

Характер группоида

А. А. Владимиров

27.04.2022

Задача. Дан функтор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{Vec}$.

Найти $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \rightarrow \varkappa_1(\Gamma_2))$, если известно, что $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$, где V – пространство характеров, т.е. $V = \{\chi : \text{Hom } \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$.

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора A_f на коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\varkappa} & V_1 \\ \downarrow f & & \downarrow A_f \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\varkappa} & V_2 \end{array} \quad (1)$$

Решение. Для начала отметим следующие три утверждения: если в группоиде Γ известны

- (а) $f : a \rightarrow b$, $\text{hom}(a, a)$, то посредством изоморфизма $\psi : \text{hom}(a, a) \rightarrow \text{hom}(b, b)$, а именно $\psi : h \mapsto fhf^{-1}$ однозначно определено $\text{hom}(b, b)$;
- (б) $f : a \rightarrow b$, $\text{hom}(a, a)$, то однозначно определено $\text{hom}(a, b)$, так как для любого $g \in \text{hom}(a, b)$ существует $h \in \text{hom}(a, a)$, такое что $fh = g$, а именно $g = f \underbrace{f^{-1}g}_{= fh}$;
- (с) $f : a \rightarrow b$, $g : a \rightarrow c$, то можно задать некоторое $h : b \rightarrow c$, а именно $h = gf^{-1}$.

Таким образом, если в связном группоиде Γ известны группа петель $\text{hom}(a, a)$ некоторой вершины a и по одной стрелке $f : a \rightarrow b$, $g : a \rightarrow c$,.. из a в каждую из остальных вершин b, c ,.. то посредством утверждений (а)–(с) однозначно восстанавливается весь группоид Γ , что иллюстрирует диаграмма (??)

$$b @ - - > [ddrr]^h = g \circ f^{-1} a @ (l, d) \llcorner_{\text{hom}(a, a)} [uu]^f [rr] gc \quad (2)$$

Рассмотрим теперь некоторый характер $\chi : \text{Hom } \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$. Благодаря свойству $\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)$ все вышесказанное в определенном смысле переносится и на характер χ . Так, если χ задано на

- (a') $f : a \rightarrow b$, $\text{hom}(a, a)$, то изоморфизм ψ “один в один” переносит характер на $\text{hom}(b, b)$: если $\chi(h) = \alpha$, то $\chi(\psi(h)) = \chi(fhf^{-1}) = \chi(f) + \chi(h) - \chi(f) = \chi(h)$, и характер однозначно определен на $\text{hom}(b, b)$.
- (b') $f : a \rightarrow b$, $\text{hom}(a, a)$, то харктер однозначно продолжается на $\text{hom}(a, b)$, так как для любого $g \in \text{hom}(a, b)$ существует $h \in \text{hom}(a, a)$, такое что $fh = g$, и следовательно $\chi(g) = \chi(f) + \chi(h)$.
- (c') $f : a \rightarrow b$, $g : a \rightarrow c$, то автоматически можно задать характер на некотором $h : b \rightarrow c$, а именно $h = gf^{-1}$, и $\chi(h) = \chi(g) - \chi(f)$.

Таким образом, если в связном группоиде Γ определить характер на группе петель $\text{hom}(a, a)$ некоторой вершины a и на стрелках $f : a \rightarrow b$, $g : a \rightarrow c$,.. из a (по одной в каждую из остальных вершин b, c, \dots), то характер однозначно продолжается на все $\text{Hom } \Gamma$. То есть, характер определяется своим действием на группе петель произвольной вершины a^1 и вектором значений $s \in \mathbb{C}^{n-1}$ на стрелках из a (здесь $n = |\text{Obj}(\Gamma)|$).

$$b @ - - > [ddrr] \chi(h) = \chi(g) - \chi(f) a @ (l, d) \llbracket \chi|_{\text{hom}(a, a)} [uu] \chi(f) [rr] \chi(g) c \quad (??')$$

Проясним как определяется характер на фундаментальной группе. Для этого остановимся на задании характера на некоторой группе G .

Как известно² разрешимая группа G раскладывается в прямую сумму

$$G \simeq G/G' \oplus \dots \oplus G^{(n-1)}/G^{(n)}, \quad (3)$$

где $G^{(k+1)} = (G^{(k)})'$ — коммутант группы $G^{(k)}$.

Для конечно порожденной абелевой группы A справедливо разложение³

$$A \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n \oplus \text{Tor } A = \mathbb{Z}^n \oplus \text{Tor } A, \quad (4)$$

где $\text{Tor } A \doteq \{a \in A : ta = 0 \text{ для некоторого } t \in \mathbb{Z}, t \neq 0\}$ — *подгруппа кручения*, причем

$$\text{Tor } A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_s}, \quad (5)$$

где \mathbb{Z}_p — циклическая группа порядка p .

