Характер группоида

А. А. Владимиров

19.07.2022

Задача

Дан функтор $\varkappa : \mathbf{Cat}(\Gamma) \to \mathbf{Vec}$, каждому группоиду ставящий в соответсвтие линейное пространство его характеров —

$$X(\Gamma) = \{\chi : \operatorname{Arr}\Gamma \to \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}.$$

Задача состоит в отыскании действия $\varkappa$ на $\operatorname{Arr}\mathbf{Cat}(\Gamma)$, иными словами в нахождении линейного оператора $\chi(\varphi) : X(\Gamma_1) \to X(\Gamma_2)$ на коммутативной диаграмме 1.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \arrow[r, mapsto, dotted, "\varkappa"] \arrow[d, "\varphi"] & X(\Gamma_1) \arrow[d, "\chi(\varphi)"] \\
\Gamma_2 \arrow[r, mapsto, dotted, "\varkappa"] & X(\Gamma_2)
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: постановка задачи

Содержание

Решение

0.1 Структура группоида

Прежде чем исследовать характеры, обсудим сперва саму структуру группоида[1].

Определение 1. [1] *Группоидом* называется категория, любая стрелка которой обратима.

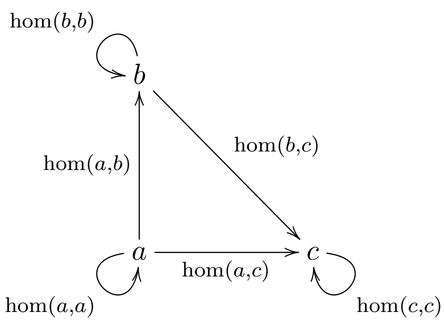

Рис. 2: группоид

Попытаемся найти в группоиде "что-то вроде базиса". В некотором группоиде Γ выберем произвольную вершину a и рассмотрим её группу петель G и *веер стрелок* $(e, f, g, \ldots)$.

Определение 2. *Веером стрелок* вершины a группоида Γ назовем множество стрелок $V = \{e = \mathrm{id}_a : a \to a,\ f : a \to b,\ g : a \to b, \ldots\}$, исходящих из вершины a по одной в каждую из вершин группоида, причем $e : a \to a$ есть тождественная стрелка.

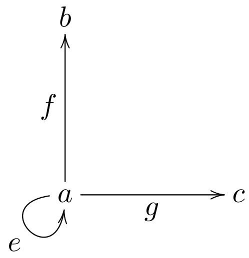

Рис. 3: веер

Возникает вопрос: как соотносятся с выделенным "базисом" остальные стрелки группоида? Ответ на него дает следующая простая лемма.

[1]здесь и далее под группоидами подразумеваются связные группоиды

Лемма 1. *Для любой стрелки $v : b \to c$ группоида Γ существуют, и притом единственные $f, g \in V$ и $h \in G$, такие что*

$$v = ghf^{-1}. \tag{1}$$

Доказательство. Действительно, поскольку $v : b \to c$, и $h : a \to a$, стрелки g и f обязаны действовать из a в c, и из a в b соответственно, а таковые имеются в V в единственном экземпляре.

Раз теперь известны v, g и f, существование и единственность стрелки $h \in G$ следует напрямую алгебраически из выражения (1), а именно $h = g^{-1}vf$. □

Иными словами, мы построили биекцию

$$\iota : \mathrm{Arr}(\Gamma) \to V \times G \times V \tag{2}$$

— между стрелками и множеством троек вида ghf^{-1}.

Располагая таким построением, мы опустим кавычки говоря о (G, V) как о *базисе* группоида Γ, а под *разложением* по этому базису стрелки или множества стрелок с математической точки зрения будем подразумевать образ соответствующего множества при отображении ι.

Перебирая и фиксируя различные пары (g, f) можно получить разложение группоида по базису (G, V), о чем и говорит

Следствие 1. (о представлении hom-множеств)

a. $\hom(b, c) = gGf^{-1}$

b. $\hom(a, b) = fGe^{-1} = fG$,

c. $\hom(b, a) = eGf^{-1} = Gf^{-1}$,

d. $\hom(b, b) = fGf^{-1}$, [2]

e. $\hom(a, a) = eGe^{-1} = G$,

где $f : a \to b$, $g : a \to c$, $G = \hom(a, a)$.

