Характер группоида

А. А. Владимиров

16.06.2022

Задача

Дан функтор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \to \mathbf{Vec}$.
Найти $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \to \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \to \varkappa_1(\Gamma_2))$, если известно, что $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$, где V – пространство характеров, т.е. $V = \{\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$.

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора A_f на коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "f"] & V_1 \arrow[d, "A_f"] \\
\Gamma_2 \arrow[r, "\varkappa"] & V_2
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: постановка задачи

Решение

Содержание

0.1 Характер группоида

i. Группоид

Перед тем, как задавать характер, обсудим сперва саму структуру группоида[1].

Определение 1. [1] *Группоидом* назывется категория, любая стрелка которой обратима.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[loop left, "\mathrm{hom}(b{,}b)"] \arrow[dr, "\mathrm{hom}(b{,}c)"] & \\
a \arrow[u, "\mathrm{hom}(a{,}b)"] \arrow[r, "\mathrm{hom}(a{,}c)"'] \arrow[loop left, "\mathrm{hom}(a{,}a)"'] & c \arrow[loop right, "\mathrm{hom}(c{,}c)"]
\end{tikzcd}$$

Рис. 2: группоид

Попытаемся найти в группоиде "что-то вроде базиса". В некотором группоиде Γ выберем произвольную вершину a и рассмотрим её группу петель G и *веер стрелок* $(e, f, g, \dots)$.

Определение 2. *Веером стрелок* вершины a группоида Γ назовем множество стрелок $V = \{e = \mathrm{id}_a : a \to a, f : a \to b, g : a \to b, \dots\}$, исходящих из вершины a по одной в каждую из вершин группоида, причем $e : a \to a$ есть тождественная стрелка.

$$\begin{tikzcd}
b & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[loop left, "e"'] & c
\end{tikzcd}$$

Рис. 3: веер

Возникает вопрос: как соотносятся с выделенным "базисом" остальные стрелки группоида? Ответ на него дает следующая простая лемма.

[1] здесь и далее под группоидами подразумеваются связные группоиды

Лемма 1. *Для любой стрелки $v : b \to c$ группоида Γ существуют, и притом единственные $f, g \in V$ и $h \in G$, такие что*

$$v = ghf^{-1}. \tag{1}$$

Доказательство. Действительно, поскольку $v : b \to c$, и $h : a \to a$, стрелки g и f обязаны действовать из a в c, и из a в b соответственно, а таковые имеются в V в единственном экземпляре.

Раз теперь известны v, g и f, существование и единственность стрелки $h \in G$ следует напрямую алгебраически из выражения (1), а именно $h = g^{-1}vf$. $\square$

Иными словами, мы построили биекцию

$$\iota : \mathrm{Arr}(\Gamma) \to V \times G \times V \tag{2}$$

— между стрелками и множеством троек вида ghf^{-1}.

Располагая таким построением, мы опустим кавычки говоря о (G, V) как о *базисе* группоида Γ, а под *разложением* по этому базису стрелки или множества стрелок с математической точки зрения будем подразумевать образ соответствующего множества при отображении ι.

Перебирая и фиксируя различные пары (g, f) можно получить разложение группоида по базису (G, V).

Следствие 1. (о представлении hom-множеств)

a. $\hom(b, c) = gGf^{-1}$

b. $\hom(a, b) = fGe^{-1} = fG$,

c. $\hom(b, a) = eGf^{-1} = Gf^{-1}$,

d. $\hom(b, b) = fGf^{-1}$, [2]

e. $\hom(a, a) = eGe^{-1} = G$,

где $f : a \to b$, $g : a \to c$, $G = \hom(a, a)$.

Полезно также отедельно выделить частный случай

Определение 3. *Простым группоидом* назовем группоид, фундаментальная группа которого тривиальна.

Для которого, ввиду $G = \{\mathrm{id}_a\}$ следствие 1 принимает вид:

Следствие 2. В простом группоиде любая стрелка $v : b \to c$, раскладывается в базисе V как

$$v = gf^{-1},$$

где $f : a \to b$, $g : a \to c$.

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[loop left, "fGf^{-1}"] \arrow[dr, "gGf^{-1}"] & \\
a \arrow[u, "fG"] \arrow[loop left, "G"] \arrow[r, "gG"'] & c \arrow[loop right, "gGg^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Рис. 4: фактор-группоид

Вернемся к группоиду Γ и перерисуем диаграмму 2 с учетом следствия 1 (рис. 4).

Диаграмма 4 напоминает некую "факторизацию", и действительно, если под стрелками на диаграмме понимать не hom-множества, а просто стрелки, то мы получим диаграмму *фактор-группоида* Γ/Φ_Γ[3] по фундаментальной группе Φ_Γ, где названия стрелок соответствуют прообразам факторизации. Мы не будем здесь строго вводить понятие фактор-группоида, т.к. в нашем случае он предствляет из себя всего лишь *простой группоид* с тем же набором объектов что и исходный.

