



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа. Часть 1

«Исследование динамических систем с дискретным временем»

Студент 315 группы
А. А. Владимиров

Научный руководитель
Д. А. Алимов

Москва, 2021

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Анализ первой системы	2
2.1	Неподвижные точки и их устойчивость	2
2.2	Циклы	5
3	Анализ второй системы	9
3.1	Неподвижные точки	9
3.2	Инвариантная кривая и бифуркация Неймарка–Сакера I	12
3.3	Снова об области допустимых параметров	12
3.4	Инвариантная кривая и бифуркация Неймарка–Сакера II	13

1 Постановка задачи

Перед нами одномерная дискретная динамическая система

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}(1 - u_t), \quad 0 < u_t < 1, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

и дискретная динамическая система с запаздыванием

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}(1 - u_{t-1}), \quad 0 < u_t < 1, \quad t \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Требуется провести качественный анализ предложенных систем.

Для удобства дальнейшего изложения отметим, что система (1) и, с некоторыми оговорками (о которых позже), система (2) являются частными случаями такого объекта, как *однопараметрическая дискретная динамическая система*, определяемая отображением f :

$$u \mapsto f(u) = f(u; r), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}, \quad f : U \rightarrow U. \quad (3)$$

Здесь множество U – фазовое пространство, r – параметр.

2 Анализ первой системы

Для системы (1) отображение $f : U \rightarrow U$ имеет вид:

$$f(u; r) = r\sqrt{u}(1 - u), \quad U = (0, 1), \quad r \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Перейдем к её анализу.

2.1 Неподвижные точки и их устойчивость

В случае дискретной динамической системы элементарно вводится

Определение 1 ([1]). *Неподвижными точками* системы (3) называются такие точки фазового пространства $u^* \in U$, что $f(u^*) = u^*$.

Таким образом, чтобы найти все неподвижные точки системы (1) достаточно решить уравнение

$$r\sqrt{u}(1-u) = u, \text{ на интервале } (0, 1),$$

что мы и сделаем. В условиях $u \in (0, 1)$ справедливо

$$\begin{aligned} r\sqrt{u}(1-u) = u &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r(1-u) = \sqrt{u}. \end{aligned}$$

Заметим, что левая часть уравнения принадлежит интервалу $(0, r)$, правая — интервалу $(0, 1)$, следовательно решения существуют лишь при $r \in (0, 1)$. Наложив это дополнительное ограничение имеем

$$\begin{aligned} r(1-u) = \sqrt{u} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r^2u^2 - (1+2r^2)u + r^2 = 0. \end{aligned}$$

Полученное квадратное уравнение имеет решения

$$u_{1,2} = \frac{1+2r^2 \pm \sqrt{1+4r^2}}{2r^2}.$$

Нетрудно проверить, что наложенным нами ограничениям удовлетворяет лишь решение

$$u^* = \frac{1+2r^2 - \sqrt{1+4r^2}}{2r^2}, \quad (5)$$

причем для всех r из $(0, 1)$.

Перейдем к исследованию вопроса устойчивости единственной неподвижной точки u^* (5), существующей при значениях параметра $r \in (0, 1)$.

Определение 2 ([1]). Неподвижная точка u^* системы (3) называется *устойчивой по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых начальных данных u_0 из δ -окрестности точки u^* вся траектория системы u_t , $t = 0, 1, 2 \dots$ содержится в ε -окрестности точки u^* .

Если, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(u_t) = u^*,$$

то точка u^* называется *асимптотически устойчивой*.

В дальнейшем нам пригодится следующее полезное

Утверждение 1 ([1]). Пусть u^* — неподвижная точка одномерной системы (3), и пусть f обратима в малой окрестности u^* . Тогда u^* асимптотически устойчива, если $|f_u(u^*)| < 1$, и неустойчива, если $|f_u(u^*)| > 1$.

Таким образом, «в первом приближении» вопрос об устойчивости неподвижной сводится к рассмотрению её мультипликатора¹.

¹Величину $|f_u(u^*)|$ называют *собственным значением* или *мультипликатором* неподвижной точки одномерной динамической системы с дискретным временем (см. [1] п.3.4, стр. 77).

Итак,

$$f_u(u^*; r) = \left(r\sqrt{u^*}(1 - u^*) \right)_u = r \left(\frac{1}{2\sqrt{u^*}} - \frac{3}{2}\sqrt{u^*} \right) = r \left(\frac{1 - 3u^*}{2\sqrt{u^*}} \right) = r \left(\frac{1 - 3\frac{1+2r^2-\sqrt{1+4r^2}}{2r^2}}{2\sqrt{\frac{1+2r^2-\sqrt{1+4r^2}}{2r^2}}} \right). \quad (6)$$

Довольно тяжелый анализ выражения (6) предоставим компьютеру. Тем не менее, далее нам понадобятся значения $r \in (0, 1)$, на которых функция $\mu(r) = f_u(u^*; r)$ обращается в нуль, которые мы вычислим аналитически.

$$\begin{aligned} \mu(r) = 0 &\Leftrightarrow f_u(u^*; r) = 0 \Leftrightarrow r \left(\frac{1 - 3u^*}{2\sqrt{u^*}} \right) = 0 \Leftrightarrow u^* = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1 + 2r^2 - \sqrt{1 + 4r^2}}{2r^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 + 6r^2 - 3\sqrt{1 + 4r^2} = 2r^2 \Leftrightarrow 3 + 4r^2 = 3\sqrt{1 + 4r^2} \Leftrightarrow 9 + 24r^2 + 16r^4 = 9 + 36r^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 16r^4 - 12r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2(4r^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Единственное полученное значение обозначим за

$$r_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (7)$$

Наконец, приведём график мультипликатора неподвижной точки u^* , $\mu(r) = f_u(u^*; r)$, построенный в среде MatLab².

