



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Курсовая работа. Часть 2

# «Исследование нелинейной динамической системы на плоскости»

*Студент 315 группы*  
А. А. Владимиров

*Научный руководитель*  
Д. А. Алимов

Москва, 2021

# Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Переход к безразмерным переменным	3
3	Неподвижные точки	4
4	Параметрический портрет системы	8

## 1 Постановка задачи

Реш. (x, y) Дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(K - x) - \frac{bxy}{1 + Ax}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1 + Ax}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  — фазовые переменные;  $a, b, c, d, K, A$  — положительные параметры.

Динамическая система, задаваемая уравнениями (1), суть есть модель «хищник–жертва» Холлинга<sup>1</sup>. Здесь  $x$  и  $y$  — численности жертв и хищников соответственно.

Следуя [1], перепишем систему (1) в более общем виде и, вкратце, поясним биологический смысл входящих в запись системы компонент

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) - B(x, y), \\ \dot{y} = -C(y) + D(x, y). \end{cases}$$

$A(x)$  — функция, описывающая размножение жертв при отсутствии хищников. В системе (1)  $A(x) \stackrel{(1)}{=} ax(K - x) = aKx(1 - \frac{x}{K})$  — логистическое уравнение, учитывающее фактор внутривидовой конкуренции жертв.

$C(y)$  — описывает вымирание хищников при отсутствии жертв.  $C(y) \stackrel{(1)}{=} cy$  — классическая модель Мальтуса экспоненциального роста (в нашем случае вырождения) изолированной популяции.

$B(x, y)$  — описывает выедание жертв хищниками.  $B(x, y) = B_1(x)B_2(y)$ .

$B_1(x)$  — трофическая функция хищника.  $B_1(x) \stackrel{(1)}{=} \frac{x}{1+Ax}$  — модель Моро, отражающая явление насыщения хищника.

$B_2(y)$  — зависимость скорости выедания жертвы от плотности популяции хищника.  $B_2(y) \stackrel{(1)}{=} by$  — линейная функция, т.е. фактор конкуренции хищников за жертв исключен из рассмотрения.

$D(x, y)$  — эффективность потребления жертв хищниками.  $D(x, y) = D_1(x)D_2(y)$ . В силу обыкновенно принимаемого в модели Лотки–Вольтерры предположения о постоянном коэффициенте переработки хищником пищи в собственную биомассу  $D_1(x) \stackrel{(1)}{=} B_1(x)$ ,  $D_2(y) \stackrel{(1)}{=} dy$ .

Требуется провести качественный анализ системы (1) и дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

---

<sup>1</sup>[1] п. 7.2.

## 2 Переход к безразмерным переменным

Перед дальнейшим исследованием системы попробуем сократить количество параметров линейной заменой координат. Пусть

$$\begin{cases} x = \alpha u, \\ y = \beta v, \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad (2)$$

тогда

$$\begin{cases} \alpha \dot{u} = a\alpha u(K - \alpha u) - \frac{b\alpha u\beta v}{1 + A\alpha u}, \\ \beta \dot{v} = -c\beta v + \frac{d\alpha u\beta v}{1 + A\alpha u}, \end{cases}$$

что равносильно

$$\begin{cases} \dot{u} = au(K - \alpha u) - \frac{bu\beta v}{1 + A\alpha u}, \\ \dot{v} = -cv + \frac{d\alpha uv}{1 + A\alpha u}. \end{cases}$$

Пусть

$$\alpha = K, \beta = b^{-1}, \quad (3)$$

тогда

$$\begin{cases} \dot{u} = aKu(1 - u) - \frac{uv}{1 + AKu}, \\ \dot{v} = -cv + \frac{dKuv}{1 + AKu}. \end{cases}$$

В качестве новых параметров положим

$$e = aK, f = c, g = AK, h = dK. \quad (4)$$

Таким образом, после замены (2), (3) и переобозначений (4) получим систему, имеющую четыре параметра,

$$\begin{cases} \dot{u} = eu(1 - u) - \frac{uv}{1 + gu}, \\ \dot{v} = -fv + \frac{huv}{1 + gu}. \end{cases} \quad (5)$$

Изучение моделей с числом параметров больше двух довольно трудоемкая, а порой практически невыполнимая задача<sup>2</sup>, поэтому в рамках данной работы будем полагать параметры  $f$  и  $g$  фиксированными и равными, например, единице. Таким образом, нам предстоит исследовать динамику упрощенной системы

$$\begin{cases} \dot{u} = eu(1 - u) - \frac{uv}{1 + u}, \\ \dot{v} = -v + \frac{huv}{1 + u}. \end{cases} \quad (6)$$

---

<sup>2</sup>[1] п. 5.7.

