Характер группоида

А. А. Владимиров

27.04.2022

Задача. Дан функтор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \to \mathbf{Vec}$.
Найти $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \to \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \to \varkappa_1(\Gamma_2))$, если известно, что $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$, где V – пространство характеров, т.е. $V = \{\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$.

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора A_f на коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\varkappa} & V_1 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle A_f} \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\varkappa} & V_2 \end{array} \tag{1}$$

Решение. Для начала отметим три утверждения: если в группоиде Γ известны

(a) $f : a \to b$, $\hom(a,a)$, то посредством изоморфизма $\psi : \hom(a,a) \to \hom(b,b)$, а именно $\psi : h \mapsto fhf^{-1}$ однозначно определено $\hom(b,b)$;

(b) $f : a \to b$, $\hom(a,a)$, то однозначно определено $\hom(a,b)$, так как для любого $g \in \hom(a,b)$ существует $h \in \hom(a,a)$, такое что $fh = g$, а именно $g = f\underbrace{f^{-1}g} = fh$;

(c) $f : a \to b$, $g : a \to c$, то автоматически можно задать $h : b \to c$, а именно $h = gf^{-1}$.

Таким образом, если в связном группоиде Γ известны группа автоморфизмов $\hom(a,a)$ некоторой вершины a и по одной стрелке $f : a \to b$, $g : a \to c$,.. из a в каждую из остальных вершин b, c,.. то посредством утверждений (a)–(c) однозначно восстанавливается весь группоид Γ.

Рассмотрим теперь некоторый характер $\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C}$. Благодаря свойству $\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)$ все вышесказанное в определенном смысле переносится и на характер χ. Так, если χ задано на

(a') $f : a \to b$, $\hom(a,a)$, то изоморфизм ψ "один в один" переносит харакатер на $\hom(b,b)$: если $\chi(h) = \alpha$, то $\chi(\psi(h)) = \chi(fhf^{-1}) = \chi(f) + \chi(h) - \chi(f) = \chi(h)$, и характер однозначно определен на $\hom(b,b)$.

(b') $f : a \to b$, $\hom(a,a)$, то харктер однозначно продолжается на $\hom(a,b)$, так как для любого $g \in \hom(a,b)$ существует $h \in \hom(a,a)$, такое что $fh = g$, и следовательно $\chi(g) = \chi(f) + \chi(h)$.

(c') $f : a \to b$, $g : a \to c$, то автоматически можно задать характер на некотором $h : b \to c$, а именно $h = gf^{-1}$, и $\chi(h) = \chi(g) - \chi(f)$.

Таким образом, если в связном группоиде Γ определить характер на группе автоморфизмов $\hom(a,a)$ некоторой вершины a и на стрелках $f : a \to b$, $g : a \to c$,.. из a (по одной в каждую из остальных вершин b, c,..), то характер однозначно продолжается на все $\mathrm{Hom}\,\Gamma$. То есть, характер определяется своим действием на группе автоморфизмов произвольной вершины a[1] и вектором значений $s \in \mathbb{C}^{n-1}$ на стрелках из a (здесь $n = |\operatorname{Obj}(\Gamma)|$).

Проясним как определяется характер на фундментальной группе. Для этого остановимся на задании характера на некоторой группе G.

Как известно[2] разрешимая группа G раскладывается в прямую сумму

$$G \simeq G/G' \oplus \ldots \oplus G^{(n-1)}/G^{(n)}, \tag{2}$$

где $G^{(k+1)} = (G^{(k)})'$ — коммутант группы $G^{(k)}$.

Для конечно порожденной абелевой группы A справедливо разложение[3]

$$A \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n} \oplus \operatorname{Tor} A = \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Tor} A, \tag{3}$$

где $\operatorname{Tor} A \doteqdot \{a \in A : ma = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ — *подгруппа кручения*, причем

$$\operatorname{Tor} A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s}, \tag{4}$$

где $\mathbb{Z}_p$ — циклическая группа порядка p.

Определение. Назовем группу G *конечно разрешимой*, если она разрешима и каждое слагаемое разложения (2) суть есть конечно порожденная абелева группа.

