

Характер группоида

А. А. Владимиров

16.06.2022

Задача

Дан функтор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{Vec}$.

Найти $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \rightarrow \varkappa_1(\Gamma_2))$, если известно, что $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$, где V – пространство характеров, т.е. $V = \{\chi : \text{Hom } \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$.

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора A_f на коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\varkappa} & V_1 \\ \downarrow f & & \downarrow A_f \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\varkappa} & V_2 \end{array}$$

Рис. 1: постановка задачи

Решение

Содержание

0.1	Характер группоида	2
i.	Группоид	2
ii.	Группа	3
iii.	Абелева группа	5
0.2	Преобразование характеров	6
i.	Что дальше?	6

0.1 Характер группоида

i. Группоид

Начнем сразу с

Утверждение 1.

$$\Phi_\Gamma \times \Gamma/\Phi_\Gamma \simeq \Gamma.$$

Здесь Γ — группоид¹, Φ_Γ — его фундаментальная группа, Γ/Φ_Γ — фактор-группоид по фундаментальной группе, “ \times ” и “ \simeq ” — произведение и изоморфизм категорий соответственно.

Утверждение 2.

$$\begin{array}{ccc} \Phi_\Gamma \times \Gamma/\Phi_\Gamma & \xrightarrow{\tau} & \Gamma \\ & \searrow \chi & \downarrow \chi \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

Рис. 2

¹здесь и далее под группоидом будет подразумеваться связный группоид

ii. Группа

Рассмотрим некоторую группу G , его фактор-группу G/G' по коммутанту G' и следующую диаграмму

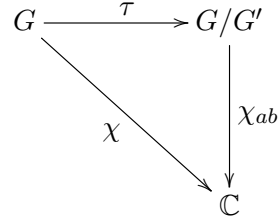


Рис. 3

Здесь $\tau : g \mapsto gG'$ — канонический гомоморфизм; χ, χ_{ab} — характеры групп G и G/G' соответственно.

Оказывается, что

Утверждение 3. для любого $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ существует и при том единственный характер $\chi_{ab} : G/G' \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что диаграмма (3) коммутативна, т.е.

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau.$$

Доказательство. Действительно, потребуем для любого $g \in G$

$$\chi(g) = \chi_{ab}(\tau(g)),$$

тогда

$$\chi(g) = \chi_{ab}(gG'),$$

и χ_{ab} задан на G/G' однозначно.

Более того χ_{ab} задан корректно, т.к. для $\forall f \in gG' \exists h \in G' : f = gh$, но по определению коммутанта существуют такие a и b , что $h = aba^{-1}b^{-1}$, откуда $f = gaba^{-1}b^{-1}$, и

$$\chi(f) = \chi(gaba^{-1}b^{-1}) = \chi(g) + \chi(a) + \chi(b) - \chi(a) - \chi(b) = \chi(g),$$

то есть,

$$\chi(f) = \chi(g), \text{ для любых } f \text{ и } g \text{ из одного смежного по } G' \text{ класса.} \quad (1)$$

Очевидно, что χ_{ab} — характер:

$$\chi_{ab}(gfG') = \chi(gf) = \chi(g) + \chi(f) = \chi_{ab}(gG') + \chi_{ab}(fG').$$

□

Замечание. Попутно доказано важное для понимания происходящего утверждение (1), показывающее, что факторизация группы по коммутанту G' разбивает ее также и на «области постоянства» характера (рис. 4). Становится ясно, что вместо рассмотрения характера χ на всей группе, достаточно пронаблюдать лишь за его «действием с точностью до G' », т.е. за определяемым им на G/G' характере χ_{ab} .