### 3 Неподвижные точки

Система (6) имеет три неподвижных точки<sup>3</sup>

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix},$$

где  $u^* = \frac{1}{h-1}$ ,  $v^* = \frac{eh(h-2)}{(h-1)^2}$ . В дальнейшем будем называть их  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  соответственно.

Первые две точки тривиальны:  $a_1$  соответствует вымиранию обоих видов,  $a_2$  — вымиранию хищников, при некоторой установившейся численности жертв. Большой интерес представляет третья неподвижная точка. Точка  $a_3$  отвечает состоянию экологического равновесия — стабильному сосуществованию обоих видов.

Для установления типа каждой неподвижной точки, воспользуемся известным приемом,<sup>4</sup> позволяющим узнать характер гиперболического (негиперболические мы рассматривать не будем) положения равновесия на плоскости. Для этого достаточно информации о  $\text{tr } J$  и  $\det J$  — следе и определителе матрицы Якоби системы дифференциальных уравнений.

Итак, каждому типу равновесия соответствует область значений  $\text{tr } J$  и  $\det J$ , изображенная на рис. 1. *I* — устойчивые фокусы, *II* — неустойчивые фокусы, *III* — неустойчивые узлы, *IV* — устойчивые узлы, *V*, *VI* — седла.

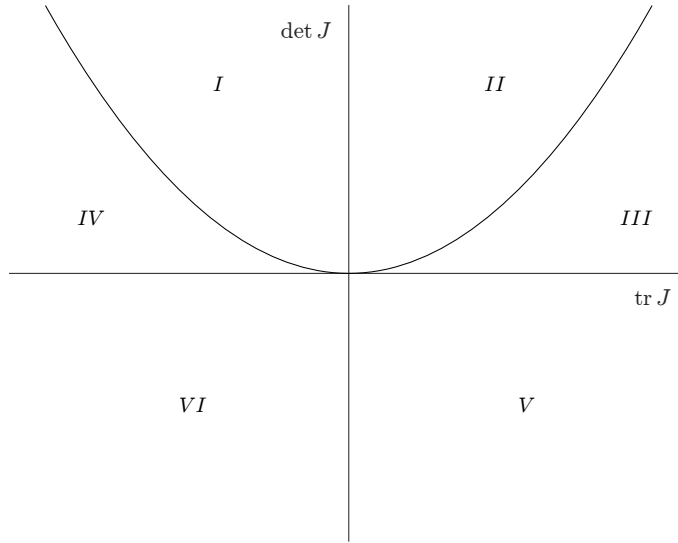


Рис. 1: Устойчивость положений равновесия, в зависимости от  $\text{tr } J$  и  $\det J$ . Кривая на графике:  $4 \det J = \text{tr}^2 J$ .

Таким образом, для каждой неподвижной точки требуется выяснить в какой области в зависимости от параметров лежат соответствующие значения  $\text{tr } J$  и  $\det J$ .

Приведем диаграммы, показывающие, где относительно каждой из кривых ( $\text{tr } J = 0$ ,  $\det J = 0$ ,  $4 \det J = \text{tr}^2 J$ ) лежат значения  $\text{tr } J$  и  $\det J$ , в зависимости от параметров  $e$  и  $h$ . На их основании построены разбиения пространства параметров на области *I–VI*.

<sup>3</sup>Напомним, что как и в предыдущей части работы подавляющее большинство вычислений выполнено посредством пакета символьной компьютерной алгебры **MatLab**. С ходом этих вычислений можно ознакомиться в приложенном **.mlx** файле.

<sup>4</sup>см. [1] п. 4.2.

