Характер группоида

А. А. Владимиров

16.06.2022

Задача

Дан функтор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \to \mathbf{Vec}$.
Найти $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \to \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \to \varkappa_1(\Gamma_2))$, если известно, что $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$, где V – пространство характеров, т.е. $V = \{\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$.

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора A_f на коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "f"] & V_1 \arrow[d, "A_f"] \\ \Gamma_2 \arrow[r, "\varkappa"] & V_2 \end{tikzcd}$$

Рис. 1: постановка задачи

Решение

Содержание

0.1 Характер группоида

i. Группоид

Сперва обсудим структуру группоида[1] “в целом”.

Определение 1. [1] *Группоидом* называется категория, в которой любая стрелка обратима.

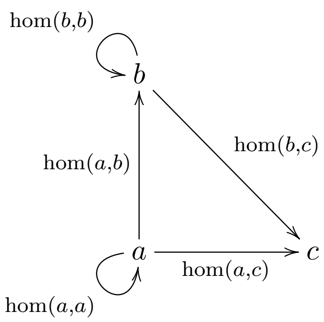

Рис. 2: группоид

Для этого попытаемся найти в группоиде “что-то вроде базиса”. В некотором группоиде Γ выберем произвольную вершину a и рассмотрим её группу петель G и *веер стрелок* $(f, g, \ldots)$.

Определение 2. *Веером стрелок* вершины a группоида Γ называется множество стрелок исходящих из вершины a по одной в каждую из прочих.

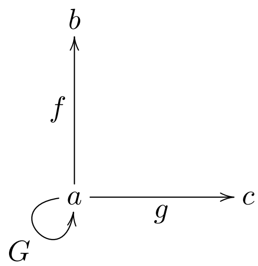

Рис. 3: группа и веер

Возникает вопрос: как соотносятся с выделенным “базисом” остальные стрелки группоида? Ответ на него дает следующая простая лемма.

---
[1] здесь и далее под группоидами подразумеваются связные группоиды

Лемма 1. *Для любой пары вершин b и c*

$$\hom(b,c) = gGf^{-1},$$

где $f : a \to b$, $g : a \to c$, $G = \hom(a,a)$.

Доказательство. Действительно, вложение gGf^{-1} в $\hom(b,c)$ очевидно ввиду аксиом композиции в категории.

Обратное вложение доказывается непосредственно: для любой $p \in \hom(b,c)$ существует $h \in G$, такое, что $p = ghf^{-1}$, а именно $h = g^{-1}pf$. $\square$

Доказанная лемма дает серию удобных следствий.

Следствие 1. для любой вершины b

a. $\hom(a,b) = fG$,

b. $\hom(b,a) = Gf^{-1}$,

c. $\hom(b,b) = fGf^{-1}$, [2]

где $G = \hom(a,a)$ и $f : a \to b$.

Полезно также отедельно выделить частный случай

Определение 3. *Простым группоидом* назовем группоид, фундаментальная группа которого тривиальна.

Для которого верно очевидное ($G = \mathrm{id}_a$)

Следствие 2. В простом группоиде для любой стрелки $h : b \to c$ (единственной стрелки из b в c по определению!) справедливо

$$h = gf^{-1},$$

где $f : a \to b$, $g : a \to c$.

Теперь ясно, что наш "базис" $\langle G, (f, g, \ldots) \rangle$, действительно задает весь группоид — все стрелки выражаются через него. Наглядно это можно изобразить переходом от рис. 2 к рис. 4. Последний "очень напоминает" некую факторизацию, и действительно, если диаграмму 4 рассматривать не как схематическое изображение группоида, в котором под стрелками подразумеваются hom-множества (выраженные в данном случае через "базис"), но просто стрелки с названиями типа gG, gGf^{-1} и т.д., то мы получим диаграмму *факторизации группоида по его фундаментальной группе.*

[2]Это классическое утверждение об изоморфности всех групп петель в группоиде (именно оно позволяет ввести такой объект как фундаментальная группа)

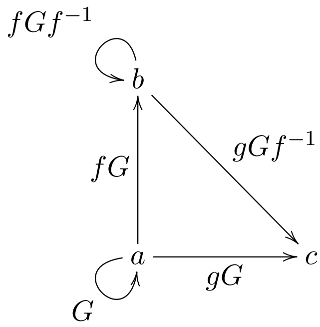

Рис. 4: фактор-группоид

Фактор-группоид по фундаментальной группе[3] мы будем обозначать через Γ/Φ_Γ.