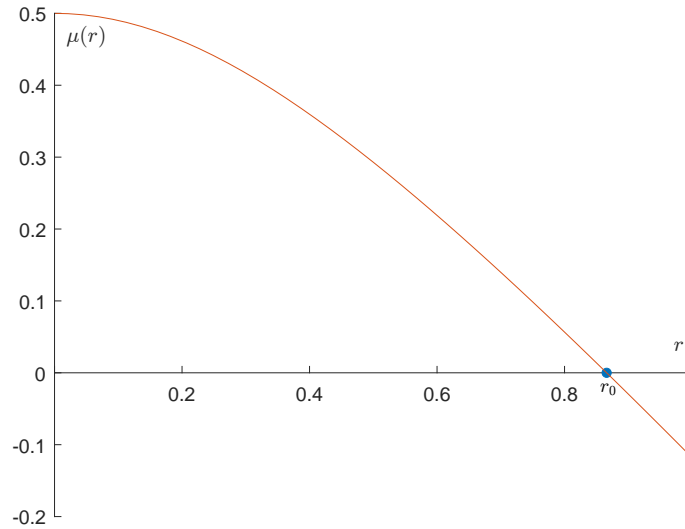


Рис. 1: Зависимость величины мультипликатора от параметра.

Так

$$\begin{aligned} \mu(r) &\in (0, 1), & \text{при } r &\in (0, r_0), \\ \mu(r) &= 0, & \text{при } r &= r_0, \\ \mu(r) &\in (-1, 0), & \text{при } r &\in (r_0, 1), \end{aligned}$$

что, как следует из утв. 1, говорит об асимптотической устойчивости точки u^* .

Подведём итог. При значениях параметра $0 < r < 1$ в системе (1) существует одна неподвижная точка $u^* = \frac{1+2r^2-\sqrt{1+4r^2}}{2r^2}$, при всех прочих r неподвижных точек нет. В случае существования

²Подробнее со всеми вычислениями проведёнными в MatLab и использованными в работе вы можете ознакомиться в приложенном .mlx файле.

неподвижной точки, она является асимптотически устойчивой для всех $0 < r < 1$. Мультипликатор точки u^* знакопеременен и обращается в нуль при $r_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а потому устойчивость точки имеет разный характер в зависимости от значения r . При $r \in (0, r_0]$ u^* неподвижная точка устойчива монотонно, когда же $r \in (r_0, 1)$, близкие орбиты сходятся к неподвижной точке колебательным образом³. Этот эффект можно наблюдать на рис.2.

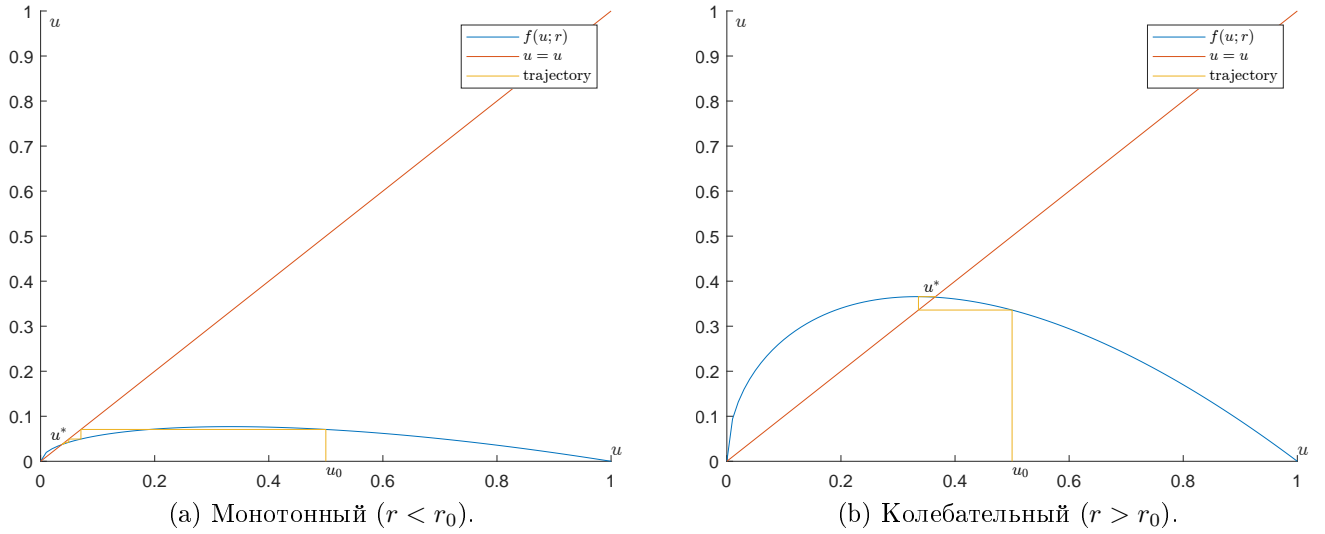


Рис. 2: Характер сходимости к неподвижной точке.

Теперь, считая вопрос о неподвижных точках в достаточной степени исчерпанным, мы можем перейти к исследованию системы (1) на наличие циклов, их длину и устойчивость.

2.2 Циклы

Определение 3 ([1]). Циклом длины k дискретной динамической системы

$$u_{t+1} = f(u_t), \quad u_t \in \mathbb{R},$$

называется множество различных точек u_1, u_1, \dots, u_k таких, что

$$u_2 = f(u_1), \dots, u_k = f(u_{k-1}), u_1 = f(u_k).$$

Замечание ([1]). В силу определения цикла, каждая из точек $u_i, i = 1, 2, \dots, k$, является неподвижной точкой k -ой итерации отображения

$$f^k(u) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_k.$$

Таким образом, вопрос об устойчивости цикла сводится к вопросу об устойчивости неподвижных точек отображения f^k , которые составляют цикл длины k .

Итак, для нахождения циклов длины k нам потребуется найти k различных решений задачи

$$f^k(u) = u, \tag{8}$$

удовлетворяющих определению 3. В общем случае это довольно тяжелая задача, поэтому решение ищут численно. Как известно, любой численный алгоритм «адекватно» работает на корректно поставленных, а значит устойчивых задачах. Следовательно, на нашу задачу придется наложить еще одно условие

$$\frac{df^k(u, r)}{du} < 1, \tag{9}$$

³см. [1] п.3.4, стр.77.