Полезно также отедельно выделить частный случай.

Определение 3. *Простым группоидом* назовем группоид, фундаментальная группа которого тривиальна.

Для которого, ввиду $G = \{\mathrm{id}_a\}$ следствие 1 принимает вид:

Следствие 2. В простом группоиде любая стрелка $v : b \to c$, раскладывается в базисе V как

$$v = gf^{-1},$$

где $f : a \to b$, $g : a \to c$.

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[loop above, "fGf^{-1}"] \arrow[rd, "gGf^{-1}"] & \\
a \arrow[u, "fG"] \arrow[r, "gG"'] \arrow[loop below, "G"'] & c \arrow[loop below, "gGg^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Рис. 4: фактор-группоид

Вернемся к группоиду Γ и перерисуем диаграмму 2 с учетом следствия 1 (рис. 4). Диаграмма 4 напоминает некую “факторизацию”, и действительно, если под стрелками на диаграмме понимать не hom-множества, а просто стрелки, то мы получим диаграмму *фактор-группоида* Γ/Φ_Γ[3] по фундаментальной группе Φ_Γ, где названия стрелок соответствуют прообразам факторизации. Мы не будем здесь строго вводить понятие фактор-группоида, ибо в нашем случае он предствляет из себя всего-навсего *простой группоид* с тем же набором объектов что и исходный.

При виде диаграммы 4 кажется само собой разумеющимся

Утверждение 1 (о разложении группоида)**.**

$$\Gamma \simeq \Gamma/\Phi_\Gamma \times \Phi_\Gamma. \tag{3}$$

Перед доказательством утверждения 1 напомним тот факт, что *группа является категорией — частным случаем группоида с одним объектом*, и

Определение 4. [1] *Произведением* двух данных категорий B и C, называется категория $B \times C$, объекты которой — пары (b, c) объектов b из B и c из C; стрелки $(b, c) \to (b', c')$ — пары (f, g) стрелок $f : b \to b'$ и $g : c \to c'$, а композиция двух таких стрелок

$$(b, c) \xrightarrow{(f,g)} (b', c') \xrightarrow{(f',g')} (b'', c'')$$

определяется в терминах композиции в категориях B и C по формуле

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g).$$

[2]Это классическое утверждение об изоморфности всех групп петель в группоиде (которое и позволяет ввести такой объект как фундаментальная группа)

[3]Пользуясь стандартным определением факторизации категории[1], подобно тому как это делается в обыкновенных группах, можно ввести факторизацию группоида по любой нормальной подгруппе фундаментальной группы, в том числе и по ней самой.

Доказательство. Построим явно изоморфизм — функтор $i : \Gamma \to \Gamma/\Phi_\Gamma \times \Phi_\Gamma$.

Для этого выделим некоторый базис ($G = \hom(a, a), V$ — веер a) группоида Γ, и для удобства отождествим Φ_Γ с G, а веер вершины a в Γ/Φ_Γ с V.

Тогда i зададим следующим образом:

на объектах: $i : d \mapsto (d, \theta)$;

на стрелках: $i : v \mapsto (gf^{-1}, h)$, где $(g, h, f^{-1}) = \iota(v)$.

Биективность и функторность i очевидна вследствие определения биекции ι, леммы 1 и ее следствий. Впрочем, в этом также можно наглядно убедится взглянув на схему, изображенную на рис. 5.

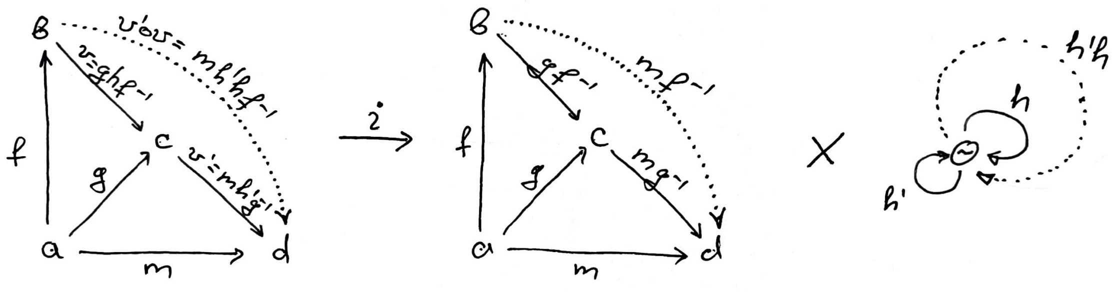

Рис. 5: изоморфизм

□

Теперь мы готовы перейти к обсуждению характера.