Наконец, при виде диаграммы 4 интуитивно напрашивается вывод:

Утверждение 1.

$$\Phi_\Gamma \times \Gamma/\Phi_\Gamma \simeq \Gamma.$$

Здесь Γ — группоид, Φ_Γ — его фундаментальная группа, Γ/Φ_Γ — фактор-группоид по фундаментальной группе, "$\times$" и "$\simeq$" — произведение и изоморфизм категорий соответственно.

Доказательство. В качестве доказательства данного факта явно построим изоморфизм — функтор $\iota : \Phi_\Gamma \times \Gamma/\Phi_\Gamma \to \Gamma$

□

[3] Основываясь на классическом определении[1] фактор-категории, где факторизация проводится исходя из заданного бинарного отношения, действительно можно ввести факторизацию группоида по нормальным подгруппам фундаментальной группы (бинарное отношение получается естественным и тривиальным образом), в частности по ней самой. Мы не будем вводить соответствующие определения, поскольку в нашем случае (факторизация по всей фундаментальной группе) результирующий объект есть всего-навсего *простой группоид* с тем же набором объектов.

ii. Группа

Рассмотрим некоторую группу G, его фактор-группу G/G' по коммутанту G' и следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\chi"'] & G/G' \arrow[d, "\chi_{ab}"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Рис. 5

Здесь $\tau : g \mapsto gG'$ — канонический гомоморфизм; χ, χ_{ab} — характеры групп G и G/G' соответственно.

Оказывается, что

Утверждение 2. *для любого* $\chi : G \to \mathbb{C}$ *существует и при том единственный характер* $\chi_{ab} : G/G' \to \mathbb{C}$ *такой, что диаграмма* (5) *коммутативна, т.е.*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau.$$

Доказательство. Действительно, потребуем для любого $g \in G$

$$\chi(g) = \chi_{ab} \circ \tau(g),$$

тогда

$$\chi(g) = \chi_{ab}(gG'),$$

и χ_{ab} задан на G/G' однозначно.

Более того χ_{ab} задан корректно, т.к. для $\forall f \in gG'\ \exists h \in G' : f = gh$, но по определению коммутанта существуют такие a и b, что $h = aba^{-1}b^{-1}$, откуда $f = gaba^{-1}b^{-1}$, и

$$\chi(f) = \chi(gaba^{-1}b^{-1}) = \chi(g) + \chi(a) + \chi(b) - \chi(a) - \chi(b) = \chi(g),$$

то есть,

$$\chi(f) = \chi(g), \text{ для любых } f \text{ и } g \text{ из одного смежного по } G' \text{ класса.} \tag{1}$$

Очевидно, что χ_{ab} — характер:

$$\chi_{ab}(gfG') = \chi(gf) = \chi(g) + \chi(f) = \chi_{ab}(gG') + \chi_{ab}(fG').$$

$\square$

Замечание. Попутно доказано важное для понимания происходящего утверждение (1), показывающее, что факторизация группы по коммутанту G' разбивает ее также и на «области постоянства» характера (рис. 6). Становится ясно, что вместо рассмотрения характера χ на всей группе, достаточно пронаблюдать лишь за его «действием с точностью до G'», т.е. за определяемым им на G/G' характере χ_{ab}.

