Характер группоида

А. А. Владимиров

09.05.2022

Задача

Дан функтор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \to \mathbf{Vec}$.
Найти $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \to \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \to \varkappa_1(\Gamma_2))$, если известно, что $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$, где V – пространство характеров, т.е. $V = \{\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$.

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора A_f на коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "f"] & V_1 \arrow[d, "A_f"] \\ \Gamma_2 \arrow[r, "\varkappa"] & V_2 \end{tikzcd} \tag{1}$$

Решение

i. Группоид

Определение 1. [1] *Группоидом* назывется категория, в которой любая стрелка обратима.

Попытаемся вначале внести ясность в то, как группоид устроен. Под группоидом здесь и всюду далее будет подразумеваться связный группоид. Введем следующее

Определение 2. *Элементарным группоидом* будем называть группоид для любых двух вершин a и b которого существует одна и притом только одна стрелка $f : a \to b$. см. рис. 1.

Тот факт, что такие группоиды существуют доказывается непосредственно проверкой аксиом и представляется очевидным.

Заметим, что предъявление множества всех вершин и стрелок является *избыточным* для задания элементарного группоида. Введем объект достаточный (и в некотором смысле минимальный) для определения элементарного группоида целиком.

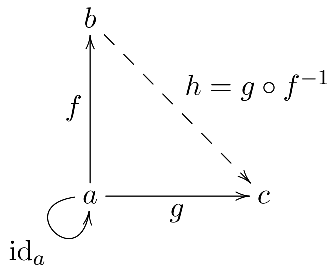


Рис. 1: элементарный группоид

Определение 3. *Пучком стрелок*, исходящих из вершины a назовем совокупность стрелок $f : a \to b$, $g : a \to c, \ldots$, по одной в каждую из остальных вершин $\mathrm{Obj}(\Gamma)/a$.

Утверждение 1. *Элементарный группоид задается пучком стрелок из произвольной вершины. Более точно: пусть Γ — элементарный группоид, $\pi(a)$ — пучок стрелок из вершины $a \in \mathrm{Obj}(\Gamma)$, тогда минимальный по включению группоид, содержащий $\pi(a)$ совпадает с Γ.*

Доказательство. Доказательство представляется очевидным. см. рис. 2 $\square$

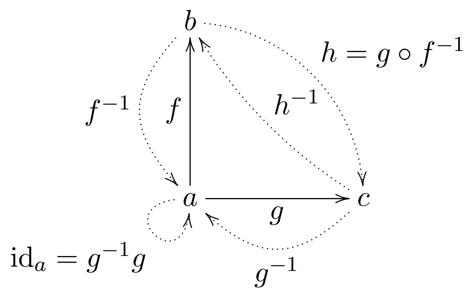


Рис. 2: пучок стрелок в элементарном группоиде

Вернемся теперь к группоиду, не обязательно элементарному и обратим внимание на следующий факт

Утверждение 2. *Для любых двух вершин a, $b \in \mathrm{Obj}(\Gamma)$ справедливо*

$$\hom(a, b) = f \cdot \hom(a, a), \tag{2}$$

где $f \cdot A \doteqdot \{fh \mid \forall h \in A\}$, и f — некоторая стрелка из a в b.

Доказательство. $\square$

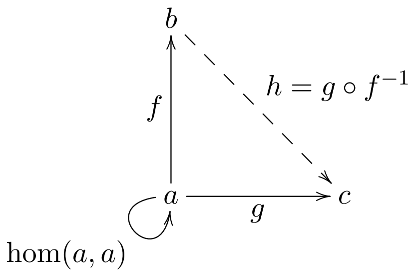
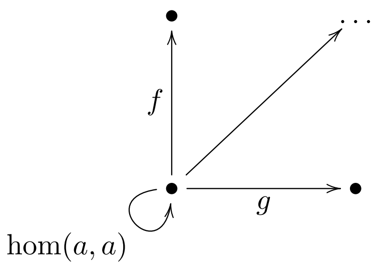


Рис. 3: группоид

Определение 4. назовем *пучком стрелок* исходящим из вершины a совокупность стрелок $f : a \to b$, $g : a \to c, \ldots$, по одной в каждую из остальных вершин $\mathrm{Obj}(\Gamma)/a$.

