశ్య మహా ప్రథము

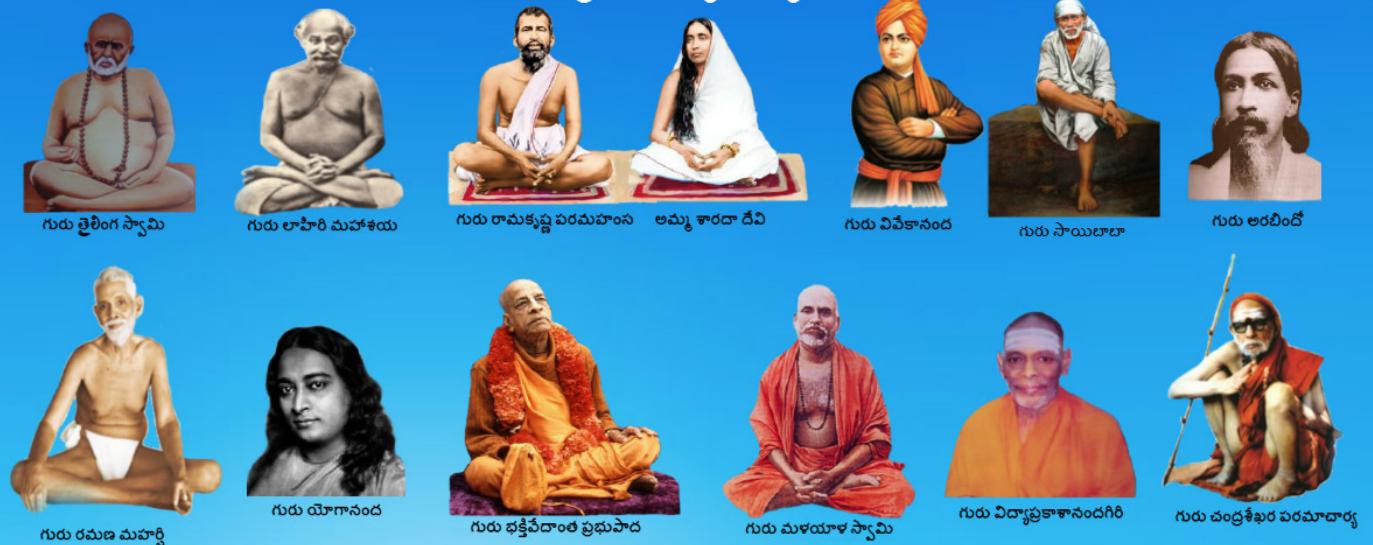
గురు నాన్క్

గురు రామచేంద్ర స్వామి

గురు వీరబ్రహ్మండ్ర స్వామి

యోగి మేమన

అస్క్రూదాచార్య పర్యంతాం



గురు రమణ ముహ్రి

గురు యోగానంద

గురు శక్తివేదాంత ప్రథమాద

గురు మాయాశ స్వామి

గురు విద్యాత్రికాసందగిరి

గురు రంద్రశేఖర పరమామార్య

పందే గురుపరంపరాం..





“ఉచిత గురుకుల విద్య పొందేషన్” ద్వారా విలువలు, నైపుణ్యాలతో కూడిన విద్య ఉచితంగా + సులభంగా + ఆకర్షణీయంగా + నాణ్యతతో కూడి అందించే సేవా కార్యక్రమంలో బాగంగా ఈ పుస్తకాన్ని భారత ప్రభుత్వపు వెబ్ సైట్ (డిజిటల్ లైబ్రరీ అఫ్ ఇండియా) నుంచి సేకలించి అందిస్తున్నాము. ఇందుకు మేము వారికి కృతజ్ఞత తెలియజేసుకుంటున్నాము.

సాయి రామ్ వారి సేవల విస్తరణలో బాగంగా ఈ పొందేషన్ స్థాపించబడినది. ఈ స్వచ్ఛంద సంస్కరణ ద్వారానే అన్ని సేవలు అందించబడును. ఇటువంటి పుస్తకాలు మీరు ప్రాసినట్టయితే లేక సేకరిస్తే మాకు తెలియజేయండి. మేము ప్రతి విద్యార్థికి ఉచితంగా అందేలా చేస్తాము, తద్వారా ఉన్నత విలువలు, నైపుణ్యాలు కలిగిన విద్యార్థులను మన దేశానికి అందించవచ్చు. మాతో కలిసి నవ భారత నిర్మాణ కార్యక్రమంలో పనిజేయటకు, భాగస్వామ్యం ఆగుటకు ఆసక్తి ఉంటే సంప్రభించగలరు.

ఈ గ్రంథాలను ఉచితంగా ఆన్ లైన్ లో చదువుటకు, బిగుమతి(డోస్టోప్) చేసుకొనుటకు గల మార్గాలు:

- 1) భారత ప్రభుత్వపు వెబ్ సైట్: <http://www.new.dli.ernet.in>
- 2) ఉచిత గురుకుల విద్య పొందేషన్ వెబ్ సైట్ : www.freegurukul.org
- 3) సాయి రామ్ వెబ్ సైట్ : <https://sites.google.com/site/sairealattitudemanagement>
- 4) మొబైల్ అప్: Free Gurukul

గమనిక: భక్తిజ్ఞానం, ధర్మ ప్రచారార్థం ఉచితంగా eBook రూపంలో భారత ప్రభుత్వపు డిజిటల్ లైబ్రరీ సహాయంతో ఇవ్వడం జరిగింది. ఇది లాభార్జన దృష్టిలోని ఉచిత సేవ. ఈ సేవలో అంతర్జాలంలోని(ఇంటర్నెట్) లైసెన్సు / కాపీరైట్ అభ్యంతరాలు లేనివి అనుకోన్న పుస్తకాలను గ్రహించటం జరిగినది. అనుకోకుండా ఏవైనా అభ్యంతరకరమైనవి ఉన్నచో మాకు తెలుప మనవి, వాటిని తొలగించగలము అని మనవి చేసుకొంటున్నాము.

Website: www.freegurukul.org

Mobile App: Free Gurukul

email: support@freegurukul.org

Facebook: www.facebook.com/freegurukul Help Line / WhatsApp: 904 202 0123

“మన లక్ష్యం: విలువలు, నైపుణ్యాలతో కూడిన విద్య అనేబి ఉచితంగా + సులభంగా + ఆకర్షణీయంగా + నాణ్యతతో కూడి అందలికి అందించబడాలి “

ఉచిత గురుకుల విద్య పొందేషన్ – Free Gurukul Education Foundation

సర్వం పరమాత్మ పొద సమర్పణమన్న

ಭಾರತ ಪ್ರಭುತ್ವಪು ವೆಬ್ ಸೈಟ್ - ಡಿಜಿಟಲ್ ಲೈಬ್ರರಿ ಅಫ್ ಇಂಡಿಯಾ

<http://www.new.dli.ernet.in>

Digital Library of India: Inc.

www.new.dli.ernet.in

Digital Library of India

Hosted by: Indian Institute of Science, Bangalore in co-operation with CMU, IIT-H, NSF, ERNET and MCIT for the Govt. of India and 21 major participating centres.

Home Vision Mission Goals Benefits Content Selection Current Status People Funding Copyright Policy FAQ RFP

Books Journals Newspapers Palm-Leaves (Manuscripts)

Title: Ramayanam

Author:

Year: to

Subject: Any Subject

Language: Telugu

Scanning Centre: Any Centre

Clear Search

For the first time in history, the Digital Library of India is digitizing all the significant works of Mankind.

Click [Here](#) to know More about DLI New!

Books	Journals	Newspapers	Manuscripts
<ul style="list-style-type: none">Rashtrapati BhavanCMU-BooksSanskritITD.TirupathiKerala Sahitya Akademi	<ul style="list-style-type: none">INSA	<ul style="list-style-type: none">Times of IndiaIndian ExpressThe HinduDeccan HeraldEenaduVaartha	<ul style="list-style-type: none">Tamil Heritage FoundationAnnaUniversity <small>New!</small>

Title Beginning with.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Author's Last Name

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Year

1850-1900	1901-1910	1911-1920	1921-1930	1931-1940	1941-1950	1951-
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-------

Subject

Astrophysics	Biology	Chemistry	Education	Law	Mathematics	Mythology	Religion	For more subjects...
--------------	---------	-----------	-----------	-----	-------------	-----------	----------	----------------------

Language

Sanskrit	English	Bengali	Hindi	Kannada	Marathi	Tamil	Telugu	Urdu
----------	---------	---------	-------	---------	---------	-------	--------	------

Click [here](#) for PDF collection
DLI MIRROR at IUCAA Data Center PUNE

అతి విశిష్టం ఈ దానం!

స్వామి వవేకానంద

“దూసాలలోతల్లా ఆధ్యాత్మిక విద్యాదానం చాలా శేషమైంది! దాని తరువాతిది లోకిక జ్ఞానదానం, ప్రాణదానం, అనుదానం” అని వ్యాసమహర్షి చెప్పారు.

మన ఆధ్యాత్మిక జ్ఞానం భారతదేశ పూడ్చలలో నిలిచి బోకూడదు. లోకమంతబీనీ ఆవరించాలి! ఇలా లోకవ్యాప్తమైన ధర్మప్రచారాన్ని మన పూర్వులు చేశారు. స్వాందవ వేదాంతం ఎన్నదూ ఈ దేశం దాచి బోలేదని చెప్పేవారు, మతప్రచారార్థం తొలిసారిగా, పరదేశాలకు వెళ్లిన సన్మాసిని నేనే అని చెప్పేవారు, తమ జ్ఞాతివరిత్ర నెరుగని వారే! ఇలాంటి సంఘటనలు ఎన్నోసార్లు జరిగాయి. అవసరమైనప్పుడల్లా, భారతీయ ఆధ్యాత్మిక జ్ఞానప్రవాహం వెల్లువలా లోకాన్ని ముంచేతుతూ వచ్చింది.

రాజకీయ ప్రచారాన్ని రణగొఱధ్వనులతో, యోధులతో సాగించవచ్చు, అగ్నిని కురిపించి, కత్తిని జిపించి, లోకిక జ్ఞానాన్ని సంఘనిర్మాజ విజ్ఞానాన్ని విరివిగా ప్రచారం చేయవచ్చు, కానీ ఆధ్యాత్మిక జ్ఞానదానం కళ్ళకు కనిపించకుండా, చెవులకు వినిపించకుండా కురుస్తూ, రోజు పుష్టుల రాసుల్ని వికసించజేసే మంచులాగా నిశ్చట్టంగా ఇరగవలని ఉంది. భారతదేశం నిరాచంబరంగా, లోకానికి మళ్ళీ మళ్ళీ చేస్తూ వచ్చిన దానమిదే!

మిత్రులారా! నేను అవలంబించే విధానాన్ని తెలియజేస్తాను వినండి. భారతదేశంలోనూ, ఇతర దేశాల్లోనూ మన పారమాత్మిక ధర్మాలను బోధించదానికి తగినవారుగా మన యువకుల్ని తయారు చేయడానికి భారతదేశంలో కొన్ని సంస్కలను నెలకొల్చాలి! ఇప్పుడు మనకు కావలసింది బలిష్టులు, జవసంపన్ములు, బుఱువర్తనలు, ఆత్మ విశ్వాసపరులు అయిన యువకులు. అలాంటి వారు నూరుమంది దొరికినా, ప్రపంచం పూర్తిగా పరివర్తన చెందగలుగుతుంది!!

ఇవ్వారక్తి తక్కిన శక్తులన్నిటి కన్నా బలవత్తరమైంది. అది సాక్షాత్కార భగవంతుని దగ్గరి నుండి వచ్చేదే కాబట్టి దాని ముందు తక్కినదంతా లోంగిపోవలసిందే. నిర్మలం, బలిష్టం అయిన ‘ఇచ్చ’ (సంకల్పం) సర్వశక్తిమంతమైంది. దానిలో మీకు విశ్వాసం లేదా? ఉంటే మీ మతంలోనీ మహాస్వత ధర్మాలను ప్రపంచానికి బోధించడానికి కంకణం కట్టుకోండి. ప్రపంచం ఆ ధర్మాల కోసమై ఎదురుచూస్తాంది. అనేక శతాబ్దాలూగా ప్రజలకు క్షద్రసిద్ధాంతాలు నేర్చడం జరిగింది. వారు వ్యర్థులని ప్రపంచమంతటా బోధలు జరిగాయి. ఎన్నో శతాబ్దాల నుండి వారు ఈ బోధనల వల్ల భయట్టాంతులై, పతుప్రాయులైపోతున్నారు. తాము ఆత్మస్నానరూపులమనే మాటను వినదానికినా వారెన్నదూ నోచుకోలేదు. “సీచాతిసిచుడిలో కూడా ఆత్మ ఉంది. అది అమృతం, పరమ పవిత్రం, సర్వశక్తిమంతం, సర్వవ్యాపకమైనది” అని వారికి ఆత్మను గురించి చెప్పింది. వారికి ఆత్మవిశ్వాసాన్ని ప్రసాదించండి. *



ప్రా. మీ. వృథాతాలైయులోస్

ఎం. పీ. వృథాతాలైయులోస్

మేద గ్రాఫిక్స్

❖ మౌబైక్ గుణకార, భాగపోర పద్ధతులు ❖

1234567890

వేద గణితము

(మౌలిక గుణకార, భాగవత పద్ధతులు)

డా॥ తిటటకూర సత్యనారాయణరాజు

M.Sc., B.Ed.



విశాలాంధ్ర ఏజ్యూషిన్స్ ఫ్రెంచ్
ఎజ్యూక్షన్, 4-1-435 జ్యోతింక్ ప్రైమ్
హైదరాబాద్ - 500 001.

నా మీంట

సాధారణముగ విద్యార్థులకు లెక్కలంటే భయం, తలనొప్పి, ఆసక్తి లేకపోవుట కనిపిస్తుంది. దీనికి కారణం చిన్నతనములో వారి చేత బండగ ఎక్కాలు బట్టివేయించడం ఒకటి. గడితములో ప్రావీణ్యత కావాలంటే ఎక్కాలు తప్పనిసరి తద్దినం. గణన యంత్రాలను ఉపయోగించుట ద్వారా విద్యార్థులకు ఈ చెడద తప్పించినా వాటిమీద ఆధారపడటం అవిటి బట్టకే అవుతుంది. నిలుచున్న పళంగా ఏడైనా గుణకారము చేయవలసివ్సే ఆగండి, ఆగండి, ప్రస్తుతము నా దృగ్గర గణన యంత్రము లేదు. కావున జపుడు చేయలేను అనడం సిగ్గుచేటు. అందుచేత ఎక్కాలు బాగారావలసిందే. బాట్చ దశలో కొంతవరకు ఎక్కాలను అధ్యయనము చేయించి వాటిని జ్ఞాపకముంచుకొనుటకు కొన్ని మెలకుపలు నేర్చినచో మరిచిపోవుటకు ఆస్మారముండదు. గడితమన్న ఆసక్తి కలిగి, వారిలో ఉత్సాహము పెల్లబికి గడిత శాస్త్రములో అభిరుచి అలవడుతుంది అని నా అభిప్రాయం.

గడిత శాస్త్రంలో నాకు గల అభిరుచి మూలముగా వివిధ గడిత గ్రంథాలలో గల వింతలు, తమాషాలు, సులభ పద్ధతులు గుణకార, భాగవర పద్ధతులు చిన్నతనము నుండి అధ్యయనము చేయుట ప్రారంభించినాను. నా యా తోలిపుస్తకాన్ని విద్యార్థి లోకానికి, గడిత శాస్త్రం ఎడల ఆసక్తిగల విజ్ఞలకు సమర్పించాను.

విజ్ఞల నుండి పొందిన మన్ననలతో మరి ఇదు పుస్తకములను వెలువరించాను. వేదగడితము అనేక వేల ప్రతులు విక్రయింపబడి చతుర్ధ ముద్రణకు వచ్చినది. ఎందరెందరినుంటో అనేక ప్రశంసలు పొంది ధన్యుద్ఘాటనాను. నా ద్వితీయ రచన వేదగడితము (ఇంగ్లీషు) నకు టి.టి.డి. దేవస్థానమువారు యిచ్చిన రు.5,000/- నా రచనలకు మరికొంత ప్రోత్సాహము కలిగింది. నా ప్రసంగములను టి.టి.డి. వారు వారి అధ్యార్థములో గల కాలేజీలలోను, ప్రైస్చర్చలలోను ఏర్పాటు చేసి మరికొంత ప్రోత్సాహము కలుగజేసిరి. తదాదిగ అనేక ప్రసంగములు, విద్యాగోపులలో పాల్గొనుచు విద్యాలోకానికి ఉపయోగపడవలెని నా అభిలాష.

అనేక ప్రసంగములు రేడియోలద్వారాను, టి.వి.ల ద్వారాను ప్రసారము అయినవి. అనేక విద్యాసంస్థలు నాకు యిచ్చిన ప్రోత్సాహముతో అనేక గ్రంథములు వరుసగ వెలువరించాను.

మౌలిక గుణకార, భాగవర పద్ధతులు, మరెన్నో నులభ పద్ధతులు అధర్మణ వేదములో రాయబడినవి. వీటిని అధ్యయనము చేసి త్రుపుథముగ హ్యాజ్యతీ భారతీక్షణ్ణతీర్థ శ్రీ పూర్ణ శంకరాచార్యులువారి "Vedic Mathematics" పుస్తకములో 16 సూత్రాలు వివరించారు. నేను బెనారసు హిందూ యూనివర్సిటీలో M.Sc. చదివే లోజులలో ఆ పుస్తకాన్ని చదివితిని. అప్పటి నుండి ఉత్సేఖితుడనై విద్యార్థులకు ఆసక్తి కలిగించుటకు, నులభ పద్ధతులను అందించుటకు ఉపక్రమించి యా పుస్తకాన్ని వెలువరించాను.

పత్రికల అభివ్రాయాలు

గాభరాపెట్టని గణితం మాష్టారు

గణితం అంటే అందరికి గాభరాయే - కానీ అంత గాభరా అనవసరం అంటారు గణితం మాష్టారు తోటకూర సత్యనారాయణరాజు. లెక్కలు సులభతరం చేసే సులవులను, చిట్టాలను ఆయన తనకు ఉపిక ఉన్న మేరకు ప్రచారం చేసున్నారు. భారతదేశపు గణిత శాస్త్రవేత్తలు, అంకెలతో అద్భుతాలు, వైళ్ళతో గణితము మొదలగు ప్రతులను ప్రచురించబోతున్నారు.

(ఆంధ్రభూమి, హైదరాబాద్, తేది: 18-7-1985)

గణితమంటే గాభరా అక్కరేదు

లెక్కల టీవర్లందరూ లెక్కలు బోధిస్తారు. కానీ లెక్కల్లోకి వచ్చే లెక్కల టీవర్లు అరుదు. అలాచీ వారిలో తోటకూర సత్యనారాయణరాజు ఒకరు. గణితం విద్యార్థులను గందరగోళ పరుస్తుంది. అందుకే లెక్కలంటే వారికి గాభరా లెక్కల బోధనలో చిక్కముడులు విప్పి, అంకెలతో అటలాడించి, కష్టతరమనుకుంటున్న అంశాలను శ్రీ రాజగారు బోధించుచున్నారు. కూడిక, తీసివేత, గుణకారం, భాగవోరం, వర్ధములు, వర్ధమూలాలు, ఘూతాలు, ఘూతాంకాలు మొదలైనవాటిని లెక్కగట్టడంలో సులువైన పద్ధతి ప్రవేశపెట్టారు. ఇందుకోసం ఆయన ప్రాచీన భారతీయుల గణిత విజ్ఞానాన్ని వేదగణితం పేరుతో వెలుగులోనికి తెచ్చారు.

(ఈనాడు, శీమావరం, తేది: 19-3-1985)

ఇందులో...

	పెజీ
1. వేదగణితపు ఎక్యాలు	... 1
2. కూడికలతో ఎక్యాలు	... 4
3. తీసివేతలతో ఎక్యాలు	... 6
4. కూడికలు	... 9
5. తీసివేతలు	... 11
6. ఏకపంక్తి గుణకారములు	... 12
7. గుర్తుల గుణకారములు-1	... 15
8. గుర్తుల గుణకారములు-2	... 16
9. ఈజిష్ట్లుదేశ గుణకార పద్ధతులు	... 18
10. భారతదేశపు గుణకార పద్ధతులు	... 22
11. వేదగణిత మౌళిక గుణకార పద్ధతులు	... 24
12. సులభపద్ధతుల గుణకారములు	... 37
13. అంకెలతో భాగింపబడుటకు నియమములు	... 41
14. భాగహారములు (Divisions)	... 44
15. వర్గములు (Squares)	... 52
16. ఘనాలు (Cubes)	... 59
17. ప్రేక్షతో ఎక్యాలు	... 62



1. వేదగణితపు ఎక్కులు

గడింటం అంటే చాలామందికి భయం. ఆస్తికీ లేకపోవటం జరుగుతుంది. దీనికి కారణం చిన్నతనం నుండి ఎక్కులు కంరష్టము చేయుట ఒకటి. గడింటము నేర్చుకొనుటలో మెలకువలు, సులవు పద్ధతులు తెలిసికొన్నచో గడితాన్ని నేర్చుకొనుట వినోదముగా వుంటుంది, గడింటమన్న ఆస్తికీ కలుగుతుంది.

ఎక్కులను అధ్యయనము చేయుటకు, జ్ఞాపకముంచుకొనుటకు అతి సులవు పద్ధతులున్నాయి. కంరష్టము చేయనవసరము లేదు. 5×5 ఎక్కులు వచ్చినా చాలు. పదిని ఆధారముగా చేసికొని ఎక్కులను తెక్కుకట్టుకోవచ్చును. ఎక్కులను రెండు విధములుగా విభజిస్తాము. (1) పదిలోపు ఎక్కులు (2) పదికంటే ఎక్కువ ఎక్కులు. ముందుగా పదికలోపు ఎక్కులను పరిశీలించాం.

పదికిలోపు ఎక్కులు

పద్ధతి: బీజగణిత సూత్రము ద్వారా ఎక్కులను తెక్కు కట్టుకోవచ్చును.

$$(x - a)(x - b) = x(x - a - b) + ab$$

రెండు అంకెలనూ పదినుండి తీసివేయాలి. వాటి లభమును ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి.

మొదటి అంకె నుండి రెండవ అంకె 10కి ఎంత తక్కువో దానిని తీసివేయాలి. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయాలి.

ఉదాహరణకు 9×8 కావలెను అనుకోండి.

ఇవి రెండును 10కి దగ్గరగ నున్నాయి. కావున 10 తీసివేయగ వరుసగ 1, 2లు వస్తాయి. వాటి లభము $1 \times 2 = 2$ ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి.

