Solution

AK神(ak)

这个题的题解出现在了第一题。事情并不简单。这个题是一个纯粹的诈骗题。注意到我把数据范围标蓝了，而蓝色的数据范围内，有一条是并不常规的，$n \equiv 1 \pmod k$。

这个条件保证了最终只会剩下一堆石头，并且，如果我们将每一堆石头 a_i 按照 $i \mod k$ 分类的话，留下来的石子，分类结果是不会变的。

最后剩下的一定是 $i \mod k = 1$ 那一些石子堆中的某一堆。因此我们完全不需要考虑其他 $i \mod k \neq 1$ 的石子堆。在仅考虑 $i \mod k = 1$ 的石子堆的情况下，每次取走石子会且仅会取走一堆石子。问题变成了如何求解 $k = 1$ 的情况下的答案。

$k = 1$

做法显然，将所有 a_i 排序，Alice 从小往大拿， Bob 从大往小拿。时间复杂度 $O(n \log n)$。$k \leq 2$ 有 30 分就是用来给大家启发正解的。

烽火石（tower）

CSP 组特供题，但是并不是最简单的一道。

显然可以暴力建边，如果 $S_{b_i,b_j}=1$，那么连边 $(i,j,|j-i|)$。这样的边回答道 $O(N^2)$ 级别，跑个最短路可以得到 40 分。

类似的最短路问题想要拿到满分通常由两个方法：

1. 寻找最短路的特殊性，尝试转为 DP。不过本题的最短路显然不保证无后效性，转成 DP 比较困难。
2. 更换建图。

本题采用第二种方法，注意到数据范围有 : $1\le K\le 50$。

不妨建立 K 层图，每层图作为某一个颜色的专用轨道来刻画这种颜色的消息传递。

具体的说，我们一共有 $K+1$ 层图，第一层图就是原图，注意，这层图上 $(i,i+1)$ 之间是不连边的。对于其他的 K 层图，我们连边 $(i,i+1,1)$。

- 对于每一个点 i ，从第一层的点 i 连向第 $i+1$ 层的点 i ，边长为 0。表示准备从第 i 个点传递消息。
- 对于所有的 $S_{i,b_j}=1$，从第 $i+1$ 层的第 j 个点连边向第一层的第 j 个点，边长为 0。表示从第 j 个点接受信息。

这样建图，我们可以理解为给每一个颜色建立了一条轨道，轨道上相邻的点距离为 1。只有该颜色的对应点可以上轨道，只有该颜色可以到的颜色的点可以从轨道下去。

边权只有 01，其实可以直接 DFS，但是些最短路正常情况下也是不会 TLE 的。时间复杂度 $O(NK)$。

桌球游戏（game）

我们将桌子铺满整个平面，遇到边缘不反射而是穿过，则球的路线变成了直线段。由于球的横纵行进距离始终相等，那么最终一定会在 $([R,C],[R,C])$ 停下。（其中 $[R,C]$ 表示 R,C 的最小公倍数）

则反射次数等于直线穿过边缘的条数，为 $\frac{[R,C]}{R}-1+\frac{[R,C]}{C}-1=\frac{(R+C)}{(R,C)}-2$ 。（其中 (R,C) 表示 R,C 的最小公约数）

以下设 $M \le N$ 。

$$
\begin{aligned}
\sum_{R=1}^{M}\sum_{C=1}^{N} f(R,C) &= \sum_{R=1}^{M}\sum_{C=1}^{N}\left[\frac{R+C}{(R,C)}-2\right] \\
&= -2MN+\sum_{d=1}^{M}\sum_{R=1}^{M}\sum_{C=1}^{N}\left[(R,C)=d\right]\frac{R+C}{d} \\
&= -2MN+\sum_{d=1}^{M}\sum_{i=1}^{[M/d]}\sum_{j=1}^{[N/d]}[(i,j)=1](i+j) \\
&= -2MN+\sum_{d=1}^{M}\sum_{i=1}^{[M/d]}\sum_{j=1}^{[N/d]}\sum_{e|(i,j)}\mu(e)(i+j) \\
&= -2MN+\sum_{d=1}^{M}\sum_{e=1}^{[M/d]}\mu(e)\sum_{i'=1}^{[M/de]}\sum_{j'=1}^{[N/de]} e\left(i'+j'\right) \\
&= -2MN+\sum_{k=1}^{M}\sum_{e|k} e\mu(e)\sum_{i'=1}^{[M/k]}\sum_{j'=1}^{[N/k]}(i'+j') \\
&= -2MN+\sum_{k=1}^{M}\frac{[M/k][N/k]\big([M/k]+[N/k]+2\big)}{2}\sum_{e|k} e\mu(e)
\end{aligned}
$$