**Первая точка** (рис. 2, 3) является седловой вне зависимости от значений параметров и не представляет интереса.

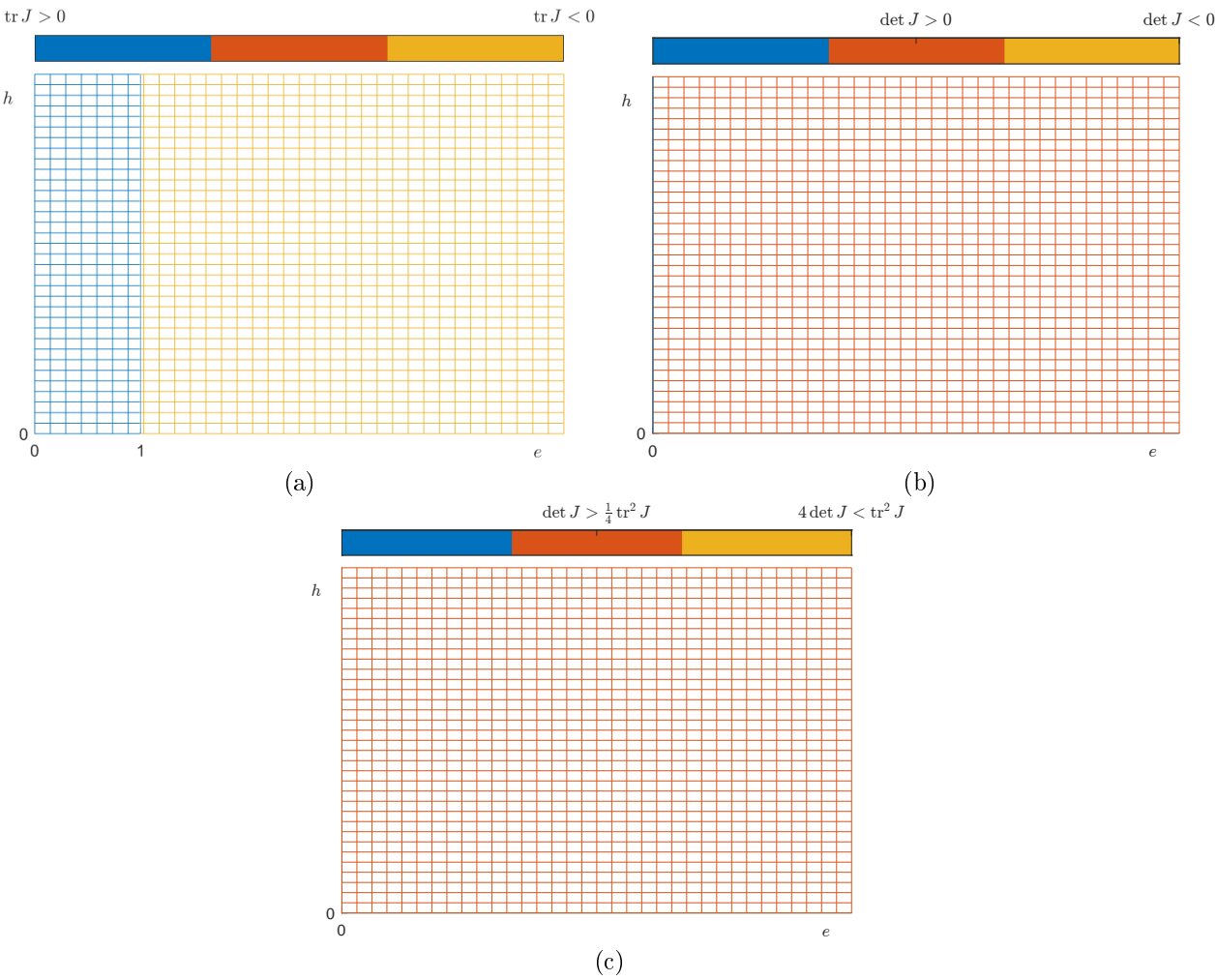


Рис. 2: Диаграммы первой точки.



Рис. 3: Параметрический портрет первого положения равновесия.