రెండవ అంకె 8, పదికి 2 తక్కువ కావున దానిని మొదటి అంకె 9 నుండి తీసివేయాలి. $9 - 2 = 7$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి.

ఇప్పుడు $9 \times 8 = 72$ అవుతుంది.

ఇట్లీ 7×9 కావలెను అనుకోండి

7, 9లను 10 నుండి తీసివేయగ 3, 1లు వస్తాయి. వీటి లభ్యము
 $3 \times 1 = 3$ ను ఒకట్లు స్థానముగ రాయాలి.

రెండవ అంకె 9 పదికి 1 తక్కువ కావున దానిని మొదటి అంకె 7
నుండి తీసివేయగ $7 - 1 = 6$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి.
ఇప్పుడు $7 \times 9 = 63$ అవుతుంది.

ఇట్లీ 8×8 లు కావలెను అనుకోండి.

8, 8లను పదినుండి తీసివేయగ 2, 2లు వస్తాయి. వాటి లభ్యము
 $2 \times 2 = 4$ ను ఒకట్లు స్థానముగ రాయండి.

రెండవ అంకె 8 పదికి 2 తక్కువ కావున దానిని మొదటి అంకె 8
నుండి తీసివేయగ $8 - 2 = 6$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి.
ఇప్పుడు $8 \times 8 = 64$ అవుతుంది.

కొన్ని సమయములలో పది నుండి తీసివేయగ వచ్చి అంకెల లభ్యము
రెండు అంకెలుగల సంఖ్యగా ఉండును. అప్పుడు ఒకట్లు స్థానమును ఒకట్లు
స్థానముగ తీసికొసి, పదుల స్థానమును పదుల స్థానమునకు కలచాలి.

ఉదాహరణకు 7×6 కావలెను అనుకోండి.

7, 6లను పదినుండి తీసివేయగ 3, 4లు వస్తాయి. వీటి లభ్యము
 $3 \times 4 = 12$ వస్తుంది. దానిలో 2ను ఒకట్లు స్థానముగ తీసికోండి. పదుల
స్థానముల చునస్సునందుంచుకోండి.

రెండవ అంకె 6 పదికి 4 తక్కువ కావున దానిని మొదటి అంకె 7
నుండి తీసివేయగ $7 - 4 = 3$ వస్తుంది. దానికి చునస్సునందుగల 1ని
కలుపగ 4 అవుతుంది. దానిని పదుల స్థానముగ తీసుకోండి.

ఇప్పుడు $7 \times 6 = 42$ అవుతుంది.

ఇట్లీ సమయస్థార్గ పదికిలోపు ఎక్కులను గుణించుకోవచ్చు.

టైప్జూసమస్య: 9×12 కావలెను అనుకోండి. రెండు అంకెలు కలిపి 10ని
తుంచేయండి. $9 + 12 - 10 = 11$ వస్తుంది. దీనిసి పదులుగ రాయగ 110
అవుతుంది.

రెండు అంకెలను 10 నుండి తీసివేయగ 1, -2లు వస్తాయి. వీటి లభ్యము
-2 అవుతుంది. 110 నుండి 2ను తీసివేయగ $110 - 2 = 108$ వస్తుంది.

$$\text{ఇప్పుడు } 9 \times 12 = 108$$

మరో ఉదాహరణకు 8×14 కావలైను అనుకోండి.

రెండు అంకెలు కలిపి 10ని తీసివేయండి $8 + 14 - 10 = 12$ వస్తుంది.
దీనిని పదులుగ రాయగ 120 అవుతుంది.

రెండు అంకెలను 10 నుండి తీసివేయగ 2, -4లు వస్తాయి. వీటి లభ్యము
 $2 \times -4 = -8$. 120 నుండి 8ని తీసివేయగ $120 - 8 = 112$ వస్తుంది.

ఇప్పుడు $8 \times 14 = 112$ అవుతుంది. ఇదే విధముగ సమయస్థాఱిగ
గుణించుకోవచ్చును.

పదికంటే ఎక్కువ ఎక్కులు

ఒకట్లు స్తానములను గుణించవచ్చు. అంకెల లభ్యమును ఒకట్లు స్తానముగ
రాయాలి. మొదటి సంఖ్యకు రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్లు స్తానపు అంకె
కలుపగ వచ్చు సంఖ్య చందలు, పదులు స్తానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 12×13 కావలైను అనుకోండి.

ఒకట్లు స్తానము చిలువలు 2, 3లను గుణించగా వచ్చు అంకెల లభ్యము
 $2 \times 3 = 6$ ను ఒకట్లు స్తానముగ రాయండి.

మొదటి సంఖ్య 12నకు రెండవ సంఖ్య 13లోని ఒకట్లు స్తానము 3ను
కలుపగ వచ్చు $12 + 3 = 15$ ను చందలు, పదుల స్తానముగ తీసికోండి. ఇప్పుడు
 $12 \times 13 = 12 + 3, 2 \times 3 = 156$ అవుతుంది.

$$\text{ఇట్లే } 13 \times 13 = 13 + 3, \quad 3 \times 3 = 169$$

$$12 \times 14 = 12 + 4, \quad 2 \times 4 = 168$$

$$11 \times 14 = 11 + 4, \quad 1 \times 4 = 154$$

$$12 \times 12 = 12 + 2, \quad 2 \times 2 = 144$$

$$11 \times 13 = 11 + 3, \quad 1 \times 3 = 143$$

ఒకోక్కుప్పుడు ఒకట్లు స్తానపు చిలువలను గుణించినపుడు రెండు అంకెలగల
సంఖ్యలు చెప్పినచో ఒకట్లు స్తానమును లభ్యములోని ఒకట్లు స్తానముగ రాయండి.
పదుల స్తానమును మనస్సానందుంచుకోవాలి.

మొదటి సంఖ్యకు రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్తానపు అంకె కలుపగ వచ్చి సంఖ్యకు మనస్సులోగల అంకెను కలుపగ వచ్చి సంఖ్యను వందలు పదుల స్తానముగ రాయాలి.

ఉదాహరణకు 16×17 లు కావలెను అనుకోండి.

ఒకట్ల స్తానపు విలువలు 6, 7లను గుణించగ వచ్చి $6 \times 7 = 42$ లోని 2ను ఒకట్ల స్తానముగ రాయాలి. 4ను మనస్సులో ఉంచుకోండి.

మొదటి సంఖ్య 16 నకు రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్తానము 7ను కలుపగ వచ్చి $16 + 7 = 23$ నకు మనస్సులోగల 4 ను కలుపగ వచ్చి $23 + 4 = 27$ ను వందలు, పదుల స్తానముగ రాయాలి.

ఇప్పుడు $16 \times 17 = 272$ అప్పుతుంది.

$$\text{ఇట్లు} \quad 17 \times 15 = 17 + 5, \quad 7 \times 5 = 220 + 35 = 255$$

$$16 \times 16 = 16 + 6, \quad 6 \times 6 = 220 + 36 = 256$$

$$17 \times 13 = 17 + 3, \quad 7 \times 3 = 200 + 21 = 221$$

$$17 \times 17 = 17 + 7, \quad 7 \times 7 = 240 + 49 = 289$$

$$18 \times 17 = 18 + 7, \quad 8 \times 7 = 250 + 56 = 306$$

ఈ విధముగ సమయస్థాఱిగ ఎక్కులను గుణించుకోవచ్చును. కంరష్టము చేయునవసరములేదు.

2. కూడికలతో ఎక్కులు

వినోదాలతో కూడా ఎక్కులను లెక్క కల్పుకోవచ్చును. అంకెలను సగము చేయుట, రెట్లింపు చేయుట నేర్చుకొనినచో ఎక్కులను గుణించుకోవచ్చును. తమాషాను కలిగిపుంది. లెక్కలను ప్రారంభదశలో నేర్చుకొనువారికి సగము చేయుట, రెట్లింపు చేయుట, కూడికలు చేయుట కూడ నేర్చవచ్చి. ఎడమవైపున గుణికమును, కుడివైపున గుణ్యమును వాయండి. ఎడమవైపున ఉన్న అంకెలను సగము చేయుట, శేషములను వదిలివేయుట, I వచ్చి వరకు వాయండి. రుడివైపు అంకెలపు రెట్లింపు చేయుట ఎడమవైపు అంకెలకు ఎదురుగ వాయుచు Iకి ఎదురుగ వచ్చువరకు వాయాలి. ఎడమ వైపున ఉన్న బేసి అంకెలకు ఎదురుగసుస్నే కుడివైపు అంకెల మొత్తం కూడగ సంఖ్యల లభ్యము అప్పుతుంది.

ఉదాహరణకు 4×9 కావలెను అనుకోండి.

4	9
2	18
1	36

ఎడమవైపున బేసి అంకె 1. దీనికి ఎదురుగనున్న 36 అంకెల లభ్యము అవుతుంది.

ఇచ్చే 8×4 లు కావలెను అనుకోండి.

8	4
4	8
2	16
1	32

ఎడమవైపునున్న బేసి అంకె 1కి ఎదురుగనున్న 32 అంకెల లభ్యం అవుతుంది. ఇచ్చే సమయసూర్యిగ ఒక బేసి అంకె అయినచో 1కి ఎదురుగనున్న కుడివైపు లభ్యము అవుతుంది. ఒక్కొక్కస్వర్పదు ఎడమవైపున రెండుగాని అంతకంటే ఎక్కువ బేసి సంఖ్యలు వస్తాయి. అప్పుడు యో బేసి అంకెలకు ఎదురుగనున్న అంకెల మొత్తము అంకెల లభ్యము అవుతుంది.

ఉదాహరణకు 7×12 లు కావలెను అనుకోండి.

7	12
3	24
1	48

ఎడమవైపున $7, 3, 1$ లకు ఎదురుగనున్న అంకెల మొత్తము $12 + 24 + 48 = 84$ సంఖ్యల లభ్యము అవుతుంది.

ఇచ్చే 9×7 కావలెను అనుకోండి.

9	7
4	14
2	28
1	56

ఎడమవైపున బేసి అంకెలు 9, 1 వీటికి ఎదురుగనున్న కుడివైపు అంకెల మొత్తము $7 + 56 = 63$ సంఖ్యల లభ్యము అవుతుంది.

ఈ పద్ధతిని గుణకారములను కూడ చేయవచ్చును.

3. తీసివేతలతో ఎక్కులు

తీసివేతల నుపయోగించి 9, 8, 7 ఎక్కులను అతి తేలికగా నేర్చవచ్చును. ఈ పద్ధతి వింతను ఆసక్తిని కలిగించును. కంఠపుం చేయనవసరము లేదు.

9వ ఎక్కుము

గుణకము నుండి 1ని తీసివేయండి. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. ఈ పదుల స్థానపు అంతేను 9 నుండి తీసివేయండి. ఒకట్లు స్థానపు అంతే వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 4×9 లు కావలైను అనుకోండి.

4 నుండి 1ని తీసివేయండి. 3 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. 3ను 9 నుండి తీసివేయండి. 6 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్లు స్థానముగ రాయండి.

$$\begin{array}{ll} \text{ఇప్పఁడు} & 4 \times 9 = 4 - 1, \quad 9 - 3 = 36 \\ \text{ఇట్లు} & 5 \times 9 = 5 - 1, \quad 9 - 4 = 45 \\ & 7 \times 9 = 7 - 1, \quad 9 - 6 = 63 \\ & 9 \times 9 = 9 - 1, \quad 9 - 8 = 81 \end{array}$$

ఈ చిధముగ 10కి లోపుగల తొచ్చిదుల ఎక్కులను గ్రహించవచ్చును.

పదికంటే ఎక్కువ తొచ్చిదులు కావలిసమ్మిళు గుణకము నుండి 2ను తీసివేయండి. దానిని పదుల స్థానముగ రాయండి. గుణకములోని ఒకట్లు స్థానమును 10 సుండి తీసివేయండి. దీనిని ఒకట్లు స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 11×9 కావలైను అనుకోండి. 11 నుండి 2 తీసివేయండి 9 వచ్చుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. పది నుండి గుణకము 11 లోను ఒకట్లు స్థానము 1స తీసివేయండి. 9 వచ్చుంది. దీనిని ఒకట్లు స్థానముగ రాయండి. అంతేల అట్లు 99 అవుతుంది.

$$\begin{array}{ll} \text{ఇట్లు} & 13 \times 9 = 13 - 2, \quad 10 - 3 = 117 \\ & 14 \times 9 = 14 - 2, \quad 10 - 4 = 126 \\ & 15 \times 9 = 15 - 2, \quad 10 - 5 = 135 \\ & 17 \times 9 = 17 - 2, \quad 10 - 7 = 153 \end{array}$$

ఈ చిధము సమయమాత్రాగి ఎక్కులను గుణించుకోవచ్చుస్తుంది.

8వ ఎక్కుము

గుణకము నుండి 1ని తీసివేయండి. దీనిని పదుల స్తానముగ రాయండి. ఈ పదుల స్తానపు అంకెను 2చే గుణించగ వచ్చు లభమును 8 నుండి తీసివేయండి. దీనిని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 3×8 లు కావలెను అనుకోండి.

3 నుండి 1ని తీసివేయండి. $3 - 1 = 2$ వస్తుంది. దానిని పదుల స్తానముగ రాయండి.

2ను రెండు రెట్లు చేయగ 4 వస్తుంది. దానిని 8 నుండి తీసివేయగ $8 - 4 = 4$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

ఇప్పుడు $3 \times 8 = 24$ అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ 5×8 కావలెను అనుకోండి.

5 నుండి 1ని తీసివేయండి. $5 - 1 = 4$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్తానముగ వాయండి.

4ను రెండు రెట్లు చేయగ 8 వస్తుంది. దీనిని 8 నుండి తీసివేయగ నున్న వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

ఇప్పుడు $5 \times 8 = 40$

కీప్పిసమన్యః 6×8 లు కావలెను అనుకోండి.

6 నుండి 1ని తీసివేయండి 5 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్తానముగ రాయండి. 50 అవుతుంది. 5ను 2చే గుణించగ 10 వస్తుంది. దీనిని 8 నుండి తీసివేయగ -2 అవుతుంది. 50 నుండి 2ను తీసివేయగ 48 అవుతుంది.

ఇప్పుడు $6 \times 8 = 48$

ఇల్లే సమయస్థాగి 10 లోప్పగల 8వ ఎక్కుమును నేర్చుకొనవచ్చును.

పదికంటే ఎక్కువ 8లు కావలెనన్న గుణకము నుండి 3ను తీసివేయండి. దీనిని పదుల స్తానముగ రాయండి. గుణకము యొక్క ఒకట్ల స్తానపు అంకెను 2చే గుణించగ వచ్చు అంకెను 10 నుండి తీసివేయండి. అప్పుడు వచ్చు అంకెను ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 12×8 లు కావలెను అనుకోండి.

12 నుండి 3ను తీసివేయండి. 9 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్తానముగ రాయండి. 12లోని 2ను 2చే గుణించి 10 నుండి తీసివేయండి. 6 వస్తుంది. దానిని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. అప్పుడు అంకెల లభము 96 అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ 16×8 లు కావలెను అనుకోండి.

16 నుండి 3ను తీసివేయండి. 13 వస్తుంది. దీనిని పదులు స్తానముగ రాయండి. 16లోని ఒకట్ల స్తానము 6ను 2చే గుణించగ 12 వస్తుంది. దీనిని 10 నుండి తీసివేయగ -2 వస్తుంది. ఇప్పుడు 130 నుండి 2ను తీసివేయగ 128 వస్తుంది. ఇది లభ్యము అవుతుంది.

ఇట్లే సమయస్తార్థిగ 8వ ఎక్కుమును నేర్చుకొనవచ్చును.

7వ ఎక్కుము

గుణకము నుండి 1ని తీసివేయండి. దీనిని పదుల స్తానముగ రాయండి. పదుల స్తానపు అంకెను 3చే గుణించి వచ్చిన లబ్ధమును 7 నుండి తీసివేయండి. దీనిని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 3×7 కావలెను అనుకోండి.

3 నుండి 1ని తీసివేయండి. 2 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్తానముగ రాయండి. 2ను 3రెట్లు చేయగ 6 వస్తుంది. దీనిని 7 నుండి తీసివేయండి. $7 - 6 = 1$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

ఇప్పుడు $3 \times 7 = 21$ అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ 5×7 కావలెను అనుకోండి.

5 నుండి 1ని తీసివేయండి. 4 వస్తుంది. దీనిని పదులుగ తలంచండి. 40 అవుతుంది. 4ను 3 రెట్లు చేయండి. 12 అవుతుంది. దీనిని 7 నుండి తీసివేయండి $7 - 12 = -5$ వస్తుంది. దీనిని 40 నుండి తీసివేయగా $40 - 5 = 35$ అవుతుంది.

ఇట్లే సమయస్తార్థిగ 7వ ఎక్కుమును 10కి లోపువరకు కనుగొనవచ్చును.

పదికంటె ఎక్కువ ఏదులు కావలసినప్పుడు గుణకము నుండి 4ను తీసివేయండి. దీనిని పదుల స్తానముగ రాయండి. గుణకము యొక్క ఒకట్ల స్తానపు అంకెను 3చే గుణించగ వచ్చి 9ను 10 నుండి తీసివేయండి. 1 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 13×7 కావలెను అనుకోండి.

13 నుండి 4 తీసివేయండి. 9 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్తానముగ రాయండి. గుణకము యొక్క ఒకట్ల స్తానపు అంకెను 3చే 3చే గుణించగ వచ్చి 9ను 10 నుండి తీసివేయండి. 1 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

ఇప్పుడు $13 \times 7 = 91$ అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణకు 18×7 కావలెను అనుకోండి.

18 నుండి 4 ను తీసివేయండి. 14 వస్తుంది. దీనిని వందలు, పదుల స్తానముగ రాయండి. 140 అవుతుంది. గుణకము యొక్క ఒకట్ల స్తానపు అంకె 8ని 3చే గుణించగ 24 వస్తుంది. దీనిని 10 నుండి తీసివేయగ -14 వస్తుంది. దీనిని 140 నుండి తీసివేయగ $140 - 14 = 126$ అవుతుంది.

$$\text{ఇట్లు } 19 \times 7 = 19 - 4, 10 - 27 = 150 - 17 = 133$$

$$20 \times 7 = 20 - 4, 10 - 30 = 160 - 20 = 140 \text{ అవుతుంది.}$$

ఈ విధముగ 10 కంటే ఎక్కువ ఏడులు కావలసినపుడు సమయస్థార్థిగ గుణించుకోవచ్చును.

4. కూడికలు

పద్ధతి-1: ఎడమవైపు నుండి కుడివైపుకు కూడికలు:

సాధారణముగ కూడికలు కుడినుండి ఎడమకు చేస్తాము. ఈ పద్ధతి వలన మౌళికముగా కూడాలేము. రెండుగాని, మూడుగాని అంకెలుగల సంఖ్యలు తక్కువగ నున్నపుడు ఎడమవైపునుండి కుడివైపునకు చేయుట వలన మొత్తాలను మౌళికముగ కనుగోనపచ్చును.

ఉదాహరణకు 42, 37, 63ల మొత్తం కావలెను అనుకోండి.

మొదట పదుల స్తానము అంకె మొత్తం కనుకోండి. $4 + 3 + 6 = 13$ పదుల వస్తాయి. దాని చిలివ 130 అవుతుంది. దీనికి ఒకట్ల స్తానపు అంకెల మొత్తం $2 + 7 + 3 = 12$ కలుపగ 142 అవుతుంది. ఈ విధముగ అనుభవము సంపాదించినచో కూడికలను మౌళికముగ చేయుపచ్చును. ఇదే విధముగ 623, 424ల మొత్తం కావలెను అనుకోండి. ఎడమవైపు నుండి కుడివైపుకు కూడగ 1047 వస్తుంది.

పద్ధతి-2: పూర్త సంఖ్యకు దగ్గరగనున్న సంఖ్యల కూడికలు:

ఈ పద్ధతిలో సంఖ్యలు ఏ ఏ పూర్త సంఖ్యలకు దగ్గరగనున్నది కనుకోండి. అయి పూర్త సంఖ్యల మొత్తం కనుకోండి. తరువాత పూర్త సంఖ్యకు ఎంత తక్కువో కనుకోండి. దీనిని పూర్త సంఖ్యల మొత్తము నుండి తీసివేయండి.

ఉదాహరణకు 29, 28ల మొత్తం కావలెను అనుకోండి.

ఇవి రెండును 30కి దగ్గరగనున్నవి. కావున రెండు 30లగ తలంచి మొత్తం కనుగోనగ 60 వస్తుంది. 29, 28లు 30కి వరుసగ 1, 2లు తక్కువ.

పీటి మొత్తం $1 + 2 = 3$ ను 60 నుండి తీసివేయండి. 57 వస్తుంది. ఇది సంఖ్యల మొత్తం అవుతుంది.

ఇట్లు 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90లకు దగ్గరగమన్న సంఖ్యల మొత్తాలను కనుగొనవచ్చును.

పద్ధతి-3: మూడు అంకెలుగల సంఖ్యలోని నిలువ వరుసలను ఒకే పర్యాయము కూడావచ్చును. ఈ పద్ధతిలో మొదటి వందల స్తానపు అంకెలను, తరువాత పదుల స్తానపు అంకెలను ఒకట్ల స్తానపు అంకెలను వరుసగ కలపాలి.

ఉదాహరణకు 402, 323, 407, 418ల మొత్తం కావలేను అనుకోండి.

మొదటి మొత్తం $4 + 3 + 4 + 4 = 1500$, తరువాత మొత్తాలు వరుసగ 1525, 1532, 1550.

ఈ విధముగ ప్రయత్నించినచో త్వరితగతిని మొత్తాలను కనుక్కొవచ్చును.

పద్ధతి-4: సంఖ్యలలోని ఒకట్ల స్తానపు అంకెలు 9, 8, 7ల అయినపుడు రెండవ సంఖ్యను పూర్తి సంఖ్యకు దగ్గరగ మార్చి మొదటి సంఖ్యను కలపాలి. తరువాత పౌచ్చించిన సంఖ్యను తీసివేయాలి.

ఉదాహరణకు 94, 98ల మొత్తం కావలేను అనుకోండి.

రెండవ సంఖ్యను 100గ తలంచి కలుపగ $94 + 100 = 194$ అవుతుంది. దీనినుండి పౌచ్చించిన 2ను తీసివేయగ 192 అవుతుంది.

ఇట్లు 147, 69ల మొత్తం కావలేను అనుకోండి.

రెండవ సంఖ్యను 70గ తలంచి కలుపగ $147 + 70 = 217$ వస్తుంది. దీని నుండి పౌచ్చించిన 1ని తీసివేయగ 216 అవుతుంది. ఇది సంఖ్యల మొత్తం అవుతుంది.

