Solution

智慧之神(wisdom)

签，今天的签有点明显了。

操作次数只有 K 次，也就意味着被修改的行列至多只有 K 个。

我们可以直接按行暴力统计，假设没有列修改，每一行都是一个等差数列，可以直接暴力计算。

不过有列修改也无所谓，我们暴力找到所有的列修改对应的列，这些位置的数字重算一遍就可以了。

时间复杂度 $O(N+K^2)$。

载客电梯（elevator）

首先可以发现，按楼层排序后，每次电梯载走的人一定是一个连续段，否则显然不优。

接下来就考虑 dp，记 f_i 表示电梯载走前 i 个人时，n 个人的总等待时间，则有：

$$f_i = \min_{j=\max(i-k,0)}^{i-1} (f_j + a_i \times 2 \times (n-j))$$

考虑对于每一个 j 算贡献。式子看上去就很像斜率优化板子，所以类似地，我们可以将其视作斜率为 $2 \times (n-j)$，截距为 f_j，下标在 $[a_{j+1}, a_{j+k}]$ 之间的线段，然后对于每个 i 求值时，查询 a_i 上方的线段的最大值。

由于有 k 的限制，好像不太能直接斜率优化，出题人又没有找到更优的解法，std 使用了李超线段树，复杂度 $O(N \log^2 N)$。然而实测完全跑不满，未卡常的 std 在 $n = 5 \times 10^5$ 时只跑了 500ms。

矩阵入门（matrix）

如果把每一列表示成一个 $[0, 2^n - 1]$ 以内的非负整数，那么原问题转化为有 m 个 $[0, 2^n - 1]$ 以内的非负整数，可以指定一个 $x \in [0, 2^n - 1]$，并令所有数异或上这个数字，使得新得到的每个数字二进制位上 1 的个数和 0 的个数最小值之和最小。暴力是 $\mathcal{O}(2^n m)$ 的。

考虑优化，令 a_i 表示 m 个数中 i 的个数，b_i 表示 i 的二进制位上 1 的个数和 0 的个数的最小值。我们令 $c_i = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j \times b_{i \oplus j}$（其中 $\oplus$ 表示异或），那么不难发现 c_i 即 $x = i$ 时的答案，用 FWT 优化即可。时间复杂度 $\mathcal{O}(2^n n + nm)$。

MEX 求和（mex）

若钦定 $MEX(A)=i$，则相当于规定 $0\sim i-1$ 必须出现，而 i 不能出现。

考虑容斥，将 $0\sim k$ 必须出现转化为钦定某些数不能出现。设 $f_{i,j}$ 表示 $0\sim i$ 必须出现，现在钦定其中 j 个数不能出现，所有 $B_k\le i$ 的 A_k 的方案数乘容斥系数之和。

转移时，先令 $f_{i,j}\leftarrow f_{i-1,j}-f_{i-1,j-1}$。若有 C 个 k 满足 $B_k=i$，则再令 $f_{i,j}\leftarrow f_{i,j}\times(i+1-j)^C$。

设 $g_{i,j}$ 表示 $MEX(A)\le i$，且钦定 $0\sim i$ 中有 j 个数不能出现，所有 $B_k\le i$ 的 A_k 的 $MEX(A)$ 乘容斥系数之和。

转移时，先令 $g_{i,j}\leftarrow i\times f_{i-1,j-1}+g_{i-1,j}$。若有 C 个 k 满足 $B_k=i$，则再令 $g_{i,j}\leftarrow g_{i,j}\times(i+1-j)^C$。

注意到 $MEX(A)$ 一定不超过 n，因此两个 dp 数组只需计算到第 n 行，其余数的贡献容易计算。时间复杂度为 $O(n^2)$。

> 感觉题解的做法可能复杂了?
>
> 我个人的感觉是完全没必要开 g 这个数组，直接统计方案数也可以做啊。
>
> 我们统计所有 $MEX(A)\ge i$ 的方案数，记为 $f(i)$
>
> $$\sum_{i=1}^{n} f(i)$$
>
> 应该就是答案。而求这个东西只要使用上面题解里的 f 就行了。

三染色（paint）

要保证只保留黑色边时图依然连通，相当于要存在一颗只有黑色边的生成树。

不妨先任意找一棵 dfs 生成树，然后试图让树上的边全是黑色且满足题目两个条件之一。考虑树是二分图，不妨设两边的点数为 $a,b(a\le b)$。

如果 $a\ge \frac{1}{3}n$，那么可以通过构造满足第一个条件：

1. 将 a 中度数前 $\frac{1}{3}n$ 大的点染成 R。
2. 考虑剩下 $a-\frac{1}{3}n$ 个点的度数，一定不超过 2。而 $a-\frac{1}{3}n\le\frac{1}{6}n$，所以它们在 b 中相邻的点的个数不会超过 $\frac{1}{3}n$。把这 $a-\frac{1}{3}n$ 个点与右边没有相邻的一部分点染成 G，剩下的点染成 B。

否则，思考如何满足第二个条件：

首先 a 很小，所以直觉上 b 里面应该有很多叶子，而 dfs 生成树里只有返祖边，也就是说叶子之间是没有连边的，好像很有救。

实际上，每个 b 里面的非叶子都至少会对应一个 a 儿子，所以至少有 $b-a$ 个叶子。

把这些叶子作为 R，a 里面的作为 G，剩下的作为 B 就行了。