Характер группоида

А. А. Владимиров

08.05.2022

Задача

Дан функтор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2) : \mathbf{Cat}(\Gamma) \to \mathbf{Vec}$.
Найти $\varkappa_2 : (f : \Gamma_1 \to \Gamma_2) \mapsto (A_f : \varkappa_1(\Gamma_1) \to \varkappa_1(\Gamma_2))$, если известно, что $\varkappa_1 : \Gamma \mapsto V$, где V – пространство характеров, т.е. $V = \{\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C} : \chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)\}$.

Таким образом задача сводится к нахождению линейного оператора A_f на коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "f"] & V_1 \arrow[d, "A_f"] \\ \Gamma_2 \arrow[r, "\varkappa"] & V_2 \end{tikzcd} \tag{1}$$

Решение

i. Группоид

Для начала отметим следующие три утверждения: если в группоиде Γ известны

(a) $f : a \to b$, $\hom(a, a)$, то посредством изоморфизма $\psi : \hom(a, a) \to \hom(b, b)$, а именно $\psi : h \mapsto fhf^{-1}$ однозначно определено $\hom(b, b)$;

(b) $f : a \to b$, $\hom(a, a)$, то однозначно определено $\hom(a, b)$, так как для любого $g \in \hom(a, b)$ существует $h \in \hom(a, a)$, такое что $fh = g$, а именно $g = f\underbrace{f^{-1}g} = fh$;

(c) $f : a \to b$, $g : a \to c$, то можно задать некоторое $h : b \to c$, а именно $h = gf^{-1}$.

Таким образом, если в связном группоиде Γ известны группа петель $\hom(a, a)$ некоторой вершины a и по одной стрелке $f : a \to b$, $g : a \to c$,.. из a в каждую из остальных вершин $b, c,..$ то посредством утверджений (a)–(c) однозначно восстанавливается весь группоид Γ, что иллюстрирует диаграмма (2)

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, dashed, "h = g \circ f^{-1}"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[loop left, "\hom(a,a)"'] & c \end{tikzcd} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь некоторый характер $\chi : \operatorname{Hom}\Gamma \to \mathbb{C}$. Благодаря свойству $\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)$ все вышесказанное в определенном смысле переносится и на характер χ. Так, если χ задано на

(a') $f : a \to b$, $\hom(a,a)$, то изоморфизм ψ "один в один" переносит харакатер на $\hom(b,b)$: если $\chi(h) = \alpha$, то $\chi(\psi(h)) = \chi(fhf^{-1}) = \chi(f) + \chi(h) - \chi(f) = \chi(h)$, и характер однозначно определен на $\hom(b,b)$.

(b') $f : a \to b$, $\hom(a,a)$, то харктер однозначно продолжается на $\hom(a,b)$, так как для любого $g \in \hom(a,b)$ существует $h \in \hom(a,a)$, такое что $fh = g$, и следовательно $\chi(g) = \chi(f) + \chi(h)$.

(c') $f : a \to b$, $g : a \to c$, то автоматически можно задать характер на некотором $h : b \to c$, а именно $h = gf^{-1}$, и $\chi(h) = \chi(g) - \chi(f)$.

Таким образом, если в связном группоиде Γ определить характер на группе петель $\hom(a,a)$ некоторой вершины a и на стрелках $f : a \to b$, $g : a \to c,..$ из a (по одной в каждую из остальных вершин $b, c,..$), то характер однозначно продолжается на все $\operatorname{Hom}\Gamma$. То есть, характер определяется своим действием на группе петель произвольной вершины a[1] и вектором значений $s \in \mathbb{C}^{n-1}$ на стрелках из a (здесь $n = |\operatorname{Obj}(\Gamma)|$).