**Вторая точка** (рис. 4, 5) — устойчивый узел при  $h < 2$ , седло при  $h > 2$ .

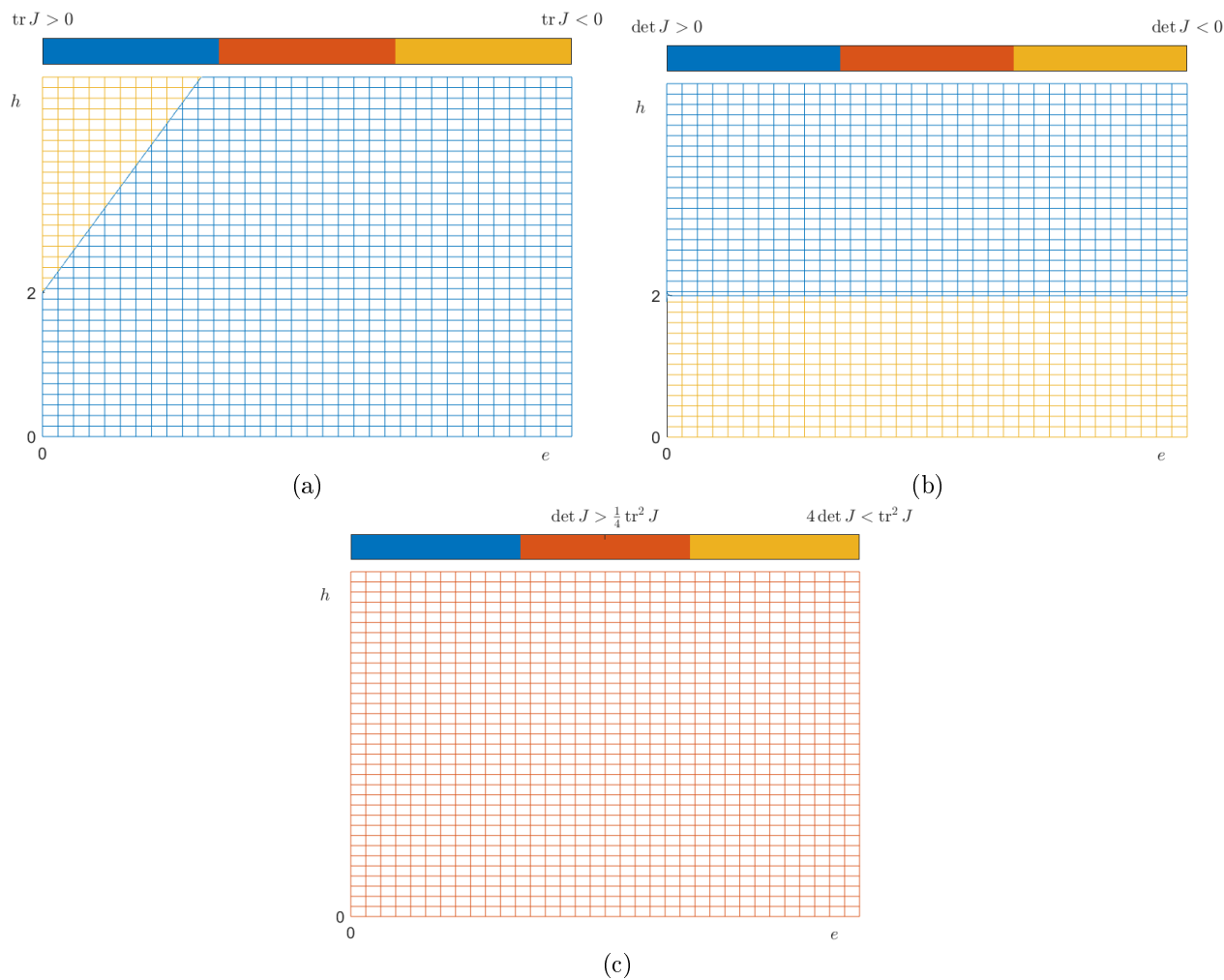


Рис. 4: Диаграммы второй точки

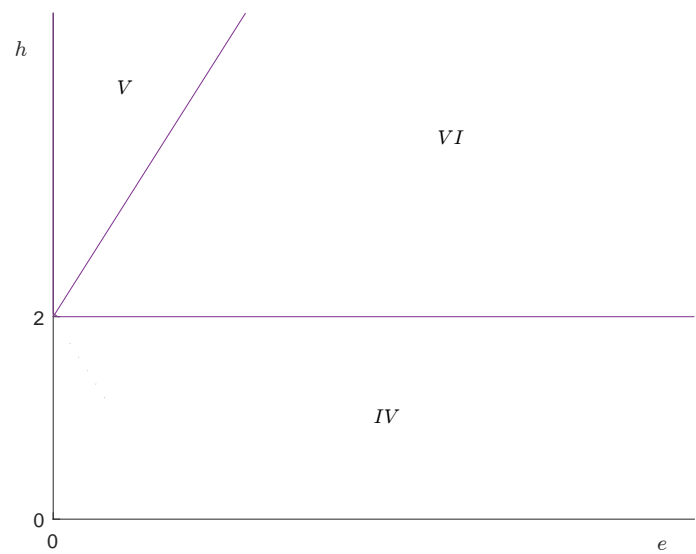


Рис. 5: Параметрический портрет второго положения равновесия.