которое (см. зам. 2.2) гарантирует устойчивость искомого цикла. Так, наша задача сводится к нахождению устойчивых циклов (8), (9). Решим её для $k = 2, 3$.

Перед поиском циклов сделаем ещё пару наблюдений. Первое — до сих пор, ввиду ненужности мы не уточняли область R допустимых параметров r , при которых динамическая система на очередной итерации не может покинуть фазовое пространство $U = (0, 1)$, а значит остаётся корректно заданной. Нетрудно показать, что область R представляет из себя интервал $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Для этого рассмотрим функцию

$$g(u) = \sqrt{u}(1 - u), \quad u \in (0, 1).$$

Её производная равна

$$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{3}{2}\sqrt{u},$$

И обращается в ноль лишь при $u = \frac{1}{3}$, $u \in (0, 1)$. Более того, вторая производная функции

$$g''(u) = -\frac{1}{4\sqrt{u}} \left(\frac{1}{u} + 3\right) < 0$$

на всём интервале $(0, 1)$. Отсюда, очевидно, следует, что в точке $u = \frac{1}{3}$ функция $g(u)$ достигает максимума на $(0, 1)$, и

$$0 < g(u) < g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad u \in U.$$

Как нетрудно заметить, функция $f(u; r) = rg(u)$, а значит, для того, чтобы $\forall u \in U$, выполнялось $f(u; r) \in U$, необходимо и достаточно, чтобы $r \in R = (0, r_{\max})$, где $r_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Теперь, второе наблюдение. Функция $f(u; r)$, определяющая динамическую систему (1) непрерывно зависит от параметра r^4 , что позволяет нам ожидать непрерывной зависимости траекторий системы от параметра 5 . Далее, производная по u отображения $f^k(u; r)$, характеризующая (2.2) устойчивость цикла (в случае, разумеется его существования) по теореме о производной сложной функции равна

$$f^k(u; r)'_u = \underbrace{f'_u(u; r) \cdot \dots \cdot f'_u(u; r)}_k = (f'_u(u; r))^k \stackrel{(6)}{=} r^k \left(\frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{3}{2}\sqrt{u}\right)^k = \frac{r^k}{2^k u^{\frac{k}{2}}} (1 - 3u)^k,$$

и, следовательно, является монотонно возрастающей по r на R . Это, в частности, означает, что локально *свойство устойчивости сохраняется при уменьшении r* .

Наконец, учитывая вышесказанное, для нахождения устойчивых циклов, вместо решения задачи (8) с «тяжёлым» ограничением (9), мы можем решить систему в «пограничном» случае

$$\begin{aligned} f^k(u; r) &= u, \\ f^k(u; r)'_u &= 1; \end{aligned} \tag{10}$$

и немного уменьшая r ожидать сохранения существования устойчивого решения. Следуя такой логике, получим k различных решений, подозрительных на образование цикла, выберём наименьшее r_0 , перерешаем уравнение

$$f^k(u; r_0) = u,$$

⁴более того, $f(u; r) \in C^\infty(U, R)$.

⁵Доказательство такого смелого утверждения выходит за рамки курса [2], впрочем, автор предполагает его справедливость, так как иначе многие техники, используемые в курсе, и, как следствие вынужденные быть использованными в данной работе, были бы попросту неправомерны.

и, наконец, вероятно получим устойчивый цикл длины k . Так мы и поступим.

Следуя обсуждённому алгоритму, для $k = 2$ получим набор решений

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ r_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,284 \\ 2,268 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,398 \\ 2,056 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_3 \\ r_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,449 \\ 1,218 \end{pmatrix}.$$

И действительно при $r_0 = 2 < r_1, r_2$ получим устойчивый цикл длины 2 в точках

$$\hat{u}_1 \approx 0,451, \hat{u}_2 \approx 0,737,$$

что и иллюстрирует рис. 3.

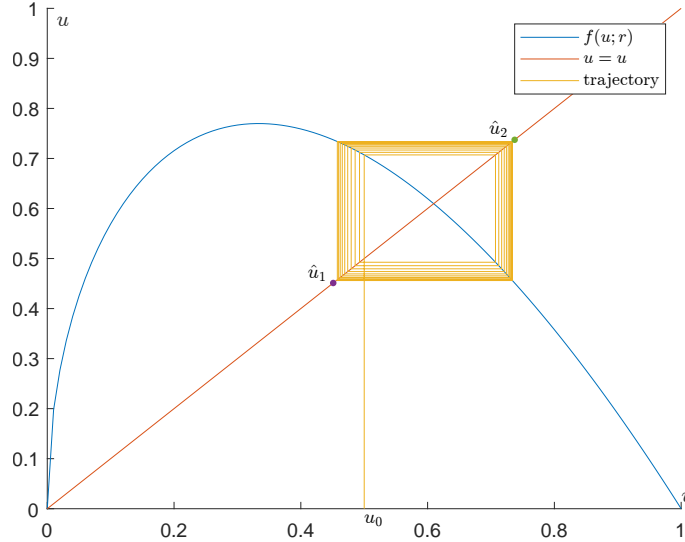


Рис. 3: Устойчивый цикл длины 2 ($r = 2, u_0 = 0,5$).

Подобной ситуации в случае $k = 3$ не наблюдается. Даже достаточно плотная выборка начальных значений и высокая точность вычислительного алгоритма не даёт нужных результатов. Поэтому, с достаточной степенью уверенности можно утверждать что устойчивого цикла длины 3 системе (1) не возникает. В качестве иллюстрации происходящего при увеличении r приводим график на рис. 4.

Помимо прочего, об отсутствии устойчивого цикла длины 3 можно судить по бифуркационной диаграмме системы (1), представляющей собой классический каскад удвоения периода. На рис. 5 изображены последовательные бифуркации системы (1), полученные с помощью компьютерного итерирования отображения (4).

В дополнение, исследуем динамику *показателя Ляпунова* некоторой траектории, что даст некоторое представление об устойчивости системы и изменении этого свойства в зависимости от параметра⁶.

