Характер группоида

А. А. Владимиров

16.06.2022

Задача

Дан функтор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \to \mathbf{Vec}$.
Найти $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \to \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \to \varkappa_1(\Gamma_2))$, если известно, что $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$, где V – пространство характеров, т.е. $V = \{\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$.

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора A_f на коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "f"] & V_1 \arrow[d, "A_f"] \\
\Gamma_2 \arrow[r, "\varkappa"] & V_2
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: постановка задачи

Решение

Содержание

0.1 Характер группоида

i. Группоид

Обсудим сперва структуру группоида общего вида[1]

Определение 1. [1] *Группоидом* называется категория, в которой любая стрелка обратима.

Для этого введем операцию произведения множеств стрелок, корректную тогда и только тогда, когда все упорядоченные пары стрелок взятые из соответствующих множеств перемножаемы, итак

$$A \cdot B \doteqdot \{f \circ g \mid \forall f \in A, \forall g \in B\}, \tag{1}$$

в частности, если A — одноэлементное множество, имеем

$$f \cdot B \doteqdot \{f \circ h \mid \forall g \in B\}.$$

Теперь упомянем пару утверждений, справдливых для любого группоида.

Общеизвестно, что в группоиде все группы петель изоморфны, иначе говоря верно

Утверждение 1. *Для любых a, $b \in \mathrm{Obj}(\Gamma)$*

$$\hom(b, b) = h \hom(a, a) h^{-1}, \tag{2}$$

где h — произвольная стрелка из a в b.

Также имеет место

Утверждение 2. *Для любых различных вершин a, $b \in \mathrm{Obj}(\Gamma)$ справедливо*

$$\hom(a, b) = f \cdot \hom(a, a), \tag{3}$$

где f — произвольная стрелка из a в b.

Доказательство. Вложение правого множества в левое справедливо в силу аксиом композиции в категории.

Обратное вложение имеет место, так как для любого $g \in \hom(a, b)$ найдется $h \in \hom(a, a)$ такое, что $g = fh$, а именно $h = f^{-1}h$. □

Следствие. Пользуясь утверждениями 1, 2 или непосредственно, несложно доказать, что:

$$\hom(a, b) = \hom(b, b) \cdot f, \quad f : a \to b$$
$$\hom(a, b) \cdot \hom(a, a) = \hom(b, b) \cdot \hom(a, b) = \hom(a, b),$$
$$\hom(b, c) \cdot \hom(a, b) = \hom(a, c).$$

[1]здесь и далее под группоидами подразумеваются связные группоиды

Утверждения 1, 2 и их следствия позволяют заключить, что по заданному группоиду можно построить категорию, с тем же набором вершин и стрелками вида $\hom(a,b) : a \to b$, которая также является группоидом, иначе говоря можно ввести следующее

Определение 2. Пусть $G = \operatorname{Fund}\Gamma$ — фундаментальная группа группоида. *Фактор-группоидом* или *факторизацией группоида* Γ *по фундаментальной группе*[2] называется группоид Γ/G такой, что

$$\operatorname{Obj}\Gamma/G = \operatorname{Obj}\Gamma,$$
$$\operatorname{Arr}\Gamma/G = \{\hom(a,b) : a \to b \mid \forall a, b \in \operatorname{Obj}(\Gamma)\}.$$

Подобно каноническому гомоморфизму отоброжающему группу в фактор-группу, можно опрделить *канонический функтор* ε переводящий Γ в Γ/G, а именно $\varepsilon : a \mapsto a$, $\varepsilon : (f : a \to b) \mapsto (\hom(a,b) = \varepsilon(f) : a \to b)$.