**Третья точка** (рис. 6, 7), как было отмечено выше, нетривиальна

$$\left( \frac{1}{h-1}, \frac{eh(h-2)}{(h-1)^2} \right).$$

Нетрудно заметить, что при  $h < 2$  точка  $a_3$  не принадлежит фазовому пространству  $\mathbb{R}_+^2$  (этот факт отражен на диаграмме знаком «—»). При  $h > 2$  возможны два варианта:

$$a_3 \text{ — устойчивый узел,} \quad \text{при} \quad 2 < h < \sqrt{\frac{\sqrt{4e+1}+1}{2}} + 1,$$

$$a_3 \text{ — устойчивый фокус,} \quad \text{при} \quad h > \sqrt{\frac{\sqrt{4e+1}+1}{2}} + 1.$$

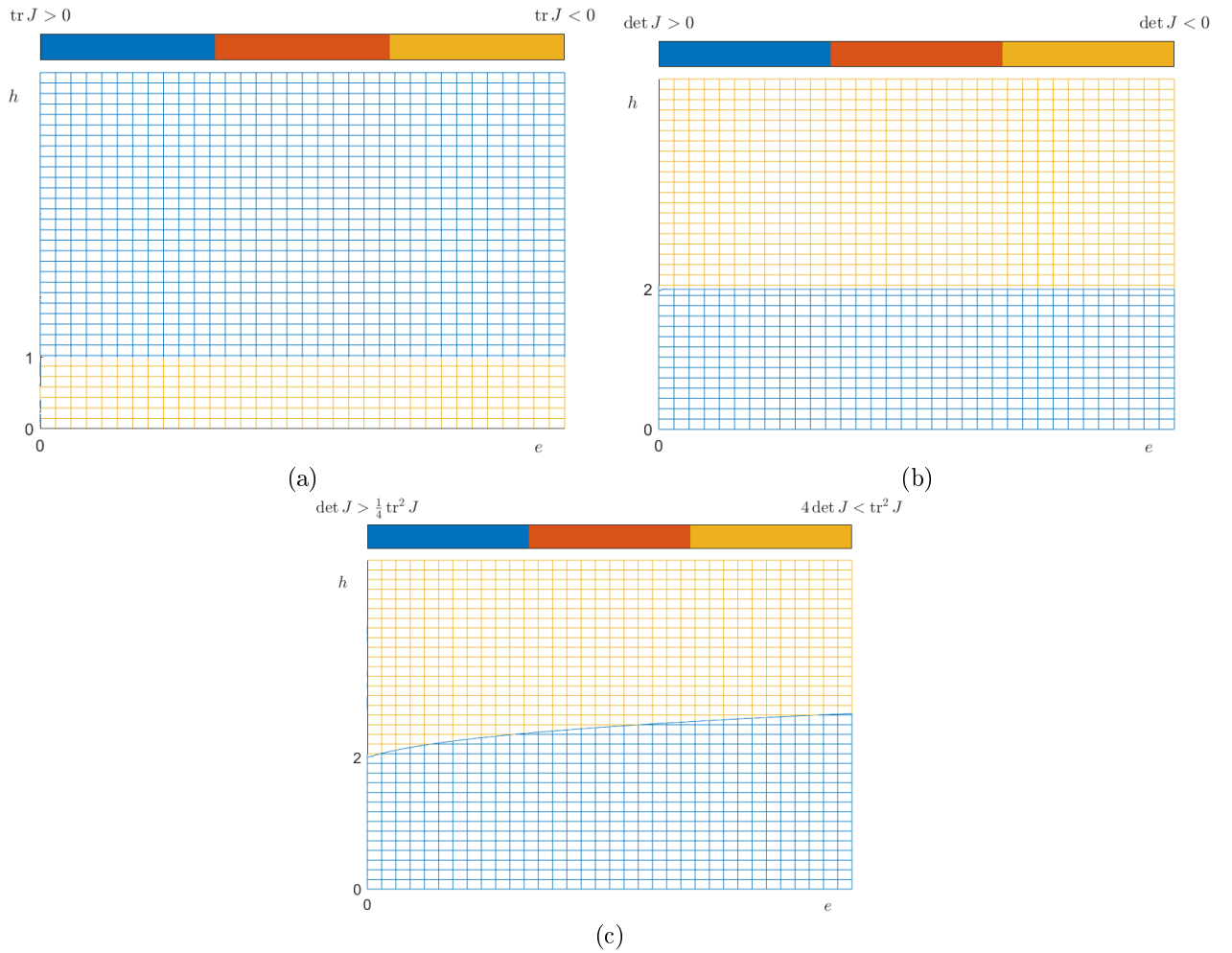


Рис. 6: Диаграммы третьей точки.