Определение 4 ([1]). Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое отображение. *Показателем Ляпунова* траектории $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется величина

$$h(u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(u_1)| + \ln |f'(u_2)| + \dots + \ln |f'(u_n)|}{n}, \quad (\ln 0 := -\infty)$$

если этот предел существует.

Следующий график (рис. 6) демонстрирует зависимость показателя Ляпунова траекторий, выпущенных из точек сетки $u_1 = 0:0.1:1$, от параметра r .

⁶Подробнее см.[1], п.3.6, стр. 86.

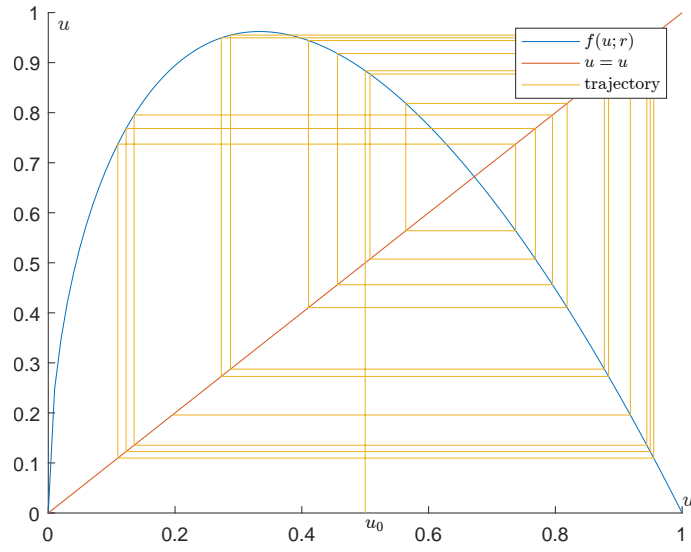


Рис. 4: Потеря устойчивости ($r = 2,5, u_0 = 0,5$).

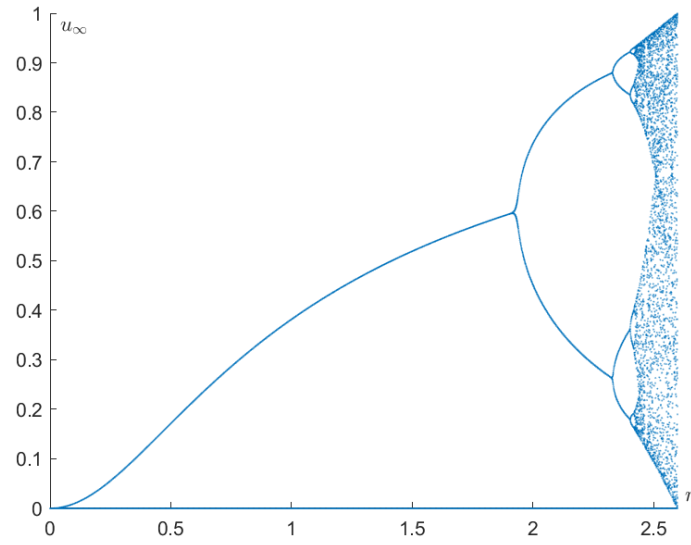


Рис. 5: Каскад удвоения периода в дискретной динамической системе (1). $r \in (0, r_{max})$.

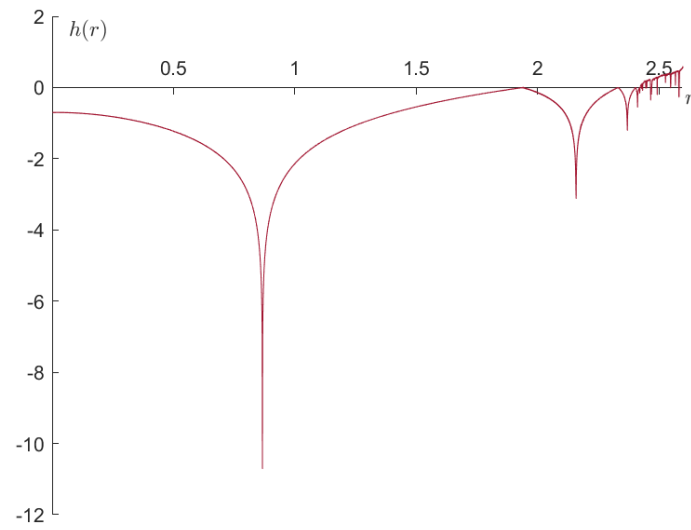


Рис. 6: Показатель Ляпунова. $u_0 = 0,5, r \in (0, r_{max})$.

Как видно из графика, распределение показателя Ляпунова не зависит от начальной точки траектории (графики, построенные в разных точках сетки наложились друг на друга), что позволяет в данном конкретном случае говорить о показателе Ляпунова, как о *характеристике системы в целом*. Также отметим, что в окрестности r_{max} показатель Ляпунова становится положительным, т.е. система становится неустойчивой и, более того, хаотичной, что подтверждается бифуркационной диаграммой (рис. 5) и соответствует нашим представлениям о смысле показателя Ляпунова⁷.

Итак, на определенном промежутке значений параметра в системе (1) наблюдается возникновение устойчивого цикла длины 2 (рис. 3). Судя по бифуркационной диаграмме (рис. 5) и динамике показателя Ляпунова (рис. 6), при дальнейшем увеличении параметра можно предположить появление устойчивых циклов большего периода (но не периода 3 (рис.4)), после чего, поведение системы становится хаотическим.

На этом мы заканчиваем исследование системы (1) и переходим к системе (2).

3 Анализ второй системы

Для удобства, повторно приведем вид рассматриваемой системы (2)

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}(1 - u_{t-1}), \quad 0 < u_t < 1, \quad t \in \mathbb{N},$$

которая, как было отмечено в пункте 1, является частным случаем системы вида (3). Действительно, тривиальной заменой переменных

$$\begin{aligned} u_1(t+1) &= r\sqrt{u_1(t)}(1 - u_2(t)), \\ u_2(t+1) &= u_1(t), \end{aligned} \tag{11}$$

система с запаздыванием (2) приводится к обыкновенной двумерной динамической системе (3).