Удобнее однако, зафиксировать некоторую вершину a группоида Γ, ее группу петель $\hom(a,a) = A$, и *веер стрелок* [3] $f, g, \ldots$ Тогда, в силу утверждений 1, 2 стрелки группоида Γ/G имеют вид fA, fAf^{-1}, $gA, \ldots$, и отображение, осуществляемое функтором ε приобретает вид:

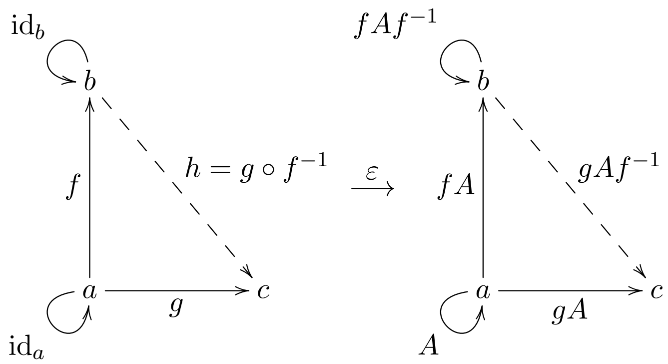

Рис. 2: канонический функтор

Пусть читателя не смущает произвол в выборе вершины a и веера стрелок, ибо вне зависимости от него стрелки вида $fA : a \to b$ все равны $\hom(a,b)$ как множества. Преимущество такой записи состоит в ее наглядности и удобстве полученной «алгебры» операций в фактор-группоиде. Выведем эти операции, пользуясь утверждениями 1,2, их следствиями и введенной операцией 1 перемножения множеств стрелок:

[2]в действительности можно вводить факторизацию группоида по любой нормальной подгруппе фунадментальной группы

[3]**Определение.** *Веером стрелок* вершины a группоида Γ называется множество состоящее из стрелок исходящих из вершины a по одной в каждую из прочих.

обращение стрелки $fA : a \to b$:

$$(fA)^{-1} = \hom(b, a) = f^{-1} \hom(b, b) = f^{-1} fAf^{-1} = Af^{-1} : b \to a;$$

композиция стрелок $Ah : b \to a$ и $gA : a \to c$:

$$gA \cdot Ah = gAh : b \to c.$$

Так, ясно, как получена стрелка gAf^{-1} на рис. 2:

$$gA \cdot (fA)^{-1} = gA \cdot Af^{-1} = gAf^{-1}.$$

Заметим, что в полученном группоиде $\varepsilon(\Gamma)$ любая стрелка $a \to b$ представлена в единственном экземпляре (и равна $\hom(a, b)$). Группоиды подобного вида назовем *элементарными*.

ii. Элементарный группоид

Определение 3. *Элементарным группоидом* будем называть группоид для любых двух вершин a и b которого существует одна и притом только одна стрелка $f : a \to b$.

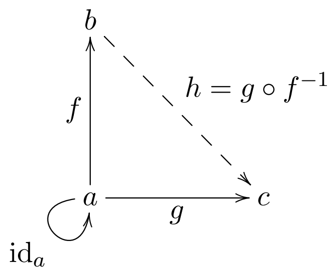

Рис. 3: элементарный группоид

Такие группоиды представляют для нас интерес ввиду простоты своей структуры. Более того, такие группоиды можно свести всего навсего к вееру стрелок.

Утверждение 3. *Элементарный группоид E однозначно задается любым веером своих стрелок.*
Более строго: пусть задан дан веер стрелок $V = \{f : a \to b, g : a \to c. \dots\}$ вершины a некоторого элементарного группоида E. Минимальный по включению группоид, содержащий данный веер есть сам E.

Доказательство. Пусть Γ — Минимальный по включению группоид, содержащий V, тогда из определения веера (стрелки проведены из a в каждую из прочих вершин E) получаем что $\operatorname{Obj} E \subset \operatorname{Obj} \Gamma$.

Пользуясь аксиомами композиции в категории из стрелок в V можно получить стрелку между любыми двумя вершинами в из $\operatorname{Obj} E$, т.е. по определению элементарного группоида все $\operatorname{Arr} E$. Таким образом, $\operatorname{Arr} E \subset \operatorname{Arr} \Gamma$, а поскольку Γ — минимальный, то $\Gamma = E$. $\square$

iii. Характер на группоиде

Вернемся к группоиду общего вида и попытаемся задать характер на нем, но сперва отметим важное (хоть и достаточно очевидное) свойство характера, позволяющее в некотором смысле перенести все предыдущие рассуждения на характер.

