

Характер группоида

А. А. Владимиров

12.05.2022

Задача

Дан функтор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{Vec}$.

Найти $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \rightarrow \varkappa_1(\Gamma_2))$, если известно, что $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$, где V – пространство характеров, т.е. $V = \{\chi : \mathbf{Hom} \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$.

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора A_f на коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\varkappa} & V_1 \\ \downarrow f & & \downarrow A_f \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\varkappa} & V_2 \end{array}$$

Рис. 1: постановка задачи

Решение

і. Элементарный группоид

Сперва попытаемся задать характер не на группоидах¹ вообще:

Определение 1. [1] *Группоидом* называется категория, в которой любая стрелка обратима.

Но на группоидах простого вида.

Определение 2. *Элементарным группоидом* будем называть группоид для любых двух вершин a и b которого существует одна и притом только одна стрелка $f : a \rightarrow b$.

Тот факт, что такие группоиды существуют доказывается непосредственно проверкой аксиом и представляется очевидным.

¹здесь и далее под группоидами подразумеваются связные группоиды

ii. Группоид

Сперва введем операцию произведения множеств стрелок, корректную тогда и только тогда, когда все упорядоченные пары стрелок взятые из соответствующих множеств перемножаемы, итак

$$A \cdot B \doteq \{f \circ g \mid \forall f \in A, \forall g \in B\}, \quad (1)$$

в частности, если A — одноэлементное множество, имеем

$$f \cdot B \doteq \{f \circ h \mid \forall h \in B\}.$$

Теперь упомянем пару утверждений, справедливых для любого группоида (здесь и далее под группоидом будет подразумеваться связный группоид).

Общеизвестно, что в группоиде все группы петель изоморфны, иначе говоря верно

Утверждение 1. Для любых $a, b \in \text{Obj}(\Gamma)$

$$\text{hom}(b, b) = h \text{hom}(a, a) h^{-1}, \quad (2)$$

где h — произвольная стрелка из a в b .

Также имеет место

Утверждение 2. Для любых различных вершин $a, b \in \text{Obj}(\Gamma)$ справедливо

$$\text{hom}(a, b) = f \cdot \text{hom}(a, a), \quad (3)$$

где f — произвольная стрелка из a в b .

Доказательство. Вложение правого множества в левое справедливо в силу аксиом композиции в категории.

Обратное вложение имеет место, так как для любого $g \in \text{hom}(a, b)$ найдется $h \in \text{hom}(a, a)$ такое, что $g = fh$, а именно $h = f^{-1}g$. \square

Следствие. Пользуясь утверждениями 1, 2 или непосредственно, несложно доказать, что:

$$\begin{aligned} \text{hom}(a, b) &= \text{hom}(b, b) \cdot f, \quad f : a \rightarrow b \\ \text{hom}(a, b) \cdot \text{hom}(a, a) &= \text{hom}(b, b) \cdot \text{hom}(a, b) = \text{hom}(a, b), \\ \text{hom}(b, c) \cdot \text{hom}(a, b) &= \text{hom}(a, c). \end{aligned}$$

Утверждения 1, 2 и их следствия позволяют заключить, что по заданному группоиду можно построить категорию, с тем же набором вершин и стрелками вида $\text{hom}(a, b) : a \rightarrow b$, которая также является группоидом, иначе говоря можно ввести следующее

Определение 3. Пусть $G = \text{Fund } \Gamma$ — фундаментальная группа группоида. *Фактор-группоидом* или *факторизацией группоида Γ по фундаментальной группе*² называется группоид Γ/G такой, что

$$\begin{aligned} \text{Obj } \Gamma/G &= \text{Obj } \Gamma, \\ \text{Arr } \Gamma/G &= \{\text{hom}(a, b) : a \rightarrow b \mid \forall a, b \in \text{Obj}(\Gamma)\}. \end{aligned}$$

Подобно каноническому гомоморфизму отображающему группу в фактор-группу, можно определить *канонический функтор* ε переводящий Γ в Γ/G , а именно $\varepsilon : a \mapsto a$, $\varepsilon : (f : a \rightarrow b) \mapsto (\text{hom}(a, b) = \varepsilon(f) : a \rightarrow b)$.