Определение 5. Назовем *остовом* группоида Γ с *основанием* a совокупность группы петель основания $\hom(a,a)$ и пучка исходящих из него стрелок (диаграмма (3)).



(3)

Ясно, что

Утверждение 3. *группоид однозначно определяется своим остовом.*

Доказательство. Действительно, пусть дан остов с основанием в вершине a, тогда множество объектов группоида определено и состовляет

$$\mathrm{Obj}(\Gamma) = a \cup \{b = \mathrm{codom}\, f : \text{по всем } f \text{ из пучка вершины } a\}.$$

Чтобы показать как остов определяет $\mathrm{Hom}(\Gamma)$ отметим следующие утверждения, справедливые в любом связном группоиде:

(a) для любых вершин a и b

$$\hom(a,b) = f \cdot \hom(a,a) = \{f \cdot h \mid \forall h \in \hom(a,a)\}, \tag{4}$$

где f — некоторая стрелка из a из b. Действительно, вложение правого множества в левое очевидно, ввиду аксиом композиции категории. Обратное вложение справедливо, т.к. для любого $g \in \hom(a,b)$ существует $h \in \hom(a,a)$, такое что $fh = g$, а именно $h = f^{-1}g$.

(b)

(c)

□

Логично задаться вопросом: как конкретно определяется характер на фунадментальной группе? Для его решения попробуем задать характер на группе вообще.

ii. Группа

Рассмотрим некоторую группу G, его фактор-группу G/G' по коммутанту G' и следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\chi"'] & G/G' \arrow[d, "\chi_{ab}"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{5}$$

Здесь $\tau : g \mapsto gG'$ — канонический гомоморфизм; χ, χ_{ab} — характеры групп G и G/G' соответственно.

Оказывается, что

Утверждение 4. *для любого $\chi : G \to \mathbb{C}$ существует и при том единственный характер $\chi_{ab} : G/G' \to \mathbb{C}$ такой, что диаграмма (5) коммутативна, т.е.*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau.$$

Доказательство. Действительно, потребуем для любого $g \in G$

$$\chi(g) = \chi_{ab} \circ \tau(g),$$

тогда

$$\chi(g) = \chi_{ab}(gG'),$$

и χ_{ab} задан на G/G' однозначно.

Более того χ_{ab} задан корректно, т.к. для $\forall f \in gG'$ $\exists h \in G' : f = gh$, но по определению коммутанта существуют такие a и b, что $h = aba^{-1}b^{-1}$, откуда $f = gaba^{-1}b^{-1}$, и

$$\chi(f) = \chi(gaba^{-1}b^{-1}) = \chi(g) + \chi(a) + \chi(b) - \chi(a) - \chi(b) = \chi(g),$$

то есть,

$$\chi(f) = \chi(g), \text{ для любых } f \text{ и } g \text{ из одного смежного по } G' \text{ класса.} \tag{6}$$

Очевидно, что χ_{ab} — характер:

$$\chi_{ab}(gfG') = \chi(gf) = \chi(g) + \chi(f) = \chi_{ab}(gG') + \chi_{ab}(fG').$$

$\square$

Замечание. Попутно доказано важное для понимания происходящего утверждение (6), показывающее, что факторизация группы по коммутанту G' разбивает ее также и на «области постоянства» характера (рис. 4). Становится ясно, что вместо рассмотрения характера χ на всей группе, достаточно пронаблюдать лишь за его «действием с точностью до G'», т.е. за определяемым им на G/G' характере χ_{ab}.