Утверждение 4. *Будучи задан на перемножаемых и непересекающихся множествах стрелок A и B, характер однозначно продолжается на их произведение $A \cdot B$.*

Так, пусть задан характер на фундаментальной группе группоида Γ. Для определенности пусть задано $\chi : A \to \mathbb{C}$, где $A = \hom(a, a), a \in \operatorname{Obj} \Gamma$.

iv. Группа

Рассмотрим некоторую группу G, его фактор-группу G/G' по коммутанту G' и следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\chi"'] & G/G' \arrow[d, "\chi_{ab}"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{4}$$

Здесь $\tau : g \mapsto gG'$ — канонический гомоморфизм; χ, χ_{ab} — характеры групп G и G/G' соответственно.

Оказывается, что

Утверждение 5. *для любого* $\chi : G \to \mathbb{C}$ *существует и при том единственный характер* $\chi_{ab} : G/G' \to \mathbb{C}$ *такой, что диаграмма* (4) *коммутативна, т.е.*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau.$$

Доказательство. Действительно, потребуем для любого $g \in G$

$$\chi(g) = \chi_{ab} \circ \tau(g),$$

тогда

$$\chi(g) = \chi_{ab}(gG'),$$

и χ_{ab} задан на G/G' однозначно.

Более того χ_{ab} задан корректно, т.к. для $\forall f \in gG' \; \exists h \in G' : f = gh$, но по определению коммутанта существуют такие a и b, что $h = aba^{-1}b^{-1}$, откуда $f = gaba^{-1}b^{-1}$, и

$$\chi(f) = \chi(gaba^{-1}b^{-1}) = \chi(g) + \chi(a) + \chi(b) - \chi(a) - \chi(b) = \chi(g),$$

то есть,

$$\chi(f) = \chi(g), \text{ для любых } f \text{ и } g \text{ из одного смежного по } G' \text{ класса.} \tag{5}$$

Очевидно, что χ_{ab} — характер:

$$\chi_{ab}(gfG') = \chi(gf) = \chi(g) + \chi(f) = \chi_{ab}(gG') + \chi_{ab}(fG').$$

$\square$

Замечание. Попутно доказано важное для понимания происходящего утверждение (5), показывающее, что факторизация группы по коммутанту G' разбивает ее также и на «области постоянства» характера (рис. 4). Становится ясно, что вместо рассмотрения характера χ на всей группе, достаточно пронаблюдать лишь за его «действием с точностью до G'», т.е. за определяемым им на G/G' характере χ_{ab}.

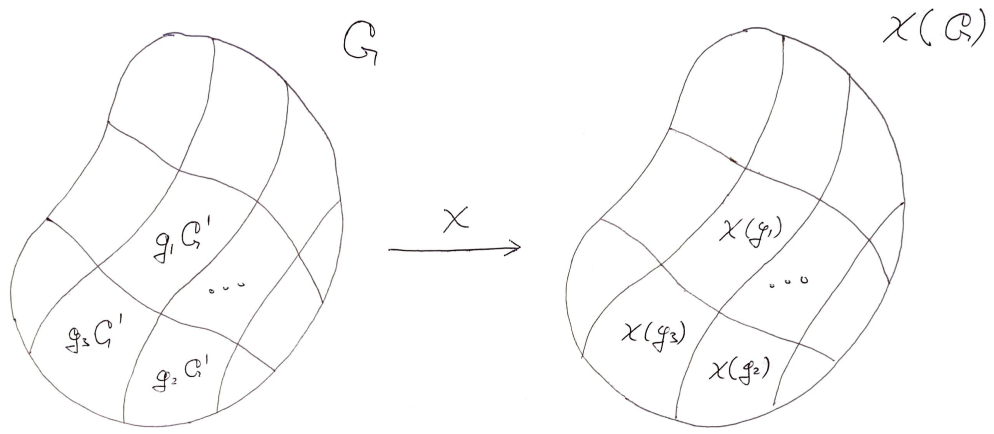

Рис. 4

Обратно,

Утверждение 6. *характер* χ_{ab} *однозначно задает* χ, *как*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau$$

Утверждение представляется очевидным.