Теперь у нас достаточно информации чтобы построить параметрический портрет системы.

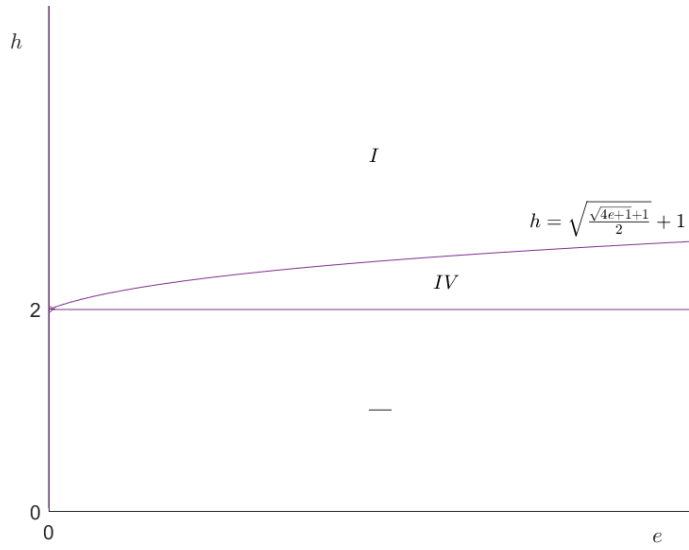


Рис. 7: Параметрический портрет третьего положения равновесия.

## 4 Параметрический портрет системы

имеет следующий вид

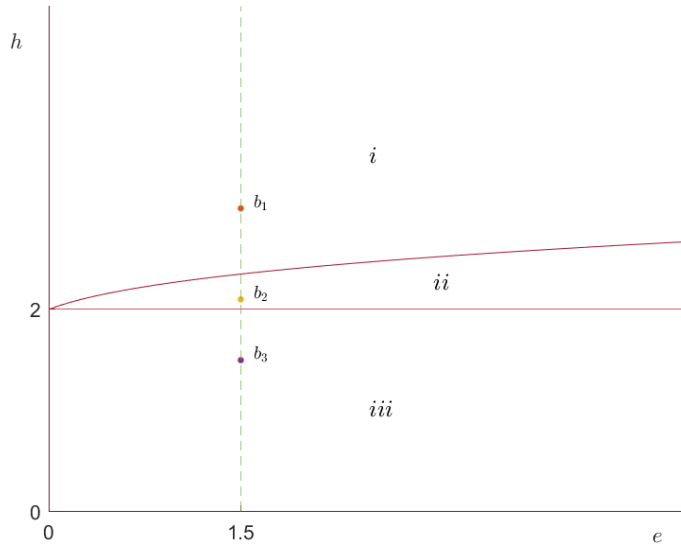


Рис. 8: Параметрический портрет системы.

Типы точек  $a_2$  и  $a_3$  ( $a_1$  — всегда седло)

область  $i$ :  $a_2$  — седло,  $a_3$  — устойчивый фокус;

область  $ii$ :  $a_2$  — седло,  $a_3$  — устойчивый узел;

область  $iii$ :  $a_2$  — устойчивый узел,  $a_3$  — не лежит в фазовой плоскости.