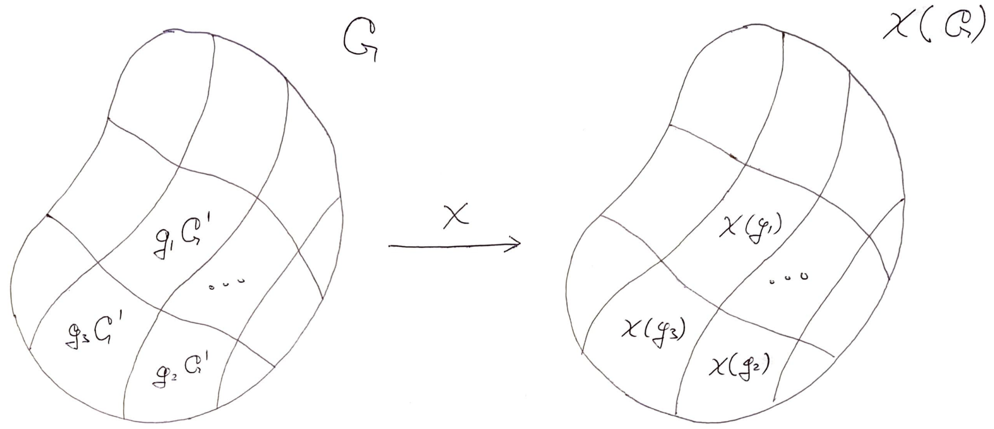


Рис. 4

Обратно,

Утверждение 5. *характер χ_{ab} однозначно задает χ, как*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau$$

Утверждение представляется очевидным.

Так, построено взаимооднозначное отображение $t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau = \chi$ между характерами группы и ее абелизации (т.е. фактор группы по коммутанту). Покажем, что отображение t является гомоморфизмом (а следовательно и изоморфизмом) линейных пространств.

Действительно, для любого $g \in G$

$$\begin{aligned} t(c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab})(g) = (c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab}) \circ \tau(g) = \\ = (c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab})(gG') = c_1\chi^1_{ab}(gG') + c_2\chi^2_{ab}(gG') = \\ = c_1\chi^1_{ab} \circ \tau(g) + c_2\chi^2_{ab} \circ \tau(g) = c_1 t(\chi^1_{ab})(g) + c_2 t(\chi^2_{ab})(g). \end{aligned}$$

Тем самым доказано следующее

Утверждение 6. *Пространства характеров группы G и ее абелизации G/G' изоморфны. Конкретно, изоморфизм имеет вид:*

$$t : G/G' \to G. \quad t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau, \tag{7}$$

где τ — канонический гомоморфизм $G \to G/G'$.

Последнее утверждение позволяет нам свести задачу изучения характеров группы G к рассмотрению характеров на G/G' — группе, абелевой по определению.

iii. Абелева группа

Итак, пусть некоторая группа A — абелева. Как задать на ней характер? Нетрудно получить ответ в случае *конечно-порожденных* групп.

Известно, что для таких групп справедливо разложение [1]

$$A \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n} \oplus \operatorname{Tor} A = \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Tor} A,$$

где $\mathbb{Z}^n$ — *свободная подгруппа*,
$\operatorname{Tor} A \doteqdot \{a \in A : ma = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ — *подгруппа кручения*, причем

$$\operatorname{Tor} A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s},$$

где $\mathbb{Z}_{p_i}$ — циклическая группа порядка p_i.

[1] см.[2] гл.9 §1

Отсюда

$$A = \{x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n + x_{n+1} f_1 + \ldots + x_{n+s} f_s \mid x_i \in \mathbb{Z}\}, \tag{8}$$

где $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис свободной подгруппы, $\{f_i\}_{i=1}^s$ – порождающие соответствующих циклических групп. Попутно введем обозначение $\lfloor \dim \rfloor A = n$.

Пусть теперь задан характер $\chi : A \to \mathbb{C}$, тогда для любого $a \in A$, с учетом (8) верно

$$\chi(a) = \chi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} f_1 + \ldots + \alpha_{n+s} f_s) = \\ = \alpha_1 \chi(e_1) + \ldots + \alpha_n \chi(e_n) + \alpha_{n+1} \chi(f_1) + \ldots + \alpha_{n+s} \chi(f_s),$$

но, так как порядок каждого элемента f_i конечен, то $\chi(f_i) = 0$ для всех $i = 1,..,s$, и

$$\chi(a) = \alpha_1 \chi(e_1) + \ldots + \alpha_n \chi(e_n). \tag{9}$$

Тем самым доказано

Утверждение 7. *Для конечно-порожденной группы A пространство характеров $X(A) = \{\chi : A \to \mathbb{C} : \chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)\}$ имеет размерность*

$$\dim X(A) = \lfloor \dim \rfloor A. \tag{10}$$

□

Список литературы

[1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.

[2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.