కూడికలు సరిచూచుట: సంఖ్యలను 9చే భాగించునపుడు శేషముల అంకెలను ఒకే అంకే వచ్చి వరకు కూడగ వస్తుంది. ఈ పద్ధతి నుపయోగించి కూడికలను సరిచేయవచ్చును.

ఉదాహరణకు 132, 225ల మొత్తం 357 అనుకోండి.

132లోని అంకెల మొత్తం $1 + 3 + 2 = 6$, 225లోని అంకెల మొత్తం $2 + 2 + 5 = 9$.

$6, 9$ ల మొత్తం $6 + 9 = 15, 1 + 5 = 6$

357లోని అంకెల మొత్తం $3 + 5 + 7 = 15, 1 + 5 = 6$.

సంఖ్యలలోని అంకెల మొత్తం, మొత్తంలోని అంకెల మొత్తం సమానము కొవున కూడిక నిజము అవుతుందని గ్రహించవచ్చును.

5. తీసివేతలు

పర్ధతి-1: మొదటి సంఖ్యలోని అంకాలు పెద్దవిగమన్నచో ఎడమపైపు నుండి కుడికి తీసివేయవచ్చును. కుడినుండి ఎడమకు తీసివేయ నమసరము లేదు.

ఉదాహరణకు 98, 43ల భేదము 55 అవుతుంది. ఇట్లు 698, 263ల భేదము 435 అవుతుంది.

పర్ధతి-2: పూర్వసంఖ్యకు దగ్గరగమన్న సంఖ్యలు అయినప్పుడు రెండవ సంఖ్యను పూర్వసంఖ్యగా మార్చండి. ఈ పూర్వ సంఖ్యగా మార్చుటకు ఎంత కలుపవలెనో దానిని మొదటి సంఖ్యకు కలిపి భేదము కనుకోండి.

ఉదాహరణకు 69, 47ల భేదము కావలెను అనుకోండి.

రెండవ సంఖ్యను పూర్వ సంఖ్యగా మార్చగ 50 అవుతుంది. ఇది సంఖ్య కంటే 3 ఎక్కువ కావున యో 3ను 69కి కలుపగ 72 అవుతుంది. 72, 50లకు భేదము 22 అని వెంటనే గ్రహించవచ్చును.

ఇట్లు 97, 38ల భేదము కావలెను అనుకోండి.

38 అనునది 40కి 2 తక్కువ కావున రెండు సంఖ్యలకు 2 కలుపగ 99, 40లు వస్తాయి. వీటి భేదము 59 అని వెంటనే గ్రహించవచ్చును.

తీసివేతలను సరిచూచుటా: కూడికలు వలె తీసివేతలు కూడ సరి చూడవచ్చును.

ఉదాహరణకు 92, 42ల భేదము 43 అనుకోండి.

$$92 \text{లోని } 9 + 2 = 11$$

$$49 \text{లోని } 4 + 9 = 13, 1 + 3 = 4$$

$$\underline{43} \quad \text{వీటి భేదము } 11 - 4 = 7, 43 \text{లోని } 4 + 3 = 7$$

తీసివేయవలసిన సంఖ్యలోని అంకాల మొత్తముల భేదము, జవాబులోని అంకాల మొత్తం సమానము కావున తీసివేత సరియైనదని గ్రహించవచ్చును.

6. ఏకపంక్తి గుణకారములు

1) రెండు అంకెలుగల సంఖ్యల లభ్యము కనుగొనునపుడు పదుల స్థానపు అంకెలు ఒకటి అయినపుడు చేయు పద్ధతి:

పదుల స్థానపు అంకెలు 1 అయినపుడు, ఒకట్ల స్థానపు అంకెలను గుణించగ వచ్చు అంకెను లభ్యములోని ఒకట్ల స్థానముగ తీసికోండి.

మొదటి సంఖ్యకు, రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానము కలుపగ వచ్చు సంఖ్యను లభ్యములోని వందలు, పదులుగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 12×13 కావలెను అనుకోండి.

ఒకట్ల స్థానపు అంకెల లభ్యము $2 \times 3 = 6$ ను లభ్యములోని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

మొదటి సంఖ్యకు 12కు రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానపు అంకె 3ను కలుపగ 15 వస్తుంది. దీనిని లభ్యములోని వందలు, పదులు స్థానముగ రాయండి.

ఇప్పుడు $12 \times 13 = 156$ అవుతుంది.

$$\text{ఇట్లు} \quad 12 \times 14 = 12 + 4, \quad 2 \times 4 = 168$$

$$13 \times 13 = 13 + 3, \quad 3 \times 3 = 169$$

$$11 \times 12 = 11 + 2, \quad 1 \times 2 = 132$$

$$15 \times 11 = 15 + 1, \quad 5 \times 1 = 165$$

కీష్టపుసుస్వా: 13×15 కావలెను అనుకోండి.

ఒకట్ల స్థానపు అంకెల లభ్యము $3 \times 5 = 15$ అవుతుంది. దీనిలో ఒకట్ల స్థానమును లభ్యములోని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానమును మనస్సు నందుంచుకోండి.

మొదటి సంఖ్య 13కు రెండవ సంఖ్యలోని 5 కలుపగ 18 అవుతుంది. దీనికి మనస్సులోని 1 కలుపగ 19 అవుతుంది. దీనిసి వందలు పదుల స్థానముగ రాయండి. $13 \times 15 = 195$ అవుతుంది.

$$\text{ఇట్లు} \quad 13 \times 15 = 13 + 5, \quad 3 \times 5 = 180 + 15 = 195$$

$$15 \times 12 = 15 + 2, \quad 2 \times 5 = 170 + 10 = 180$$

$$13 \times 19 = 13 + 9, \quad 3 \times 9 = 220 + 27 = 247$$

$$17 \times 14 = 17 + 4, \quad 7 \times 4 = 210 + 28 = 238$$

2) పదుల స్తానపు అంకెలు సమానముగ నున్నప్పుడు రెండు అంకెల గుణకారములు:

రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్తానమును మొదటి సంఖ్యకు కలిపి సమానము గానున్న పదుల స్తానపు అంకెతో గుణించి అన్ని పదులుగ తీసికోండి. ఒకట్ల స్తానపు అంకెలను గుణించగ వచ్చి సంఖ్యను కనుగొని పై సంఖ్యకు కలపండి. ఇప్పుడు సంఖ్యల లభ్యము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 23×21 కావలెను అనుకోండి.

వీనిలో పదుల స్తానపు అంకెలు సమానము. మొదటిసంఖ్యకు రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్తానమును కలిపి 2చే గుణించగ $(23 + 1)2 = 48$ వస్తుంది. దీనిని పదులుగ తీసికొనగ 480 అవుతుంది. దీనికి ఒకట్ల స్తానపు అంకెలు 3, 1 లను గుణించగా వచ్చి $3 \times 1 = 3$ ను కలుపగ అంకె లభ్యము $480 + 3 = 483$ అవుతుంది.

$$\text{ఇట్లు } 32 \times 33 = (32 + 3) \times 3, 2 \times 3 = 1050 + 6 = 1056$$

$$42 \times 49 = (42 + 9) \times 4, 2 \times 18 = 2040 + 36 = 2076$$

$$52 \times 53 = (52 + 3) \times 5, 2 \times 3 = 2750 + 6 = 2756$$

$$63 \times 64 = (63 + 4) \times 6, 3 \times 4 = 4020 + 12 = 4032$$

$$73 \times 71 = (73 + 1) \times 7, 3 \times 1 = 5180 + 3 = 5183$$

$$85 \times 83 = (85 + 3) \times 8, 5 \times 3 = 7040 + 15 = 7055$$

$$91 \times 92 = (91 + 2) \times 9, 1 \times 2 = 8370 + 2 = 8372$$

3) ఒకట్లస్తానపు అంకెలు సమానముగ నున్నప్పుడు రెండు అంకెల గుణకారములు:

రెండు సంఖ్యలలోని పదుల స్తానపు అంకెలు గుణించగ వచ్చి సంఖ్యను వందలుగ తీసుకోండి.

పదుల స్తానపు అంకెలను కూడగ వచ్చి సంఖ్యను సమానముగనున్న ఒకట్ల స్తానపు అంకెతో గుణించగ వచ్చి సంఖ్యను అన్ని పదులుగ తీసుకోండి.

ఒకట్ల స్తానపు అంకెలకు గుణించగ వచ్చి సంఖ్యను అన్ని ఒకట్లుగ తీసికోండి.

ఉదాహరణకు 36×26 కావలెను అనుకోండి.

రెండు సంఖ్యలలోని ఒకట్ల స్తానపు అంకెలు సమానము.

పదుల స్తానపు అంకెలు 3, 2 లను గుణించగ 6 వస్తుంది. దీనిని వందలుగ తలంచగ 600 అవుతుంది.

పదుల స్తానపు అంకెలను కలుపగ వచ్చు $3 + 2 = 5$ ను ఒకట్ల స్తానపు అంకెతో గుణించగ వచ్చు $5 \times 6 = 30$ ని అన్ని పదులుగ .రాయగ 300 అవుతుంది.

ఒకట్ల స్తానపు అంకెలను గుణించగ వచ్చు $6 \times 6 = 36$ ని ఒకట్లగ తలంచగ 36 అవుతుంది.

$$\text{ఇప్పుడ } 36 \times 26 = 600 + 300 + 36 = 936 \text{ అవుతుంది.}$$

$$\begin{aligned}\text{ఇట్లు } 47 \times 37 &= (4 \times 3) \times 100 + [(4 + 3) \times 7] \times 10 + 7 \times 7 \\ &= 1200 + 490 + 49 = 1739\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}56 \times 26 &= (5 \times 2) \times 100 + [(5 + 2) \times 6] \times 10 + 6 \times 6 \\ &= 1000 + 420 + 36 = 1456\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}62 \times 42 &= (6 \times 4) \times 100 + [(6 + 4) \times 2] \times 10 + 2 \times 2 \\ &= 2400 + 200 + 4 = 2604\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}96 \times 46 &= (9 \times 4) \times 100 + [(9 + 4) \times 6] \times 10 + 6 \times 6 \\ &= 3600 + 780 + 36 = 4416\end{aligned}$$

ఈ విధముగ ఒకట్ల స్తానపు విలువలు సమానముగ నున్నప్పుడు లెక్క కట్టుకోవచ్చును.

4) ఒకట్ల స్తానపు అంకెల మొత్తం 10 అయియుండి, పదుల స్తానపు అంకెలు సమానముగ నున్నప్పుడు రెండు అంకెల గుణకారములు:

ఒకట్ల స్తానపు అంకెను గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను పదుల, ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. పదుల స్తానపు అంకెకు తరువాతనున్న సహజ సంఖ్యతో గుణించగవచ్చు సంఖ్యను పదుల స్తానపు సంఖ్యకు ముందు రాయండి.

$$\text{ఉదాహరణకు } 22 \times 28 \text{ కావలేను అనకోండి.}$$

దీనిలో ఒకట్ల స్తానపు అంకెను గుణించగ $2 \times 8 = 16$ వస్తుంది. దీనిని పదులు, ఒకట్లగ రాయండి.

పదుల స్తానపు అంకె 2కు తరువాత సహజ సంఖ్య 3తో గుణించగ వచ్చు $2 \times 3 = 6$ ను పదుల స్తానముకు ముందు రాయండి.

$$\text{ఇప్పుడు } 22 \times 28 = 616 \text{ అవుతుంది.}$$

$$\text{ఇట్లు } 65 \times 65 = 6 \times 7, \quad 5 \times 5 = 4225$$

$$68 \times 62 = 6 \times 7, \quad 8 \times 2 = 4216$$

$$71 \times 79 = 7 \times 8, \quad 1 \times 9 = 5609$$

$$83 \times 87 = 8 \times 9, \quad 3 \times 7 = 7221$$

$$94 \times 96 = 9 \times 10, \quad 4 \times 6 = 9024$$

$$114 \times 116 = 11 \times 12, \quad 4 \times 6 = 13224$$

ఇట్లు ఒకట్ల స్థానపు అంకెల మొత్తం పది అయిపుండి, ఒకట్ల స్థానపు అంకెలకు ముందున్న సంఖ్యలు సమానము అయినపుడు సంఖ్యల లభ్యము కనుకోవచ్చును.

5) అంకెలు ఏమయినప్పటికి రెండు అంకెలు గల సంఖ్యల లభ్యమును కనుగొనుటః

దీనిని బీజగణితమువలన కింది విధముగ వివరించవచ్చును:

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + x(ad + bc) + bd$$

మొదటి సంఖ్యలోని అంకెలు a, b రెండవ సంఖ్యలోని అంకెలు c, d లు తలంచినచో b, d ల లభ్యము ఒకట్ల స్థానమగును.

అంతముల లభ్యము, మధ్యముల లభ్యము కనుగొని కలుపగచ్చు సంఖ్యల మొత్తం పదులుగ తీసుకోండి. a, c ల లభ్యము వందలు అగును.

ఉదాహరణకు 62×53 కావలైను అనుకోండి.

ఒకట్ల స్థానపు అంకెల లభ్యము $2 \times 3 = 6$ ను ఒకట్లుగ తీసుకోండి. అంతముల లభ్యము. మధ్యముల లభ్యము కనుగొని కలుపగ వచ్చు $6 \times 3 + 2 \times 5 = 18 + 10 = 28$ లోని 8ని పదులుగ రాసి 2ను మనస్సులో వుంచుకోండి.

పదుల స్థానపు అంకెల లభ్యము $6 \times 5 = 30$ కి మనస్సులో గల 2ను కలుపగ 32 అవుతుంది. దీనిని పదుల స్థానమునకు ముందు రాయండి.

ఇప్పుడు $62 \times 53 = 3286$

ఇట్లు $45 \times 71 = 4 \times 7, (4 \times 1 + 5 \times 7), 5 \times 1 = 3195$

$92 \times 25 = 2300$

7. గుర్తుల గుణకారములు-1

ఈ గుణకారములను చేయుటకు | x | అను గుర్తులను వాడుతాము. గుర్తులను కుడి నుండి ఎడమకు వాడాలి.

ఒకట్ల స్థానమును వచ్చుటకు మొదట నీలుచు గుర్తు వాడాలి. పద ల స్థానము వచ్చుటకు అడ్డగుణకారము చేయాలి. వందల స్థానము వచ్చుటకు నీలుచు గుణకారము చేయాలి.

21
43
<hr/>
903

మొదటి గుర్తును అనుసరించి నిలువు గుణకారము చేయగ $1 \times 3 = 3$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్లు స్థానముగ రాయాలి. రెండు అంకెలు గల సంఖ్య వచ్చినచో పదుల స్థానమును మనస్సునందుంచుకోవాలి. రెండవ గుర్తును అనుసరించి అడ్డ గుణకారము చేసి కలుపగ $2 \times 3 + 4 \times 1 = 10$ వస్తుంది. దీనిలో 0ను పదులుగ రాయాలి. 1ని మనస్సు నందుంచుకోండి. మూడవ గుర్తు నమనసరించి నిలువు గుణకారము చేయగ $2 \times 4 = 8$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సునందుగల 1ని కలుపగ 9 వస్తుంది. దీనిని వందలుగ తలంచండి.

ఇట్లే	1)	45	2)	63	3)	12
		71		45		18
		<hr/> 3195		<hr/> 2835		<hr/> 216

8. గుర్తుల గుణకారములు-2

మూడు అంకెలుగల సంఖ్య గుణకారము:

ఈ గుణకారము చేయుటకు | * * | గుర్తుల కుడినుండి ఎడము వాడుతాము.

మొదటి గుర్తు ఒకట్లు స్థానముల నిలువు గుణకారము.

రెండవ గుర్తు ఒకట్లు పదుల స్థానముల అడ్డ గుణకారము.

మూడవ గుర్తు ఒకట్లు, పదుల, వందల స్థానముల అడ్డ గుణకారము నిలువు గుణకారమును చూపును.

నాల్గవ గుర్తు వందల, పదుల అడ్డ గుణకారము చూపును.

ఐదవ గుర్తు చందల స్థానముల నిలువు గుణకారమును చూపును.

ఉదాహరణకు 512×413 కావలెను అనుకోండి.

512
413
<hr/>
211456

మొదటి గుర్తును అనుసరించి ఒకట్ల స్థానము $2 \times 3 = 6$. రెండవ గుర్తును అనుసరించి అడ్డ గుణకారముచేసి కలుపగ $1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. మూడవ గుర్తును అనుసరించి అడ్డ గుణకారము, నిలువు గుణకారముచేసి కలుపగ $5 \times 3 + 4 \times 2 + 1 \times 1 = 15 + 8 + 1 = 24$ వస్తుంది. దీనిలోని 4ను వందలగ రాయండి. 2ను మనస్సునందుంచుకోండి. నాలవ గుర్తును అనుసరించి అడ్డ గుణకారము చేసి కలుపగ $5 \times 1 + 4 \times 1 = 9$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సులోగల 2ను కలుపగ $9 + 2 = 11$ వస్తుంది. దీనిలోని ఒకట్ల స్థానము 1ని వేల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానమును మనస్సునందుంచుకోండి. ఐదవ గుర్తును అనుసరించి నిలువు గుణకారము చేయగ $5 \times 4 = 20$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సునందుగల 1ని కలుపగ 21 వస్తుంది. దీనిని వేల స్థానమునకు ముందు వాయండి.

యిట్లు	1)	632	2)	742	3)	123
		421		132		321
		<u>2,66,072</u>		<u>97,944</u>		<u>39,483</u>

3 అంకెలు గల సంఖ్యల లభ్యమును బీజగణిత పద్ధతిని కనుగొనుటా:
 దీనియందు ఇమిడియున్న సూత్రమును కింది విధముగ వివరించవచ్చు.

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + cx + f) = adx^4 + x^3(ad + bd) + x^2(af + be + cd) + x(bf + ce) + cf$$

మొదటి సంఖ్యలోని 3 అంకెలు a, b, c లుగను, 2వ సంఖ్యలోని 3 అంకెలు d, e, f లుగను తీసికొనినచో పై సూత్రము ననుసరించి లభ్యము కనుగొనవచ్చును.

ఒకట్ల స్థానపు అంక వచ్చులకు ఒకట్ల స్థానమును గుణించగ వస్తుంది. పదుల స్థానము వచ్చులకు ఒకట్ల, పదుల స్థానపు అంకెలను అడ్డ గుణకారము చేయగ వస్తుంది. వందల స్థానపు అంక వచ్చులకు వందల, పదుల, ఒకట్ల స్థానపు అంకెలను అడ్డ గుణకారము, నిలువు గుణకారము చేయగ వస్తుంది. వేల స్థానము వచ్చులకు వందల, పదుల స్థానపు అంకెలను అడ్డ గుణకారము చేయగ వస్తుంది. పదివేల స్థానము వచ్చులకు వందల స్థానమును గుణించగ వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 123×321 కావలెను అనుకోండి.

.	123
	321
	<u>39483</u>

ఒకట్ల స్తానపు అంకె వచ్చుటకు ఒకట్ల స్తానములను గుణించగ వచ్చి
 $3 \times 1 = 3$ ను ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

పదుల స్తానపు అంకె వచ్చుటకు ఒకట్ల పదుల స్తానపు అంకెలను ఆడ్డు
 గుణకారముచేసి కలుపగ $2 \times 1 + 2 \times 3 = 8$ వస్తుంది.

వందల స్తానపు అంకె వచ్చుటకు వందల, పదుల, ఒకట్ల స్తానపు అంకెలను ఆడ్డు
 గుణకారము, నిలువు గుణకారము చేయగ $1 \times 1 + 3 \times 3 + 2 \times 2 = 1 + 9 + 4 = 14$
 వస్తుంది. దీనిలోని 4ను వందల స్తానముగ రాసి 1ని మనస్సునందుంచుకోండి.

వేల స్తానము వచ్చుటకు పదుల, వందల స్తానపు అంకెలను ఆడ్డు
 గుణకారము చేసి కలుపగ $1 \times 2 + 3 \times 2 = 8$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సు
 నందుగల 1ని కలుపగ $8 + 1 = 9$ అపుతుంది. దీనిని 9ని వేల స్తానముగ
 రాయాలి.

పదివేల స్తానము వచ్చుటకు వందల స్తానపు అంకెలను గుణించగ $1 \times 3 = 3$
 వస్తుంది. దీనిని పదివేల స్తానముగ రాయండి.

ఇట్లు 1) 532×472	2)	785×362
532		785
472		362
<hr/> 251104		<hr/> 284170

ఒక సంఖ్యలో మూడు అంకెలుండి రెండవ సంఖ్యలో రెండు అంకెలన్న
 ఎడల వందల స్తానపు అంకె బదులు ఉన్న రాయాలి.

ఉదాహరణకు 123×89 ,	135×62
123	135
089	062
<hr/> 10947	<hr/> 8370

9. ఈజిప్పుదేశ గుణకార పద్ధతులు

- I) సాధారణముగ గుణకారములను చేయుటకు ఎక్కులను వాడుతాము. తాని
 ఈజిప్పు దేశప్పలు ఎక్కులను వాడుకుండగనే లబ్దములను కనుగొను
 పద్ధతిని వాడెడివారట ఈ పద్ధతికి చెందినవి మూడు రకములు. ఏ
 సంఖ్యనైనను $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64....$ మొదలగు సంఖ్యలను వాడి

తయారు చేయవచ్చును. వీటినుపయోగించి లభములను కనుగొనడివారు మొదటి నిలువ వరుసలో యూ అంకెలు రాయండి. వీటికి ఎదురుగా గుణించవలసిన సంఖ్యను రెట్టింపు చేయుచు రాయాలి. ఏ అంకెల మొత్తము గుణకము అవుతుందో ఆయా అంకెలకు ఎదురుగనున్న సంఖ్యల మొత్తం లభము అవుతుంది.

ఉదాహరణకు 35×212 కావలెను అనుకోండి.

1	212
2	424
4	848
8	1696
16	3392
32	6784

35 వచ్చుటకు 1, 2, 32లు కలుపగ వస్తుంది. కావున 1, 2, 32లకు ఎదురుగనున్న సంఖ్యలను కూడగ లభము అవుతుంది.

$$\begin{array}{r}
 35 \times 212 = 6784 \\
 \quad\quad\quad 424 \\
 \quad\quad\quad 212 \\
 \hline
 7420
 \end{array}$$

ఇట్లీ 21×25 కావలెను అనుకోండి.