0.2 Пространство характеров

i. Группоид

Нам потребуется следующая очевидная

Лемма 2. *Для любых двух группоидов* Γ_1 *и* Γ_2 *справедливо*

$$X(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \simeq X(\Gamma_1) \oplus X(\Gamma_2).$$

Доказательство. В самом деле, для любого $\chi : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \to \mathbb{C}$, существуют единственные $\chi_1 : \Gamma_1 \to \mathbb{C}$, $\chi_2 : \Gamma_2 \to \mathbb{C}$ такие, что диаграмма (рис. 6) коммутативна.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \times \Gamma_2 \arrow[r, "\chi_b \times \chi_c"] \arrow[d, "\chi_a"'] & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \arrow[dl, "+"] \\
\mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Рис. 6

□

Доказанная лемма вместе с утверждением 1 дают важное

Утверждение 2 (о разложении характера группоида)**.**

$$X(\Gamma) \simeq X(\Gamma/\Phi_\Gamma) \oplus X(\Phi_\Gamma).$$

Которое позволяет нам вместо рассмотрения характера на группоиде целиком, отдельно изучить характеры *простого группоида* (Γ/Φ_Γ) и группы (Φ_Γ).

Первый случай достаточно тривиален. Действительно, как уже было показано (следствие 2), все стрелки простого группоида можно однозначно разложить $v = gf^{-1}$ по некоторому вееру V, что ввиду свойств характера дает его выражение через значения на базисе $\chi(v) = \chi(g) - \chi(f)$.

Отсюда ясно, что характер простого группоида однозначно определен $n - 1$[4] числом — его значениями на стрелках некоторого веера. Иначе говоря справедливо

Утверждение 3. *Для простого группоида* Γ

$$X(\Gamma) \simeq \mathbb{C}^{n-1},$$

где n *— число объектов* Γ.

Случай группы мы обудим в следующих параграфах.

[4] значение на тождественной стрелке автоматически задано нулем

ii. Группа

Рассмотрим некоторую группу G, ее фактор-группу G/G' по коммутанту G' и следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\chi"'] & G/G' \arrow[d, "\chi_{ab}"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Рис. 7

Здесь $\tau : g \mapsto gG'$ — канонический гомоморфизм; χ, χ_{ab} — характеры групп G и G/G' соответственно.

Оказывается, что

Лемма 3. *Для любых $f, g \in G$, таких что $f = g \mod G'$:*

$$\chi(f) = \chi(g).$$

Доказательство. Действительно, в условиях леммы существует $h \in G'$, такой что $f = gh$, но по определению коммутанта существуют такие a и $b \in G'$, что
$h = aba^{-1}b^{-1}$, откуда $f = gaba^{-1}b^{-1}$, и

$$\chi(f) = \chi(gaba^{-1}b^{-1}) = \chi(g) + \chi(a) + \chi(b) - \chi(a) - \chi(b) = \chi(g).$$

$\square$

Иными словами доказано, что факторизация группы по коммутанту G' разбивает ее на области постоянства характера (рис. 8). А значит вместо рассмотрения характера χ на всей группе, достаточно пронаблюдать лишь за его «действием с точностью до G'», т.е. за некоторым характером χ_{ab} на G/G'.

