

# Характер группоида

А. А. Владимиров

24.04.2022

*Задача.* Дан функтор  $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{Vec}$ .

Найти  $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \rightarrow \varkappa_1(\Gamma_2))$ , если известно, что  $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$ , где  $V$  – пространство характеров, т.е.  $V = \{\chi : \text{Hom } \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$ .

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора  $A_f$  на коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\varkappa} & V_1 \\ \downarrow f & & \downarrow A_f \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\varkappa} & V_2 \end{array}$$

*Решение.* Для начала отметим три утверждения: если в группоиде  $\Gamma$  известны

- (1)  $f : a \rightarrow b, \text{hom}(a, a)$ , то посредством изоморфизма  $\psi : \text{hom}(a, a) \rightarrow \text{hom}(b, b)$ , а именно  $\psi : h \mapsto fhf^{-1}$  однозначно определено  $\text{hom}(b, b)$ ;
- (2)  $f : a \rightarrow b, \text{hom}(a, a)$ , то однозначно определено  $\text{hom}(a, b)$ , так как для любого  $g \in \text{hom}(a, b)$  существует  $h \in \text{hom}(a, a)$ , такое что  $fh = g$ , а именно  $g = f \underbrace{f^{-1}g}_{= fh} = fh$ ;
- (3)  $f : a \rightarrow b, g : a \rightarrow c$ , то автоматически можно задать  $h : b \rightarrow c$ , а именно  $h = gf^{-1}$ .

Таким образом, если в связном группоиде  $\Gamma$  известны группа автоморфизмов  $\text{hom}(a, a)$  некоторой вершины  $a$  и по одной стрелке  $f : a \rightarrow b, g : a \rightarrow c, \dots$  из  $a$  в каждую из остальных вершин  $b, c, \dots$  то посредством утверждений (1)–(3) однозначно восстанавливается весь группоид  $\Gamma$ .

Рассмотрим теперь некоторый характер  $\chi : \text{Hom } \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ . Благодаря свойству  $\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)$  все вышесказанное в определенном смысле переносится и на характер  $\chi$ . Так если  $\chi$  задано на

- (1')  $f : a \rightarrow b, \text{hom}(a, a)$ , то изоморфизм  $\psi$  “один в один” переносит характер на  $\text{hom}(b, b)$ : если  $\chi(h) = \alpha$ , то  $\chi(\psi(h)) = \chi(fhf^{-1}) = \chi(f) + \chi(h) - \chi(f) = \chi(h)$ , и характер однозначно определен на  $\text{hom}(b, b)$ .

(2')  $f : a \rightarrow b$ ,  $\text{hom}(a, a)$ , то харктер однозначно продолжается на  $\text{hom}(a, b)$ , так как для любого  $g \in \text{hom}(a, b)$  существует  $h \in \text{hom}(a, a)$ , такое что  $fh = g$ , и следовательно  $\chi(g) = \chi(f) + \chi(h)$ .

(3')  $f : a \rightarrow b$ ,  $g : a \rightarrow c$ , то автоматически можно задать характер на некотором  $h : b \rightarrow c$ , а именно  $h = gf^{-1}$ , и  $\chi(h) = \chi(g) - \chi(f)$ .

Вновь имеем: если в связном группоиде  $\Gamma$  определить характер на группе автоморфизмов  $\text{hom}(a, a)$  некоторой вершины  $a$  и на стрелках  $f : a \rightarrow b$ ,  $g : a \rightarrow c$ ,.. из  $a$  (по одной в каждую из остальных вершин  $b, c, \dots$ ), то характер однозначно продолжается на все  $\text{Hom } \Gamma$ . Так, характер определяется своим действием на группе автоморфизмов произвольной вершины  $a^1$  и вектором значений  $s \in \mathbb{C}^{n-1}$  на стрелках из  $a$  (здесь  $n = |\text{Obj}(\Gamma)|$ ).

Остановимся на задании характера на некоторой группе  $G$ , в дальнейшем в качестве  $G$  будет рассматриваться фундаментальная группа группоида.

Как известно<sup>2</sup> разрешимая группа  $G$  раскладывается в прямую сумму абелевых групп

$$G = G/G' \oplus \dots \oplus G^{(n-1)}/G^{(n)},$$

где  $G^{(k+1)} = (G^{(k)})'$  — коммутант группы  $G^{(k)}$ .

Обозначим  $G^{(k)}/G^{(k+1)}$  как  $A_k$ . Так как  $A_k$  — абелева, справедливо ее разложение<sup>3</sup>

$$A_k = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n_k} \oplus \text{Tor } A_k = \mathbb{Z}^{n_k} \oplus \text{Tor } A_k.$$

□

## Список литературы

- [1] Маклейн С. «Категории для работающего математика». Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.
- [2] Винберг Э. Б. «Курс алгебры». Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.

---

<sup>1</sup>или на *фундаментальной группе*, что суть одно и то же,

<sup>2</sup>см. [2] гл.10 §2

<sup>3</sup>см.[2] гл.9 §1