1	25
2	50
4	100
8	200
16	400

21 వచ్చుటకు 1, 4, 16 కలపాలి. కావున వాటికి ఎదురుగనున్న సంఖ్యల మొత్తం లభము అవుతుంది.

$$21 \times 25 = 25 + 100 + 400 = 525$$

- 2) ఈటిష్టు దేశస్తులు వాడు మరియుక పద్ధతి ప్రకారము సంఖ్యను సగము చేయుట రెట్టింపు చేయుటవలన గుణకారములను చేయవచ్చును. గుణించు సంఖ్యను ఎడమవైపునను గుణించవలసిన సంఖ్యను కుడివైపునను రాయాలి. ఎడమవైపు సంఖ్యను సగము చేయుచు శేషములను వదిలివేయుచు 1 వచ్చు వరకు రాయాలి. కుడివైపు సంఖ్యలను రెట్టింపు చేయుచు 1కి

ఎదురుగ వచ్చి వరకు రాయాలి. ఎడమవైపునున్న చేసి అంకెలకు ఎదురుగ నున్న కుడివైపు అంకెలను కూడగ లభము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 21×4 కావలెను అనుకోండి.

21	42
10	84
5	168
2	336
1	672

ఎడమవైపునున్న చేసి అంకెలు 1, 5, 21లకు ఎదురుగనున్న కుడివైపు అంకెలు కూడగ $42 + 168 + 672 = 882$ వస్తుంది. ఇది సంఖ్యల లభము అవుతుంది.

3) ఈజిష్ట్ దేశములో మరియుక పద్ధతికూడా వాడుకలో నుండిదిది. ఈ పద్ధతిలో గుణకమును ఒక కాగితముపై రాసి గుణ్యములోని అంకెలను తయారుచేసి సంఖ్యగ తలంచాలి. తారుమారు చేసిన సంఖ్యలోని పదుల స్తానమును గుణకములోని ఒకట్లు స్తానమునకు కిందగ తలంచి గుణించి అన్ని ఒకట్లుగ తీసికోండి. తరువాత పదుల స్తానమునకు కిందగ పదుల స్తానమును ఒకట్లు స్తానమునకు కిందగ ఒకట్లు స్తానమును వుంచి ఎదురెదురుగనుండు అంకెలను గుణించగ వచ్చి సంఖ్యలను కలపగ వచ్చి సంఖ్యలోని ఒకట్లు స్తానమును లభములోని పదులుగ రాయండి. పదుల స్తానమును మనస్సునందుంచుకోండి. గుణ్యములోని ఒకట్లు స్తానమును గుణకములోని పదుల స్తానమునకు కిందగ జరిపి ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించగ వచ్చి సంఖ్యకు మనస్సునందుగల అంకెను కలిపి లభములోని పదుల స్తానమునకు ముందు రాయండి. ఇప్పుడు సంఖ్యల లభము అవుతుంది. ఈ పై పద్ధతిని చేయుటవలన గుర్తుల గుణకారములోని అడ్డ గుణకారము చేయువసరము లేదు.

ఉదాహరణకు 31×23 కావలెను అనుకోండి.

ఒక కాగితముపై 31ని రాయండి. 23ను 32గ తలంచి మొదట 3ను 1 కిందగ నుండునట్లుగను, తరువాత 31 కిందగ 32 వుండునట్లుగను, తరువాత 3నకు 2 కిందగ 2 వుండునట్లుగను తలంచి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించి ఒకట్లు, పదులు, వందలు, వేల స్తానములగ రాయండి.

31	31	31
32	32	32
3	11	6

$$\dots 31 \times 23 = 713$$

1కి కిందగ 3ను రాసి గుణించగ 3 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. 31కి కిందగ 32 రాసి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించి కలుపగ $3 \times 3 + 1 \times 2 = 11$ వస్తుంది. దీనిలోని ఒకట్ల స్తానపు 1ని పదులుగ రాయండి. పదుల స్తానపు 1ని మనస్సునందుంచుకోండి తరువాత 3నకు కిందగ 2 వచ్చునట్లు జరిపి గుణించగ వచ్చ $3 \times 2 = 6$ నకు మనస్సునందుగల 1ని కలుపగ 7 వస్తుంది. దీనిని వందలుగ తీసికోండి.

ఇట్లే 37×52 కావలెను అనుకోండి.

సంఖ్యలను కింద విధముగ తలంచి గుణించండి.

37	37	37
25	25	25
<hr/>	<hr/>	<hr/>

రెండవ సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు చేయగ 25 వస్తుంది. దీనిలోని 2ను 7నకు కిందగ తలంచి గుణించగ 14 వస్తుంది. దీనిలోని 4ను లబ్ధములోని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. పదుల స్తానమును మనస్సునందుంచుకోండి.

37నకు కిందగ 25ను |నాసి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించగ వచ్చ సంఖ్యలను కలుపగ $3 \times 2 + 7 \times 5 = 41$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సులో గల 1ని కలుపగ 42 అవుతుంది. దీనిలోని 2ను లబ్ధములోని పదులుగ తీసికోండి. 4ను మనస్సునందుంచుకోండి.

3నకు కిందగ 5ను రాసి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించగ వచ్చ $3 \times 5 = 15$ నకు మనస్సు నందుగల 4ను కలుపగ 19 వస్తుంది. దీనిని లబ్ధములోని వేలు, వందలు స్తానముగ తీసికోండి.

ఇప్పుడు $37 \times 52 = 1924$ అవుతుంది.

మరియుక ఉదాహరణకు 21×32 తీసికోండి. అంకెలను కింద విధముగ తలంచండి.

21	21	21
23	23	23
<hr/>	<hr/>	<hr/>
2	7	6

ఇప్పుడు $21 \times 32 = 672$ అవుతుంది.

- 4) పే శాస్త్రిప్ప దేశ పద్ధతి ననుసరించి మూడు అంకెల గుణకారము కూడ చేయవచ్చను. మొదటి సంఖ్యను ఒక కాగితముపై రాయండి. రెండవ సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారుచేసి ఒక కాగితము ముక్కెపై రాసి

కింద చూపేసట్లుగ కాగితమును జరుపుచు ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించు ఒకట్లు, పదులు, వందలు, వేలు, పదివేలుగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 212×321 కావలైన అనుకోండి.

ఒక కాగితముపై 212 ని రాయండి. రెండవ సంఖ్యను 123 గ తలంచి ఒక కాగితపు ముక్కొపై రాసి కింద చూపిన విధముగ జరుపుచు ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించు లభ్యములను కనుక్కొండి.

1)	<u>212</u>	2)	<u>212</u>	3)	<u>212</u>	4)	<u>212</u>	5)	<u>212</u>
	123		123		123		123		123

2నకు కిందగనున్న 1 తలంచి గుణించగవచ్చు. $2 \times 1 = 2$ ను లభ్యములోని ఒకట్లు స్థానముగ రాయండి.

1, 2లకు కిందగ $1, 2$ లను తలంచి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించి కలుపగ $1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$ వస్తుంది. దీనిని లభ్యములోని పదుల స్థానముగ రాయండి.

2, 1, 2లకు కిందగ $1, 2, 3$ లను తలంచి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించి కలుపగ $2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 = 10$ వస్తుంది. దీనిలోని 0 ను లభ్యములోని వందల స్థానముగ రాయండి. 1ని మనస్సునందుంచుకోండి.

2, 1లకు కిందగ $2, 3$ లను తలంచి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించి కలుపగ $2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సునందుగల 1 కలుపగ 8 వస్తుంది. దీనిని వేల స్థానముగ రాయండి.

2నకు కిందుగ 3 రాసి గుణించగ వచ్చు 6 ను పదివేలుగ రాయండి.

ఇప్పుడు $212 \times 321 = 68052$ అవుతుంది.

10. భారతదేశపు గుణకార పద్ధతులు

పద్ధతి 1: వారుకలోనున్న గుణకార పద్ధతి: ఈ పద్ధతిలో గుణించవలసిన సంఖ్యకు కిందగ గుణించు సంఖ్యను రాయాలి. ఒక్కొక్క అంకెతో గుణకారము చేయుచు ప్రతి పర్యాయము ఒక పదము ఎడుమ పక్కగ ఆరంభించి సంఖ్యలను రాయండైని. సంఖ్యలను కూడగ లభ్యము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 42×34 కావలైన అనుకోండి.

42
34
168
126
1428

4 చే ముందు గుణించి రాయువలెను. తరువాత 3 చే గుణించి ఒక అంకె ఎడమ పక్కగా ఆరంభించి సంఖ్యను రాసి కూడగ లబ్ధము వస్తుంది. ఇట్లే ఎన్ని అంకెల గుణకారము అయినను ప్రతి పర్యాయము ఒక పదము ఎడమ పక్కగా ఆరంభించి సంఖ్యలను రాసి కలుపగ లబ్ధము వస్తుంది.

పద్ధతి 2: లబ్ధములను ఒకదాని కింద ఒకటి వేయు పద్ధతి. ఈ పద్ధతిలో వరుసగ అంకెలతో గుణించుచు లబ్ధమును ఒక పదము పక్కగా రాయునవసరము లేదు. మొదటి సంఖ్యను రెండవ సంఖ్యను విలోమము చూపిన సంఖ్యతో కింద చేసిన విధముగ గుణించాలి.

ఉదాహరణకు 42×34 కావలెను అనుకోండి.

42		4
168		3
126		

మొదట 4 చే గుణించి లబ్ధము 168 రాయిండి. తరువాత 3 చే గుణించి లబ్ధము 126ను కింద రాయిండి. ఇప్పుడు లబ్ధములోని సంఖ్యలు వచ్చుటకు కర్మములోని అంకెలను ఏటవాలుగ పైనుండి కూడగ వస్తుంది.

ఒకట్ల స్థానపు అంకె = 8

పదుల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు $6 + 6 = 12$ లోని 2ను పదులుగ తీసికోండి. 1ని మనస్సునందుంచుకోండి. వందల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు $1 + 2 = 3$ నకు మనస్సులోగల 1ని కలుపగ 4 ఆపుతుంది. వేల స్థానపు అంకె 1 అవుతుంది.

ఇప్పుడు $42 \times 34 = 1428$

ఇట్లే 237×432 కావలెను అనుకోండి.

2	3	7		2
4	7	4		3
7	1	1		4
9	4	8		

432ను 234గ తలంచి నిలుపు వరుసగ రాయాలి 2, 3, 4లచే వరుసగ గుణించి రాయాలి. లబ్ధము వచ్చుటకు కర్మములోని అంకెలను కూడగ వస్తుంది.

ఒకట్ల స్థానపు అంకె = 4, పదుల స్థానపు అంకె $7 + 1 = 8$ వందల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు $4 + 1 + 8 = 13$ లో 3 ను రాసి 1ని మనస్సునందుంచుకోండి.

వేల స్తానపు అంకి వచ్చుటకు $7 + 4 = 11$ కు మనస్సులో గల 1ని కలుపగ వచ్చి 12లోని 2ను రాసి 1ని మనస్సునందుంచుకోండి.

పదివేల స్తానము వచ్చుటకు 9కి మనస్సులో గల 1 కలుపగ వచ్చి 10ని వేల స్తానమునకు ముందు రాయండి.

$$\text{ఇప్పదు } 237 \times 432 = 102384$$

పద్ధతి 3: ఎక్కువ ఎక్కుల వరకు కంరష్టరి వచ్చినచో గుణకారములను తక్కువ వరుసలలోనే చేయవచ్చును. ఈ పద్ధతులు వాడుకలో లేకపోయినను కొంచెము అనుభవము సంపాదించినచో అతి తొందరలో చేయవచ్చును.

ఈ పద్ధతిలో గుణించవలసిన సంఖ్యను గుణించు సంఖ్యకు కిందగ రాయాలి. గుణించు సంఖ్యలోని అంకెలను వరుసగ తీసికొని గుణించవలసిన సంఖ్యలోని అంకెలను రెండు భాగములుగ చేసి మొదటి భాగమును గుణించి వేయాలి. తరువాత రెండవ భాగమును యిదే విధముగ గుణించి రెండు స్తానములు పక్కగ రాసి కలపాలి.

$$\text{ఉదాహరణకు } 2432 \times 1612 \text{ కావలెను అనుకోండి.}$$

$$\begin{array}{r}
 2\ 4\ 3\ 2 \\
 1\ 6\ 1\ 2 \\
 \hline
 2\ 9\ 1\ 8\ 4 \\
 3\ 8\ 9\ 1\ 2 \\
 \hline
 3\ 9\ 2\ 0\ 3\ 8\ 4
 \end{array}$$

1612ను 16, 12లుగ చిభజించండి. మొదటి సంఖ్య 2432లోని అంకెలతో వరుసగ 12ను గుణించి మొదటి వరుసలో రాయండి. తరువాత 2432లోని అంకెలతో వరుసగ 16ను గుణించి రెండు స్తానములను వదలిపేసి ఎడమవైపుగ రాసి కలుపగ లభ్యము వస్తుంది.

12ను 2, 3, 4, 2తో గుణించగ 29184 వస్తుంది. తరువాత 16ను 2, 3, 4, 2తో గుణించగ 38912 వస్తుంది. వైన చూపిన విధముగ కూడగ 3920384 అచ్చుతుంది.

11. వేదగణిత మౌఖిక గుణకార పద్ధతులు

వేదములోని కొన్ని సరళ సూత్రములను పయోగించి మౌఖికముగ గుణకారములను చేయవచ్చును. ఈ పద్ధతిలో దగ్గరనున్న పూర్ణ సంఖ్యల ఆధారముగ

తీసికోంటాము. అనగా 10కి దగ్గర పున్నపుడు రెండు సంఖ్యలు కలిపి పది నుండి తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యను పదులుగా తీసికోంటాము. సంఖ్యలు పదికి గల తేడాలను తెలిస్కొని గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను ఒకట్లుగ తీసికోంటాము. దీనిని శీజగణితమును ఉపయోగించుచు యూ కింది విధముగ వివరించవచ్చును. ఈ పద్ధతులు అధ్యయనము చేయుటకు 5×5 ఎక్కులు వచ్చిన చాలను.

$$(x - a)(x - b) = x(x - a - b) + ab$$

10కి దగ్గరనున్న సంఖ్యల లభ్యము కనుగొనుట

రెండు అంకెలు 10కి దగ్గరనున్నపుడు రెండు అంకెలను 10 నుండి తీసివేయగ వచ్చిన సంఖ్యల లభ్యము ఒకట్లుగ రాయండి. రెండు సంఖ్యలను కలిపి 10ని తీసివేసి అన్ని పదులుగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 9×9 కావలెను అనుకోండి.

రెండు అంకెలు 10కి దగ్గరగ నున్నవి. 10 నుండి వరుసగ తీసివేయగ 1, 1 లు వస్తాయి. ఏటి లభ్యము $1 \times 1 = 1$ ని ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి.

రెండు అంకెలను కలిపి 10ని తీసివేయగ $9 + 9 - 10 = 8$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఇప్పుడు $9 \times 9 = 81$ అభ్యర్థితంది.

$$\begin{aligned} \text{ఇప్పుడు } 9 \times 8 &= (9 + 8 - 10), (10 - 9)(10 - 8) \\ &= 72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \times 9 &= (7 + 9 - 10), (10 - 7)(10 - 9) \\ &= 63 \end{aligned}$$

మరియుక ఉదాహరణాలు 7×6 లు కావలెను అనుకోండి.

7, 6లు కలిపి 10 తీసివేయగ $7 + 6 - 10 = 3$ వస్తుంది. దీనిని వందలగి తలంచగి 30 అభ్యర్థితంది.

7, 6లు పది సుండి వరుసగ తీసివేయగ 3, 4లు వస్తాయి. ఏటి అభ్యర్థము $3 \times 4 = 12$ వస్తుంది. దీనిని 30కి కలుపగ అంకెల లభ్యము $30 + 12 = 42$ అభ్యర్థితంది.

$$\begin{aligned} \text{ఇట్లు } 6 \times 6 &= (6 + 6 - 10), (10 - 6)(10 - 6) \\ &= 20 + 16 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \times 13 &= (12 + 13 - 10), (10 - 12)(13 - 10) \\ &= 156 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \times 13 &= (13 + 13 - 10), (13 - 10)(13 - 10) \\ &= 169 \end{aligned}$$

ఈక అంకె పదిలోపు మరియొకటి 10 కంటే ఎక్కువ అయినను యాదే పద్ధతిని చేయవచ్చును.

ఉదాహరణకు 9×12 కావలెను అనుకోండి.

$$\begin{aligned} 9 \times 12 &= (9 + 12 - 10), (10 - 9)(10 - 12) \\ &= 11, 1 \times -2 \\ &110 - 2 = 108 \end{aligned}$$

ఇట్లే సమయస్థాఱిగా ఎక్కులను గుణించుకోవచ్చును.

20కి దగ్గరినున్న సంఖ్యల లభ్యము కనుగోనుట

వివరణ:

20 రగ్గిలనున్న అంకెలను 20 నుండి తీసివేయండి. వీటి లభ్యమును ఒకట్ల స్థానముగ వాయండి.

రెండు సంఖ్యలను కలిపి 20ని తీసివేయండి. దీనిని 2చే గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను వందలు పదుల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ-1: 19×19 కావలెను అనుకోండి. ఇని రెండును 20కి దగ్గరినున్నావి. వీటిని 20 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 1, 1 వస్తాయి. వీటి లభ్యము $1 \times 1 = 1$ ని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

రెండు సంఖ్యలను కలిపి $(19 + 19 = 38)$ 20ని తీసివేయండి. 18 వస్తుంది. దీనిని 2 చే గుణించగ వచ్చు 36ను వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి. లభ్యము 361 అవుతుంది.

ఉదాహరణ-2: 23×21 ల చిలవ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 20 నుండి తీసివేయగ వరుసగ $-3, -1$ లు వస్తాయి. వీటి లభ్యము 3 అవుతుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

అంకెలను కలపగ వచ్చు $(23 + 21 = 44)$ నుండి 20ని తీసివేయండి. 24 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగ వచ్చు 48ని వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి. ఇప్పుడు సంఖ్యల లభ్యము 483 అవుతుంది.

మరొక క్లెప్పుమైన ఉదాహరణ: 19×23 ల చిలవ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 20 నుండి తీసివేయగ వరుసగ $+1, -3$ లు వస్తాయి. వీటి లభ్యము -3 అవుతుంది.

రెండు సంఖ్యలను కలపగ వచ్చు మొత్తము $19 + 23 = 42$ నుండి 20ని తీసివేయండి. 22 వస్తుంది. దీనిని 2 చే గుణించగ 44 అవుతుంది. దీనిని వందల పదల స్థానముగ తీసికొనగ 440 అవుతుంది. దీనినుండి 3ను తీసివేయండి. 437 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 19 \times 23 &= (19 + 23 - 20) \times 2, \quad (20 - 19)(20 - 23) \\ &= 22 \times 2, \quad 1 \times -3 \\ &= 440 - 3 = 437 \end{aligned}$$

ఇట్లే సమయస్వార్థిగ ఒక సంఖ్య 20 కంటే తక్కువ, మరియుక సంఖ్య 20 కంటే ఎక్కువ అయినపుడు గుణించగ వచ్చును.

$$\begin{aligned} 18 \times 24 &= (18 + 24 - 20) \times 2, \quad (20 - 18)(20 - 24) \\ &= 22 \times 2, \quad 2 \times -4 \\ &= 440 - 8 \\ &= 432 \end{aligned}$$

30కి దగ్గరనున్న అంకెల లభ్యము కనుగొనుట

వివరా: 30కి దగ్గరనున్న అంకెలను 30 నుండి తీసివేయండి. వీటి లభ్యమును ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

రెండు సంఖ్యలను కలిపి 30ని తీసివేయండి. దీనిని 3చే గుణించి వందలు పదులు స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ: 27×28 చిలువ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 30 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 3,2 వస్తాయి. వీటి లభ్యము 6ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

రెండు సంఖ్యలను కలుపగ వచ్చు $27 + 28 = 55$ నుండి 30ని తీసివేయండి. 25 వస్తుంది. దీనిని 3చే గుణించగ వచ్చు 75ను వందలు పదుల స్థానముగ రాయండి. అప్పుడు సంఖ్యల లభ్యము 756 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 27 \times 28 &= (27 + 28 - 30) \times 3, \quad (30 - 27)(30 - 28) \\ &= 25 \times 3, \quad 3 \times 2 \\ &= 756 \end{aligned}$$

మరో ఉదాహరణ: 29×28 చిలువ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 30 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 1, 2లు వస్తాయి. వీటి లభ్యము 2ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

రెండు అంకెలను కలుపగ వచ్చు $29 + 28 = 57$ నుండి 30 తీసివేయండి. 27 వస్తుంది. దీనిని 3చే గుణించగ వచ్చు $27 \times 3 = 81$ ని వందలు పదుల స్తానముగ రాయండి. అప్పుడు లబ్ధము 812 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 29 \times 28 &= (29 + 28 - 30) \times 3, \quad (30 - 29)(30 - 20) \\ &= 27 \times 3, \quad 1 \times 2 \\ &= 812. \end{aligned}$$

మరో క్రిష్ణసమస్య: 28×33 చిలువ కావలైను అనుకోండి. వీటిని 30 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 2, - 3 వస్తాయి. వీటి లబ్ధము -6 అవుతుంది.

రెండు సంఖ్యలను కలిపి 30ని తీసివేయండి. 31 వస్తుంది. దీనిని 3చే గుణించగ 93 వస్తుంది. దీనిని వందలు పదుల స్తానముగ రాయగ 930 అవుతుంది. దీనికి -6 తీసివేయగా 924 అవుతుంది.

ఇట్లే సమయస్తార్థిగ 40, 50, 60లకు దగ్గరినున్న సంఖ్యల లబ్ధములను కనుగొనవచ్చును.

100కి దగ్గరినున్న అంకెల లబ్ధము కనుగొనుట

పద్ధతి: వంద నుండి తీసివేయగ వచ్చు అంకెల లబ్ధమును పదులు, ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. ఆ సంఖ్యలను కలిపి 100ను తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యను వేలు, వందల స్తానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 93×92 కావలైను అనుకోండి.

100 నుండి వరుసగ తీసివేయగ వరుసగ 7, 8లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 56ను పదులు ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తమును $93 + 92 = 185$ నుండి 100 తీసివేయండి. 85 వస్తుంది. దీనిని వేలు, వందల స్తానముగ రాయండి. సంఖ్యల లబ్ధము 8556 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 93 \times 92 &= (93 + 92 - 100), \quad (100 - 93)(100 - 92) \\ &= 85, \quad 7 \times 8 \\ &= 8556 \end{aligned}$$

మరో ఉదాహరణ 99×97 కావలైను అనుకోండి.