Таким образом, из соотношений (2) – (4) следует, что если G конечно разрешимая группа, то

$$\begin{gathered} G \simeq A_0 \oplus \ldots \oplus A_{n-1} \simeq \\ \simeq \mathbb{Z}^m \oplus \operatorname{Tor} A_0 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Tor} A_{n-1} \simeq \\ \simeq \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}, \end{gathered}$$

т.е. разложима в сумму конечных и бесконечных циклических групп, а значит

$$G = \{x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m + x_{m+1} f_1 + \ldots + x_{m+k} f_k \mid x_i \in \mathbb{Z}\}, \tag{5}$$

[1] или на *фундаментальной группе*, что суть одно и то же,
[2] см. [2] гл.10 §2
[3] см.[2] гл.9 §1

где $\{e_i\}_{i=1}^m$ – базис свободной группы $\mathbb{Z}^m$, $\{f_i\}_{i=1}^k$ – порождающие соответствующих циклических групп $\mathbb{Z}_{p_i}$. Попутно введем обозначение $\lfloor \dim G \rfloor = m$.

Пусть теперь задан характер $\chi : G \to \mathbb{C}$, тогда для любого $g \in G$, с учетом (5) верно

$$\chi(g) = \chi(x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m + x_{m+1} f_1 + \ldots + x_{m+k} f_k) = \\ = x_1 \chi(e_1) + \ldots + x_m \chi(e_m) + x_{m+1} \chi(f_1) + \ldots + x_{m+k} \chi(f_k),$$

но, так как порядок каждого элемента f_i конечен, то $\chi(f_i) = 0$ для всех $i = 1,.., k$, и

$$\chi(g) = x_1 \chi(e_1) + \ldots + x_m \chi(e_m). \tag{6}$$

Так, характер конечно разрешимой группы G определяется $m = \lfloor \dim G \rfloor$ числами — значениями характера на базисе свободной подгруппы.

Вернемся к характеру группоида Γ. Как было показано ранее, он определен $(\operatorname{Obj}\Gamma) - 1$ числами и своим действием на фундаментальной группе группоида $\operatorname{Fund}\Gamma$. Теперь, с учетом (6), ясно: *характер $\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C}$ связного группоида Γ, фундаментальная группа которого конечно разрешима, определяется своими значениями на $n - 1 = |\operatorname{Obj}\Gamma| - 1$ стрелках, исходящих из некоторой вершины во все прочие и $m = \lfloor \dim \operatorname{Fund}\Gamma \rfloor$ значениями на базисе свободной подгруппы фундаментальной группы.* То есть, вектором $h(\chi) \in \mathbb{C}^{m+n-1}$.

Теперь, после того как мы можем взаимооднозначно сопоставить любому характеру вектор пространства соответствующей размерности, приходим к очевидному выводу:

$$V \doteqdot \{\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^{\lfloor \dim \operatorname{Fund}\Gamma \rfloor + |\operatorname{Obj}\Gamma| - 1}, \tag{7}$$

где Γ — группоид, такой что $|\operatorname{Obj}\Gamma| < \infty$ и $\operatorname{Fund}\Gamma$ конечно разрешима.

Наконец, возвращаясь к коммутативной диаграмме (1), используя полученный результат, мы можем дополнить ее следующим образом

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\varkappa} & V_1 \simeq \mathbb{C}^{m_1+n_1-1} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle A_f} \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\varkappa} & V_2 \simeq \mathbb{C}^{m_2+n_2-1} \end{array} \tag{8}$$

где $n = |\operatorname{Obj}\Gamma|$, $m = \lfloor \dim \operatorname{Fund}\Gamma \rfloor$, а функтор $\varkappa$ рассматривается лишь на подкатегории $\mathbf{Cat}(\Gamma)$ связных группоидов с конечным числом объектов и конечно разрешимой фундаментальной группой.

Поскольку все конечномерные векторные пространства изоморфны, можно считать, что функтор $\varkappa$ данному $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ ставит в соответствие оператор $\varkappa(f) = A_f$, который, не ограничивая общности, суть есть

- проектор пространства размерности $m_1 + n_1 - 1$ на пространство размерности $m_2 + n_2 - 1$, при $m_1 + n_1 > m_2 + n_2$;

- опрератор вложения пространства размерности $m_1 + n_1 - 1$ в пространство $m_2 + n_2 - 1$, при $m_1 + n_1 < m_2 + n_2$;
- изоморфизм, при $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$.

□

Список литературы

[1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.

[2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.