Удобнее однако, зафиксировать некоторую вершину a группоида Γ , ее группу петель $\text{hom}(a, a) = A$, и *вектор стрелок*³ f, g, \dots . Тогда, в силу утверждений 1, 2 стрелки группоида Γ/G имеют вид fA, fAf^{-1}, gA, \dots , и отображение, осуществляемое функтором ε приобретает вид:

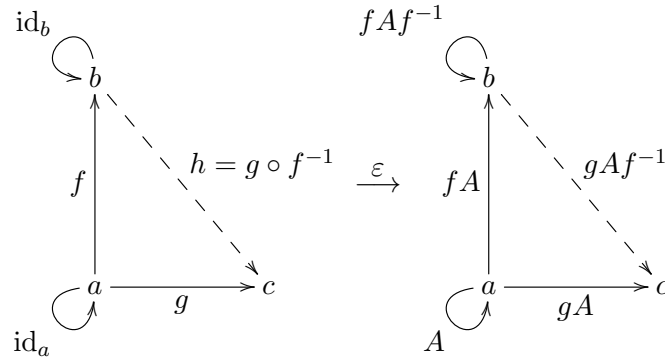


Рис. 2: канонический функтор

Пусть читателя не смущает произвол в выборе вершины a и вектора стрелок, ибо вне зависимости от него стрелки вида fA все равны между собой как множества и, в конечном счете, равны $\text{hom}(a, b)$. Преимущество выбранной записи состоит, во-первых, в ее наглядности, а во-вторых, в удобной полученной «алгебре» операций в фактор-группоиде. Так, пользуясь утверждениями 1,2, их следствиями и введенной операцией 1 перемножения множеств стрелок, поясним как получена диагональная стрелка gAf^{-1} на рис. 2:

$$\begin{aligned} \text{hom}(b, c) &= \text{hom}(a, c) \cdot \text{hom}(b, a) = (gA) \cdot (fA)^{-1} = (gA) \cdot (f^{-1} \text{hom}(b, b)) = \\ &= (gA) \cdot (f^{-1} fAf^{-1}) = (gA) \cdot (Af^{-1}) = gAAf^{-1} = gAf^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

² в действительности можно вводить факторизацию группоида по любой нормальной подгруппе фундаментальной группы

³ **Определение.** *Векром стрелок* вершины a группоида Γ называется множество состоящее из стрелок исходящих из вершины a по одной в каждую из прочих.

Попутно показано, как вычисляется $(fA)^{-1}$, а именно $(fA)^{-1} = Af^{-1}$.

Подчеркнем, что все операции в выкладке (4) *не являются формальными*, это непосредственно перемножение множеств по определению.

Заметим, что полученный группоид $\varepsilon(\Gamma)$ является *элементарным группоидом*, что ясно хотя бы потому, что для любых вершин a, b , множество $\text{hom}(a, b)$ существует в единственном экземпляре.

iii. Группа

Рассмотрим некоторую группу G , его фактор-группу G/G' по коммутанту G' и следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\tau} & G/G' \\ & \searrow \chi & \downarrow \chi_{ab} \\ & & \mathbb{C} \end{array} \quad (5)$$

Здесь $\tau : g \mapsto gG'$ — канонический гомоморфизм; χ, χ_{ab} — характеры групп G и G/G' соответственно.

Оказывается, что

Утверждение 3. *для любого $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ существует и при том единственный характер $\chi_{ab} : G/G' \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что диаграмма (5) коммутативна, т.е.*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau.$$

Доказательство. Действительно, потребуем для любого $g \in G$

$$\chi(g) = \chi_{ab} \circ \tau(g),$$

тогда

$$\chi(g) = \chi_{ab}(gG'),$$

и χ_{ab} задан на G/G' однозначно.

Более того χ_{ab} задан корректно, т.к. для $\forall f \in gG' \exists h \in G' : f = gh$, но по определению коммутанта существуют такие a и b , что $h = aba^{-1}b^{-1}$, откуда $f = gaba^{-1}b^{-1}$, и

$$\chi(f) = \chi(gaba^{-1}b^{-1}) = \chi(g) + \chi(a) + \chi(b) - \chi(a) - \chi(b) = \chi(g),$$

то есть,

$$\chi(f) = \chi(g), \text{ для любых } f \text{ и } g \text{ из одного смежного по } G' \text{ класса.} \quad (6)$$

Очевидно, что χ_{ab} — характер:

$$\chi_{ab}(gfG') = \chi(gf) = \chi(g) + \chi(f) = \chi_{ab}(gG') + \chi_{ab}(fG').$$

□

Замечание. Попутно доказано важное для понимания происходящего утверждение (6), показывающее, что факторизация группы по коммутанту G' разбивает ее также и на «области постоянства» характера (рис. 3). Становится ясно, что вместо рассмотрения характера χ на всей группе, достаточно пронаблюдать лишь за его «действием с точностью до G' », т.е. за определяемым им на G/G' характере χ_{ab} .