100 నుండి వరుసగ తీసివేయగ వరుసగ 1, 3లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 3 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. పదుల స్తానముగ మున్న రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $99 + 97 = 196$ నుండి 100ని తీసివేయండి. 96 వస్తుంది. దీనిని వేలు, వందల స్తానముగ రాయండి. లభ్యము 9603 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 99 \times 97 &= (99 + 97 - 100), (100 - 99)(100 - 97) \\ &= 96, 1 \times 3 \\ &= 9603 \end{aligned}$$

కీప్పిసమస్య-1: 98×102 చిలువ కనుగొనవలెను అనుకోండి. 100 నుండి వరుసగ తీసివేయగ వరుసగ 2,-2లు వస్తాయి. వీటి లభ్యము -4 వస్తుంది.

సంఖ్యల మొత్తము $98 + 102 = 200$ నుండి 100ని తీసివేయండి. 100 వస్తుంది. దీనిని పదివేలు, వేలు, వందల స్తానముగ రాయండి. 10,000 అవుతుంది. దీనికి -4 కలుపగ 9996 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 98 \times 102 &= (98 + 102 - 100), (100 - 98)(100 - 102) \\ &= 100, 2 \times -2 \\ &= 100, -4 \\ &= 10,000 - 4 = 9996 \end{aligned}$$

కీప్పిసమస్య-2: 25×98 చిలువ కనుగొనవలెను అనుకోండి. 100 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 75, 2లు వస్తాయి. వీటి లభ్యము 150 వస్తుంది. దీనిని వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. అంతెల మొత్తము నుండి 100ను తీసివేయండి. 23 వస్తుంది. దీనిని వేలు, వందల స్తానముగ తీసికోండి. సంఖ్య చిలువ 2300 అవుతుంది. దీనికి 150 కలుపగ లభ్యము వస్తుంది. లభ్యము 2450 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 25 \times 98 &= [25 + 98 - 100], [100 - 25][100 - 98] \\ &= 23, 75 \times 2 \\ &= 2300 + 150 = 2450 \end{aligned}$$

కీప్పిసమస్య-3: 88×91 కావలెను అనుకోండి. 100 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 12,9లు వస్తాయి. వీటి లభ్యము 108 అవుతుంది. దీనిని వందలు, పదులు ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. అంతెల మొత్తమునుండి 100 ను తీసివేయండి. 79 వస్తుంది. దీనిని వేలు, వందలుగ తీసికొనగ 7900 అవుతుంది. దీనికి 108 కలుపగ లభ్యము వస్తుంది. లభ్యము 8008 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 88 \times 91 &= (88 + 91 - 100), (100 - 88)(100 - 91) \\ &= 79, 12 \times 9 \\ &= 7900 + 108 = 8008 \end{aligned}$$

మరియుక విధముగ కూడ గుణకారము చేయవచ్చును. రెండు సంఖ్యలు 100కు ఎంత తక్కువో కనుక్కొండి. మొదటి సంఖ్య నుండి రెండవ సంఖ్య ఎంత తక్కువో తీసివేసి, దానని అన్ని వందలుగ తీసికోండి.

రెండు సంఖ్యలు ఎంతెంత తక్కువో వాటిని గుణించి కలపండి.

$$\begin{aligned}\text{ఉదా:- } 88 \times 91 &= (88 - 9) \times 100, 12 \times 9 \\ &= 7900 + 108 = 8008\end{aligned}$$

మరియుక విధముగ కూడ గుణకారము చేయవచ్చును. రెండు సంఖ్యలు 100కు ఎంత తక్కువో కనుక్కొండి. మొదటి సంఖ్య నుండి రెండవ సంఖ్య ఎంత తక్కువో తీసివేసి దానని అన్ని వందలుగ తీసికోండి.

రెండు సంఖ్యలు ఎంతెంత తక్కువో వాటిని గుణించి కలపండి

$$\begin{aligned}\text{ఉదా:- } 88 \times 91 &= (88 - 9) \times 100, 12 \times 9 \\ &= 7900 + 108 = 8008\end{aligned}$$

200కి దగ్గరమన్న సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనుట

పద్ధతి: 200 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ వచ్చు అంకెల లబ్ధమును పదులు ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

అంకెల మొత్తము నుండి 200 తీసివేయండి. దీనిని 2చే గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను పదివేల, వేల, వందల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ-1: 198×199 కావలెను అనుకోండి. 200 నుండి వీటిని తీసివేయగ వరుసగ 2, 1లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 2 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానముగ సున్న రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $198 + 199 = 397$ నుండి 200ను తీసివేయండి. 197 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగ 394 వస్తుంది. దీనిని పదివేలు, వేలు, పదుల స్థానముగ రాయండి. లబ్ధము 39402 అవుతుంది.

$$\begin{aligned}198 \times 199 &= (198 + 199 - 200) \times 2, (200 - 198)(200 - 199) \\ &= 197 \times 2, 2 \times 1 \\ &= 39402\end{aligned}$$

ఉదాహరణ-2: 201×202 విలువ కావలెను అనుకోండి. 200 నుండి వీటిని తీసివేయండి. వరుసగ $-1, -2$ వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 2 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానముగ సున్న రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము నుండి 200ను తీసివేయండి. 203 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగ 406 అవుతుంది. దీనిని పదివేలు, వేలు, వందల స్తానముగ రాయండి. అటుము 40602 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 201 \times 202 &= (201 + 202 - 200) \times 2, (200 - 201)(200 - 202) \\ &= 203 \times 2, -1 \times -2 \\ &= 406, 2 \\ &= 40602 \end{aligned}$$

కీష్టసమస్య: 198 × 202 విలువ కావలేను అనుకోండి. 200 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 2, -2లు వస్తాయి. చీటి లభ్యము -4 అవుతుంది.

సంఖ్యల మొత్తము నుండి 200ను తీసివేయండి. 200 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగ 400 వస్తుంది. దీనిని పదివేలు, వేలు, వందల స్తానముగ తీసికొనండి. 40000 అవుతుంది. దీనికి 4 తీసివేయండి. $40000 - 4 = 39996$ అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 198 \times 202 &= (198 + 202 - 200) \times 2, (200 - 198)(200 - 202) \\ &= 200 \times 2, 2 \times -2 \\ &= 400, -4 \\ &= 40000 - 4 = 39996 \end{aligned}$$

ఇట్లు సమయస్థాటిగ 300, 400 సంఖ్యలకు దగ్గరనున్న సంఖ్యల లభ్యములను కనుగొనవచ్చును.

1000కి దగ్గరనున్న అంకెల లభ్యము కనుగొనుట

పద్ధతి: 1000 నుండి తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యల లభ్యమును వందలు పదులు ఒకట్లు స్తానముగ రాయండి. సంఖ్యల మొత్తము నుండి 1000 తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యను లక్ష్మి పదివేలు, వేలస్తానముగ రాయండి.

ఉచాచారణ-1: 998×997 విలువ కావలేను అనుకోండి 1000 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ వరుసగా 2,3లు వస్తాయి. చీటి అటుము 6 వస్తుంది. దీనిసి ఒకట్లు స్తానముగ రాయండి. పదుల స్తానముగ సున్న, వందల స్తానముగ సున్న రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $998 + 997 = 1995$ నుండి 1000 తీసివేయండి 995 వస్తుంది. దీనిని లక్ష్మి పదివేలు వేల స్తానముగ రాయండి. 995006 వస్తుంది.

$$\begin{aligned}
 998 \times 997 &= (998 + 997 - 1000)(1000 - 998)(1000 - 997) \\
 &= 995, 2 \times 3 \\
 &= 995, 6 \\
 &= 995006
 \end{aligned}$$

ఉదాహరణ-2: 1002×1003 చిలువ కావలెను అనుకోండి. 1000 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ -2, -3లు వస్తాయి. చీటి లభ్యము 6 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదులు, వందలు స్థానముగ సున్నలు రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తమును $1002 + 1003 = 1000$ ని తీసివేయండి. 1005 వస్తుంది. దీనిని లక్ష పదివేలు, వేల స్థానముగ రాయండి. 1005006 వస్తుంది.

$$\begin{aligned}
 1002 \times 1003 &= (1002 + 1003 - 1000) \\
 &\quad (1000 - 1002)(1000 - 1003) \\
 &= 1005, -2 \times -3 \\
 &= 1005, 6 \\
 &= 1005006
 \end{aligned}$$

ఉదాహరణ-3: 888×998 చిలువ కావలెను అనుకోండి. 1000 నుండి చీటిని తీసివేయగ వరుసగ 112, 2లు వస్తాయి. చీటి లభ్యము 224 వస్తుంది.

సంఖ్యల మొత్తము నుండి 1000 తీసివేయండి. 886 వస్తుంది. దీనిని లక్ష పదివేల వేల స్థానముగ రాయండి.

సంఖ్యల లభ్యము 886224 అవుతుంది.

$$\begin{aligned}
 888 \times 998 &= (888 + 998 - 1000) \\
 &\quad (1000 - 888)(1000 - 998) \\
 &= 886, 112 \times 2 \\
 &= 886, 224 \\
 &= 886224
 \end{aligned}$$

క్రిష్ణసమస్య!: 888×991 చిలువ కావలెను అనుకోండి. చీటిని 1000 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 112, 9లు వస్తాయి. చీటి లభ్యము 1008 అవుతుంది. దీనిని వేలు, వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $888 + 991 = 1879$ నుండి 1000ని తీసివేయండి. 897 అవుతుంది. దీనిని లక్ష పదివేలు, వేల స్థానముగ రాసి 1000897 కలపండి.

$$\begin{aligned}
 888 \times 991 &= (888 + 991 - 1000)(1000 - 888)(1000 - 991) \\
 &= 879,112 \times 9 \\
 &= 879,1008 \\
 &= 1008 \\
 &\quad \underline{\underline{879}} \\
 &\quad \underline{\underline{880008}}
 \end{aligned}$$

కీప్పసమస్య-2: 998×1002 కావలెను అనుకోండి. 1000 నుండి తీసివేయగ పదుసగ 2, -2లు పస్తాయి. వీటి లభ్యము -4 వస్తుంది.

సంఖ్యల మొత్తము $998 + 1002 = 2000$ నుండి 1000ని తీసివేయండి. దీనిని పదిలక్షలు, లక్షలు, పదివేలు, వేలుగ రాయండి. 10,00,000 అవుతుంది. దీనికి -4 తీసివేయండి. 9,99,996 అవుతుంది.

$$\begin{aligned}
 998 \times 1002 &= (998 + 1002 - 1000)(1000 - 998)(1000 - 1002) \\
 &= 1000,2 \times -2 \\
 &= 1000 - 4 \\
 &= 9,99,996 \text{ అవుతుంది.}
 \end{aligned}$$

2000కి దగ్గరునున్న సంఖ్యల లభ్యము కనుగొనుట

పద్ధతి: 2000 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయండి. వాటి లభ్యము కనుక్కోండి. దీనిని వందలు, పదులు, ఒకళ్ల స్తానముగ రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము నుండి 2000ను తీసివేసి లక్ష పదివేలు, వేల స్తానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ-1: 1999×1998 చిలువ కావలెను అనుకోండి. 2000 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ 1, 2 వస్తాయి. వీటి లభ్యము 2 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగా 3994 వస్తుంది దీనిని ఒకళ్ల స్తానముగ రాయండి. పదులు, వందల స్తానములుగ సున్నలు రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $1999 + 1998 = 3997$ నుండి 2000 తీసివేయండి. 1997 వస్తుంది. దీనిని పదిలక్షలు, లక్ష పదివేలు, వేల స్తానములుగ రాయండి. సంఖ్యల లభ్యము 3994002 అవుతుంది.

$$\begin{aligned}
 1999 \times 1998 &= (1999 + 1998 - 2000) \times 2, (2000 - 1999) \\
 &\quad (2000 - 1998) \\
 &= 1997 \times 2, 1 \times 2
 \end{aligned}$$

$$= 3994, 2$$

$$= 3994002$$

ఉదాహరణ-2: 2001×2005 విలువ కావలసిన అనుకోండి. 2000 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ $-1, -5$ లు వస్తాయి. వీటి లబ్దము 5 అవుతుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. వందలు పదుల స్థానముగ సున్నలు వాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $2001 + 2005 = 4006$ నుండి 2000 తీసివేయండి. 2006 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగా 4012 వస్తుంది. దీనిని పదిలక్షలు, లక్ష పదివేలు, వేల స్థానములుగ రాయండి. సంఖ్యల లబ్దము 4012005 అవుతుంది.

$$2001 \times 2005 = (2001 + 2005 - 2000) \times 2, (2000 - 2001)$$

$$(2000 - 2005)$$

$$= 2006 \times 2, -1 \times -5$$

$$= 4012, 5$$

$$= 4012005$$

ఇట్లే 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 వేలకు దగ్గరనున్న సంఖ్యల లబ్దము కనుగొనుపుడు సంఖ్యల మొత్తము నుండి ఆయా దగ్గరగనున్న సంఖ్యలను తీసివేసి ఆయా అంకాలతో గుణించి పై పద్ధతిలో వలె సంఖ్యల లబ్దమును కనుగొనవచ్చును.

10 వేలకి దగ్గరనున్న అంకాల లబ్దము కనుగొనుట

పద్ధతి: పదివేల నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ వచ్చి అంకాల లబ్దమును వేలు, వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. సంఖ్యల మొత్తము మండి 10000లను తీసివేయండి. దీనిని కోట్లు, పది లక్షలు, లక్షలు, పదివేలు వేల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ: 9997×9996 విలువ కావలసిన అనుకోండి. 10000 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 3, 4లు వస్తాయి. వీటి లబ్దము 12 అవుతుంది. దీనిని పదులు ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. వేలు వందల స్థానములుగ సున్నలు రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $9997 + 9996 = 19993$ ను 10,000 తీసివేయగా 9993 వస్తుంది. 9993ను కోట్లు పదిలక్షలు లక్షలు పది వేలగ రాయండి. సంఖ్యల లబ్దము 9,99,30,012 అవుతుంది.

$$9997 \times 9996 = (9997 + 9996 - 10000), (10000 - 1997)$$

$$(10000 - 9996)$$

$$= 9993, 3 \times 4 \\ = 9, 99, 30, 012$$

250కి దగ్గరనున్న సంఖ్యల లబ్దము కనుగొనుట

పద్ధతి: 250 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ వచ్చి సంఖ్యల లబ్దమును వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. సంఖ్యల మొత్తము నుండి 250 తీసివేయండి. 250 వెయ్యిలో 4 వ వంతు కావున 250 తీసివేయగ వచ్చి సంఖ్యను 4 చే భాగించండి. దీనిని పదివేలు, వేల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ-1: 249×245 విలువ కావలెను అనుకోండి. 250 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 1, 5లు వస్తాయి. వీటి లబ్దము 5 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. వందలు, పదుల స్థానములుగ సున్నలు రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $249 + 245 = 494$ నుండి 250 తీసివేయండి. 244 వస్తుంది. దీనిలో 4వ వంతు 61ని పదివేలు, వేల స్థానముగ రాయండి. లబ్దము 61005 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 249 \times 245 &= (249 + 245 - 250) \times \frac{1}{4}, (250 - 249)(250 - 245) \\ &= 244 \times \frac{1}{4}, 1 \times 5 \\ &= 61005 \end{aligned}$$

ఉదాహరణ-2: 249×246 విలువ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 250 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 1, 4లు వస్తాయి. వీటి లబ్దము 4 అవుతుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. వందలు, పదుల స్థానములుగ సున్నలు రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $249 + 246 = 495$ నుండి 250 తీసివేయగ 245 వస్తుంది. దీనిని 4 చే భాగించగ $61\frac{1}{4}$ వస్తుంది. 61 ని పదివేలు వేల స్థానముగ రాయండి. $\frac{1}{4}$ కు ఒదులుగ వేయలోని 4 వ వంతు 250 ని తరువాత స్థానములకు కలుపుము. ఇప్పుడు లబ్దము 61254 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 249 \times 246 &= (249 + 246 - 250) \times \frac{1}{4}, (250 - 249)(250 - 246) \\ &= 245 \times \frac{1}{4}, 1 \times 4 \\ &= 61\frac{1}{4}, 4 \\ &= 61254 \end{aligned}$$

500 అధారముగా చేసికొని లభము కనుగొనుట

ఉదాహరణ-1: 19×499 .

500 నుండి వీటిని తీసివేయగ వరుసగ 481, 1 లు వస్తాయి వీటి లభము 481 వస్తుంది. దీనిని పందలు, పదులు, ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $19+499=518$ నుండి 500 తీసివేయగ 18 వస్తుంది. దీనిని సగము చేయగ 9 వస్తుంది. దీనిని వేలుగ తీసికోండి. సంఖ్యల లభము 9481 అవుతుంది.

$$\begin{aligned}
 19 \times 499 &= (19 + 499 - 500) \times \frac{1}{2}, (500 - 19)(500 - 499) \\
 &= 18 \times \frac{1}{2}, 481 \times 1 \\
 &= 9, 481 \\
 &= 9481
 \end{aligned}$$

ఉదాహరణ-2: 389×516

500 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ వరుసగ 111, -16 లు వస్తాయి. వీటి లభము - 1776 అవుతుంది.

సంఖ్యల మొత్తము $389 + 516 = 905$ నుండి 500 తీసివేయండి. 405 వస్తుంది. దీనిని సగము చేయగ $202\frac{1}{2}$ వస్తుంది. దీనిలోని 202ను లక్షలు, పదివేలు, వేలుగ తీసికోండి $\frac{1}{2}$ ఒదులుగ వేయలోని సగము 500ను 1776లో తీసివేయగ 1276 అవుతుంది. దీనిని 202000 నుండి తీసివేయండి. 200724 వస్తుంది.

$$\begin{aligned}
 389 \times 516 &= (389 + 516 - 500) \times \frac{1}{2}, (500 - 389)(500 - 516) \\
 &= 405 \times \frac{1}{2}, 111 \times -16 \\
 &= 202\frac{1}{2}, -1776 \\
 &= 202, -1276 \\
 &= 202000 - 1276 = 200724
 \end{aligned}$$

12. సులభ పద్ధతుల గుణకారములు

1. ఒక సంఖ్యను 5చే గుణించునపుడు సులభ పద్ధతిని లభిము కనుగొనుట.
5చే గుణించునపుడు ముందుగ పదిచే గుణించి సగము చేసిన లభిము వస్తుంది.

పద్ధతి: ఉదాహరణకు 36ను 5చే గుణించవలసినపుడు ముందుగ 10చే గుణించగ 360 వస్తుంది. దానిలో సగము విలువ 180 లభిము అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: 48ని 5చే గుణించవలసినపుడు ముందుగ 10చే గుణించగ 480 వస్తుంది. దానిలో సగము 240 లభిము అవుతుంది.

2. ఒక సంఖ్యను 15చే గుణించునపుడు సులభ పద్ధతిని లభిమును కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 15చే గుణించునపుడు ముందుగ 10చే గుణించగ వచ్చి సంఖ్యకు కనుగొనవలెను. దానిలో సగము విలువను కనుగొని మొదటి సంఖ్యలు కలుపగ లభిము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 48ని 15చే గుణించగ వచ్చి లభిము కావలెను అనుకోండి.
48ని 10చే గుణించగ 480 వస్తుంది.

480లో సగము విలువ 240 అవుతుంది. 480, 240ల మొత్తము 720 లభిము అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: 64ను 15చే గుణించగ వచ్చి లభిము కనుగొనవలెను అనుకోండి. 64ను 10చే గుణించగ 640 వస్తుంది. దానిలో సగము 320 అవుతుంది. 640, 320ల మొత్తము 960 సంఖ్యల లభిము అవుతుంది.

3. ఒక సంఖ్యను 25చే గుణించవలసినపుడు సులభ పద్ధతిని లభిము కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 25చే గుణించగ వచ్చి లభిము కనుగొనుటకు సంఖ్యను 100చే గుణించి 4వ వంతు చేసిన వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 48ని 25చే గుణించవలెనన్న 48ని 100చే గుణించగ 4800 వస్తుంది. దీనిలో 4వ వంతు విలువ 1200 సంఖ్యల లభిము అవుతుంది.

4. ఒక సంఖ్యను 50చే గుణించినపుడు సులభ పద్ధతిని లభిము కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 50 గుణించునపుడు ముందుగ 100చే గుణించి సగము చేసిన చాలు.

ఉదాహరణకు 64ను 50చే గుణించవలెను అనుకోండి.

100 చే గుణించగ 6400 అవుతుంది. దానిలో సగము విలువ 3200 సంఖ్యల లభ్యము అవుతుంది.

5. ఒక సంఖ్యను 9 చే గుణించునపుడు సులభ పద్ధతిని లభ్యము కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 9 చే గుణించవలసి వచ్చినపుడు ముందుగ 10 చే గుణించి వచ్చిన లభ్యము నుండి గుణ్యమును తీసివేయగ సంఖ్యల లభ్యము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 54ను 9 చే గుణించవలెను అనుకోండి. 10 చే గుణించగ 540 వస్తుంది. దీనినుండి 54 తీసివేయగ 486 అను లభ్యము వస్తుంది.

6. ఇట్లే 8 చే గుణించవలసి వచ్చినపుడు 10 చే గుణించగ వచ్చిన లభ్యము నుండి రెండు రెట్లు గుణ్యమును తీసివేయగ లభ్యము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 48ని 8 చే గుణించవలెను అనుకోండి. 10 చే గుణించగ 480 వస్తుంది. దీనినుండి 48ని 2 రెట్లు చేయు సంఖ్య 96ను తీసివేయగ లభ్యము ($480 - 96$) = 384 అవుతుంది.

7. ఒక సంఖ్యను 11 చే గుణించునపుడు సులభపద్ధతిని లభ్యము కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 11 చే గుణించవలసినపుడు ముందుగ 10 చే గుణించగ వచ్చు లభ్యమునకు సంఖ్యను కలుపగ లభ్యము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 64ను 11 గుణించవలెను అనుకోండి. 10 చే గుణించగ 640 వస్తుంది. దానికి 64 కలుపగ లభ్యము 704 వస్తుంది.

8. ఒక సంఖ్యను 12 చే గుణించవలెనన్న సులభ పద్ధతిని లభ్యము కొనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 12 చే గుణించవలసినపుడు 10 చే గుణించి వచ్చిన లభ్యమునకు సంఖ్యను 2 చే గుణించగ వచ్చు లభ్యమును కలుపవలెను.

ఉదాహరణకు 48ని 12 చే గుణించవలెను అనుకోండి. 48ని 10 చే గుణించగ 480 వస్తుంది. దానికి 48ని 2 చే గుణించగ వచ్చు 96ను కలుపగ లభ్యము 576 వస్తుంది.