Определение. Назовем группу G *конечно разрешимой*, если она разрешима и каждое слагаемое разложения (??) суть есть конечно порожденная абелева группа.

¹или на *фундаментальной группе*, что суть одно и то же,

²см. [?] гл.10 §2

³см. [?] гл.9 §1

Таким образом, из соотношений (??) – (??) следует, что если G конечно разрешимая группа, то

$$\begin{aligned} G &\simeq A_0 \oplus \dots \oplus A_{n-1} \simeq \\ &\simeq \mathbb{Z}^m \oplus \text{Tor } A_0 \oplus \dots \oplus \text{Tor } A_{n-1} \simeq \\ &\simeq \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}, \end{aligned}$$

т.е. разложима в сумму конечных и бесконечных циклических групп, а значит

$$G = \{x_1 e_1 + \dots + x_m e_m + x_{m+1} f_1 + \dots + x_{m+k} f_k \mid x_i \in \mathbb{Z}\}, \quad (6)$$

где $\{e_i\}_{i=1}^m$ – базис свободной группы \mathbb{Z}^m , $\{f_i\}_{i=1}^k$ – порождающие соответствующих циклических групп \mathbb{Z}_{p_i} . Попутно введем обозначение $[\dim G] = m$.

Пусть теперь задан характер $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$, тогда для любого $g \in G$, с учетом (??) верно

$$\begin{aligned} \chi(g) &= \chi(x_1 e_1 + \dots + x_m e_m + x_{m+1} f_1 + \dots + x_{m+k} f_k) = \\ &= x_1 \chi(e_1) + \dots + x_m \chi(e_m) + x_{m+1} \chi(f_1) + \dots + x_{m+k} \chi(f_k), \end{aligned}$$

но, так как порядок каждого элемента f_i конечен, то $\chi(f_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, k$, и

$$\chi(g) = x_1 \chi(e_1) + \dots + x_m \chi(e_m). \quad (7)$$

Так, характер конечно разрешимой группы G определяется $m = [\dim G]$ числами – значениями характера на базисе свободной подгруппы.

Вернемся к характеру группоида Γ . Как было показано ранее, он определен $(\text{Obj } \Gamma) - 1$ числами и своим действием на фундаментальной группе группоида $\text{Fund } \Gamma$. Теперь, с учетом (??), ясно: *характер $\chi : \text{Hom } \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ связного группоида Γ , фундаментальная группа которого конечно разрешима, определяется своими значениями на $n - 1 = |\text{Obj } \Gamma| - 1$ стрелках, исходящих из некоторой вершины во все прочие и $m = [\dim \text{Fund } \Gamma]$ значениями на базисе свободной подгруппы фундаментальной группы.* То есть, вектором $h(\chi) \in \mathbb{C}^{m+n-1}$.

Теперь, после того как мы можем взаимоднозначно сопоставить любому характеру вектор пространства соответствующей размерности, приходим к очевидному выводу:

$$V \doteq \{\chi : \text{Hom } \Gamma \rightarrow \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^{[\dim \text{Fund } \Gamma] + |\text{Obj } \Gamma| - 1}, \quad (8)$$

где Γ – группоид, такой что $|\text{Obj } \Gamma| < \infty$ и $\text{Fund } \Gamma$ конечно разрешима.

Наконец, возвращаясь к коммутативной диаграмме (??), используя полученный результат, мы можем дополнить ее следующим образом

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\simeq} & V_1 \simeq \mathbb{C}^{m_1+n_1-1} \\ \downarrow f & & \downarrow A_f \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\simeq} & V_2 \simeq \mathbb{C}^{m_2+n_2-1} \end{array} \quad (9)$$

где $n = |\text{Obj } \Gamma|$, $m = \lfloor \dim \text{Fund } \Gamma \rfloor$, а функтор \varkappa рассматривается лишь на подкатегории $\mathbf{Cat}(\Gamma)$ связных группоидов с конечным числом объектов и конечно разрешимой фундаментальной группой.

Поскольку все конечномерные векторные пространства изоморфны, можно считать, что функтор \varkappa данному $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ ставит в соответствие оператор $\varkappa(f) = A_f$, который, не ограничивая общности, суть есть

- проектор пространства размерности $m_1 + n_1 - 1$ на пространство размерности $m_2 + n_2 - 1$, при $m_1 + n_1 > m_2 + n_2$;
- оператор вложения пространства размерности $m_1 + n_1 - 1$ в пространство $m_2 + n_2 - 1$, при $m_1 + n_1 < m_2 + n_2$;
- изоморфизм, при $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$.

□

Список литературы

- [1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.
- [2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.