Впрочем, некоторые особенности у многомерной дискретной динамической системы, сводимой к системе с запаздыванием всё же имеются. Так, например, неподвижные точки такой системы являются решениями уравнения

$$u^* = f(u^*, \dots, u^*), \quad u^* \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

где $f(u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-T})$ — функция задающая систему с запаздыванием⁸.

Перед тем как перейти к анализу системы, напомним, что фазовое пространство имеет вид $U = (0, 1)$ в записи (2), и вид $U = (0, 1) \times (0, 1)$ в записи (11). Также, вид (2) позволяет *при первом рассмотрении*⁹ полагать, что, аналогично (1), область допустимых параметров представляет из себя интервал $R = (0, r_{max})$, где $r_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3.1 Неподвижные точки

Уравнение (12) для системы (2) имеет вид

$$u^* = r\sqrt{u^*}(1 - u^*), \quad u^* \in U, \quad r \in R.$$

Анализ¹⁰ решений этого уравнения, позволяет сделать вывод о существовании единственной неподвижной точки

$$u^* = \frac{(\sqrt{4r^2 + 1} - 1)^2}{4r^2}, \tag{13}$$

⁷ см. там же.

⁸ см. [1] п.9.4, стр.224-225.

⁹ О том, почему именно *при первом рассмотрении* — позже.

¹⁰ При исследовании систем 2 и 3, с целью сокращения технических выкладок в тексте работы, большая часть аналитических вычислений произведена посредством пакета символьных вычислений MatLab. Ознакомится с ними можно, по прежнему, в прикрепленных .mlx файлах.

причем для всех $r \in R$.

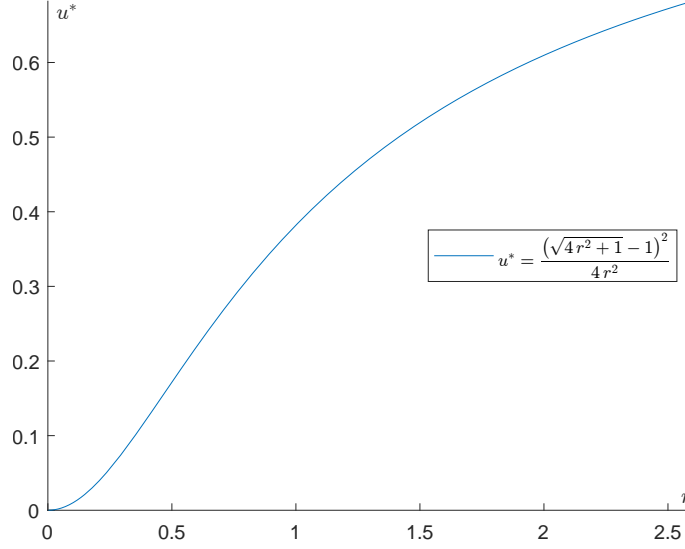


Рис. 7: Положение неподвижной точки системы (2) в зависимости от параметра.

Для разрешения вопроса об устойчивости неподвижной точки (13) нам понадобится

Теорема ([1]). Пусть задана динамическая система с дискретным временем (3):

$$u \mapsto f(u), \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

где f — гладкое отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n . Предположим, что отображение имеет неподвижную точку $u^* : f(u^*) = u^*$. Тогда неподвижная точка u^* устойчива (асимптотически), если все собственные значения μ_1, \dots, μ_n матрицы Якоби вектор-функции $f(u)$, вычисленной в точке u^* , удовлетворяют условию $|\mu_i| < 1$. Если же хоть одно собственное значение удовлетворяет условию $|\mu_i| > 1$, то положение равновесия u^* неустойчиво.

Итак, рассмотрим матрицу Якоби $J(u) = (j_{ik})$ функции $f(u_1, u_2)$, задающей нашу систему в записи (11), в точке u^* .

$$J(u)|_{u^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \Big|_{u^*} = \begin{pmatrix} \frac{r(1-u_2)}{2\sqrt{u_1}} & -r\sqrt{u_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{u^*} = \begin{pmatrix} \frac{r(1-u^*)}{2\sqrt{u^*}} & -r\sqrt{u^*} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Упростим элементы j_{11} и j_{12} .

$$\begin{aligned} j_{11} &= \frac{r(1-u^*)}{2\sqrt{u^*}} = \frac{r \left(1 - \frac{(\sqrt{4r^2+1}-1)^2}{4r^2} \right)}{2\sqrt{\frac{(\sqrt{4r^2+1}-1)^2}{4r^2}}} = \frac{r \frac{4r^2 - (\sqrt{4r^2+1}-1)^2}{4r^2}}{2 \frac{\sqrt{4r^2+1}-1}{2r}} = \\ &= \frac{\frac{4r^2 - (\sqrt{4r^2+1}-1)^2}{4r}}{\frac{\sqrt{4r^2+1}-1}{r}} = \frac{4r^2 - (\sqrt{4r^2+1}-1)^2}{4(\sqrt{4r^2+1}-1)} = \frac{4r^2 - (4r^2 + 1) + 2\sqrt{4r^2+1} - 1}{4(\sqrt{4r^2+1}-1)} = \\ &= \frac{2(\sqrt{4r^2+1}-1)}{4(\sqrt{4r^2+1}-1)} = \frac{1}{2}, \quad \text{при } r \in R. \\ j_{12} &= -r\sqrt{u^*} = -r \frac{(\sqrt{4r^2+1}-1)^2}{4r^2} = -\frac{(\sqrt{4r^2+1}-1)^2}{4r}, \quad \text{при } r \in R. \end{aligned}$$

Таким образом

$$J(u^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{(\sqrt{4r^2+1}-1)^2}{4r} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Собственные значения вычисляются символично и равны

$$\mu_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - \frac{4(\sqrt{4r^2+1}-1)^2}{r}}}{4}.$$

Графический анализ зависимости μ_1 и μ_2 от параметра (см. рис. 8–10) показывает, что начиная с некоторого \hat{r} собственные значения становятся чисто мнимыми и комплексно сопряжёнными¹¹.