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, dashed, "\chi(h) = \chi(g) - \chi(f)"] & \\ a \arrow[u, "\chi(f)"] \arrow[r, "\chi(g)"'] \arrow[loop left, "\chi|_{\hom(a,a)}"'] & c \end{tikzcd} \tag{2'}$$

Логично задаться вопросом: как конкретно определяется характер на фунадментальной группе? Для его решения попробуем задать характер на группе вообще.

[1] или на *фундаментальной группе*, что суть одно и то же,

ii. Группа

Рассмотрим некоторую группу G, его фактор-группу G/G' по коммутанту G' и следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\chi"'] & G/G' \arrow[d, "\chi_{ab}"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{3}$$

Здесь $\tau : g \mapsto gG'$ — канонический гомоморфизм; χ, χ_{ab} — характеры групп G и G/G' соответственно.

Оказывается, что

Утверждение. *для любого $\chi : G \to \mathbb{C}$ существует и при том единственный характер $\chi_{ab} : G/G' \to \mathbb{C}$ такой, что диаграмма (3) коммутативна, т.е.*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau.$$

Доказательство. Действительно, потребуем для любого $g \in G$

$$\chi(g) = \chi_{ab} \circ \tau(g),$$

тогда

$$\chi(g) = \chi_{ab}(gG'),$$

и χ_{ab} задан на G/G' однозначно.

Более того χ_{ab} задан корректно, т.к. для $\forall f \in gG' \ \exists h \in G' : f = gh$, но по определению коммутанта существуют такие a и b, что $h = aba^{-1}b^{-1}$, откуда $f = gaba^{-1}b^{-1}$, и

$$\chi(f) = \chi(gaba^{-1}b^{-1}) = \chi(g) + \chi(a) + \chi(b) - \chi(a) - \chi(b) = \chi(g),$$

то есть,

$$\chi(f) = \chi(g), \text{ для любых } f \text{ и } g \text{ из одного смежного по } G' \text{ класса.} \tag{4}$$

Очевидно, что χ_{ab} — характер:

$$\chi_{ab}(gfG') = \chi(gf) = \chi(g) + chi(f) = \chi_{ab}(gG') + \chi_{ab}(fG').$$

□

Замечание. Попутно доказано важное для понимания происходящего утверждение (4), показывающее, что факторизация группы по коммутанту G' разбивает ее также и на «области постоянства» характера (рис. 1). Становится ясно, что вместо рассмотрения характера χ на всей группе, достаточно пронаблюдать лишь за его «действием с точностью до G'», т.е. за определяемым им на G/G' характере χ_{ab}.

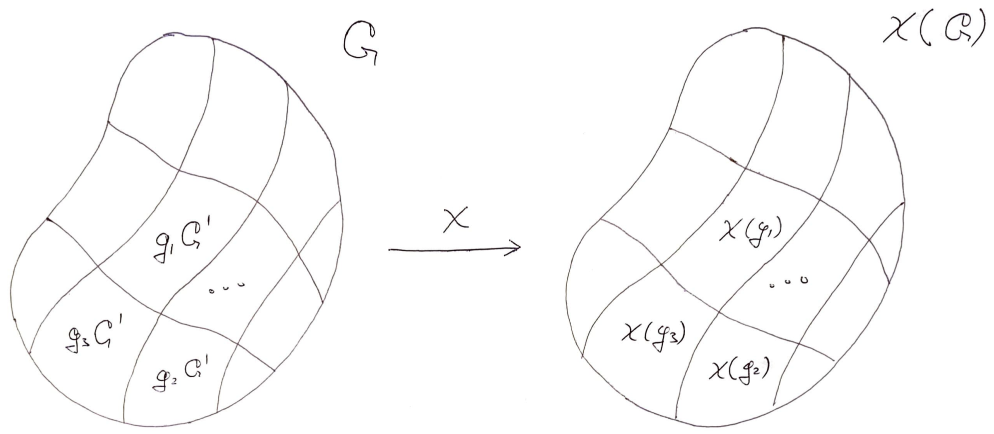

Рис. 1

Обратно,

Утверждение. *характер χ_{ab} однозначно задает χ, как*

$$\chi = \chi_{ab} \circ \tau$$

Утверждение представляется очевидным.