Двигаясь по прямой  $e = 1.5$  в направлении от точки  $b_1$  к точке  $b_3$ , проследим эволюцию равновесия  $a_3$ , и, попутно построим фазовые портреты системы в каждой из областей  $i$ – $iii$ .

Сперва напомним, что  $e = aK$ , где  $aK$  можно интерпретировать, как скорость роста популяции жертв. Параметр  $h = dK$ , характеризует совместное поведение величин  $d$  — эффективности



потребления жертв хищниками и  $K$  — потенциальной емкости экологической системы относительно жертв (предельный размер популяции)<sup>5</sup>. Исходные переменные  $x$  и  $y$  выражаются через  $u$  и  $v$  как  $x = Ku$ ,  $y = b^{-1}v$ , откуда неподвижная точка  $a_2 = (1, 0)$  в исходных координатах имеет вид  $(K, 0)$ .

Итак, в области  $i$  система (6) имеет единственное положение устойчивого равновесия — фокус  $a_3$  (см. рис. 9). Точка  $a_3$  соответствует состоянию экологического равновесия, к которому спиралевидно стремятся траектории системы. По всей видимости,  $a_3$  является глобальным аттрактором, а потому при любых (кроме, очевидно, нулевых) начальных размерах популяций ни одна из них не вырождается и обе колебательным образом стремятся к некоторой предельной численности.

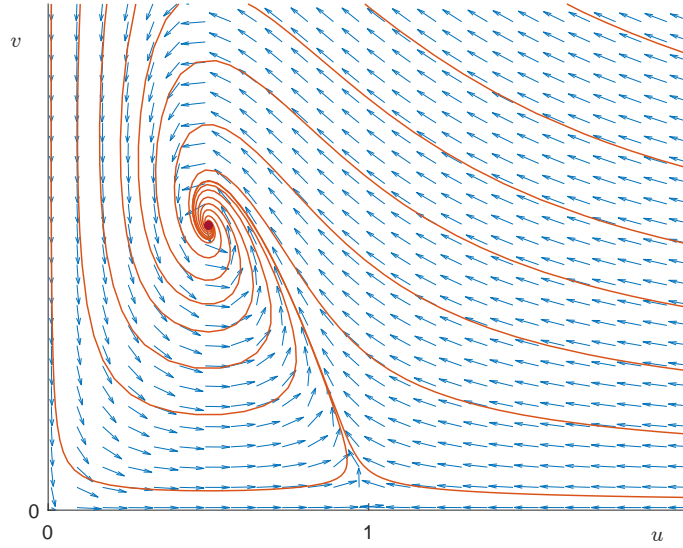


Рис. 9: Фазовый портрет  $i$ .

После перехода границы с областью  $ii$   $a_3$  становится устойчивым узлом (рис. 10).

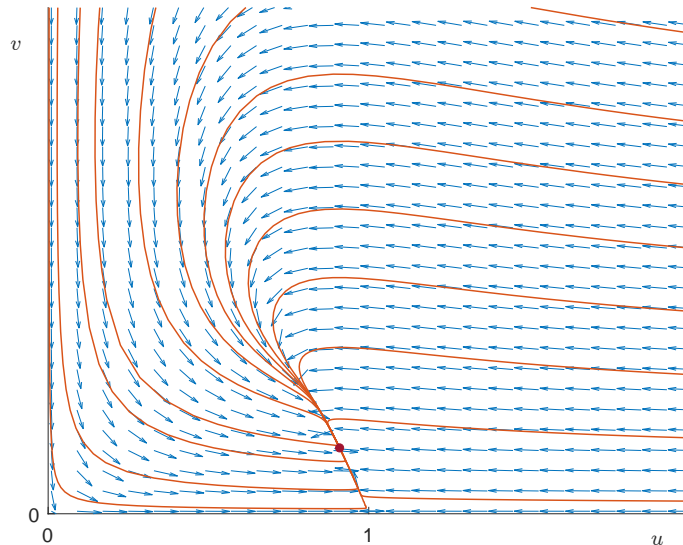


Рис. 10: Фазовый портрет  $ii$ .

Поведение численности популяций в области  $i$  и  $ii$  вполне аналогично, за исключением того,

<sup>5</sup>см. модель роста популяции, описываемую логистическим уравнением [1] п. 1.3. и модель Холлинга [1] п. 5.6.