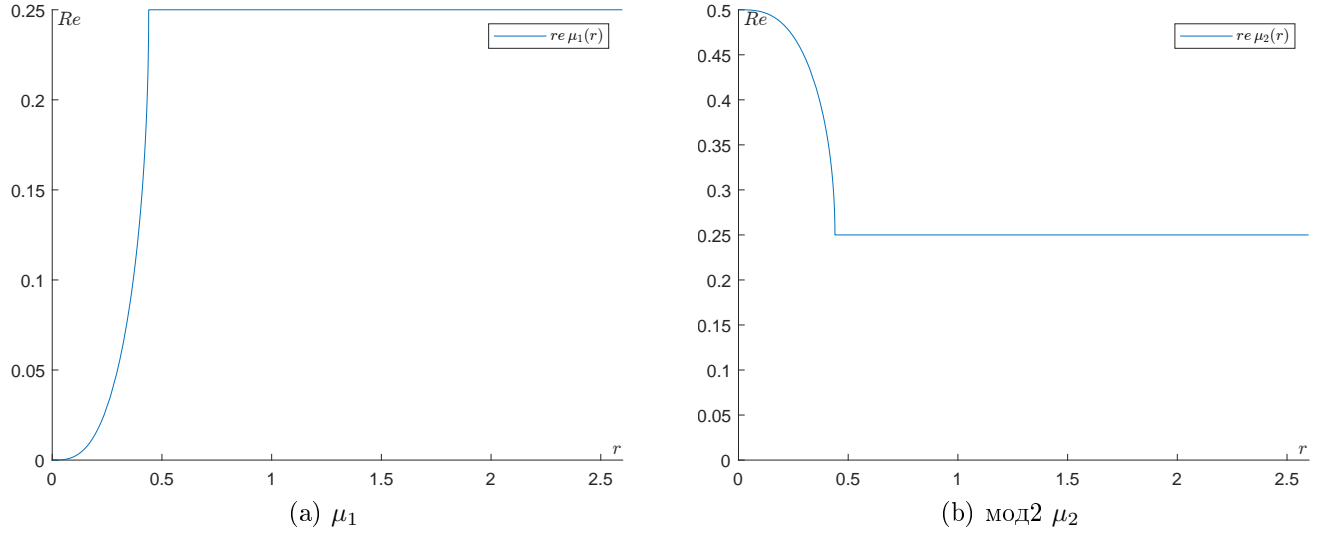


Рис. 8: Действительная часть собственных значений.

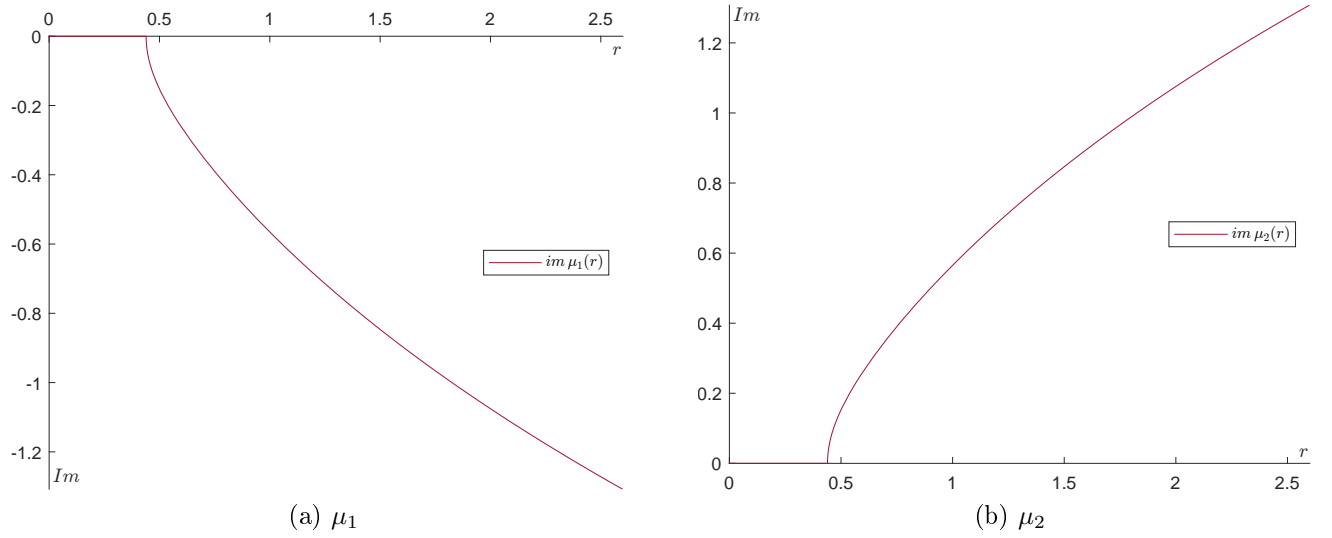


Рис. 9: Мнимая часть собственных значений.

При этом

$$\begin{cases} |\mu_{1,2}| < 1, & \text{при } r \in (0, r_0); \\ |\mu_{1,2}| = 1, & \text{при } r = r_0; \\ |\mu_{1,2}| > 1, & \text{при } r \in (r_0, r_{max}). \end{cases}$$

¹¹что так же, очевидно, следует из того, что элементы матрицы $J(u^*)$ суть вещественные числа, для любых допустимых значений параметра r .

Граничное значение r_0 вычисляется численно и составляет приблизительно 1.755.