При виде диаграммы 4 кажется само собой разумеющимся

Утверждение 1.

$$\Gamma \simeq \Gamma/\Phi_\Gamma \times \Phi_\Gamma. \tag{3}$$

Перед доказательством утверждения 1 напомним

Определение 4. [1] *Произведением* двух данных категорий B и C, называется категория $B \times C$, объекты которой — пары (b, c) объектов b из B и c из C; стрелки $(b, c) \to (b', c')$ — пары (f, g) стрелок $f : b \to b'$ и $g : c \to c'$, а композиция двух таких стрелок

$$(b, c) \xrightarrow{(f,g)} (b', c') \xrightarrow{(f',g')} (b'', c'')$$

определяется в терминах композиции в категориях B и C по формуле

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g).$$

Доказательство. Построим явно изоморфизм — функтор $i : \Gamma \to \Gamma/\Phi_\Gamma \times \Phi_\Gamma$.

[2]Это классическое утверждение об изоморфности всех групп петель в группоиде (которое и позволяет ввести такой объект как фундаментальная группа)

[3]Пользуясь стандартным определением факторизации категории[1], естественным образом, подобно тому как это делается в обыкновенных группах, можно ввести факторизацию группоида по любой нормальной подгруппе фундаментальной группы, в том числе и по ней самой.

Для этого выделим некоторый базис ($G = \hom(a, a), V$ — веер a) группоида Γ, и для удобства отождествим Φ_Γ с G, а веер вершины a в Γ/Φ_Γ с V.

Тогда i может быть задан следующим образом:

на объектах: $i : d \mapsto (d, \theta)$;

на стрелках: $i : v \mapsto (gf^{-1}, h)$, где $(g, h, f^{-1}) = \iota(v)$.

Биективность и функторность i очевидна вследствие определения биекции ι, леммы 1 и ее следствий. Впрочем, в этом также можно наглядно убедится взглянув на схему, изображенную на рис. 5.

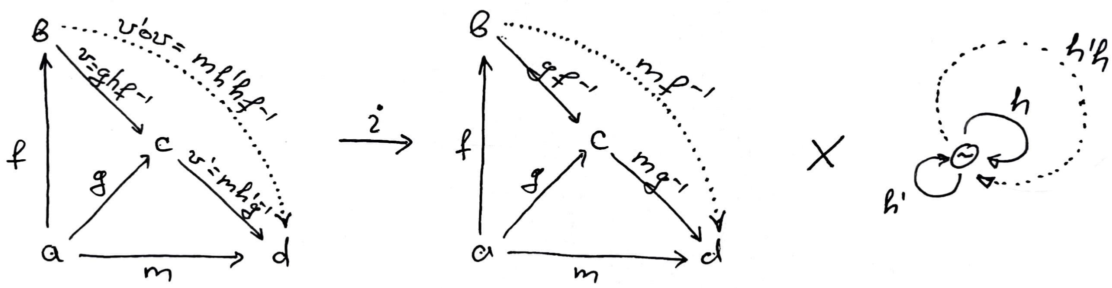

Рис. 5: изоморфизм

$\square$

Возвращаясь, наконец, к вопросу задания характера на группоиде

ii. Группа

Рассмотрим некоторую группу G, его фактор-группу G/G' по коммутанту G' и следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\chi"'] & G/G' \arrow[d, "\chi_{ab}"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Рис. 6

Здесь $\tau : g \mapsto gG'$ — канонический гомоморфизм; χ, χ_{ab} — характеры групп G и G/G' соответственно.

Оказывается, что

Утверждение 2. *для любого* $\chi : G \to \mathbb{C}$ *существует и при том единственный характер* $\chi_{ab} : G/G' \to \mathbb{C}$ *такой, что диаграмма* (6) *коммутативна, т.е.*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau.$$

Доказательство. Действительно, потребуем для любого $g \in G$

$$\chi(g) = \chi_{ab} \circ \tau(g),$$

тогда

$$\chi(g) = \chi_{ab}(gG'),$$

и χ_{ab} задан на G/G' однозначно.

Более того χ_{ab} задан корректно, т.к. для $\forall f \in gG'$ $\exists h \in G' : f = gh$, но по определению коммутанта существуют такие a и b, что $h = aba^{-1}b^{-1}$, откуда $f = gaba^{-1}b^{-1}$, и

$$\chi(f) = \chi(gaba^{-1}b^{-1}) = \chi(g) + \chi(a) + \chi(b) - \chi(a) - \chi(b) = \chi(g),$$

то есть,

$$\chi(f) = \chi(g), \text{ для любых } f \text{ и } g \text{ из одного смежного по } G' \text{ класса.} \tag{4}$$

Очевидно, что χ_{ab} — характер:

$$\chi_{ab}(gfG') = \chi(gf) = \chi(g) + \chi(f) = \chi_{ab}(gG') + \chi_{ab}(fG').$$

$\square$

Замечание. Попутно доказано важное для понимания происходящего утверждение (4), показывающее, что факторизация группы по коммутанту G' разбивает ее также и на «области постоянства» характера (рис. 7). Становится ясно, что вместо рассмотрения характера χ на всей группе, достаточно пронаблюдать лишь за его «действием с точностью до G'», т.е. за определяемым им на G/G' характере χ_{ab}.

