Optymalizacja Liniowa, Projekt 2

Arkadiusz Słowik, 417835

June 2022

1 Część teoretyczna

1. Wyjaśnij dlaczego rozwiązanie optymalne powyższego problemu wyznacza strategię optymalną lidera.

Odpowiedź: Funkcja celu, którą maksymalizujemy to wartość wypłaty lidera. Bierzemy pod uwagę grę z różnymi naśladowcami i to, że na pewno wybiorą strategię optymalną, o ile to z danym następnikiem będziemy grać. Szansa na grę z określonym następcą jest opisana przez dane prawdopodobieństwo. Ponadto ograniczenia 1 i 4 opisują zbiór dopuszczalny strategii mieszanych lidera, a ograniczenia 2 i 5 zbiór dopuszczalnych strategii czystych następników. W przypadku następców rozważamy jedynie strategie czyste, bo jak powiedzieliśmy zawsze jeden z ruchów będzie nie gorszy od pozostałych. Tak naprawdę, jeśli strategia mieszana następcy jest optymalna, to każda ze strategii wchodząca w jej skład jest optymalna jako strategia czysta, tym samym możemy strategie optymalne naśladowcy zapisać przy użyciu zmiennych binarnych.

Podsumowując, zaproponowany model reprezentuje działania lidera i następnika, uwzględniając wszystkie opisane zależności.

2. Co to jest a^l w problemie?

Odpowiedź: Maksymalna oczekiwana wypłata naśladowcy l przy danej obranej strategii lidera.

Jeśli naśladowca wybiera strategię j to

$$a^l = \sum_{i \in X} c_{ij}^l \cdot x_i \tag{1}$$

3. Udowodnij, że podana linearyzacja (zmienne binarne pozostają) problemu jest poprawna.

Odpowiedź: Pokażemy w pierwszej kolejności, że rozważając rozwiązanie dopuszczalne starego modelu x, q^l, a^l dostajemy dopuszczalne rozwiązanie nowego z_{ij}^l, q^l, a^l i funkcje celu dla tych rozwiązań są sobie równe. Zauważmy najpierw, że warunki 4 i 8 pozostały niezmienione z poprzedniej postaci. W dodatku w oczywisty sposób warunek 7 zastąpił poprzedni warunek 4 (bo $z_{ij}^l = x_i q_j^l$ Podobnie maksymalizowana funkcja zastąpiła poprzednią. Ponieważ jak powiedzieliśmy, następnik w uproszczeniu wybiera strategię czystą, to jedna ze zmiennych binarnych q_j^l jest równa 1 $\forall l$, a reszta jest równa 0, a x_i to prawdopodobieństwa sumujące się do 1, stąd w oczywisty sposób zachodzi warunek 1 oraz 2. W dodatku z poprzedniego i obecnego warunku 1 mamy

$$\sum_{i \in X} x_i = 1 = \sum_{i \in X} \sum_{j \in Q} z_{ij}^l, \tag{2}$$

a zatem

$$\sum_{j \in Q} z_{ij}^l = x_i, \tag{3}$$

i stąd zachodzi warunek 6, w którym l nie ma znaczenia. Zauważmy, że ponieważ zachodzi (4), to nowy warunek 5 odpowiada staremu warunkowi 3.

Porównując nowy warunek 1 ze starym warunkiem 2, dostajemy że

$$\sum_{i \in X} z_{ij}^l = q_j^l, \tag{4}$$

i na mocy tego jest spełniony warunek 3.