Так, построено взаимооднозначное отображение $t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau = \chi$ между характерами группы и ее абелизации (т.е. фактор группы по коммутанту). Покажем, что отображение t является гомоморфизмом (а следовательно и изоморфизмом) линейных пространств.

Действительно, для любого $g \in G$

$$\begin{aligned} t(c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab})(g) &= (c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab}) \circ \tau(g) = \\ &= (c_1\chi^1_{ab} + c_2\chi^2_{ab})(gG') = c_1\chi^1_{ab}(gG') + c_2\chi^2_{ab}(gG') = \\ &= c_1\chi^1_{ab} \circ \tau(g) + c_2\chi^2_{ab} \circ \tau(g) = c_1 t(\chi^1_{ab})(g) + c_2 t(\chi^2_{ab})(g). \end{aligned}$$

Тем самым доказано следующее

Утверждение 7. *Пространства характеров группы* G *и ее абелизации* G/G' *изоморфны. Конкретно, изоморфизм имеет вид:*

$$t : G/G' \to G. \quad t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau, \tag{6}$$

где τ *— канонический гомоморфизм* $G \to G/G'$.

Последнее утверждение позволяет нам свести задачу изучения характеров группы G к рассмотрению характеров на G/G' — группе, абелевой по определению.

v. Абелева группа

Итак, пусть некоторая группа A — абелева. Как задать на ней характер? Нетрудно получить ответ в случае *конечно-порожденных* групп.

Известно, что для таких групп справедливо разложение [4]

$$A \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n} \oplus \operatorname{Tor} A = \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Tor} A,$$

где $\mathbb{Z}^n$ — *свободная подгруппа*,
$\operatorname{Tor} A \doteqdot \{a \in A : ma = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ — *подгруппа кручения*, причем

$$\operatorname{Tor} A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s},$$

где $\mathbb{Z}_{p_i}$ — циклическая группа порядка p_i.

Отсюда

$$A = \{x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n + x_{n+1} f_1 + \ldots + x_{n+s} f_s \mid x_i \in \mathbb{Z}\}, \tag{7}$$

где $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис свободной подгруппы, $\{f_i\}_{i=1}^s$ – порождающие соответствующих циклических групп. Попутно введем обозначение $\lfloor \dim \rfloor A = n$.

Пусть теперь задан характер $\chi : A \to \mathbb{C}$, тогда для любого $a \in A$, с учетом (7) верно

$$\begin{aligned}\chi(a) = \chi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} f_1 + \ldots + \alpha_{n+s} f_s) = \\ = \alpha_1 \chi(e_1) + \ldots + \alpha_n \chi(e_n) + \alpha_{n+1} \chi(f_1) + \ldots + \alpha_{n+s} \chi(f_s),\end{aligned}$$

но, так как порядок каждого элемента f_i конечен, то $\chi(f_i) = 0$ для всех $i = 1,..,s$, и

$$\chi(a) = \alpha_1 \chi(e_1) + \ldots + \alpha_n \chi(e_n). \tag{8}$$

Тем самым доказано

Утверждение 8. *Для конечно-порожденной группы A пространство характеров $X(A) = \{\chi : A \to \mathbb{C} : \chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)\}$ имеет размерность*

$$\dim X(A) = \lfloor \dim \rfloor A. \tag{9}$$

0.2 Преобразование характеров

[4] см.[2] гл.9 §1

i. Что дальше?

Список литературы

[1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.

[2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.