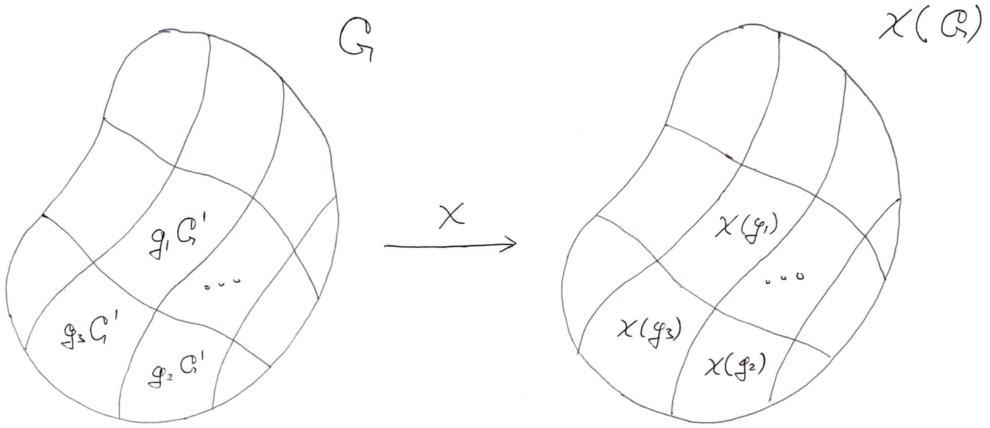

Рис. 6

Обратно,

Утверждение 3. *характер χ_{ab} однозначно задает χ, как*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau$$

Утверждение представляется очевидным.

Так, построено взаимооднозначное отображение $t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau = \chi$ между характерами группы и ее абелизации (т.е. фактор группы по коммутанту). Покажем, что отображение t является гомоморфизмом (а следовательно и изоморфизмом) линейных пространств.

Действительно, для любого $g \in G$

$$\begin{aligned} t(c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab})(g) = (c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab}) \circ \tau(g) = \\ = (c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab})(gG') = c_1\chi^1_{ab}(gG') + c_2\chi^2_{ab}(gG') = \\ = c_1\chi^1_{ab} \circ \tau(g) + c_2\chi^2_{ab} \circ \tau(g) = c_1 t(\chi^1_{ab})(g) + c_2 t(\chi^2_{ab})(g). \end{aligned}$$

Тем самым доказано следующее

Утверждение 4. *Пространства характеров группы G и ее абелизации G/G' изоморфны. Конкретно, изоморфизм имеет вид:*

$$t : G/G' \to G. \quad t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau, \tag{2}$$

где τ — канонический гомоморфизм $G \to G/G'$.

Последнее утверждение позволяет нам свести задачу изучения характеров группы G к рассмотрению характеров на G/G' — группе, абелевой по определению.

iii. Абелева группа

Итак, пусть некоторая группа A — абелева. Как задать на ней характер? Нетрудно получить ответ в случае *конечно-порожденных* групп.

Известно, что для таких групп справедливо разложение [4]

$$A \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n} \oplus \operatorname{Tor} A = \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Tor} A,$$

где $\mathbb{Z}^n$ — *свободная подгруппа*,
$\operatorname{Tor} A \doteqdot \{a \in A : ma = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ — *подгруппа кручения*, причем

$$\operatorname{Tor} A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s},$$

где $\mathbb{Z}_{p_i}$ — циклическая группа порядка p_i.

Отсюда

$$A = \{x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n + x_{n+1} f_1 + \ldots + x_{n+s} f_s \mid x_i \in \mathbb{Z}\}, \tag{3}$$

где $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис свободной подгруппы, $\{f_i\}_{i=1}^s$ – порождающие соответствующих циклических групп. Попутно введем обозначение $\lfloor \dim \rfloor A = n$.

Пусть теперь задан характер $\chi : A \to \mathbb{C}$, тогда для любого $a \in A$, с учетом (3) верно

$$\begin{aligned} \chi(a) = \chi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} f_1 + \ldots + \alpha_{n+s} f_s) = \\ = \alpha_1 \chi(e_1) + \ldots + \alpha_n \chi(e_n) + \alpha_{n+1} \chi(f_1) + \ldots + \alpha_{n+s} \chi(f_s), \end{aligned}$$

но, так как порядок каждого элемента f_i конечен, то $\chi(f_i) = 0$ для всех $i = 1,.., s$, и

$$\chi(a) = \alpha_1 \chi(e_1) + \ldots + \alpha_n \chi(e_n). \tag{4}$$

Тем самым доказано

Утверждение 5. *Для конечно-порожденной группы A пространство характеров $X(A) = \{\chi : A \to \mathbb{C} : \chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)\}$ имеет размерность*

$$\dim X(A) = \lfloor \dim \rfloor A. \tag{5}$$

[4] см.[2] гл.9 §1

0.2 Преобразование характеров

i. Что дальше?

Список литературы

[1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.

[2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.