Teraz w drugą stronę. Pokażemy, że mając rozwiązanie dopuszczalne nowego modelu dostajemy rozwiązanie dopuszczalne starego modelu i funkcje celu są sobie równe. W kwestii warunków, to pokrywają się one z warunkami nowego modelu i powyższe rozważania dotyczące warunków należy traktować jako równoważności. W dowodzie równości funkcji celu ponownie odwołamy się do tego, że następca wybiera strategię optymalną czystą. To weźmy następnika l i niech wybierze strategię optymalną czystą j_l. W takim razie $q_{j_l}^l = 1$, a stąd 3 warunek nowego modelu daje nam

$$\sum_{j \in Q} z_{ij}^l = 1, \tag{5}$$

Ten wniosek wraz z warunkiem 1 daje nam, że $\forall i \in X \forall j \neq j_l, z_{ij}^l = 0$.

Na mocy tego wniosku oraz starego i nowego warunku 1

$$x_i = \sum_{j \in Q} z_{ij}^l = z_{ij_l}^l. \tag{6}$$

A zatem

$$x_i q_j^l = z_{ij_l}^l q_j^l \tag{7}$$

Z kolei prawa strona powyższej równości jest równa z_{ij}^l, ponieważ ustaliliśmy, że jedynie $q_{j_l}^l = 1$ a dla pozostałych j jest równe 0, podobnie pamiętamy, że jeśli $j \neq j_l$ to $z_{ij}^l = 0$. To kończy dowód.

Podsumowując funkcje obu postaci sobie odpowiadają, podobnie warunki poprzedniej formy są równoważne warunkom zlinearyzowanej postaci.

2 Część praktyczna

Pokażemy rozwiązanie problemu MILP w narracji gry planszowej "Szeryf z Nottingham". W naszej wersji gry szeryf został zatrudniony przez urząd miasta i jego celem jest sprawdzenie straganów kupców pod kątem legalności sprzedawanych przez nich towarów. W omawianym wariancie ograniczymy się do gry z 1 losowo wybranym kupcem spośród 3, przy czym prawdopodobieństwo gry szeryfa (lidera) z danym kupcem (następnikiem) domyślnie wynosi 1/3. Z powodu natłoku obowiązków, szeryf jest w stanie sprawdzić tylko 1 stragan dziennie. Celem obu graczy jest zarobek.

2.1 Opis gry

Na początku dnia każdy z kupców zabiera ze swojego magazynu 6 legalnych towarów o tej samej wartości i 6 nielegalnych towarów o tej samej wartości. Te wartości są równe karom, o których powiemy później, a same towary są sprzedawane na straganach po zawyżonych cenach.

Szeryf posiada informacje o tym, w jakich cenach mogą byc wystawione te towary przez kupców, jednak na samym targu kupcy utajniają przed szeryfem informacje na temat tego jaki stragan, magazyn i gildię reprezentują, w obawie przed poważnymi konsekwencjami prawnymi gildii.

Szeryf to zorganizowana osoba i wychodząc ze swojego biura zawsze zapisuje sobie strategię, której będzie się ściśle trzymał. O strategiach lidera następnicy dowiadują się dzięki współpracownikom szeryfa, którzy dorabiają w ten sposób na lewo, będąc opłacani przez gildie.

Posiadając informację o strategii szeryfa, kupcy odpowiednio przygotowują swoje stragany, tj. wystawiają maksymalną ilość towarów, a pozostałe odsyłają z powrotem do magazynu. W naszej rozgrywce przyjmujemy, że maksymalna ilość towarów na straganie to 6. Przyjmujemy również, że kupcy nie wiedzą, że szeryf sprawdza tylko 1 stragan.

Szeryf losowo wybiera stragan, który będzie sprawdzał tego dnia i dostosowuje swoje działania do przyjętej wcześniej strategii. W wyniku inspekcji wypłacane są nagrody, bądź naliczane grzywny dla obu graczy.

Dostępne akcje szeryfa:

1. **Sprawdzenie towarów.** W przypadku gdy szeryf znajdzie towar nielegalny, kupiec musi zapłacić mu karę, równą magazynowej wartości złych towarów, następnie te towary są konfiskowane. Jeśli szeryf nie znajdzie nielegalnych towarów, musi zapłacić kupcowi karę, za utratę wizerunku kupca wśród okolicznych gapiów. Przyjmujemy, że ta kara jest równa magazynowej wartości wszystkich dobrych towarów.

