Характер группоида

А. А. Владимиров

24.04.2022

Задача. Дан функтор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \to \mathbf{Vec}$.
Найти $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \to \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \to \varkappa_1(\Gamma_2))$, если известно, что $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$, где V – пространство характеров, т.е. $V = \{\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$.

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора A_f на коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\varkappa} & V_1 \\ \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle A_f} \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\varkappa} & V_2 \end{array}$$

Решение. Для начала отметим три утверждения: если в группоиде Γ известны

(1) $f : a \to b$, $\hom(a, a)$, то посредством изоморфизма $\psi : \hom(a, a) \to \hom(b, b)$, а именно $\psi : h \mapsto fhf^{-1}$ однозначно определено $\hom(b, b)$;

(2) $f : a \to b$, $\hom(a, a)$, то однозначно определено $\hom(a, b)$, так как для любого $g \in \hom(a, b)$ существует $h \in \hom(a, a)$, такое что $fh = g$, а именно $g = f\underbrace{f^{-1}g} = fh$;

(3) $f : a \to b$, $g : a \to c$, то автоматически можно задать $h : b \to c$, а именно $h = gf^{-1}$.

Таким образом, если в связном группоиде Γ известны группа автоморфизмов $\hom(a, a)$ некоторой вершины a и по одной стрелке $f : a \to b$, $g : a \to c$,.. из a в каждую из остальных вершин b, c,.. то посредством утверджений (1)–(3) однозначно восстанавливается весь группоид Γ.

Рассмотрим теперь некоторый характер $\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C}$. Благодаря свойству $\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)$ все вышесказанное в определенном смысле переносится и на характер χ. Так если χ задано на

(1') $f : a \to b$, $\hom(a, a)$, то изоморфизм ψ "один в один" переносит харакатер на $\hom(b, b)$: если $\chi(h) = \alpha$, то $\chi(\psi(h)) = \chi(fhf^{-1}) = \chi(f) + \chi(h) - \chi(f) = \chi(h)$, и характер однозначно определен на $\hom(b, b)$.

(2') $f : a \to b$, $\hom(a,a)$, то харктер однозначно продолжается на $\hom(a,b)$, так как для любого $g \in \hom(a,b)$ существует $h \in \hom(a,a)$, такое что $fh = g$, и следовательно $\chi(g) = \chi(f) + \chi(h)$.

(3') $f : a \to b$, $g : a \to c$, то автоматически можно задать характер на некотором $h : b \to c$, а именно $h = gf^{-1}$, и $\chi(h) = \chi(g) - \chi(f)$.

Вновь имеем: если в связном группоиде Γ определить характер на группе автоморфизмов $\hom(a,a)$ некоторой вершины a и на стрелках $f : a \to b$, $g : a \to c$,.. из a (по одной в каждую из остальных вершин b, c,..), то характер однозначно продолжается на все $\operatorname{Hom}\Gamma$. Так, характер определяется своим действием на группе автоморфизмов произвольной вершины a[1] и вектором значений $s \in \mathbb{C}^{n-1}$ на стрелках из a (здесь $n = |Obj(\Gamma)|$).

Остановимся на задании характера на некоторой группе G, в дальнейшем в качестве G будет рассматриваться фундаментальная группа группоида.

Как известно[2] разрешимая группа G раскладывается в прямую сумму абелевых групп

$$G \simeq G/G' \oplus \ldots \oplus G^{(n-1)}/G^{(n)}, \tag{1}$$

где $G^{(k+1)} = (G^{(k)})'$ — коммутант группы $G^{(k)}$.

Для конечно порожденной абелевой группы A справедливо разложение[3]

$$A \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n} \oplus \operatorname{Tor} A = \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Tor} A,$$

где $\operatorname{Tor} A \doteqdot \{a \in A : ma = 0 \text{ для некоторого } m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ — *подгруппа кручения.* Более того

$$\operatorname{Tor} A = \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m} -$$

— сумма примарных подгруп.

Таким образом, A представляет собой совокупность всех линейных комбинаций

$$k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n + k_{n+1} t_1 + \ldots + k_{n+m} t_m \quad (k_i \in \mathbb{Z}),$$

где $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис свободной подргуппы, $(t_1, \ldots, t_m)$ — порождающие примарных подгрупп.

Так, чтобы задать характер χ на группе A достаточно определить его значение на $(e_1, \ldots, e_n)$, $(t_1, \ldots, t_m)$. Впрочем, $\chi(t_i)$ заведомо равно нулю, так как

$$\begin{gathered}
(c_i + 1)t_i = t_i, \\
\chi((c_i + 1)t_i) = \chi(t_i), \\
(c_i + 1)\chi(t_i) = \chi(t_i), \\
c_i \chi(t_i) = 0, \\
\chi(t_i) = 0,
\end{gathered}$$

[1] или на *фундаментальной группе*, что суть одно и то же,

[2] см. [2] гл.10 §2

[3] см.[2] гл.9 §1

где $c_i > 0$ — порядок примарной подгруппы, порожденной t_i. Отсюда, достаточно задать характер лишь на $(e_1, \ldots, e_n)$ и он будет однозначно определен на всем A.

$\square$

Список литературы

[1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.

[2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.