Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Лабораторная работа №3

«Аппроксимация преобразования Фурье с помощью БПФ в среде MatLab»

Студент 315 группы
А. А. Владимиров

Руководитель Практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

1 Постановка задачи

Требуется получить численную аппроксимацию преобразования Фурье

$$
\begin{aligned}
F(\lambda) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt,\\
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda t}\,d\lambda
\end{aligned} \tag{1}
$$

для набора функций

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= te^{-2|t|}\,\mathrm{sh}(t),\\
f_2(t) &= \frac{t}{2+2t+t^2},\\
f_3(t) &= e^{-t^6}\,\mathrm{arctg}(t^2),\\
f_4(t) &= \begin{cases}\mathrm{arctg}(t^3), & |t+2| \leqslant 1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Заданы частота дискретизации Δ_t и окно $[a, b]$, значения функции $f_n,\ n = \overline{1,4}$ на котором мы можем использовать для нахождения приближения.

Для фунций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ результат требуется сравнить с аналитическим решением, предварительно посчитанным вручную.

2 Алгоритм программной реализации численного преобразования Фурье

Несмотря на тот факт, что в среде `MatLab` имеется специальная функция `fft` реализующая быстрое преобразование Фурье, для получения корректного численного приближения приходится немного поработать с данными как до, так и после применения `fft`. Об алгоритме этой работы и пойдет речь.

2.1 Предварительные соображения

Пусть требуется найти дискретное преобразование Фурье функции $f(t)$. Даны окно $[0, T]$ [1], количество отсчетов N, величина окна T и частота дискретизации $\Delta_t = \frac{T}{N}$.

Фактически наша задача сводится к нахождению преобразования

$$\tilde{f}(t) = (f \cdot d_{\Delta_t} \cdot h_T * d_T)(t) \leftrightarrow (\frac{1}{\Delta_t}F * d_{\frac{2\pi}{\Delta_t}} * \mathrm{sinc}(\tfrac{\lambda T}{2}) \cdot d_{\Delta_\lambda})(\lambda) = \tilde{F}(\lambda) \tag{3}$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_n = \tilde{F}(\lambda_n), &\quad \lambda_n = \frac{2\pi n}{T},\ n = \overline{0, N-1}\\
f_k = f(k\Delta_t), &\quad k = \overline{0, N-1}.
\end{aligned}
$$

Известно [2] , что

$$\tilde{F}_n = \alpha_n, \quad \text{где } \alpha_n = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{\frac{-2\pi i k n}{N}}, \quad k = \overline{0, N-1}. \tag{4}$$

Отсюда получим значения приближенного преобразования Фурье $\hat{F}(\lambda)$ функции $f(t)$ в точках λ_n

$$\hat{F}(\lambda_n) = \hat{F}_n = \Delta_t\tilde{F}_n = \frac{T}{N}\alpha_n = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{\frac{-2\pi i k n}{N}} = \left\{\text{обозначим сумму как } \tilde{\alpha}_n\right\} = \frac{2\pi}{N}\tilde{\alpha}_n. \tag{5}$$

[1] В действительности под этим окном мы подразумеваем смещенное на $\frac{\Delta_t}{2}$, т.е $[-\frac{\Delta_t}{2}, T - \frac{\Delta_t}{2}]$.

[2] Смысл и подробное обоснование формул (3), (4) см. [1].

2.2 Программная реализация в случае окна вида $[0,T]$

Как уже упоминалось, в среде `MatLab` реализована функция `fft`, с функциональной точки зрения в точности совпадающая с формулой

$$\tilde{\alpha}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{\frac{-2\pi i k n}{N}}.$$

Но тогда, раз верно (5), то задав сетку `t_k = 0:dt:T;` (предварительно инициализировав переменную `dt` значением Δ_t) и сеточную функцию `f0_k = f(t_k);`, мы можем найти коэффициенты $\tilde{\alpha}_n$

```
a_n = fft(f_k);
```

и сразу же вычислить требуемую аппроксимацию $\hat{F}(\lambda)$

```
F0_n = 2*pi/N * a_n;
```

в точках $\lambda_n = \frac{2\pi n}{T}$ (`l_n = 0:(2*pi/T):(2*pi*(N-1)/T);`).

Мотивация именования переменных `f0_k` и `F0_k` будет понятная далее.

2.3 Еще немного математики

Пусть теперь требуется выбрать отсчеты функции $f(t)$ из окна $[a,b]$. Определим функцию $\mathring{f}(t) = f(t-a)$ отсчеты которой из окна $[0, b-a]$ соответствуют требуемым отсчетам функции $f(t)$. Вспомним одно из свойств преобразования Фурье, а именно

$$f(t-a) \leftrightarrow e^{-i\lambda a} F(\lambda).$$

Но тогда

$$\begin{tikzcd} f(t-a) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, equal] & e^{-i\lambda a}F(\lambda) \arrow[d, equal] \\ \mathring{f}(t) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathring{F}(\lambda). \end{tikzcd}$$