что в случае  $ii$ , в отличие от  $i$ , траектории стремятся к положению равновесия «напрямую», а не колебательным образом.

Наконец, на общей границе областей  $ii$  и  $iii$  точка  $a_3$  сливается с  $a_2$ . В области  $iii$  единственным глобальным аттрактором является  $a_2$  (рис. 11). Экологическое равновесие системы становится невозможным: какими бы ни были начальные величины популяций, популяция хищников рано или поздно выродится, в то время как популяция жертв будет стабильно приближаться к своему потенциально возможному максимуму.

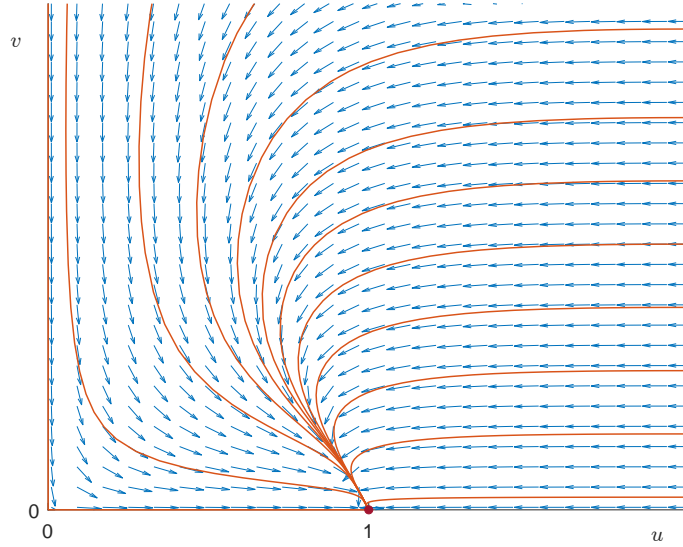


Рис. 11: Фазовый портрет  $iii$ .

Итак, мы проследили за изменением фазового портрета системы в зависимости от  $h$  при фиксированном  $e$ . Приведем некоторые наблюдения.

Первое. Параметр  $e$  влияет лишь на размер интервала  $2 < h < \sqrt{\frac{\sqrt{4e+1}+1}{2}} + 1$  на котором  $a_3$  является узлом, что нам представляется несущественным, а потому зависимость системы от  $e$  мы опустим.

Второе. Положение равновесия  $a_3$  (если рассматривать  $a_2$  как выродившуюся при  $h < 2$  точку  $a_3$ ) в сущности целиком определяет фазовый портрет системы.

Отсюда вывод: поведение системы определяется зависимостью  $a_3$  от  $h$ . Эта зависимость заключена в нескольких пунктах:

- При уменьшении  $h$  точка  $a_3$  сдвигается вниз и вправо на фазовой плоскости.
- При  $h < 2$  точка  $a_3$  вырождается в  $a_2 = (1, 0)$ .
- Вне зависимости от  $h$  точка  $a_3$  устойчива.

Учитывая что  $h = dK$ , полученный нами результат вполне согласуется с интуитивным пониманием биологического смысла поведения системы (1):

- При совокупном уменьшении параметров  $d$  и  $K$ , т.е. эффективности потребления хищниками жертв и предельного числа жертв в популяции, количество<sup>6</sup> хищников уменьшается, а жертв увеличивается.

<sup>6</sup>Имеется ввиду «предельное» количество, т.е. приблизительно установившееся за большой промежуток времени.

- Если параметры  $d$  и  $K$ , уменьшить достаточно сильно (так, что они окажутся меньше некоторого граничного значения), то хищники вымрут, а жертвы достигнут своей максимально возможной численности.
- Система рано или поздно придет к состоянию экологического равновесия (при достаточно больших  $d$  и  $K$ ), или вырождения (при достаточно малых  $d$  и  $K$ ).

**Замечание (о предельном цикле)** Имеются основания полагать, что в рассматриваемой системе не возникает предельных циклов. Действительно, по физическим соображениям (на фазовой плоскости всегда существует ровно один сток, и ни одного истока), дивергенция векторного поля уравнения (6) всюду не превосходит нуля. Следовательно, по критерию Бендиксона в системе (6) предельных циклов нет.

## Список литературы

- [1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- [2] Алимов Д. А. кафедральный курс *Динамические системы и биоматематика*, 2021.