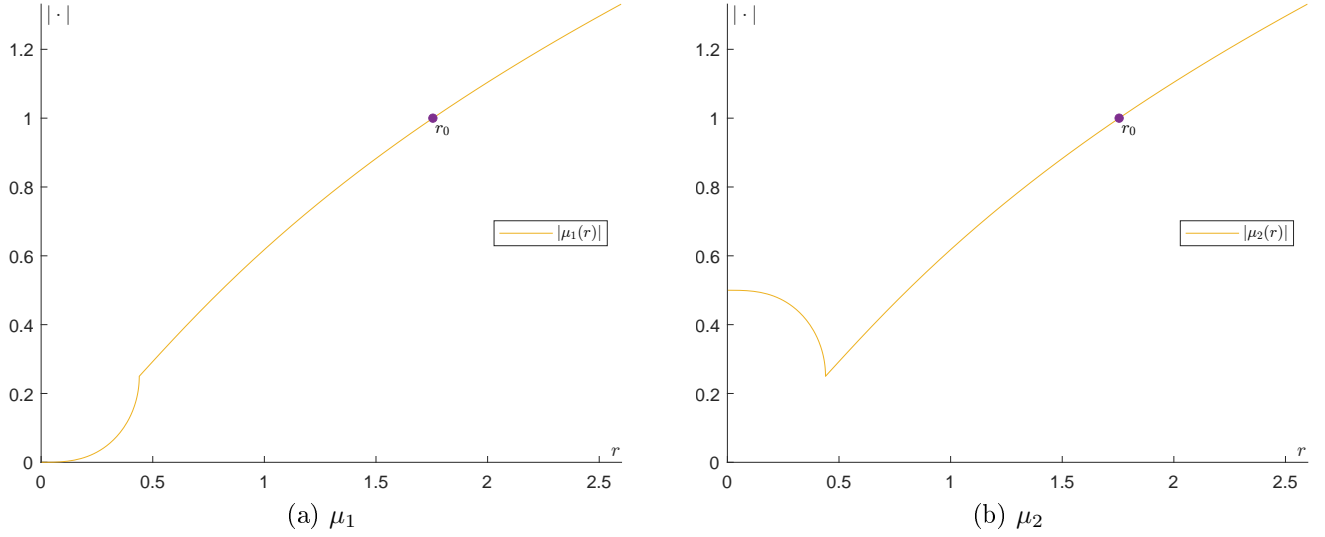


Рис. 10: Модуль собственных значений.

Таким образом, пользуясь теоремой 3.1, мы можем заключить, что система (2) при всех $r \in R$ имеет единственную неподвижную точку (13), устойчивую при значениях r из интервала $(0, r_0)$, и неустойчивую при r из (r_0, r_{\max}) .

3.2 Инвариантная кривая и бифуркация Неймарка–Сакера I

Казалось бы, изученное в предыдущем пункте поведение неподвижной точки u^* говорит о том, что в системе (2) происходит *бифуркация Неймарка-Сакера*. Об этом свидетельствует

Определение 5 ([1]). Рассмотрим двумерную динамическую систему с дискретным временем

$$u \mapsto f(u, \alpha), \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Бифуркация положения равновесия в системе (14), соответствующая появлению мультипликаторов $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$, $\mu_1 = \bar{\mu}_2$, называется *бифуркацией Неймарка-Сакера* или *дискретной бифуркацией Хопфа*.

Однако, как было отмечено непосредственно перед п. 3.1, мы допускали, возможно, менее строгие, чем того требует система (2), ограничения на параметр r .

3.3 Снова об области допустимых параметров

Действительно, рассмотрим $f(u_1, u_2) = r\sqrt{u_1}(1 - u_2) = r g(u_1, u_2)$ — правую часть первого уравнения системы (11). Графический анализ (см. рис. 11) функции $g(u_1, u_2)$ показывает, что уже при $r > 0$ её значения могут превышать единицу, вследствие чего переменные покидают фазовое пространство¹². Таким образом, область допустимых параметров R системы (2) суть есть $(0, 1)$.

¹²Может показаться, что этим явлением можно пренебречь, и, например, естественным образом расширить фазовое пространство. Однако, в случае данной системы, подобное поведение приводит не только к выходу из $U = (0, 1) \times (0, 1)$, но и вообще из \mathbb{R}^2 .

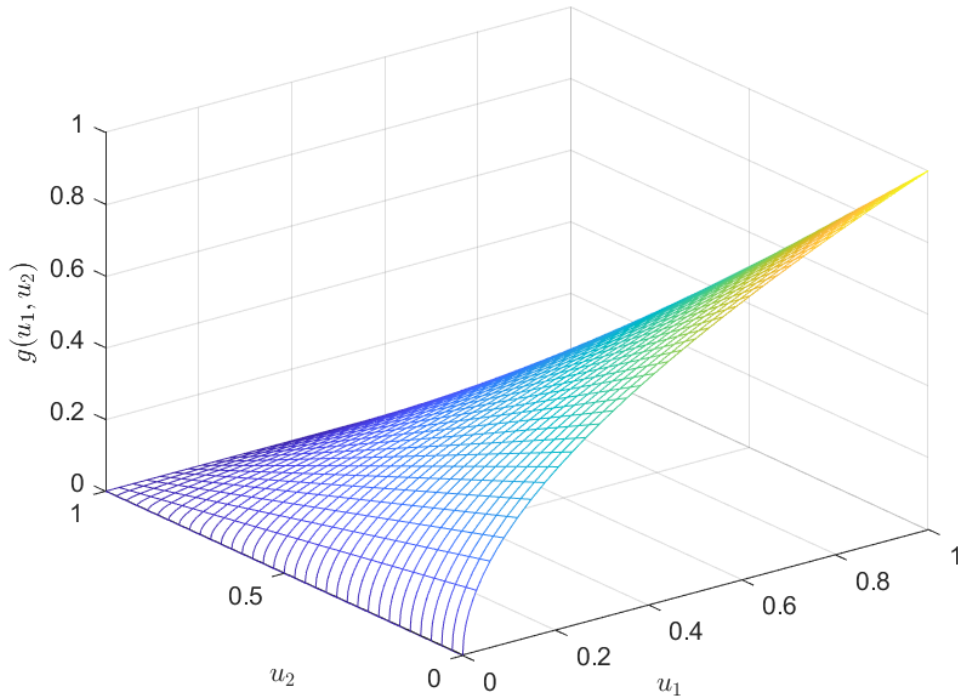


Рис. 11: $g(u_1, u_2) = \sqrt{u_1}(1 - u_2)$.