А значит

$$F(\lambda) = e^{i\lambda a} \mathring{F}(\lambda). \tag{6}$$

Из пункта 2.1 нам известна аппроксимация функции $\mathring{F}(\lambda)$ в точках λ_n

$$\mathring{F}(\lambda_n) \approx \hat{F}(\lambda_n) = \hat{F}_n \quad \lambda_n = \frac{2\pi n}{T},\ n = \overline{0, N-1}$$

Из чего, с учетом (6), делаем вывод

$$F(\lambda_n) \approx e^{i\lambda_n a} \hat{F}_n \quad \lambda_n = \frac{2\pi n}{T},\ n = \overline{0, N-1} \tag{7}$$

2.4 Программная реализация в случае окна вида $[a,b]$

В силу утверждения (7) случай с общим видом окна [a,b] легко сводится к уже рассмотренному 2.2. С небольшими добавлениями относительно пункта 2.2 приводим листинг итоговой программы [3].

```
a0 = 0; b0 = b-a;             %для удобства явно зададим границы сдвинутого окна
tn = a0:dt:(b0-dt/2);         %сетка \t_n
dl = 2*pi/T;                  %шаг \Delta_lambda
ln = 0:dl:2*pi*(N-1)/T;       %сетка \lambda_n
f0 = @(t) fHandle(t-a);       %функция f_0 = f(t-a)
f0n = f0(tn);                 %сеточная функция f_0n
F0n = 2*pi/N * fft(f0n);      %образ Фурье сеточной функции f_0n
Fn = exp(1i*ln*a).*F0n;       %образ Фурье сеточной функции f_0 (явно не заданной!)
```

[3]Считаем что переменные dt, N, a, b, T предварительно проинициализированны корректными значениями Δ_t, N, a, b, T соответственно.

3 Аналитический вывод преобразования Фурье некоторых функций

Для дальнейшей иллюстрации результатов работы программы будет полезно вручную вычислить преобразование Фурье некоторых функций. Благодаря этому, позже мы сможем наглядно сравнить численный результат с аналитическим.

Пример 1. Функция $f(t) = te^{-2|t|}\,\mathrm{sh}(t)$.
Преобразование Фурье функции $f(t)$ по определению имеет вид

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} te^{-2|t|}\,\mathrm{sh}(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

Воспользуемся свойством преобразования Фурье

$$(-it)f(t) \leftrightarrow F'(\lambda):$$

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(-it)ie^{-2|t|}\,\mathrm{sh}(t)e^{-i\lambda t}\,dt,\ \text{обозначим } g(t) = ie^{-2|t|}\,\mathrm{sh}(t),\ \text{тогда}$$

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(-it)g(t)e^{-i\lambda t}\,dt = G'(\lambda),\ \text{где } G(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\lambda t}\,dt. \tag{8}$$

Перейдем вычислению $G(\lambda)$

$$G(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\lambda t}\,dt = \big\{\text{т.к } g(t) \ \text{— нечетная}\big\} = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin(\lambda t)\,dt =$$

$$= \big\{\text{раскроем модуль в экспоненте}\big\} = i\int\limits_{-\infty}^{0} ie^{2t}\,\mathrm{sh}(t)\sin(\lambda t)\,dt + i\int\limits_{0}^{\infty} ie^{-2t}\,\mathrm{sh}(t)\sin(\lambda t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}\,\mathrm{sh}(t)\sin(\lambda t)\,dt - \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2t}\,\mathrm{sh}(t)\sin(\lambda t)\,dt = -I_1 - I_2.$$

$$I_1 = \big\{\text{произведем замену } x = -t\big\} = \int_{\infty}^{0} e^{-2x}\,\mathrm{sh}(-x)\sin(-\lambda x)\,(-dx) = \int_{0}^{\infty} e^{-2x}\,\mathrm{sh}(x)\sin(\lambda x)\,dx = I_2.$$

Таким образом

$$G(\lambda) = -I_1 - I_2 = -2I_2 = -2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2t}\,\mathrm{sh}(t)\sin(\lambda t)\,dt,$$

далее

$$G(\lambda) = -2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2t}\,\mathrm{sh}(t)\sin(\lambda t)\,dt = -2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2t}\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\frac{e^{i\lambda t}-e^{-i\lambda t}}{2i}\,dt =$$

$$= \frac{i}{2}\int\limits_{0}^{\infty}(e^{-t}-e^{-3t})(e^{i\lambda t}-e^{-i\lambda t})\,dt = \frac{i}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{(-1+i\lambda)t} - e^{(-1-i\lambda)t} - e^{(-3+i\lambda)t} + e^{(-3-i\lambda)t}\,dt =$$

$$= \frac{i}{2}\Big(\frac{1}{-1+i\lambda}e^{(-1+i\lambda)t} - \frac{1}{-1-i\lambda}e^{(-1-i\lambda)t} - \frac{1}{-3+i\lambda}e^{(-3+i\lambda)t} + \frac{1}{-3-i\lambda}e^{(-3-i\lambda)t}\Big)\Big|_{0}^{\infty} =$$

$$= \frac{i}{2}\Big(\frac{1}{1-i\lambda} - \frac{1}{1+i\lambda} - \frac{1}{3-i\lambda} + \frac{1}{3+i\lambda}\Big) = \frac{i}{2}\Big(\frac{2i\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2i\lambda}{9+\lambda^2}\Big) =$$

$$= \Big(-\frac{1}{1+\lambda^2} + \frac{1}{9+\lambda^2}\Big) = \frac{-8}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)}.$$