我们令 $g(k)=\sum_{e|k} e\mu(e)$。注意到 $[M/k]$ 至多只有 $2[\sqrt{M}]$ 种取值，$[N/k]$ 至多只有 $2[\sqrt{N}]$ 种取值，且一种取值对应的 k 的集合都是连续的正整数。所以 $\big([M/k],[N/k]\big)$ 至多只有 $2\left([\sqrt{M}]+[\sqrt{N}]\right)$ 种情况，对应的 k 的集合也是连续的正整数。处理并枚举每种情况，利用前缀和计算该情况下的 $g(k)$ 之和。

在分析复杂度时，我们令 K 表示所有询问中 M,N 的最大值。

这样做时间复杂度为 $O(K\ln K+T\sqrt{K})$，时限比较紧张。

我们注意到，设 k 的素因子分解式为 $\prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$，那么 $g(k)=\prod_{i=1}^{s}(1-p_i)$。因此，我们通过线性筛预处理 $g(k)$，时间复杂度降为 $O(K+T\sqrt{K})$，空间复杂度 $O(K)$，足以通过本题。

弟中弟（loser）

套路题，首先第一个问题，如何在序列上求出最长合法括号子序列的长度？

NOIP组的同学如果还记得的话，上个月我们考过一个修改括号序列使其合法的题目。在那个题里面，我们得到了一个贪心的做法。

本题也是类似的，我们将左括号看成 $+1$，右括号看成 -1。记 v 为前缀最小值，显然 $v \le 0$。

首先我们要让 $v \ge 0$，显然可以删去最靠左的 $-v$ 个右括号。然后这个序列就满足任意位置前缀和大于等于 0 了，随后只需要再删除最靠右的几个左括号即可。

我们记序列权值和为 w。我们需要删除的左括号数量为 $w-v$个。

因此我们只需要知道一个括号序列的权值和和最小前缀和 v 以及序列长度 l 就可以计算答案了。暴力维护当然是 $O(nq)$ 的。

有了上面这个做法之后显然就没有难度了。首先上面这个东西可以直接使用数据结构维护，对于一个节点维护所代表区间的 v,w,l 即可，合并也非常简单：

$$(v_0,w_0,l_0)+(v_1,w_1,l_1)=(\min(v_0,w_0+v_1),w_0+w_1,l_0+l_1)$$

至于维护翻转操作，我们对于一个节点维护两个三元组 (u,v,w) 即可，翻转的时候交换一下就行了，上个树剖就做完了。时间复杂度为 $O((n+q)\log^2 n)$。

神钓虾驴（god）

> Created by Hanghang
>
> Source: Luogu P8864
>
> 后记：这题原数据范围为：
>
> $2 \le n \le 3 \times 10^3$，$1 \le m \le 5 \times 10^5$，$1 \le d \le n$。
>
> 如果您 AK 了，可以想一想。

用数组 p 代表每个人身份，魔术师看做 1，麻瓜看做 0。那么使用一次魔法就可以看做将相邻的 p 值异或上当前这位 p 值。

设数组 a 为数组 p 前缀异或和，那么每次使用魔法相当于就是交换 a_{i-1} 和 a_i。

不失一般性，设 $a_{l-1} = 0$，$a_{l-1} = 1$ 时同理。

那么每次相当于询问区间内 a 数组相邻且不同的个数小于等于 d。也就相当于询问将区间内的 a 数组分为至多 $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ 段连续 1 的最少操作数。（d 为奇数时末尾可能还有一段，单独计算）