9. రెండు అంకెలుగల సంఖ్యల లభ్యము కనుగొనులకు సులభ పద్ధతిని చేయు విధము. పదుల స్థానములో యున్నపుడు చేయు విధము.

పద్ధతి: రెండు అంకెలుగల సంఖ్య లభ్యము కనుగొనవలెను అనుకోండి. మొదటి సంఖ్యకు 2వ సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానము కలిపి దానిని అన్ని పదులుగ తీసికొనండి. ఇప్పుడు సంఖ్యలలోని ఒకట్ల స్థానము అంకెల లభ్యము $3 \times 9 = 27$ ను 220కి కలుప లభ్యము 247 వస్తుంది.

ఉదాహరణకు: 13ను 19 చే గుణించవలెను అనుకోండి. 13ను 9కి కలుపగ 22 వస్తుంది. దానిని పదుల స్థానముగ రాయగ 220 అవుతుంది. ఒకట్ల స్థానము అంకెల లభ్యము $3 \times 9 = 27$ ను 220కి కలుప లభ్యము 247 వస్తుంది.

మరో ఉదాహరణ: 17ను 14చే గుణించవలెను అనుకోండి. 17ను 4కు కలుపగ 21 వస్తుంది. దానిని పదులుగ రాయగ 210 అవుతుంది. ఒకట్ల స్థానము అంకెల లభ్యము $7 \times 4 = 28$ ని 210కి కలుపగ లభ్యము 238 వస్తుంది.

10. పదుల స్థానపు అంకెలు సమానముగా నున్నపుడు సంఖ్యల లభ్యము కనుగొనుట.

పద్ధతి: మొదటి సంఖ్యకు 2వ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానము కలుపగ వచ్చు సంఖ్యను పదుల స్థానము అంకెతో గుణించగ వచ్చు లభ్యము కనుగొనవలెను. దాని అన్ని పదులుగ రాయండి. దానికి సంఖ్యలలోని ఒకట్ల స్థానముగ గుణించగ వచ్చు సంఖ్య కలుపగ లభ్యము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 49ని 42చే గుణించగ వచ్చు లభ్యమును కనుగొనవలెను అనుకోండి.

49కి 2 కలుపగ 51 వస్తుంది. 51ని 4చే గుణించగ 204 వస్తుంది. దీనిని పదులుగ రాయగ 2040 అవుతుంది. దానికి ఒకట్ల స్థానముల లభ్యము $9 \times 2 = 18$ కలుపగ లభ్యము 2058 అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: 58ని 53చే గుణించగ వచ్చు లభ్యము కనుగొనవలెను అనుకోండి.

58కి 3 కలుపగ 61 వస్తుంది. 61ని 5ని గుణించగ 3050 వస్తుంది. దీనికి ఒకట్ల స్థానపు అంకెల లభ్యము 24 కలుపగ 3074 అవుతుంది.

11. ఒకట్ల స్థానపు అంకెలు సమానముగ నున్నపుడు సంఖ్యల లభ్యము కనుగొనుట.

పద్ధతి: పదుల స్థానములోని అంకెల లభ్యము వందలుగ తీసికోండి.

పదుల స్థానములోని అంకెలు మొత్తమును ఒకట్ల స్థానము అంకెలతో గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను అన్ని పదుల స్థానముగ రాయండి. ఒకట్ల స్థానములోని అంకెల లభ్యము ఒకట్లుగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 96ను 46చే గుణించవలెను అనుకోండి.

$$9 \times 4 = 36 \text{ (వందల)} \quad 3600$$

$$(9+4)6 = 78 \text{ పదులు} = 780$$

$$6 \times 6 = 36 \text{ ఒకట్లు}$$

$$96 \times 46 = 3600 + 780 + 36 = 4416$$

$$\text{మరో ఉదాహరణ: } 62 \times 42$$

$$6 \times 4 = 24 \text{ (వందల)}$$

$$(6+4)2 = 20 \text{ పదులు}$$

$$2 \times 2 = 4 \text{ ఒకట్లు}$$

$$62 \times 42 = 2400 + 200 + 4 = 2604$$

$$\text{ఇంకో ఉదాహరణ: } 45 \times 85$$

$$4 \times 8 = 32 \text{ (వందల)}$$

$$(4+8) \times 5 = 60 \text{ (పదులు)}$$

$$5 \times 5 = 25 \text{ (ఒకట్లు)}$$

$$45 \times 85 = 3200 + 600 + 25 = 3825$$

12. మెచుదటి అంకెలు సమానముగ నుండి ఒకట్లు స్తానపు అంకెల మొత్తము పది అయినపుడు లభము కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒకట్లు స్తానపు అంకెల లభమును పదులు ఒకట్లు స్తానముగ రాయండి. పదుల స్తానపు అంకెలను, దాని తరువాత నున్న అంకెతో గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను వేలు, వందల స్తానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 96×94 కావలెను అనుకోండి. ఒకట్లు స్తానపు అంకెలు 6, 4ల లభము 24ను పదులు ఒకట్లు స్తానముగ రాయండి.

పదుల స్తానపు అంకె 9 తరువాత నున్న అంకె 10తో గుణించగ వచ్చు 90ని వేలు, వందల స్తానముగ రాయండి.

$$96 \times 94 = 9 \times 10.$$

$$6 \times 4 = 9024$$

$$99 \times 91 = 9 \times 10.$$

$$9 \times 1 = 9009$$

$$71 \times 79 = 7 \times 8.$$

$$1 \times 9 = 5009$$

$$114 \times 116 = 11 \times 12.$$

$$4 \times 6 = 13224$$

13. ఒక సంఖ్యను $7\frac{1}{2}$ చే సులభముగ గుణించి లభము కనుగొనుట.

పద్ధతి: $7\frac{1}{2}$ చే గుణించవలసి వచ్చినపుడు గుణామునకు సున్న చేర్చగ చచ్చి సంఖ్యను సంఖ్య నుండి దానిలో 4వ వంతు చిలువను తీసివేయండి. ఎందుచలన అనగ $7\frac{1}{2}$ పదిలో $\frac{3}{4}$ వంతు కావున.

ఉదాహరణకు 44ను $7\frac{1}{2}$ గుణించవలెను అనుకోండి. 44ను పదిచే గుణించగ 440 వచ్చుంది. దానిలో 4 వ వంతు చిలువ 110ని 440 నుండి తీసివేయండి లభము కచ్చుంది.

$$44 \times 7\frac{1}{2} = 440 - 110 = 330$$

$$\text{మరో ఉదాహరణ: } 36 \times 7\frac{1}{2} = 360 - 90 = 270$$

14. ఒక సంఖ్యను $12\frac{1}{2}$ చే గుణించగ వచ్చు లభిము కనుగొనుట.

పద్ధతి: $12\frac{1}{2}$ చే గుణించవలసినపుడు గుణ్యమునకు సున్న చేర్గా వచ్చు సంఖ్యకు, గుణ్యములో 4వ వంతు సంఖ్యను తలుపవలైను. ఎందువలన ఆనగ $2\frac{1}{2}$ పదిలో 4వ వంతు కావున.

ఉదాహరణకు 48ని $12\frac{1}{2}$ చే గుణించవలైను అనుకోండి. 48ని 10చే గుణించగ 480 వస్తుంది. $480\text{లో } 4\text{వ వంతు } 120 \text{ వస్తుంది. } 480, 120\text{లను కలుపగ } 600 \text{ అవుతుంది.}$

$$48 \times 12\frac{1}{2} = 480 + 120 = 600$$

15. ఒక సంఖ్యను $2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}$ లచే గుణించగ వచ్చు లభిమును కనుగొనుట.

పద్ధతి: $2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}$ లచే గుణించవలసి వచ్చినపుడు గుణ్యమును సగముచేసి వరుసగ 5, 7, 9, 11లచే గుణించవలైను.

$$\text{ఉదాహరణ } 1) 62 \times 2\frac{1}{2} = 31 \times 5 = 155$$

$$2) 48 \times 3\frac{1}{2} = 24 \times 7 = 168$$

$$3) 36 \times 4\frac{1}{2} = 18 \times 9 = 162$$

$$4) 24 \times 5\frac{1}{2} = 12 \times 11 = 132$$

13. అంకెలతో భాగింపబడుటకు నియమములు

1. ఒక సంఖ్య 2చే భాగించబడవలైనన్న సంఖ్య చివర సున్నగాని సరి సంఖ్యగాని యుండవలైను.

ఉదాహరణకు 430, 432, 436 లు 2 చే భాగింపబడతాయి.

2. ఒక సంఖ్య 3చే భాగింపబడవలైనన్న అంకెల మొత్తము 3 చే భాగించబడవలైను.

ఉదాహరణకు 27ను తీసికోండి. అంకెల మొత్తము 9. ఇది 3 చే భాగించబడును. కావున 27 అను సంఖ్య 3చే భాగింపబడును.

207 ను తీసికోండి. అంకెల మొత్తము 9. ఇది 3 చే భాగించబడును. కావున 207 అను సంఖ్య 3 చే భాగింపబడును.

3. ఒక సంఖ్య 4 చే భాగించబడవలైనన్న చివరి రెండు అంకెలు 4 చే భాగించబడవలైను. లేక చివరి రెండు అంకెలు సున్నలు కావలైను.

ఉదాహరణకు 728ని తీసికోండి. చివరి రెండు అంకెలు 28, 4 చే భాగించబడును కావున సంఖ్య 4 చే భాగింపబడును.

8200 తీసికోండి చివర రెండు సున్నలన్నవి కావున 4 చే భాగించబడును.

4. ఒక సంఖ్య 5 చే భాగించబడవలెనన్న చివరి అంకె 5 గాని సున్నగాని అయి యుండవలయును.

ఉదాహరణకు 305 తీసికోండి, ఇది 5 చే భాగించబడును. మరియుక ఉదాహరణ 350 తీసికోండి. ఇదికూడా 5 చే భాగింపబడును.

5. ఒక సంఖ్య 6 చే భాగించబడవలెనన్న చివరి అంకె సరిసంఖ్య అయియుండి, అంకెల మొత్తము 3 చే భాగింపబడవలెను.

ఉదాహరణకు 216 తీసికోండి. ఇది సరిసంఖ్య, మరియు అంకెల మొత్తము $2+1+6=9$. ఇది 3 చే భాగింపబడును. కావున 6 చే భాగింపబడును.

మరియుక ఉదాహరణ: 296 ఇది సరిసంఖ్య. కాని అంకెల మొత్తము $2+9+6=17$. ఇది 3 చే భాగింపబడదు. కావున 296 అను సంఖ్య 6 చే భాగింపబడు.

6. రెండు అంకెలు గల సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానపు అంకెను 5 చే గుణించి పదుల స్థానపు అంకెకు కలుపగ వచ్చి సంఖ్య 7 చే భాగింపబడినచో ఇచ్చిన సంఖ్య 7 చే భాగించబడును.

ఉదాహరణకు 14ను 7 చే భాగించవలెను అనుకోండి. ఒకట్లస్థానపు అంకె 4ను 5 చే గుణించి 1ని కలుపగ 21 వస్తుంది. మరల 1ని 5 చే గుణించి 2 కలుపగా 7 వస్తుంది. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 7 చే భాగించబడును.

$$4 \times 5 + 1 = 21, 1 \times 5 + 2 = 7$$

7. 28 ని 7 చే భాగింపవలెను అనుకోండి.

8ని 5 చే గుణించగ వచ్చి 40కి 2 కలుపగ 42 వస్తుంది 2ను 5 చే గుణించి 4ను కలుపగా 14 వస్తుంది, ఇది 7 చే భాగింపబడుతుంది. కావున 28, 7 చే భాగింపబడును.

$$8 \times 5 + 2 = 42, 2 \times 5 + 4 = 14$$

3) 63ను 7 చే భాగించవలెను అనుకోండి.

3ను 5 చే గుణించగ 75 వస్తుంది. దీనికి 6 కలుపగ 21 వస్తుంది ఇది 7 చే భాగింపబడును కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 7 చే భాగింపబడునే
 $3 \times 5 + 6 = 21, 1 \times 5 + 2 = 7$

4) 98ని 7 చే భాగించవలెను అనుకోండి.

8ని 6 చే గుణించగ 40 వస్తుంది. దానికి 9 కలుపగ 49 వస్తుంది.

$$8 \times 5 + 9 = 49 \quad 7 \text{ చే భాగింపబడును.}$$

5) 91 ని 7 చే భాగించవలెను అనుకోండి.

1ని 5 చే గుణించగ 5 వస్తుంది. దీనిని 9కి కలుపగ 14 వస్తుంది. ఇది 7 చే భాగింపబడును. కావున 91, 7 చే భాగింపబడును.

7) 3 అంకెలుగల సంఖ్య 7చే భాగింపబడుటకు నియమము.

పద్ధతి: మూడు అంకెలుగల సంఖ్య 7చే భాగింపబడునో లేదో తెలుసుకోనవలెనన్న ఒకట్ల స్తానపు అంకెను 5 చే గుణించి మిగిలిన సంఖ్యను కలుపవలెను.

ఉదాహరణకు 112 ను 7చే భాగించవలెను అనుకోండి. 2ను 5చే గుణించి 11ను కలపండి. 21 వస్తుంది. ఇది 7చే భాగింపబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 7చే భాగించబడును.

మరో ఉదాహరణా: 336ను 7చే భాగించవలెను అనుకోండి. 6ను 5చే గుణించగ 30 వస్తుంది. దానిని 33కు కలుపగ 63 వస్తుంది. మరల 3ను 5చే గుణించి 6కు కలపండి. 21 వస్తుంది. ఇది 7చే భాగించబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 7చే భాగింపబడును.

$$6 \times 5 + 33 = 30 + 33 = 63$$

$$3 \times 5 + 6 = 15 + 6 = 21$$

8. ఒక సంఖ్య 8చే భాగించబడుటకు నియమము.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్య 8 చే భాగింపబడవలెనన్న చివరి 3 అంకెలు గల సంఖ్య 368 ఎనిమిదిచే భాగించబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 8 చే భాగించబడును.

ఉదాహరణ 2368 ని 8 చే భాగించవలెను అనుకోండి, విసీలో చివరి 3 అంకెలు గల సంఖ్య 368 ఎనిమిదిచే భాగించబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 8 చే భాగించబడును.

మరో ఉదాహరణా: 1112 ను 8చే భాగించవలెను అనుకోండి. చివరి మూడు అంకెలు గల సంఖ్య 112 ఎనిమిదిచే భాగించబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 8చే భాగించబడును.

9. ఒక సంఖ్య 9 చే భాగించబడుటకు అంకెల మొత్తము 9చే భాగించబడవలెను.

ఉదాహరణకు 4131 ని 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. అంకెల మొత్తము $1+4+3+1=9$. ఇది 9 చే భాగించబడును. కావున యిచ్చిన సంఖ్య 9 చే భాగింపబడును.

మరో ఉదాహరణా: 83916 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి అంకెల మొత్తము $8+3+9+1+6=27$. మరల అంకెల మొత్తము $2+7=9$ కావున యిచ్చిన సంఖ్య 9చే భాగించబడును.

10. ఒక సంఖ్య 10 చే భాగింపబడవలెనన్న చివరి అంకె సున్న అయియుండవలయును.

11. ఒక సంఖ్య 11చే భాగింపబడవలెనన్న అంకెల మొత్తము చేసి స్తానములోని అంకెల మొత్తము యొక్క భేదము 11గాని 0గాని అయియుండవలెను.

ఉదాహరణకు 58432 తీసికోండి.

బేసి స్తానములోని అంకెల మొత్తము $5+4+2=11$

సరి స్తానములోని అంకెల మొత్తము $8+3=11$

భేదము $11 - 11 = 0$ కావున 11చే భాగించబడును.

14. భాగహరములు (Divisions)

మౌళికముగ భాగహరములు చేయు పద్దతులను వివరిస్తాము. వీటిని అధ్యయనము చేసినచో భాగహరములు చేయకుండగనే విభక్తము, శేషములను కనుకోనవచ్చును.

భాగించబడు సంఖ్యను విభాజయము అంటాము. భాగించు సంఖ్యను విభాజకము అంటాము. భాగించగ వచ్చు ఫలమును విభక్తము (Quotient) శేషము (Remainder) అంటాము. ప్రతి భాగహరమునందును –

$$\text{విభాజయము} = \text{విభాజకము} \times \text{విభక్తము} + \text{శేషము అగును.}$$

1. రెండు అంకెలుగల సంఖ్యను 9 చే భాగించినపుడు విభక్తము (Quotient) శేషము (Remainder) లను కనుగొనుట.

రెండు అంకెలు గల సంఖ్యలు పదుల స్తానపు అంకె విభక్తము అగును. అంకెల మొత్తము శేషము అగును.

ఉదాహరణ:

- 1) 13ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము పదుల స్తానపు అంకె 1 అగును. శేషము అంకెల మొత్తము $1+3=4$ అగును.
- 2) 52ను 9చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము పదుల స్తానపు అంకె 5 అగును. శేషము అంకెల మొత్తము $5+2=7$ అగును.
- 3) 27 ను 9చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము పదుల స్తానపు అంకె 2 అగును. శేషము అంకెల మొత్తము $2+7=9$ అగును. శేషమునకు మరల విభక్తము 1 కావున మొత్తము విభక్తము 3 అగును. శేషము సున్న అగును.
- 4) 83 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము పదుల స్తానపు అంకె 8 అగును. శేషము అంకెల మొత్తము $8+3=11$ అగును. మరల శేషమునకు విభక్తము 1, శేషము 1 అగును. కావున మొత్తము విభక్తము $8+1=9$. శేషము 1 అగును.

2. 3 అంకెలుగల సంఖ్యను 9 చే భాగించునపుడు విభక్తము శేషములను కనుగొనుట.

పద్ధతి: 3 అంకెలుగల సంఖ్యను 9 చే భాగించునపుడు విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెల సంఖ్యకు మొదటి అంకె కలుపవలయును.

ఉదాహరణ:

1) 103 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెల సంఖ్య 10 కి 1 కలుపవలెను. అప్పుడు విభక్తము $10+1=11$ అగును.

శేషము అంకెల మొత్తము $1+0+3=4$ అవుతుంది.

2) 114 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెలుగల సంఖ్య 11 కు 1 కలుపవలెను. అప్పుడు విభక్తము $11+1=12$ అగును.

శేషము అంకెల మొత్తము $1+1+4=6$ అవుతుంది.

3) 212 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెలు గల సంఖ్య 21 కి 2 కలుపవలెను. అప్పుడు విభక్తము $21+2=23$ అగును.

శేషము అంకెల మొత్తము $2+1+2=5$ అవుతుంది.

4) 225 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెలు గల సంఖ్య 22 కు 2 కలుపవలెను. అప్పుడు విభక్తము 24 అగును.

శేషము అంకెల మొత్తము $2+2+5=9$ అవుతుంది. కానీ శేషమునకు మరల విభక్తము 1 కావున మొత్తము విభక్తము $24+1=25$ అవుతుంది. శేషము సున్న అవుతుంది.

5) 138 సి 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెలు గల సంఖ్య 13కు 1 కలుపవలెను. అప్పుడు విభక్తము $13+1=14$ అగును. శేషము అంకెల మొత్తము $1+3+8=12$ అవుతుంది. కానీ శేషమునకు మరల విభక్తము 1. శేషము $1+2=3$ అగును. కావున మొత్తము విభక్తము $14+1=15$ శేషము 3 అగును.

4 అంకెలు గల సంఖ్యను 9 చే భాగించునపుడు విభక్తము, శేషములను కనుగొనుట.

పద్ధతి: 4 అంకెలు గల సంఖ్యను 9 చే భాగించినపుడు విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి అంకెను 2వ అంకెకు, మొదటి 2 అంకెల మొత్తమును 3వ అంకెకు కిందుగ రాసి కలపండి. ఇది విభక్తము అగును. అంకెల మొత్తము శేషము అగును.

ఉదాహరణకు 1203 ను 9చే భాగించవలెను అనుకోండి. 1ని 2కు కిందుగను, 1, 2 ల మొత్తము 0కు కిందుగను వేసి కలపండి. విభక్తము వస్తుంది. అంతెల మొత్తము శేషము అగును.

$$\begin{array}{rcl} \text{విభక్తము} & = & 120 \quad \text{శేషము} = 1+2+0+3=6 \\ & & \underline{-} \quad 13 \\ & & 133 \end{array}$$

- 2) 1507 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. 1వి 5కు కిందుగను 1, 5 ల మొత్తము 6ను 0కు కిందుగను రాసి కలపండి. విభక్తము వస్తుంది. అంతెల మొత్తము శేషము అవుతుంది.

$$\begin{array}{rcl} \text{విభక్తము} & = & 150 \quad \text{శేషము} = 1+5+0+7=13 \\ & - & 16 \quad \text{శేషమునకు మరల విభక్తము } 1, \\ \hline & 166 & \text{శేషము } 4 \text{ అవుతుంది.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{కావున మొత్తము విభక్తము} & = & 166+1=167 \\ & & \text{శేషము} = 4 \end{array}$$

- 3) 1231 ని 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. 1ని 2కి కిందుగను 1, 2ల మొత్తము 3ను 3కు కీందుగను రాసి కలపండి.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{విభక్తము} & = & 123 \\
 & & 13 \\
 \hline
 & & 136
 \end{array}$$

$$\text{శేషము} = 1+2+3+1=7$$

ಇದೆ ಪದ್ಧತಿನಿ 4 ಅಂತೆಲು ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 9 ಚೇ ಭಾಗಿಂಬಣಪ್ಪಡು ವಿಭಕ್ತಮು, ಹೀಗೆ ಮುಲಸು ಕನುಗೊನವಚ್ಚುನು.

5 అంకెలు గల సంఖ్యను 9వే భాగించునపుడు విభక్తము, శేషములను కనుగొనుట.

పద్ధతి: 5 అంకాలు గల సంఘము 9 చే భాగించునవుడు విభక్తము వచ్చుటకు మొదట అంకెను 2 వ అంకాలు కీందుగాను, 2 అంకాల మొత్తమును 3 వ అంకెను కీందుగాను, 3 అంకాల మొత్తమును 4 వ అంకాలు కీందుగాను కలుపగా విభక్తము వసుంది.

ఉదాహరణకు 12002 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. 1ని 2కు తీంచుగాను 1-2 అ మొత్తము 3ను వందల స్థానమునకు కిందుగను 1, 2, 0 అ మొత్తము 3ను పదుల స్థానమునకు కిందుగను రాశి కలుపండి, ఏఫ్టుకము చుపండి.

