NOIP2024模拟赛题解

——by $lcrh$

机器人（Robot）

> Tag:DFS，枚举

签。

注意到 $n \leq 20$，因此我们直接暴力模拟每条指令，如果目标格子此前尚未探测过，则对应有障碍和无障碍两个分支，最多 $O(2^n)$ 种情况，对于每种情况计算最终坐标，排序后输出即可。

注意一个格子在搜索的过程种如果已经被走过，则其是否存在障碍是已经确定的，再次经过这个格子的时候不用进行分支预测。

可爱捏（lovely）

> Tag：因数分解，分类讨论,map

简单预处理

由于最终判定的条件是两个数的乘积是否为立方数，我们可以很轻松的想到这样预处理——对所有的数进行质因数分解，分解后将所有的质因子的次数模 3，这样得到的数质因子指数只能是 1 或 2 以方便处理（指数为 3 的倍数的数字可以忽略），并且可以很好地保持两个数乘积在立方数判定意义下的性质。

接着我们可以先处理掉一些特殊且容易判定的数字。如果原数列出现了立方数，则在集合 S 中，它们最多只能出现一个，只需要 ans 提前 $+1$ 然后跳过这些数字的处理即可。

对于其他的数字，我们记 a_i 做完质因数处理之后得到 x（注意可以存在多个不同的 a_i 对应到了同一个 x），此时，如果我们需要找到 b_i 处理之后得到的 y，使得 $x \times y$ 为立方数，由于质因子的次数被唯一确定到 $1, 2$ 中的一个，因此相乘之后对应质因子的次数一定为 3，y 是唯一的，这也就意味着指数模三处理的意义下，两个乘积为立方数是一一对应的。

本题需要寻找的是 x, y 不能形成立方数，因此集合 S 中不能同时存在处理后得到 x 的数字以及处理后得到 y 的数字。因此最终我们只需要比较是处理后得到 x 的数字多还是处理后得到 y 的数字多，将其中的较大值累加到 ans 上去即可。使用 map 维护每个数字处理后的结果的出现次数即可。

30pts

考虑到数据范围中 $a_i \le 10^6$，因此我们直接暴力在根号时间内进行质因数分解是可以接受的。时间复杂度为 $O(n\sqrt{M} + n\log n)$，其中 M 表示 a_i 的值域。

100pts

此时值域 M 达到了 10^{10} 级别，我们无法接受在根号时间内进行质因数分解。

> 不保证直接使用 $Pallord\ \ rho$ 会不会被卡常，但理论上他应该是可以过的

熟悉 $NOIP$ 模拟赛尿性的小朋友们都知道，这个时候我们应该尝试进行分类讨论。我们可以接受将所有 $a_i^{\frac{1}{3}}$ 以内的质因子进行因数分解。接下来我们就只考虑大于 $a_i^{\frac{1}{3}}$ 的质因子了，姿势剩下的部分(记为 m)最多只能被分解为两个质因子之积，我们进行大力分讨。

1. $m = 1$ 此时已经分解完成了。
2. m 为一个大于 $a_i^{\frac{1}{3}}$ 的质数，此时处理后的数字对应的数字 y 应该为前一部分小质因数处理之后得到的 y 再乘上 m^2，注意如果对应的 y 此时如果超过了 10^{10} 我们可以直接将其选入 S。
3. m 为两个不同质数相乘，从结果上来看，处理方法和情况 2 相同。
4. m 为两个相同的质数相乘，特殊判断，此时对应的 y 为前一部分得到的 y 乘上 $\sqrt{m}$。

后面的处理是一样的，时间复杂度可以做到 $O(na_i^{\frac{1}{3}} + n\log n)$。

总力战（raid）

> Tag:扫描线 单调队列

和第二题难度其实也差不太多。

Q 很大，n 不大，不妨暴力求出 $O(n^2)$ 次交叉发生的 x 坐标。接着我们考虑离线处理所有询问，对 x 进行扫描线。动态维护当前 x 坐标下的所有学生的战力。

注意到此时 $O(n^2)$ 个交叉坐标本质上只是 y 坐标上的两个元素的交换而已，影响的战斗力也只有两位学生，对于共点的情况，多个交换也可以一起处理。

至于答案处理，我们实际上求的是一个类似滑动窗口的最大值操作。因此不妨考虑对每一个学生维护一个关于战斗力的单调队列。总的修改操作是没有问题的。因此总复杂度是没有问题的。

树（tree）

考虑关于直径的问题，我们需要先将树的中心求出来，那么会有两种情况，中心在点上和中心在边上。为了将这两种情况全部化解成中心在点上的情况，我们可以将每条边 (u,v) 中间新建一个点 e，变成 $(u,e),(e,v)$ 两条边。

那么在原问题上如果使用了这个技巧，问题就变成每次可以使其中一条边长度增加 2，使得 $\frac{\text{直径}}{2}$（即半径）最小。

容易发现操作之后树的中心一定在某一个点上，所以我们枚举这个中心。设从这个中心出发最远的点的距离为 R，那么我们将半径撑满 R 我们可以使用 $\frac{R\times\text{叶子个数}-\text{叶子总距离}}{2}$ 次操作。

如果最后半径为 $R+2x$，那么我们可以使用 $\frac{R\times\text{叶子个数}-\text{叶子总距离}}{2}+x\times\text{叶子个数}$ 次操作。

显然中心不能是一个叶子（因为改到它邻接的点一定不会变得更差），所以所有情况下叶子个数都是固定的，即每个中心对于最后答案的贡献是一个斜率固定的一次函数，从左到右扫一遍即可。

如果不考虑排序，时间复杂度为 $O(N+Q)$。