Так, построено взаимооднозначное отображение $t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau = \chi$ между характерами группы и ее абелизации (т.е. фактор группы по коммутанту). Покажем, что отображение t является гомоморфизмом (а следовательно и изоморфизмом) линейных пространств.

Действительно, для любого $g \in G$

$$\begin{aligned} t(c_1\chi_{ab}^1 + c_2\chi_{ab}^2)(g) &= (c_1\chi_{ab}^1 + c_2\chi_{ab}^2) \circ \tau(g) = \\ &= (c_1\chi_{ab}^1 + c_2\chi_{ab}^2)(gG') = c_1\chi_{ab}^1(gG') + c_2\chi_{ab}^2(gG') = \\ &= c_1\chi_{ab}^1 \circ \tau(g) + c_2\chi_{ab}^2 \circ \tau(g) = c_1t(\chi_{ab}^1)(g) + c_2t(\chi_{ab}^2)(g). \end{aligned}$$

Тем самым доказано следующее

Утверждение. *Пространства характеров группы G и ее абелизации G/G' изоморфны. Конкретно, изоморфизм имеет вид:*

$$t : G/G' \to G. \quad t : \chi_{ab} \mapsto \chi_{ab} \circ \tau, \tag{5}$$

где τ — канонический гомоморфизм $G \to G/G'$.

Последнее утверждение позволяет нам свести задачу изучения характеров группы G к рассмотрению характеров на G/G' — группе, абелевой по определению.

iii. Абелева группа

Итак, пусть некоторая группа A — абелева. Как задать на ней характер? Нетрудно получить ответ в случае *конечно-порожденных* групп.

Известно, что для таких групп справедливо разложение [2]

$$A \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n} \oplus \operatorname{Tor} A = \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Tor} A,$$

где $\mathbb{Z}^n$ — *свободная подгруппа*,
$\operatorname{Tor} A \doteqdot \{a \in A : ma = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ — *подгруппа кручения*, причем

$$\operatorname{Tor} A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s},$$

где $\mathbb{Z}_{p_i}$ — циклическая группа порядка p_i.

Отсюда

$$A = \{x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n + x_{n+1} f_1 + \ldots + x_{n+s} f_s \mid x_i \in \mathbb{Z}\}, \tag{6}$$

где $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис свободной подгруппы, $\{f_i\}_{i=1}^s$ – порождающие соответствующих циклических групп. Попутно введем обозначение $\lfloor \dim \rfloor A = n$.

Пусть теперь задан характер $\chi : A \to \mathbb{C}$, тогда для любого $a \in A$, с учетом (6) верно

$$\begin{aligned}\chi(a) = \chi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} f_1 + \ldots + \alpha_{n+s} f_s) = \\ = \alpha_1 \chi(e_1) + \ldots + \alpha_n \chi(e_n) + \alpha_{n+1}\chi(f_1) + \ldots + \alpha_{n+s}\chi(f_s),\end{aligned}$$

но, так как порядок каждого элемента f_i конечен, то $\chi(f_i) = 0$ для всех $i = 1,..,s$, и

$$\chi(a) = \alpha_1 \chi(e_1) + \ldots + \alpha_n \chi(e_n). \tag{7}$$

Тем самым доказано

Утверждение. *Для конечно-порожденной группы A пространство характеров $X(A) = \{\chi : A \to \mathbb{C} : \chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)\}$ имеет размерность*

$$\dim X(A) = \lfloor \dim \rfloor A. \tag{8}$$

□

Список литературы

[1] Маклейн С. *«Категории для работающего математика»*. Изд-во ФизМатЛит, Москва, 2004.

[2] Винберг Э. Б. *«Курс алгебры»*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2014.

[2] см.[2] гл.9 §1