విభక్తము	1200
	133
	<u>1333</u>

$$\text{శేషము} = \text{అంకెల మొత్తము} = 1+2+0+0+2=5$$

ఉదాహరణ -2: 13102ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. 1ని 3కు కిందుగను $1+3=4$ పదుల స్తానమును వందల స్తానమునకు కిందుగను $1+3+1=5$ ను పదుల స్తానమునకు కిందుగను రాసి కలపండి, విభక్తము వస్తుంది.

విభక్తము	1310
	145
	<u>1455</u>

$$\text{శేషము} = 1+3+1+0+2=7 \text{ అవుతుంది.}$$

1. రెండు అంకెలు గల సంఖ్యను 8 చే భాగించునపుడు విభక్తము (Quotient) శేషము (Remainder) లను కనుగొనుట.

పద్ధతి: రెండు అంకెలుగల సంఖ్యను 8చే భాగించునపుడు పదుల స్తానపు అంకె విభక్తము అవుతుంది. మొదటి అంకెను 2చే గుణించి ఒకట్ల స్తానమునకు కలుపగ శేషము వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

- 1) 23 ను 8 చే భాగించవలెను అనుకోండి, విభక్తము పదుల స్తానపు అంకె 2 అగును.

$$\text{శేషము} = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

- 2) 24 ను 8 చే భాగించవలెను అనుకోండి, విభక్తము పదుల స్తానపు అంకె 2 అగును.

$$\text{శేషము} = 2 \times 2 + 4 = 8 \text{ వస్తుంది. కానీ శేషమునకు మరల విభక్తము 1 అవుతుంది. శేషము సున్న అవుతుంది.}$$

$$\text{మొత్తము విభక్తము } 2+1=3 \text{ అవుతుంది.}$$

- 3) 36 ను 8 చే భాగించవలెను, అనుకోండి, విభక్తము పదుల స్తానము అంకె 3 అగును.

$$\text{శేషము} = 3 \times 2 + 6 = 12 \text{ అవుతుంది. కానీ లూ శేషమునకు మరల విభక్తము 1 శేషము 4 అవుతుంది. మొత్తము విభక్తము 4 అవుతుంది.}$$

- 4) 92 ను 8 చే భాగించవలెను అనుకోండి, విభక్తము పదుల స్తానపు అంకె 9 అగును. శేషము $9 \times 2 + 2 = 18 + 2 = 20$ అవుతుంది. కానీ

యూ శేషమునకు విభక్తము 2, శేషము 4 అవుతుంది. మొత్తము విభక్తము $9+2=11$.

2. మూడు అంకెలు గల సంఖ్యలను 8 చే భాగించునపుడు విభక్తము శేషములను కనుగొనుట.

పద్ధతి: 3 అంకెలు గల సంఖ్యను 8చే భాగించినపుడు విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెల సంఖ్యకు మొదటి అంకెను 2 చే గుణించి కలుపవలెను.

విభక్తము యొక్క పదుల స్తానము అంకెను 2 చే గుణించి ఒకట్ల స్తానమునకు కలుపగ శేషము వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

1) 101 ని 8 చే భాగించవలెను అనుకోండి.

$$\text{విభక్తము} = 10 + 1 \times 2 = 10 + 2 = 12$$

$$\text{శేషము} = 2 \times 2 + 1 = 5 \text{ అవుతుంది.}$$

2) 104 ను 8 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము $10 + 2 \times 1 = 10 + 2 = 12$

$$\text{శేషము} = 2 \times 2 + 4 = 8. \text{ శేషమునకు విభక్తము } 1, \text{ శేషము సున్న అగును కావున మొత్తము విభక్తము } 12+1=13. \text{ శేషము}=0.$$

3) 211 ను 8 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము $21 + 2 \times 2 = 21 + 4 = 25.$

$$\text{శేషము} = 5 \times 2 + 1 = 11 \text{ అవుతుంది. శేషమునకు విభక్తము } 1, \text{ శేషము } 3 \text{ అగును. కావున మొత్తము విభక్తము } 25+1=26. \text{ శేషము } 3 \text{ అగును.}$$

4) 311 ను 8 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము $31 + 2 \times 3 = 31 + 6 = 37$

$$\text{అవుతుంది. శేషము } 7 \times 2 + 1 = 15 \text{ అవుతుంది. మరల శేషమునకు విభక్తము } 1 \text{ శేషము } 7 \text{ అవుతుంది. మొత్తము విభక్తము } 38 \text{ అవుతుంది. శేషము } 7 \text{ అవుతుంది.}$$

5) 3 అంకెలు గల సంఖ్యలో పదుల స్తానములో 5 కంటే పెద్ద సంఖ్య యున్నపుడు యూ క్రింది విధముగ చేస్తాము.

$$266\text{న } 8 \text{ చే భాగించవలెనన్న విభక్తము } 26 + 2 \times 2 = 30 \text{ అవుతుంది.}$$

శేషము వచ్చుటకు విభక్తములోని ఒకట్ల స్తానమునకు పది కలిపి 2చే గుణించి ఒకట్ల స్తానము కలుపవలెను. $\text{శేషము} = (0+10)2 + 6 = 26.$ దీని విభక్తము 3. శేషము 2 కావున మొత్తము విభక్తము 33 అవుతుంది.

1) 2 అంకెలు గల సంఖ్యను 7చే భాగించునపుడు విభక్తము శేషములను కనుకోనుట.

పద్ధతి: రెండు అంకెలు గల సంఖ్యను 7చే భాగించునపుడు పదుల స్తానపు అంకె విభక్తము అగును. పదుల స్తానపు అంకెను 3చే గుణించి ఒకట్ల స్తానమునకు కలుపగ శేషము వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

- 1) 12 ను 7 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము = 1. శేషము = $1 \times 3 + 2 = 5$.
- 2) 22ను 7 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము = 2. శేషము = $2 \times 3 + 2 = 8$.
శేషమునకు మరల విభక్తము 1 శేషము 1 అగును. కావున మొత్తము విభక్తము = 3, శేషము 1 అగును.
- 3) 29 ని 7 చే భాగించగ విభక్తము = 2. శేషము = $2 \times 3 + 9 = 15$.
శేషమునకు మరల విభక్తము 2, శేషము 1 వస్తుంది. మొత్తము విభక్తము 4, శేషము 1 అవుతుంది.
- 4) 31 ని 7 చే భాగించగ విభక్తము = 3, శేషము $3 \times 3 + 1 = 10$ అగును.
శేషమునకు మరల విభక్తము 1, శేషము 3 అవుతుంది. మొత్తము విభక్తము = $3+1=4$, శేషము = 3 అవుతుంది.
- 5) 51ని 7 చే భాగించబడవలెనన్న విభక్తము = 5. శేషము = $5 \times 3 + 1 = 16$.
శేషమునకు మరల విభక్తము = 2 శేషము = 2 కావున మొత్తము విభక్తము = $5+2=7$. శేషము = 2

3 అంకెలు గల సంఖ్యను 7 చే భాగించునపుడు విభక్తము, శేషములను కనుగోనుట.

పద్ధతి: 3 అంకెలు గల సంఖ్యను 7 చే భాగించునపుడు మొదటి రెండు అంకెల సంఖ్యకు మొదటి అంకెను 3 చే గుణించి కలుపగ వచ్చి సంఖ్యకు సమానము.

విభక్తము యొక్క ఒకట్ల స్థానపు సంఖ్యను 3 చే గుణించి ఒకట్ల స్థానము కలుపగ శేషము వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

- 1) 101 ని 7 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము = $10 + 1 \times 3 = 13$. శేషము $3 \times 3 + 1 = 10$. శేషమునకు మరల విభక్తము 1, శేషము = 3 కావున మొత్తము విభక్తము = 14 శేషము = 33.
- 2) 109 ని 7 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము = $10 + 1 \times 3 = 13$. శేషము $3 \times 3 + 9 = 18$. శేషమునకు మరల విభక్తము 2, శేషము 4. కావున మొత్తము విభక్తము = 16, శేషము = 4 అగును.
- 3) 176 ను 7 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము = $17 + 1 \times 3 = 20$ శేషము విభక్తములోని ఒకట్ల స్థానమునకు 10 కలుపగ వచ్చి సంఖ్యను 3 చే గుణించి ఒకట్లస్థానము కలుపవలెను. $10 \times 3 + 6 = 36$. దీనికి మరల విభక్తము 5, శేషము 1, మొత్తము విభక్తము = $20+5=25$, శేషము = 1.

4) 196 ను 7 చే భాగించగ విభక్తము $= 19 + 1 \times 3 = 22$, శేషము $12 \times 3 + 6 = 42$. దీనికి మరల విభక్తము 6, శేషము సున్న, కావున మొత్తము విభక్తము $= 22+6=28$.

మాటికి దగ్గరనున్న సంఖ్యలు

పద్ధతి: మాటికి దగ్గరనున్న సంఖ్యలతో భాగించునపుడు విభాజ్యము యొక్క వందల స్తానము విభక్తము అగును. విభాజ్యము నుండి 100ను తీసివేయగ చచ్చి సంఖ్యను పదులు ఒకట్ల స్తానమునకు కలుపగ శేషము వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

1. 111ను 89చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము $= 1$

100 నుండి 89ని తీసివేయగ 11 వస్తుంది. దీనిని పదులు ఒకట్ల స్తానమునకు కలుపగ శేషము $= 11 + 11 = 22$ అవుతుంది.

2. 112ను 73చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము $= 1$

100 నుండి 73 తీసివేయగ 27 వస్తుంది.

శేషము $= 12 + 27 = 39$

3. 198ని 88చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము $= 1$

100 నుండి 88ని తీసివేయగ 12 వస్తుంది. దీనిని 98కి కలుపగా శేషము వస్తుంది.

శేషము $= 98 + 12 = 110$

శేషమునకు నురల విభక్తము 1, శేషము 22

కావున మొత్తము విభక్తము $= 2$, శేషము 22.

సులభ పద్ధతుల భాగహారములు

1) ఒక సంఖ్యను 5చే భాగించవలసినపుడు సులభ పద్ధతిని చేయు విధము.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 5చే భాగించవలసి చెప్పినపుడు సంఖ్యను రెట్లింపుచేసి కుడిపెడ్ప నుండి ఒక డిస్ట్రిబ్యూటర్ స్తానమును ఎడమకు బరపులయ్యాడు.

ఉదాహరణకు: 165ను 5చే భాగించవలయ్యాడు అనుకోండి. 165ను రెట్లింపు చేయగ 330 అవుతుంది. దీనిని 10చే భాగించగ (లేక ఒక డిస్ట్రిబ్యూటర్ స్తానమును కుడినురాటి ఎడమకు జరుపగ) విభక్తము 33 అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: 127ను 5చే భాగించవలెను అనుకోండి. 127ను రెట్టింపు చేయగ 254 వస్తుంది. దీనిని 10చే భాగించగ 25.4 అవుతుంది.

2) ఒక సంఖ్యను 15చే భాగించునపుడు సులభ పద్ధతిని చేయు విధము.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 15చే భాగింపవలసినపుడు సంఖ్యను రెట్టింపు చేసి 30చే భాగింపవలయమను.

ఉదాహరణకు 105ను 15చే భాగింపవలయమను అనుకోండి 105ను రెట్టింపు చేయగ 210 అవుతుంది. దీనిని 30చే భాగించగ 7 వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 105ను 15చే భాగింపవలయమను అనుకోండి. 105ను రెట్టింపు చేయగ 210 అవుతుంది. దీనిని 30చే భాగించగ 7 వస్తుంది.

మరో ఉదాహరణ: 75ను 15చే భాగింపవలయమను అనుకోండి, 75ను రెట్టింపు చేయగ 150 వస్తుంది. దీనిని 35చే భాగించగ 5 వస్తుంది.

3) ఒక సంఖ్యను 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 మొదలగు సరి సంఖ్యలతో భాగింపవలసినపుడు సులభ పద్ధతులు.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 మొదలగు సరి సంఖ్యలతో భాగింపవలసినపుడు ఇచ్చిన సంఖ్యలను సగము చేసి వరుసగ 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12చే వరుసగ భాగించవలయమను.

ఉదాహరణ:

1) 204ను 12చే భాగించవలెనన్న 204 సగము 102ను 6చే భాగించవలెను.

$$\frac{204}{12} = \frac{102}{6} = 17$$

2) 392ను 14చే భాగించవలెనన్న 392లో సగము 196ను 7చే భాగించవలెను.

$$\frac{392}{14} = \frac{196}{7} = 28$$

ఈట్లు 16, 18, 20లచే భాగించవచ్చును.

3) 1176ను 24చే భాగించవలెనన్న 1176 లోని సగము 588ని 12చే భాగించవలెను.

$$\frac{1176}{24} = \frac{588}{12} = 49$$

ఈట్లు సరిసంఖ్య గల భాగచోరము చేయునపుడు సులభముగ చేయవచ్చును.

4) కారణాంకములుగ విభజించి భాగించు పద్ధతులు.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను కారణాంకములుగల సంఖ్యలతో భాగింపవలసినపుడు కారణాంకములుగ విభజించి మొదటి సంఖ్యను ఒక కారణాంకముతో భాగించగ వచ్చు సంఖ్యను మరల 2వ కారణాంకముతో భాగించవలయమను.

ఉదాహరణ:

- 1) 1088ని 32 చే భాగించవలయును అనుకోండి. 32ను కారణాంకములుగ విభజించగ 8,4లు వస్తాయి. మొదట 8చే భాగించగ 136 వస్తుంది. మరల 4చే భాగించగ 34 వస్తుంది.

$$\frac{1088}{8} = 136, \frac{136}{4} = 34$$

$$\therefore \frac{1088}{32} = 34$$

- 2) 832ను 16చే భాగించవలయును అనుకోండి. 16ను కారణాంకములుగ విభజించగ 8, 2లు వస్తాయి. మొదట 8చే భాగించగ 104 వస్తుంది. మరల 2చే భాగించగ 52 వస్తుంది.

$$\frac{832}{8} = 104, \frac{104}{2} = 52$$

$$\therefore \frac{832}{16} = 52$$

15. వర్ధములు (Squares)

1. ఏకాంకముల వర్ధములు

పద్ధతి: ఈ పద్ధతిననుసరించి ఇచ్చిన అంకె 10 కంటే ఎంత తక్కువో అంత వర్ధమును ఒకట్ల స్థానముగ రాశ్శాము. ఇచ్చిన అంకె నుండి తక్కువ అంకెను తీసివేయగ వచ్చు అంకె పదుల స్థానముగ తీసికొంటాము.

ఉదాహరణ: 1:9 యొక్క వర్ధము 9^2 కావలెను అనుకోండి. 9 పదికి 1 తక్కువ కావున 1 యొక్క వర్ధము 1 ఒకట్ల స్థానముగ తీసికొంటాము.

9 నుండి 1ని తీసివేయగ వచ్చు అంకె 8ని పదుల స్థానముగ తీసికొంటాము. కావున $9^2 = 81$.

ఉదాహరణ: 2:7 యొక్క వర్ధము 7^2 కావలెను అనుకోండి. 7 పదికి 3 తక్కువ కావున 3 యొక్క వర్ధము 9 ని ఒకట్ల స్థానముగ తీసికొంటాము.

7 నుండి 3 తీసివేయగవచ్చు అంకె 4ను పదుల స్థానముగ తీసికొంటాము.

కావున $7^2 = 49$

ఉదాహరణ: 4:6 యొక్క వర్ధము 6^2 కావలెను అనుకోండి. 6 పదికి 4 తక్కువ కావున 4 యొక్క వర్ధము 16 ను పదుల, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

6 నుండి 4ను తీసివేయగ వచ్చు అంకె 2ను పదుల స్థానమునకు కలపండి.

$$\begin{array}{r} 16 \\ \text{కావున } 6^2 = \frac{20}{36} \end{array}$$

10 కంటే ఎక్కువ సంఖ్య వర్గాలు:

పద్ధతి: ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానము వర్గము ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఒకట్ల స్థానము కలుపగచ్చి సంఖ్య వందలు పదుల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ $1:11$ యొక్క వర్గము 11^2 కావలెను అనుకోండి. ఒకట్ల స్థానపు అంకి యొక్క వర్గము 1ని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. సంఖ్యకు ఒకట్ల స్థానపు అంకి కలుపగచ్చి 12ను వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి.

$$\text{ఇప్పటి } 11^2 = 11 + 1, 1^2 = 121$$

$$\text{ఇట్లే } 13^2 = 13 + 3, 3^2 = 169$$

$$14^2 = 14 + 4, 4^2 = 180 + 16 = 196$$

$$16^2 = 16 + 6, 6^2 = 220 + 36 = 256$$

$$19^2 = 19 + 9, 9^2 = 280 + 81 = 361$$

ఈ విధముగ 20కి లోపు వర్గాలను మౌళికముగ లెక్క కట్టుకోవచ్చి.

20 కంటే ఎక్కువ 100కి లోపు వర్గాలు: ఒకట్ల స్థానమును వర్గము చేసి ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఒకట్ల స్థానమును సంఖ్యకు కలిపి పదుల స్థానపు అంకితో గుణించి వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 21 యొక్క వర్గము కావలెను అనుకోండి. 1 యొక్క వర్గము 1ని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

1 ని 21కి కలుపగ వచ్చి $21 + 1 = 22$ ని పదుల స్థానపు అంకితో 2తో గుణించగ వచ్చి $22 \times 2 = 44$ ని వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి.

$$\text{ఇప్పటి } 21^2 = (21 + 1) \times 2, 1^2 = 441$$

$$\text{ఇట్లే } 22^2 = (22 + 2) \times 2, 2^2 = 484$$

$$25^2 = (25 + 5) \times 2, 5^2 = 600 + 25 = 625$$

$$32^2 = (32 + 2) \times 3, 2^2 = 1020 + 4 = 1024$$

$$45^2 = (45 + 5) \times 4, 5^2 = 2000 + 25 = 2025$$

$$52^2 = (52 + 2) \times 5, 2^2 = 2700 + 4 = 2704$$

$$75^2 = (75 + 5) \times 7,5^2 = 5600 + 25 = 5625$$

$$95^2 = (95 + 5) \times 9,5^2 = 9000 + 25 = 9925$$

ఈ విధముగ వందకిలోపు వర్గాలను సమయస్థారిగ లెక్క కట్టుకోవచ్చు.

వంద కంటె ఎక్కువ, 1000 కంటె తక్కువ సంఖ్యల వర్గాలు:

ఒకట్లు స్తానమును వర్గము చేసి పదులు, ఒకట్లు స్తానముగ రాయండి. ఒకట్లు స్తానమును సంఖ్యకు కలిపి వందల స్తానముచే గుణించి పదుల స్తానమునకు ముందుగ రాయండి.

ఉదాహరణకు: 102 యొక్క వర్గము కావలేను అనుకోండి.

2 యొక్క వర్గము 4ని ఒకట్లు స్తానముగ రాయండి. పదుల స్తానములో పున్న రాయండి.

ఒకట్లు స్తానపు అంకె 2ని సంఖ్య 102కు కలుపగ $102 + 2 = 104$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్తానమునకు ముందుగ రాయండి.

$$\text{ఇప్పుడు } 102^2 = (102 + 2) \times 1,2^2 = 10404$$

$$103^2 = (103 + 3) \times 1,3^2 = 10699$$

$$107^2 = (107 + 7) \times 1,7^2 = 11449$$

$$115^2 = (115 + 15) \times 1,15^2$$

$$= 13000 + 225$$

$$= 13225$$

ఈ విధముగ 209 లోపు వర్గాలు లెక్క కట్టుకోవచ్చును. 200, 300, 400.....900 కంటె ఎక్కువ వర్గాలు కనుగొనుటకు సంఖ్యకు ఒకట్లు స్తానమును కలిపి 2,3,4.... 9లచే వరుసగ గుణించి పదుల స్తానమునకు ముందుగ వాయాలి. ఒకట్లు స్తానపు వర్గమును ఒకట్లు స్తానముగ రాయాలి.

ఉదాహరణకు 203 యొక్క వర్గము కావలేను అనుకోండి. 3 యొక్క వర్గము 9ని పదులు, ఒకట్లు స్తానముగ రాయండి.

203కు 3 కలుపగవచ్చి సంఖ్య 206ను 2చే గుణించగ వచ్చి 412ను పదుల స్తానమునకు ముందు రాయండి.

$$\text{ఇప్పుడు } 303^2 = 2(203 + 3), 3^2 = 40609$$

$$\text{ఇట్లు } 206^2 = 2(206 + 6), 6^2 = 42436$$

$$225^2 = 2(225 + 25), 25^2$$

$$= 50000 + 625 = 50625$$

$$305^2 = 3(305 + 5), 5^2$$

$$= 93000 + 25 = 93025$$

$$\begin{aligned}
 507^2 &= 5(507 + 7), 7^2 \\
 &= 257000 + 49 = 257049 \\
 704^2 &= 7(704 + 4), 4^2 \\
 &= 405600 + 16 = 495616
 \end{aligned}$$

ఇట్లు 800, 900ల కంటే ఎక్కువ వర్గాలను కనుగొనవచ్చును.

5 చివర వున్నపుడు సంఖ్యల వర్గము కనుగొనుట

పద్ధతి: సంఖ్యల వర్గము కనుగొనుపుడు ఒకట్ల స్తానపు అంకె 5 అయినపుడు 5 యొక్క వర్గము, ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. పదుల స్తానపు అంకెకు తరువాతనున్న అంకెతో గుణించగ వచ్చి లభము వేలు, వందల స్తానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ:

1) 1:15 యొక్క వర్గము 15^2 కావలెను అనుకోండి.

5 యొక్క వర్గము 25ను పదులు, ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. పదుల స్తానపు అంకె 1 తరువాతనున్న అంకె 2తో గుణించగ 2 వస్తుంది. దీనిని వందల స్తానముగ రాయండి. సంఖ్య యొక్క వర్గము 225 అవుతుంది.

2) 25 యొక్క వర్గము 25^2 కావలెను అనుకోండి.

5 యొక్క వర్గము 25ను పదులు, ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి. పదుల స్తానపు అంకె 2 తరువాతనున్న 3ను గుణించగ 6 వస్తుంది. దీనిని వందల స్తానముగ రాయండి. సంఖ్య యొక్క వర్గము 625 అవుతుంది.

$$ఇట్లు \ 35^2 = 3 \times 4, 5 \times 5 = 1225$$

$$65^2 = 6 \times 7, 5 \times 5 = 4225$$

చివర 1/2 గల అంకెల వర్గము కనుగొనుట

ఉదాహరణకు $5\frac{1}{2}$ వర్గము $(5\frac{1}{2})^2$ కావలెను అనుకోండి. 5 తరువాతనున్న అంకె 6, చీటి లభము $5 \times 6 = 30$, తరువాత $\frac{1}{2}$ యొక్క వర్గము $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ను రాయండి.

$$\text{ఇప్పుడు } 5(\frac{1}{2})^2 = 60\frac{1}{4}$$

మరో ఉదాహరణ $15\frac{1}{2}$ వర్గము కావలెను అనుకోండి, 15 తరువాత వచ్చి అంకె 16. వీటి లభ్యము $15 \times 16 = 240$ తరువాత $\frac{1}{2}$ యొక్క వర్గము $\frac{1}{4}$ ను రాయిండి.