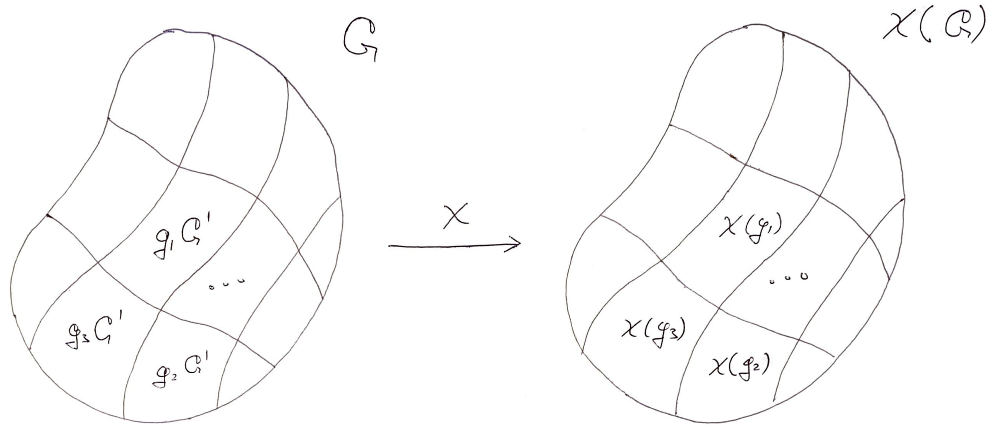

Рис. 7

Обратно,

Утверждение 3. *характер χ_{ab} однозначно задает χ, как*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau$$

Утверждение представляется очевидным.

Так, построено взаимооднозначное отображение $t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau = \chi$ между характерами группы и ее абелизации (т.е. фактор группы по коммутанту). Покажем, что отображение t является гомоморфизмом (а следовательно и изоморфизмом) линейных пространств.

Действительно, для любого $g \in G$

$$\begin{aligned} t(c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab})(g) &= (c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab}) \circ \tau(g) = \\ &= (c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab})(gG') = c_1\chi^1_{ab}(gG') + c_2\chi^2_{ab}(gG') = \\ &= c_1\chi^1_{ab} \circ \tau(g) + c_2\chi^2_{ab} \circ \tau(g) = c_1 t(\chi^1_{ab})(g) + c_2 t(\chi^2_{ab})(g). \end{aligned}$$

Тем самым доказано следующее

Утверждение 4. *Пространства характеров группы G и ее абелизации G/G' изоморфны. Конкретно, изоморфизм имеет вид:*

$$t : G/G' \to G. \quad t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau, \tag{5}$$

где τ — канонический гомоморфизм $G \to G/G'$.

Последнее утверждение позволяет нам свести задачу изучения характеров группы G к рассмотрению характеров на G/G' — группе, абелевой по определению.

iii. Абелева группа

Итак, пусть некоторая группа A — абелева. Как задать на ней характер? Нетрудно получить ответ в случае *конечно-порожденных* групп.

Известно, что для таких групп справедливо разложение [4]

$$A \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n} \oplus \operatorname{Tor} A = \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Tor} A,$$

где $\mathbb{Z}^n$ — *свободная подгруппа*,
$\operatorname{Tor} A \doteqdot \{a \in A : ma = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ — *подгруппа кручения*, причем

$$\operatorname{Tor} A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s},$$

где $\mathbb{Z}_{p_i}$ — циклическая группа порядка p_i.

Отсюда

$$A = \{x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n + x_{n+1} f_1 + \ldots + x_{n+s} f_s \mid x_i \in \mathbb{Z}\}, \tag{6}$$

где $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис свободной подгруппы, $\{f_i\}_{i=1}^s$ – порождающие соответствующих циклических групп. Попутно введем обозначение $\lfloor \dim \rfloor A = n$.

Пусть теперь задан характер $\chi : A \to \mathbb{C}$, тогда для любого $a \in A$, с учетом (6) верно

$$\chi(a) = \chi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} f_1 + \ldots + \alpha_{n+s} f_s) = \\ = \alpha_1 \chi(e_1) + \ldots + \alpha_n \chi(e_n) + \alpha_{n+1} \chi(f_1) + \ldots + \alpha_{n+s} \chi(f_s),$$

но, так как порядок каждого элемента f_i конечен, то $\chi(f_i) = 0$ для всех $i = 1,.., s$, и

$$\chi(a) = \alpha_1 \chi(e_1) + \ldots + \alpha_n \chi(e_n). \tag{7}$$

Тем самым доказано

Утверждение 5. *Для конечно-порожденной группы A пространство характеров $X(A) = \{\chi : A \to \mathbb{C} : \chi(a + b) = \chi(a) + \chi(b)\}$ имеет размерность*

$$\dim X(A) = \lfloor \dim \rfloor A. \tag{8}$$

[4] см.[2] гл.9 §1

0.2 Преобразование характеров

i. Что дальше?

Список литературы

[1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.

[2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.