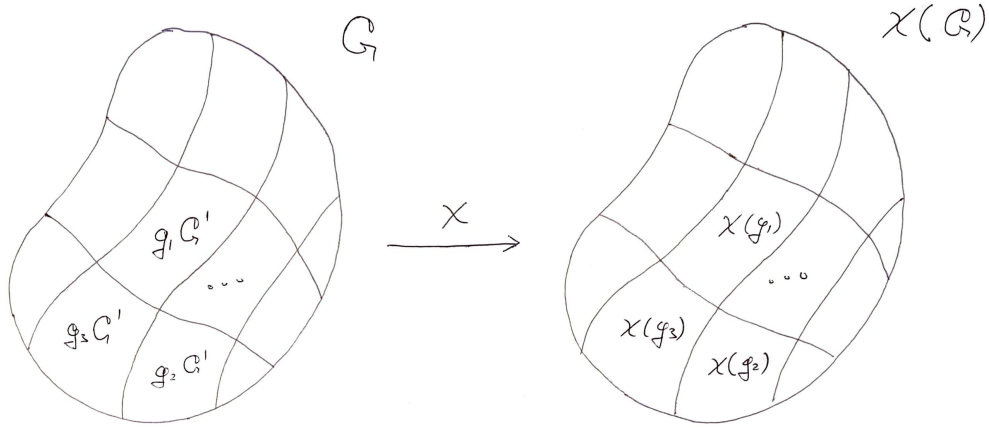


Рис. 3

Обратно,

Утверждение 4. *характер χ_{ab} однозначно задает χ , как*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau$$

Утверждение представляется очевидным.

Так, построено взаимоднозначное отображение $t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau = \chi$ между характерами группы и ее абелизации (т.е. фактор группы по коммутанту). Покажем, что отображение t является гомоморфизмом (а следовательно и изоморфизмом) линейных пространств.

Действительно, для любого $g \in G$

$$\begin{aligned} t(c_1 \chi_{ab}^1 + c_2 \chi_{ab}^2)(g) &= (c_1 \chi_{ab}^1 + c_2 \chi_{ab}^2) \circ \tau(g) = \\ &= (c_1 \chi_{ab}^1 + c_2 \chi_{ab}^2)(gG') = c_1 \chi_{ab}^1(gG') + c_2 \chi_{ab}^2(gG') = \\ &= c_1 \chi_{ab}^1 \circ \tau(g) + c_2 \chi_{ab}^2 \circ \tau(g) = c_1 t(\chi_{ab}^1)(g) + c_2 t(\chi_{ab}^2)(g). \end{aligned}$$

Тем самым доказано следующее

Утверждение 5. *Пространства характеров группы G и ее абелизации G/G' изоморфны. Конкретно, изоморфизм имеет вид:*

$$t : G/G' \rightarrow G. \quad t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau, \quad (7)$$

где τ — канонический гомоморфизм $G \rightarrow G/G'$.

Последнее утверждение позволяет нам свести задачу изучения характеров группы G к рассмотрению характеров на G/G' — группе, абелевой по определению.

iv. Абелева группа

Итак, пусть некоторая группа A — абелева. Как задать на ней характер? Нетрудно получить ответ в случае *конечно-порожденных* групп.

Известно, что для таких групп справедливо разложение ⁴

$$A \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n \oplus \text{Tor } A = \mathbb{Z}^n \oplus \text{Tor } A,$$

где \mathbb{Z}^n — свободная подгруппа,

$\text{Tor } A \doteq \{a \in A : ma = 0 \text{ для некоторого } m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ — подгруппа кручения, причем

$$\text{Tor } A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_s},$$

где \mathbb{Z}_{p_i} — циклическая группа порядка p_i .

Отсюда

$$A = \{x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + x_{n+1} f_1 + \dots + x_{n+s} f_s \mid x_i \in \mathbb{Z}\}, \quad (8)$$

где $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис свободной подгруппы, $\{f_i\}_{i=1}^s$ — порождающие соответствующих циклических групп. Попутно введем обозначение $[\dim] A = n$.

Пусть теперь задан характер $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$, тогда для любого $a \in A$, с учетом (8) верно

$$\begin{aligned} \chi(a) &= \chi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} f_1 + \dots + \alpha_{n+s} f_s) = \\ &= \alpha_1 \chi(e_1) + \dots + \alpha_n \chi(e_n) + \alpha_{n+1} \chi(f_1) + \dots + \alpha_{n+s} \chi(f_s), \end{aligned}$$

но, так как порядок каждого элемента f_i конечен, то $\chi(f_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, s$, и

$$\chi(a) = \alpha_1 \chi(e_1) + \dots + \alpha_n \chi(e_n). \quad (9)$$

Тем самым доказано

Утверждение 6. Для конечно-порожденной группы A пространство характеров $X(A) = \{\chi : A \rightarrow \mathbb{C} : \chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)\}$ имеет размерность

$$\dim X(A) = [\dim] A. \quad (10)$$

⁴см.[2] гл.9 §1

v. Что дальше?

Список литературы

- [1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.
- [2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.