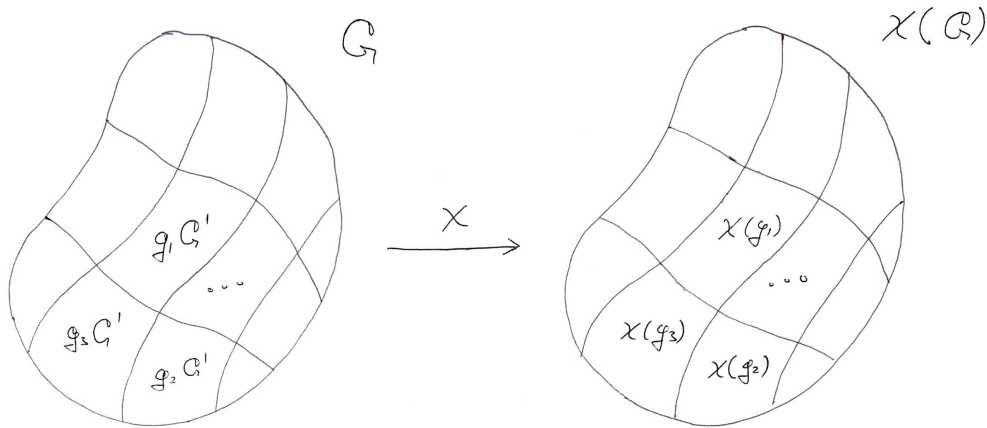


Рис. 4

Обратно,

Утверждение 4. *характер χ_{ab} однозначно задает χ , как*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau$$

Утверждение представляется очевидным.

Так, построено взаимнооднозначное отображение $t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau = \chi$ между характерами группы и ее абелизации (т.е. фактор группы по коммутанту). Покажем, что отображение t является гомоморфизмом (а следовательно и изоморфизмом) линейных пространств.

Действительно, для любого $g \in G$

$$\begin{aligned} t(c_1 \chi_{ab}^1 + c_2 \chi_{ab}^2)(g) &= (c_1 \chi_{ab}^1 + c_2 \chi_{ab}^2) \circ \tau(g) = \\ &= (c_1 \chi_{ab}^1 + c_2 \chi_{ab}^2)(gG') = c_1 \chi_{ab}^1(gG') + c_2 \chi_{ab}^2(gG') = \\ &= c_1 \chi_{ab}^1 \circ \tau(g) + c_2 \chi_{ab}^2 \circ \tau(g) = c_1 t(\chi_{ab}^1)(g) + c_2 t(\chi_{ab}^2)(g). \end{aligned}$$

Тем самым доказано следующее

Утверждение 5. *Пространства характеров группы G и ее абелизации G/G' изоморфны. Конкретно, изоморфизм имеет вид:*

$$t : G/G' \rightarrow G. \quad t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau, \quad (2)$$

где τ — канонический гомоморфизм $G \rightarrow G/G'$.

Последнее утверждение позволяет нам свести задачу изучения характеров группы G к рассмотрению характеров на G/G' — группе, абелевой по определению.

iii. Абелева группа

Итак, пусть некоторая группа A — абелева. Как задать на ней характер? Нетрудно получить ответ в случае *конечно-порожденных* групп.

Известно, что для таких групп справедливо разложение ²

$$A \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n \oplus \text{Tor } A = \mathbb{Z}^n \oplus \text{Tor } A,$$

где \mathbb{Z}^n — свободная подгруппа,

$\text{Tor } A \doteq \{a \in A : ma = 0 \text{ для некоторого } m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ — подгруппа кручения, причем

$$\text{Tor } A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_s},$$

где \mathbb{Z}_{p_i} — циклическая группа порядка p_i .

Отсюда

$$A = \{x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + x_{n+1} f_1 + \dots + x_{n+s} f_s \mid x_i \in \mathbb{Z}\}, \quad (3)$$

где $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис свободной подгруппы, $\{f_i\}_{i=1}^s$ — порождающие соответствующих циклических групп. Попутно введем обозначение $\lfloor \dim \rfloor A = n$.

Пусть теперь задан характер $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$, тогда для любого $a \in A$, с учетом (3) верно

$$\begin{aligned} \chi(a) &= \chi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} f_1 + \dots + \alpha_{n+s} f_s) = \\ &= \alpha_1 \chi(e_1) + \dots + \alpha_n \chi(e_n) + \alpha_{n+1} \chi(f_1) + \dots + \alpha_{n+s} \chi(f_s), \end{aligned}$$

но, так как порядок каждого элемента f_i конечен, то $\chi(f_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, s$, и

$$\chi(a) = \alpha_1 \chi(e_1) + \dots + \alpha_n \chi(e_n). \quad (4)$$

Тем самым доказано

Утверждение 6. Для конечно-порожденной группы A пространство характеров $X(A) = \{\chi : A \rightarrow \mathbb{C} : \chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)\}$ имеет размерность

$$\dim X(A) = \lfloor \dim \rfloor A. \quad (5)$$

²см.[2] гл.9 §1

0.2 Преобразование характеров

i. Что дальше?

Список литературы

- [1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.
- [2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.