Так, введем, очевидно инъективный, гомоморфизм $t : X(G/G') \to X(G)$ пространств характеров:

$$t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau = \chi. \tag{4}$$

Его сюръективность вытекает напрямую из леммы 3, ибо для любого $\chi : G \to \mathbb{C}$ корректно задан χ_{ab}:

$$\chi_{ab}(gG') = \chi(g),$$

который удовлетворяет

$$\chi_{ab} \circ \tau = \chi.$$

Тем самым доказано

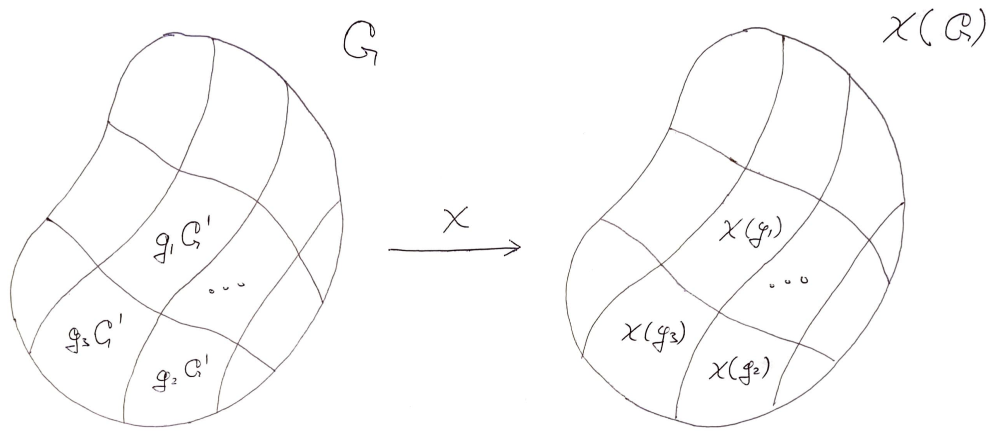

Рис. 8

Утверждение 4.

$$X(G) \simeq X(G/G')$$

Позволяющее свести характер группы к характеру ее абелизации, что и приводит нас к следующему параграфу.

iii. Абелева группа

Итак, пусть некоторая группа A — абелева. Известно, что для *конечно-порожденных* абелевых групп справедливо разложение ([2] гл.9 §1)

$$A = \lfloor A \rfloor \oplus \operatorname{Tor} A, \tag{5}$$

где $\lfloor A \rfloor \simeq \mathbb{Z}^n$ — *свободная подгруппа*, $\operatorname{Tor} A$ — *подгруппа кручения*, т.е.

$$\operatorname{Tor} A \doteqdot \{a \in A : ma = 0 \text{ для некоторого } m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}. \tag{6}$$

Из разложения (5) и леммы 2 следует, что

$$X(A) \simeq X(\lfloor A \rfloor) \oplus X(\operatorname{Tor} A). \tag{7}$$

Но из определения группы кручения (6) и свойств характера вытекает, что $X(\operatorname{Tor} A)$ тривиально. Таким образом, получим

Утверждение 5. *Для конечно-порожденной абелевой группы*

$$X(A) \simeq X(\lfloor A \rfloor) \simeq \mathbb{C}^m,$$

где $m = \dim\lfloor A \rfloor$.

iv. Итог

Доказанные утверждения 1–5 позволяют упростить рассмотрение пространства характеров группоида. Утверждение 2 сводит $X(\Gamma)$ к прямой сумме пространств характеров фактор-группоида и фундаментальной группы

$$X(\Gamma) \simeq X(\Gamma/\Phi_\Gamma) \oplus X(\Phi_\Gamma).$$

Первое из которых (утверждение 3) суть есть векторное пространство известной размерности

$$X(\Gamma/\Phi_\Gamma) \simeq \mathbb{C}^{n-1}.$$

Второе сводится к пространству на абелизации, оно, в свою очередь, к пространству на свободной подгруппе, которое также суть есть векторное пространство известной размерности (утверждения 4, 5)

$$X(\Phi_\Gamma) \simeq X(\Phi_\Gamma/\Phi'_\Gamma) \simeq X(\lfloor \Phi_\Gamma/\Phi'_\Gamma \rfloor) \simeq \mathbb{C}^m.$$

Тем самым справедлива

Теорема 1. *(о характере группоида)*

$$X(\Gamma) \simeq X(\Gamma/\Phi_\Gamma) \oplus X(\lfloor \Phi_\Gamma/\Phi'_\Gamma \rfloor) \simeq \mathbb{C}^{(n-1)+m},$$

где $n = |\operatorname{Obj}\Gamma|$, $m = \dim\lfloor \Phi_\Gamma/\Phi'_\Gamma \rfloor$.

0.3 Преобразование характеров

i. Что дальше?

Список литературы

[1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.

[2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.