考虑使用动态规划。

设 $s_{l,r}$ 表示区间的答案，$f_{l,r,k}$ 表示将 $a_{[l,r]}$ 划分为至多 k 段的最小操作数，$g_{l,r}$ 表示将 $a_{(l+1,r]}$ 中的所有 1 移动到一段的最小操作数，h_i 表示 $a_{[1,i]}$ 中 0 的个数。

d 为奇数的时候有可能是 $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ 段连续一加上最后一段中的所有 1 全部移到末尾。再设 $t_{l,r}$ 表示将 $a_{(l,r]}$ 内所有的 1 移动到末尾 r 处的最小操作数。

那么有

> $g_{l,r} = min \sum_{i=l+1}^{r} [a_i = 1] \times |h_i - x|$，$x \in [h_l, h_r]$

通过小学奥数可知 x 等于区间内所有 $a_i = 1$ 的 h_i 的中位数时，g 取得最小值。

> $t_{l,r} = \sum_{i=l+1}^{r} [a_i = 1] \times (h_r - h_i)$

前缀和优化即可。

> $f_{l,r,k} = min_{l \le w < r}(f_{l,w,k-1} + g_{w,r})$

> $$s_{l,r} = \begin{cases} f_{l,r,\frac{d}{2}} (k \bmod 2 = 0) \\ min_{l \le i < r}(f_{l,i,\frac{d-1}{2}} + t_{i,r})(k \bmod 2 = 1) \end{cases}$$

好！这里就基本暴力 dp 就结束了。

复杂度 $O(n^3 \times d + m)$。

能不能给力点？

发现 f 数组每层转移只跟上一层有关且转移为 $(min, +)$ 矩阵形式，这就可以矩阵乘法优化！

复杂度 $O(n^3 \log d + m)$。

使用该算法已经可以 AC 了。

能不能再给力点？

发现每层的 f 为 2D1D 转移方程。常见优化方向为决策单调性。那么只需证明 g 满足区间包含单调性和四边形不等式即可。

简易证明：

区间包含单调性是简单的，大区间相比如小区间不会减少 1 的个数，那么将将所有 1 移动到一起的操作数也不会减少，所以一个小区间的最小操作数小于等于一个大区间的最小操作数。

四边形不等式是困难的，需证明 $g_{l,r}+g_{l+1,r+1}\le g_{l+1,r}+g_{l,r+1}$。

从定义出发，如果 $a_l=0$，那么对答案是无贡献的，那么就转化为证明 $g_{l+1,r}+g_{l+1,r+1}\le g_{l+1,r}+g_{l+1,r+1}$，左右两边相等，成立。那么 $a_{r+1}=0$ 时同理。

那么只需证明 $a_l=1$ 且 $a_{r+1}=1$ 的时候式子成立。

设数组 c 为求 g 数组的时候取的 x。因为 $a_l=1$ 且 $a_{r+1}=1$，那么

> $c_{l,r+1}=c_{l+1,r}$，$c_{l+1,r}\ge c_{l,r}$，$c_{l+1,r}\le c_{l+1,r+1}$。

那么就有

> $g_{l+1,r}+g_{l,r+1}=2\times g_{l+1,r}+c_{l+1,r}-h_l+h_{r+1}-c_{l+1,r}$

> $g_{l,r}\le g_{l+1,r}+c_{l+1,r}-h_l$，$g_{l+1,r+1}\le g_{l+1,r}+h_{r+1}-c_{l+1,r}$

所以

> $g_{l,r}+g_{l+1,r+1}\le g_{l+1,r}+g_{l,r+1}$

证毕。

所以 f 数组可以四边形不等式优化。

再考虑 s 数组，可以通过类似的方法证明 t 满足区间包含单调性和四边形不等式，那么也就可以推出 s 数组可以四边形不等式优化。

复杂度 $O(n^2\log d+m)$。

一些可能可以帮到你的细节：

矩阵乘法传数组的时候加上引用。

一开始的 a 的数组做一遍，再全部异或上 1 做一次。

$d=1$ 单独处理。

本地手动开栈。

后记：

常见动态规划的优化在提高组的提纲内，所以不超纲。(upd: 被组题人怒斥四边形超纲~~组题人备注：硬要说也可以是不超纲的，但是对选手不太友好，于是要求改小了。~~，所以改小了数据范围)

dp 可以用多种算法组合优化，不拘束于什么矩阵乘法矩阵只能 $O(n^3)$。

数据可能有点水，奇妙乱搞做法可能获得额外的分数。

如果您吊打标算，欢迎随时指出。