Получив $G(\lambda)$, мы можем вернуться к вычислению $F(\lambda)$, которое, в силу (8) сводится к нахождению производной

$$\Big(\frac{-8}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)}\Big)' = \Big(\frac{-8}{(9+10\lambda^2+\lambda^4)}\Big)' = \frac{8(20\lambda+4\lambda^3)}{(9+10\lambda^2+\lambda^4)^2} = \frac{32\lambda(5+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2(9+\lambda^2)^2}$$

Отдельно выпишем полученный результат

$$F(\lambda) = \frac{32\lambda(5+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2(9+\lambda^2)^2}. \tag{9}$$

Пример 2. Функция $f(t) = \frac{t}{2+2t+t^2}$.
Преобразование Фурье данной функции по определению имеет вид

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{2+2t+t^2} e^{-i\lambda t}\, dt. \tag{10}$$

Предварительно напомним важное следствие леммы Жордана [4].

Утверждение 1 *Пусть $f(z)$ аналитична при $|z|>R$ при достаточно большом R, не имеет особых точек на $\mathbb{R}$ и $f(z) \xrightarrow[im\, z\geqslant 0]{|z|\to 0} 0$, тогда при $\lambda>0$*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{z_i\,:\, im\, z>0} res(e^{i\lambda z} f(z), z_i).$$

Отметим, что при $\lambda \neq 0$ мы находимся (с некоторыми поправками) в условиях утв.1.

Перед вычислением интеграла (10) найдем особые точки подинтегральной функциии и соответствующие им вычеты.

$$g(t) = \frac{te^{-i\lambda x}}{2+2t+t^2} = \frac{te^{-i\lambda x}}{(t+1)^2+1} = \frac{te^{-i\lambda x}}{(t+1-i)(t+1+i)}.$$

Так, имеем два полюса z_1, z_2 первого порядка с ненулевой мнимой частью

$$\begin{aligned} z_1 &= -1+i, \text{ находится в верхней полуплоскости,}\\ z_2 &= -1-i, \text{ находится в нижней полуплоскости.}\end{aligned}$$

Вычеты для них

$$\begin{aligned} res(g(z), z_1) &= \lim_{z\to z_1} g(z)(z-z_1) = \frac{z_1 e^{-i\lambda z_1}}{z_1 - z_2} = \frac{(-1+i)e^{-i\lambda(-1+i)}}{(-1+i)-(-1-i)} = \frac{-1+i}{2i} e^{\lambda(1+i)},\\ res(g(z), z_2) &= \lim_{z\to z_2} g(z)(z-z_2) = \frac{z_2 e^{-i\lambda z_2}}{z_2 - z_1} = \frac{(-1-i)e^{-i\lambda(-1-i)}}{(-1-i)-(-1+i)} = \frac{1+i}{2i} e^{\lambda(-1+i)}.\end{aligned}$$

Теперь мы без труда можем найти интеграл (10). Рассмотрим три случая

$\lambda > 0:$

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{2+2t+t^2} e^{-i\lambda t}\, dt = \big\{\text{используем лемму Жордана для нижней полуплоскости}\big\} =$$

$$= -2\pi i\, res(g(z), z_2) = -2\pi i \frac{1+i}{2i} e^{\lambda(-1+i)} = \pi(-1-i)e^{\lambda(-1+i)}.$$

[4] Также см. [1]

$\lambda < 0:$

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{2+2t+t^2} e^{-i\lambda t}\,dt = \big\{\text{исп. л. Ж. для верхней полуплоскости}\big\} =$$

$$= 2\pi i\; res(g(z), z_1) = 2\pi i \frac{-1+i}{2i} e^{\lambda(1+i)} = \pi(-1+i)e^{\lambda(1+i)}.$$

$\lambda = 0:$

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{2+2t+t^2}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(t+1-1)\,dt}{(t+1)^2+1} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2(t+1)\,dt}{(t+1)^2+1} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t+1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x+1} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2+1} \overset{\text{(v.p)}}{=} \ln|x+1|\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \operatorname{arctg}(y)\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} \overset{\text{(v.p)}}{=} 0 - \Big(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\Big) = -\pi.$$

Итого

$$F(\lambda) = \begin{cases} \pi(-1+i)e^{\lambda(1+i)}, & \lambda < 0, \\ -\pi, & \lambda = 0, \\ \pi(-1-i)e^{\lambda(-1+i)}, & \lambda > 0. \end{cases} \tag{11}$$

4 Иллюстрации

Перейдем к результатам работы программы

Список литературы

[1] Точилин П. А. кафедральный курс *«Преобразование Лапласа-Фурье»*, 2020.