ఇప్పుడు $(15\frac{1}{2})^2 = 240\frac{1}{4}$ అవుతుంది. యిట్లే చివర $\frac{1}{2}$ గల ఏ సంఖ్యల వర్గము అయినను కనుగొనవచ్చును.

మొదట అంకెలు సమానముగ నుండి తరువాత నున్న భిన్నముల మొత్తము 1 అయినప్పుడు లభ్యము కనుగొనుటకు:

ఉదాహరణ $4\frac{1}{3}$ ను $4\frac{2}{3}$ చే గుణించగ వచ్చి లభ్యము కావలెను అనుకోండి.

భిన్నాంకముల మొత్తము $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ కావున 4 తరువాతనున్న అంకె = 5, వీటి లభ్యము 20 అవుతుంది. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ల లభ్యము $\frac{2}{3}$ నీ 20కు పక్కన రాయగ లభ్యము $20\frac{2}{3}$ అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: $10\frac{3}{5}, 10\frac{2}{5}$ ల లభ్యము కావలెను అనుకోండి.

భిన్నాంకముల మొత్తము $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$ కావున 10 తరువాతనున్న సంఖ్య 11 వీటి లభ్యము 110 అవుతుంది. $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ ల లభ్యము $\frac{6}{25}$ ను 110కి ప్రక్కన వాయగ లభ్యము $110\frac{6}{25}$ వస్తుంది.

సమాన అంకెలు గల సంఖ్యల వర్గాలు

వీటి వర్గాలను కనుగొనుటకు సులభపద్ధతులున్నాయి. మొదట 11 అనే సంఖ్య వర్గమెంతో కనుగొరుము. ఇది 121 అని తెలుసు. ఇట్లే 111 వర్గము కనుగొనినచో 12321 అవుతుంది, అనిన, వర్గము కనుగొనవలసిన సంఖ్యలో ఎన్ని ఒకట్లు గలవో అన్నావ అంకెను మధ్య రాసి ఇరువైపుల ఒకటి వచ్చి వరకు తగ్గించుకొనుచు పోయినచో వర్గము వస్తుంది. ఈ పద్ధతి ప్రకారము మనం అన్ని స్థానాలలోను '1' గల అంకెల వర్గాలను కనుకోవచ్చును. అయితే ఇది 9 స్థానాల అంకెవరకే సాధ్యం.

$$1111^2 = 1234321$$

$$11111^2 = 123454321$$

$$111111^2 = 12345654321$$

$$11111111^2 = 12345678987654321$$

ఇదేపద్ధతి నుపయోగించి అన్ని స్థానములలోను 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9లలో ఏ ఒక్క సంఖ్య ఉన్నా కనుకోవచ్చు.

ఉదాహరణకు: 222 అనే సంఖ్య వర్ధము కనుకోవలెను అనుకోండి. అంటే $2^2 \times (111)^2$ అనే కదా? అందుచేత మొదట 111 వర్ధము కనిపెట్టి తరువాత దాన్ని $2^2 = 4$ పెంచితే సరిపోతుంది.

$$\begin{aligned}\text{కావున } 222^2 &= 4 \times 111^2 \\ &= 4(12321) \\ &= 49284 \\ \text{ఇట్లు } 333^2 &= (111) \times 3^2 \\ &= 12321 \times 9 \\ &= 110889\end{aligned}$$

వర్ధమూలములు

వర్ధమూలములను కూడ మౌళికముగ చేయవచ్చును. ఈ కేంద వివరించు పద్ధతిని వాడినచో సంపూర్ణ వర్ధముల వర్ధమూలములను కనుగొనవచ్చును భాగాపోర పద్ధతిని వాడననమసరమలేదు.

1) ఒకట్లస్తానపు అంకె 5 యున్నప్పుడు వర్ధమూలము కనుగొనుట.

వందల స్తానపు అంకెను రెండు వరుస రాసుల లబ్ధముగ వాయండి. చిన్న విలువను వర్ధమూలము యొక్క పదుల స్తానముగ రాయండి. ఒకట్ల స్తానపు విలువ ఎల్లప్పుడు 5 అవుతుంది.

ఉదాహరణకు 625 యొక్క వర్ధమూలము కావలెను అనుకోండి. వందల స్తానపు విలువ 6ను 2×3 గ రాయండి. 2 వర్ధమూలముయొక్క పదుల స్తానము అవుతుంది. ఒకట్ల స్తానపు విలువ 5 అవుతుంది.

ఇప్పుడు 625 యొక్క వర్ధమూలము 25 అవుతుంది. ఇట్లు 5 ఒకట్లస్తానముగాగల సంఖ్యల వర్ధమూలములను కనుగొనవచ్చును.

వర్గ సంఖ్యలు		వర్ధమూలములు
25	$0 \times 0, 5 \times 5$	05
225	$1 \times 2, 5 \times 5$	15
625	$2 \times 3, 5 \times 5$	25
1225	$3 \times 4, 5 \times 5$	35
2025	$4 \times 5, 5 \times 5$	45

2) కారణాంకముల పద్ధతిని వర్గమూలములు కనుగొనుట.

వర్గరాసులు	సమాన రాసుల లభ్యము	వర్గమూలములు
121	11×11	11
144	12×12	12
169	13×13	13

3) హోళిక వర్గమూల పద్ధతి:

ఈ పద్ధతిలో 1 నుండి 9 వరకు అంకెల వర్గములు తెలిసినచో 4 అంకెలు గల సంపూర్ణ వర్గముల వర్గమూలమును తెక్కు కట్టుకోవచ్చును.

సంఖ్య:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
వర్గము:	1	4	9	16	25	36	49	64	81

పై పట్టికనుంచి ఏదైన వర్గసంఖ్యలో ఒకట్ల స్తానము 1 అయినచో వర్గమూలము 1 గాని 9 గాని అవుతుంది. ఒకట్ల స్తానము 4 అయినచో వర్గమూలము 2 గాని 8గాని అవుతుంది. ఒకట్ల స్తానము 6 అయినచో వర్గమూలము 4గాని 6గాని అవుతుంది. ఒకట్లస్తానము 9 అయినచో వర్గమూలము 3గాని 7గాని అవుతుంది. ఒకట్లస్తానము 5 అయినచో వర్గమూలము 5 అవుతుంది. వీటిని జ్ఞాపకము పెట్టుకొన్నచో వర్గమూలములను హోళికముగ కనుగొనవచ్చును.

పద్ధతి: పదుల స్తానమునకు ముందున్న సంఖ్య ఏ సంఖ్య యొక్క వర్గమునకు తరువాత గలదో ఆ సంఖ్యను పదుల స్తానముగ రాయాలి. తరువాత వర్గములోని ఒక స్తానమును పరిశీలించండి. ఈ అంకె ఏ ఏ అంకెలను వర్గముచేయగ వస్తుందో మనస్సునందుంచుకోండి. వర్గమూలముయొక్క పదుల స్తానపై అంకెను తరువాత అంకెతో గుణించగ వచ్చి సంఖ్య వర్గములోని పదుల స్తానమునకు ముందున్న సంఖ్యకంటే ఎక్కువో తక్కువో తెలిసికోండి. ఎక్కువ అయినచో మనస్సునందుగల తక్కువ అంకె వర్గమూలములోని ఒకట్ల స్తానము అవుతుంది. తక్కువ అయినచో మనస్సులోని ఎక్కువ అంకె వర్గమూలములోని ఒకట్లస్తానముగ తీసికోండి.

ఉదాహరణకు 5776 యొక్క వర్గములము కావలెను అనుకోండి.

పదులస్తానమునకు ముందున్న సంఖ్య 57ను పరిశీలించినచో 7 యొక్క వర్గమునకు తరువాత గలదు. కొవున 7 ను పదుల స్తానముగ తీసికోండి.

వర్గములో ఒకట్లస్తానపై అంకె 6 అనునది 4, 6 అంకెలను వర్గముచేయగ ఒకట్ల స్తానముగ వస్తుంది. వీటిని మనస్సు నందుంచుకోండి. వర్గమూలములోని 7ను తరువాత అంకె 8తో గుణించగ $7 \times 8 = 56$ వస్తుంది. ఇది 57

కంటే తక్కువ కావున మనస్సులోగల ఎక్కువ అంకె 6 వర్గమూలములోని ఒకట్లస్తానము అవుతుంది. కావున 5776 యొక్క వర్గమూలము 76 అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: 2501 యొక్క వర్గమూలము కావలెను అనుకోండి.

24 అనునది 4 యొక్క వర్గమూలము తరువాత కలదు కావున వర్గమూలయొక్క వర్గమూలములో పదులస్తానపు అంకె 4.

వర్గమూలోని ఒకట్ల స్తానపు అంకె 1 కావున యిది 1, 9 లను వర్గము చేయగ వస్తుంది. వీటిని మనస్సు నందుంచుకోండి. వర్గమూలములోని పదుల స్తానపు అంకె 4 ను తరువాత అంకె 5తో గుణించగ 20 వస్తుంది, ఇది 24 కంటే తక్కువ కావున మనస్సులోగల అంకెలలో పెద్దది అయిన 9 వర్గమూలము యొక్క ఒకట్లస్తానము అవుతుంది.

ఇప్పుడు 2401 యొక్క వర్గమూలము 49 గ తీసికోండి. ఇట్లే సమయస్వార్థిగ వర్గమూలాలను లెక్కకట్టుకోవచ్చును.

16. ఘనాలు (Cubes)

$$\text{టీజ గణిత సూత్రము } (a+b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \\ \frac{2a^2b + 2ab^2}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

అను సూత్రము ననుసరించి సులభముగ లెక్కకట్టువచ్చును. రెండు అంకెలుగల సంబ్ధాలో పదుల స్తానపు అంకె ఘనమును వేలస్తానముగ రాయండి. అంకెల నిష్పత్తిలో గుణశేషిలో నుండునట్లు మిగిలిన వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్తానములను రాయండి. వందలు, పదుల స్తానపు అంకెల రెట్లీంపు విలువలను వందలు, పదుల స్తానములకు కీందుగ రాసి కలపండి. అప్పుడు సంఖ్యల ఘనములు లభించును.

ఉదాహరణకు: 11 యొక్క ఘనము కావలెను అనుకోండి. వేల స్తానపు విలువగ 1 యొక్క ఘనము 1ని రాయండి. అంకెల పదానుపాతము 1 కావున 1 చే గుణించగ వచ్చు అంకెలు వరుసగ 1, 1, 1 లను వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్తానములగ రాయండి. పదుల స్తానపు అంకెల రెట్లీంపు విలువలను ఆయా స్తానములకు కీందుగ వాయండి.

$$11^3 = \begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 2 \ 2 \\ \hline 1 \ 3 \ 3 \ 2 \end{array}$$

ఉదాహరణ: $2:12$ యొక్క ఘనము 12^3 కావలెను అనుకోండి. వేలస్తానము చిలువగ 1 యొక్క ఘనము 1ని రాదుండి. అంకెల పదానుపాతము 2 కావున 2చే వరుసగ గుణించగ వచ్చి అంకెలను రాదుండి. 1, 2, 4, 8లు అపుతూయి. మధ్యసున్న అంకెలను రెట్టింపు చేయగ వచ్చి అంకెలను 2, 4 లకు కెందుగ రాసి కలపండి. సంఖ్యయొక్క ఘనము వచ్చుంది.

$$12^3 = \begin{array}{r} 1 \ 2 \ 4 \ 8 \\ 4 \ 8 \\ \hline 1 \ 7 \ 2 \ 8 \end{array}$$

$$\text{ఇట్లు } 13^3 = \begin{array}{r} 1 \ 3 \ 9 \ 27 \\ 6 \ 18 \\ \hline 2 \ 1 \ 9 \ 7 \end{array}$$

$$15^3 = \begin{array}{r} 1 \ 5 \ 25 \ 125 \\ 10 \ 50 \\ \hline 3 \ 3 \ 8 \ 5 \end{array}$$

$$21^3 = \begin{array}{r} 8 \ 4 \ 2 \ 1 \\ 8 \ 4 \\ \hline 9 \ 2 \ 6 \ 1 \end{array}$$

$$23^3 = \begin{array}{r} 8 \ 12 \ 18 \ 27 \\ 24 \ 36 \\ \hline 12 \ 1 \ 6 \ 7 \end{array}$$

$$24^3 = \begin{array}{r} 8 \ 16 \ 32 \ 64 \\ 32 \ 64 \\ \hline 1 \ 3 \ 8 \ 24 \end{array}$$

ఇట్లు ఘనాలను కొంచెను అనుభవముతో లెక్క కట్టుకోవచ్చును.

ఘనమూలములు

ఈ కింది పద్ధతి నుపయోగించి 5, 6 అంకెలు గల సంఖ్యల ఘనమూలాలను కనుగొనవచ్చును. వీటిని చేయుటకు 1 నుండి 10 అంకెల యొక్క ఘనాలను గుర్తుంచుకోవలేను.

సంఖ్య:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
వర్గము:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

పై పట్టికనుంచి 1, 4, 5, 6, 9, 0 లు చివరి అంకెలు గల సంఖ్యలు అయినచో ఘనమూలాలు అవే అంకెలవుతాయి. 2తో అంతమయినచో ఘనమూలమును 2, 7తో అంతమయినచో ఘనమూలము 3 అగును. 3తో అంతమయినచో ఘనమూలము 7 అగును.

ఉదాహరణకు 1 2 1 6 7 యొక్క ఘనమూలము కావలేను అనుకోండి.

1 2 1 6 7 ను 12, 167 గ విభజించండి. ఘనముల పట్టిక నుంచి 12 అనునది 2, 3 ల ఘనములకు మధ్య కలదు. కావున ఘనమూలముయొక్క పదుల స్థానము అంకెలలో చిన్న అంకె 2 అవుతుంది. ఒకట్ల స్థానము నీర్దయించవలేను ఘనములో ఒకట్లస్థానము 7 కావున ఘనమూలములోని ఒకట్ల స్థానము 3 అవుతుంది.

కావున 12, 167 యొక్క ఘనమూలము 23 అగును. ఇట్లు ఘనమూలములను కనుగొనవచ్చును.

చతుర్భమూలములు

చతుర్భమూలములు కనుగొనవలెనన్న రెండు పర్యాయములు వర్గమూలము కనుకోవలిసు.

ఉదాహరణకు: 256 యొక్క చతుర్భమూలము కనుగొనవలెనన్న మొదట వర్గమూలము కనుగొనగ 16 అవుతుంది. మరల 16కు వర్గమూలము కనుగొనగ 4 అవుతుంది. కావున 256 యొక్క చతుర్భ వర్గమూలము 4 అవుతుంది.

17. వేళ్ళతో ఎక్కులు

5×5 ఎక్కులవరకు వచ్చినచో వేళతో ఎక్కులను గుణించుకోవచ్చు. ఎక్కులను రెండు విధములగ విభజింపవచ్చు.

పదికిలోపు ఎక్కులు: రెండు చేతుల వేళతో చిట్టికెన వేలును 6 గను, ఉంగరపు వేలును 7 గను, మధ్య వేలును 8 గను, చూపుడు వేలును 9 గను, బొఱన వేలును 10 గను తలంచండి, 6నుండి 10 ఎక్కులవరకు పీటిసుషయోగించి గుణించుకోవచ్చు. ప్లైలకు, వయోజనలకు వింతని, వినోదాన్ని కలిగిస్తుంది.



పద్ధతి: మీకు కావలసిన ఎక్కుమునకు సంబంధించిన వేళ్ళను పటములో చూపిన విధముగ కలపండి. మీగిలిన వేళ్ళను పెక్కిలేపండి. కలి పిన వేళ్ళను లెక్కించి అన్ని పదులుగ తలంచండి. ఇరువైపుల పెక్కి లేపటడిన వేళ్ళను గుణించిన ఒకట్ల స్థానము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు: 9×9 లు కావలెను అనుకోండి. పటములో చూపినవిధముగ 9 వ వేలును కలుపగ మొత్తం 8 వేళ్ళ వస్తాయి. చీటిని పదులుగ తలంచండి. ఇరువైపుల ఒక్కుక్క వేలు చౌప్పన చుగులును. చీటిని గుణించగ $1 \times 1 = 1$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్లస్థానముగ తలంచండి. ఇప్పుడు $9 \times 9 = 81$ అపుతుంది. ఇట్లు 9×6 కావలెను అనుకోండి. 9 వ వేలును 6వ వేలును కలుపగ రీ వేళ్ళ అచ్చుతాయి. ఎడమవైపున ఒక వేలు. కుడివైపు 4 వేళ్ళు చుగులుతాయి. చీటిని గుణించగ $1 \times 4 = 4$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్లస్థానముగ రాయగ 54 అపుతుంది. ఇట్లు సమయపూర్ణిగ 10 కి లోపు ఎక్కులను గుణించుకోవచ్చు.

పదికంటె ఎక్కువ ఎక్కులు

పదికంటె సంఖ్య ఎంత పెద్దవో అన్ని వేళ్ళను పైకి లేపండి. ఇరువైపుల లేపిన వేళ్ళను గుణించగ వచ్చు అంకెను ఒకట్లన్నానముగ రాయండి.



ఇరువైపుల లేపిన వేళ్ళను కలుపగ వచ్చు అంకెను పదుల స్తానముగ రాయండి.

పదుల స్తానపు అంకెలుగా గల 1, 1 లను గుణించగ వచ్చు అంకె $1 \times 1 = 1$ ని వందల స్తానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు: 12×13 లు కావలెను అనుకోండి. వేళ్ళను పటములో చూపిన విధముగ చాచండి. ఎడు వైపున 2, కుడివైపున 3 వేళ్ళు పైకి వుంచండి.

2, 3 లను గుణించగవచ్చు $2 \times 3 = 6$ ను ఒకట్ల స్తానముగ రాయండి.

2, 3 లను కలుపగవచ్చు $2+3=5$ ను పదుల స్తానముగ రాయండి.

పదుల స్తానములోగల 1, 1 ల లబ్దము $1 \times 1 = 1$ వందల స్తానముగ రాయండి.

$$\text{ఇప్పటి } 12 \times 13 = 1 \times 1, 2+3, 2 \times 3 = 156 \text{ అప్పతుంది.}$$

$$\text{ఇట్లీ } 13 \times 13 = 1 \times 1, 3+3, 3 \times 3 = 169$$

$$12 \times 14 = 1 \times 1, 2+4, 2 \times 4 = 168$$

$$11 \times 15 = 1 \times 1, 1+5, 1 \times 5 = 165$$

$$12 \times 15 = 1 \times 1, 2+5, 2 \times 5$$

$$= 170$$

$$10$$

$$\underline{180} \quad \text{అప్పతుంది.}$$

$$\begin{aligned}
 14 \times 14 &= 1 \times 1, 4 + 4, 4 \times 4 \\
 &= 180 \text{ అప్పుతుంది.} \\
 &\quad \underline{\begin{array}{r} 16 \\ 196 \end{array}}
 \end{aligned}$$

ఇట్లే సమయస్వార్థిగ ఎక్కులను గుణించుకోవచ్చు.

పదికిలోపు ఎక్కులు

గుణించవలసిన అంకెలు పదికి ఎంత తక్కువో ఏదురుగా రాయండి. వాటిని గుణించగ వచ్చు అంకె ఒకట్ల స్థానము అప్పుతుంది. ఒక అంకెనుండి రెండవ అంకె పదికి ఎంత తక్కువో తీసివేయండి. అది పదుల స్థానము అప్పుతుంది. ఉదాహరణకు 9×8 కావలెను అనుకోండి.

$$\begin{array}{r}
 9 - 1 \\
 8 - 2 \\
 \hline
 9 - 2, 1 \times 2 = 72
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7 \times 7, 7 - 3 \\
 7 - 3 \\
 \hline
 7 - 3, 3 \times 3 = 49
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7 \times 8, 7 - 3 \\
 8 - 2 \\
 \hline
 7 - 2, 3 \times 2 = 56
 \end{array}$$

★ ★ ★



డ్రెసా తోటుకూరు సత్యవారాయణరాజు

ఎమ్.యస్సి., ఎమ్.ఇడి., పిహాచ.డి.

లెక్కల టీచర్లందరూ లెక్కలు భోధిస్తారు కాని లెక్కలోకి వచ్చే లెక్కల టీచర్లు చాలా అరుదనే చెప్పాలి. అటువంటి అరుదైన వ్యక్తి సహృదయులు డా॥ తోటకూర సత్యవారాయణరాజు భీమవరం తాలూకా ఉండి గ్రామంలో జనిగైంచారు.

భీమవరం డి.యస్.ఆర్. కాలేజీలో లెక్కల లెక్కర్స్‌గా పని చేసిన శ్రీ రాజు గారు అదే కాలేజీలో డిగ్రీ స్టాయి వరకు చదివారు. బెనారసు పొందూ విశ్వవిద్యాలయం నుండి ఎం.యస్సి. (గణిత శాస్త్రం) డిగ్రీ పొందారు. శ్రీ రాజు గారు గణిత విజ్ఞానంలో స్వయంకృషితో ఎంతో ఎత్తుకు ఎదిగారు. గణితం ఆబాలగోపాలం హాయిగా నేర్చుకుచేందుకు ఎన్నో మాతన ప్రక్రియలను రూపొందించారు. టి.వి.లోనూ, రేడిమోలోనూ, లయస్, రోటరీ సమావేశాలలోనూ, విద్యాసంస్థలలోనూ మాతన పద్ధతుల ద్వారా గణితం మీద ఆసక్తి కలిగించుటకు ప్రయత్నిస్తున్నారు. దేశమంతటా అనేక సదమ్మలలో పాల్గొన్నారు. యు.జి.సి. ప్రోగ్రామ్స్ ద్వారా గణితంపై అనేక ప్రోగ్రామ్స్ యిచ్చారు. ప్రస్తుతం అమెరికాలో వుంటూ గణితశాస్త్రంలో ఉపన్యాసాలు, ప్రసంగాలు, పరిశోధనలు చేస్తున్నారు.

అత్యంత ప్రజాదరణ పొందిన వీర రచనలు ...

అంకెలతో ఆటలు

గణిత విజ్ఞానము

చేతలేళ్ళే కంపుళ్ళటర్లు

అందలక్ గణితం

వేద గణితము

MATHS FOR FUN