2. **Odpuszczenie sprawdzenia straganu.** Szeryf postanawia nie sprawdzać straganu, w zamian kupiec chcąc dbać o swój wizerunek, płaci mu 2 denary. Jednak jeśli tego dnia kupiec sprzeda nielegalne towary, szeryf za każdy taki towar musi zapłacić 1 denar w urzędzie miasta.

3. **Targowanie o odpuszczenie.** Szeryf może zdecydować się na nieprzeprowadzenie inspekcji w zamian za opłatę. Jednak gdy kupiec "ma gadane" szeryf może

stać się pośmiewiskiem, tracąc na swoim wizerunku i wizerunku urzędu miasta. W takim wypadku szeryf płaci karę dla urzędu, a kupiec w zamian za rozbawienie okolicznych osób, otrzymuje od nich darowizny. Mimo wszystko jednak kupiec płaci szeryfowi rozsądne pieniądze za odpuszczenie.

Dostępne akcje kupca:

Zarobki kupca na każdej z akcji są uzależnione od jego umiejętności prowadzenia dyskusji oraz handlu.

1. **Wystawienie samych dobrych towarów.** Kupiec wystawia same legalne towary.

2. **Wystawienie legalnych i nielegalnych w proporcji 1:1**. Stara szkoła kupiecka mówi, że aby stragan przynosił zyski, to jeśli już chcemy wystawiać towary legalne i nielegalne jednocześnie, to musimy robić to wedle zasad Yin i yang.

3. **Wystawienie tylko nielegalnych towarów.** Ryzykowne, ale przynoszące duże zyski.

W roli podsumowania poniżej prezentujemy ogólną macierz wypłat, BSO. dla wartości towaru legalnego 2 i nielegalnego 5.

	Towary uczciwe	Towary mieszane	Towary nielegalne
Szeryf sprawdza	- 6*2 / 6 * (2+a)	+ 3*5 / -3*5 + 3 * (2+a)	+ 6*5 / -6*5
Szeryf targuje się	+ 2-c / 6 * (2+a)-2+c	+5-c / +3*(5+2*a) + 3 * (2+a)+c	+8-c / + 6*(5+2*a)+c
Szeryf przepuszcza	+2 / 6 * (2+a) -2	+2-3 / 3 * (2+a) + 3*(5+2*a) - 2	+2-6 / 6*(5+2*a) - 2

Legenda:

- Czerwony – ilość towaru
- Niebieski – cena
- Różowy – negocjacje i darowizny
- Zielony – kary za przepuszczenie nielegalnych towarów
- a - bonus za umiejętności handlu
- c – bonus za umiejętności negocjacyjne

Potencjalne rozszerzenia: 1. Wprowadzenie zdarzeń losowych w postaci dni, zmieniające zasady np. brak kar za negocjacje, podwójny przychód itp.

2.2 Testy i implementacja

Załączony kod zawiera dwa testy, będace algorytmami rozwiązań problemu Stackelberga dla prostych macierzy. Następne dwie funkcje $game_{l1}$ i $game_{l3}$ dotyczą rozważanej przez nas gry. Parametry tych funkcji dotyczą wartości takich jak bonusy handlu poszczególnych kupców, czy magazynowa cena danego rodzaju towaru. Funkcja $game_{l1}$ jest symulacją gry dla 1 kupca. Dzięki wynikowi tej gry możemy sprawdzić poprawność gry dla 3 kupców funkcji $game_{l3}$, z prawdopodobieństwem gry dla pierwszego kupca równym 1.

References

[1] Przedmiot MIMUW: Optymalizacja Liniowa 2022 lato

[2] Playing Games for Security: An Efficient Exact Algorithm for Solving Bayesian Stackelberg Games

[3] Dokumentacja Sage