Так, поскольку предполагаемая точка бифуркации r_0 не входит в R , *никакой бифуркации Неймарка–Сакера в системе (2), строго говоря, не происходит*. Фазовый портрет системы на R не меняется и имеет всего одну особенность — точку устойчивого равновесия u^* .

Ввиду вышесказанного, следующий пункт носит скорее иллюстративный характер.

3.4 Инвариантная кривая и бифуркация Неймарка–Сакера II

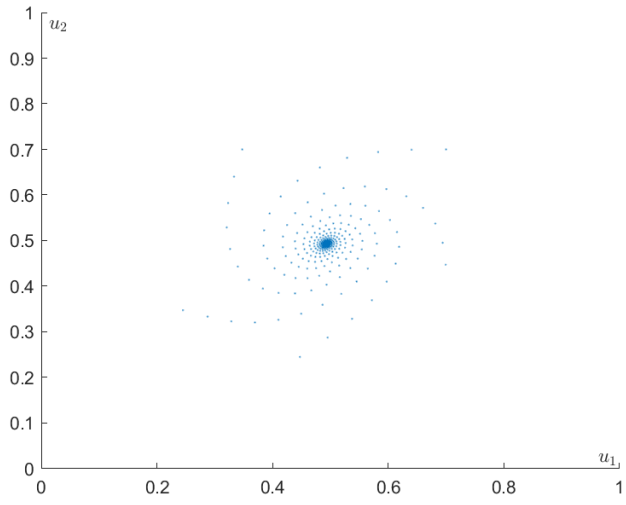
Допустим, что рассматриваемая система может быть корректно задана в области параметра r , где должна происходить бифуркация например посредством сужения её фазового пространства до множества точек $U' \subset U$, орбиты которых не покидают U ¹³. В таком, случае мы получим, вообще говоря, другую систему. В частности, точка бифуркации r_0 может измениться, что, судя по результатам компьютерного моделирования, и происходит. Ниже приведены графики¹⁴ орбиты точки $u_0 = (0.7 \ 0.7)^T$, при различных значениях параметра r .

Полученные изображения дают основания заключить, что в «скорректированной» системе наблюдается суперкритическая¹⁵ бифуркация Неймарка–Сакера — устойчивая неподвижная точка сменяется устойчивой замкнутой инвариантной кривой.

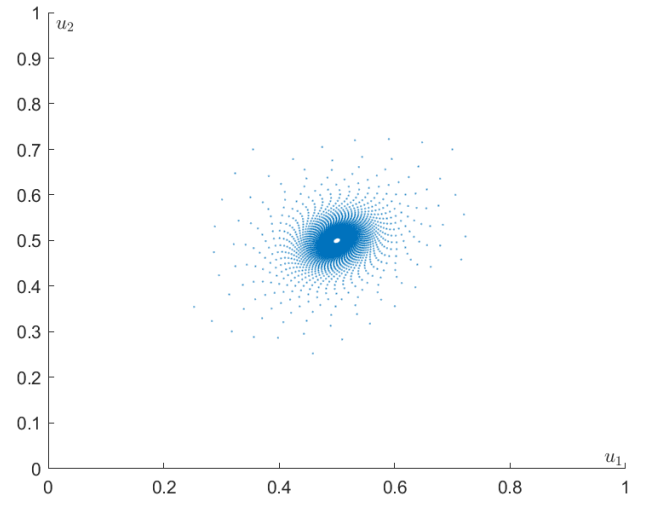
¹³Если такое множество вообще непусто, устойчиво к малым изменениям параметра около точки бифуркации и т.д. Впрочем исследование этого вопроса явно выходит за рамки данной работы.

¹⁴возможность построения которых, говорит о том, что u_0 , вероятно, принадлежит U' .

¹⁵Подробнее см. [1] п. 7.3, п. 9.6.

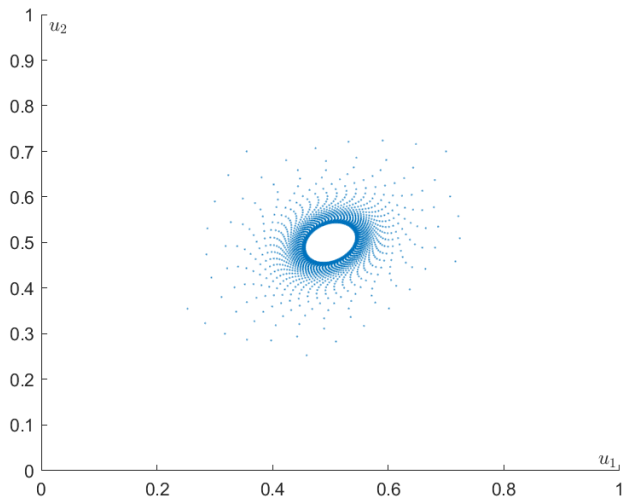


(a) Устойчивая точка равновесия. $r = r_0 - 0.37$.

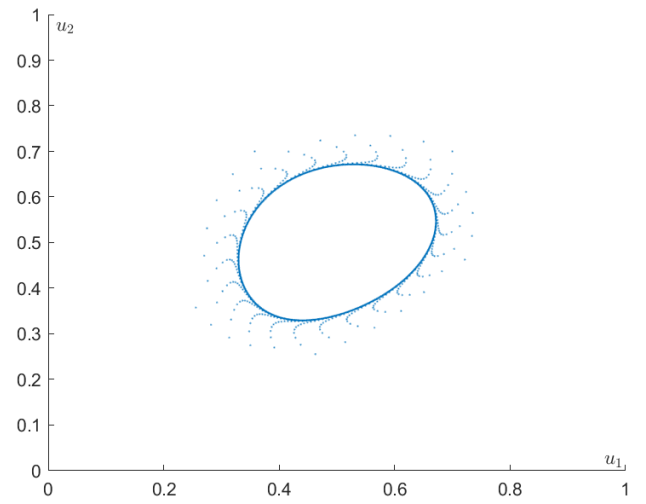


(b) Рождение инвариантной кривой. $r = r_0 - 0.341$.

Рис. 12: Потеря устойчивости.

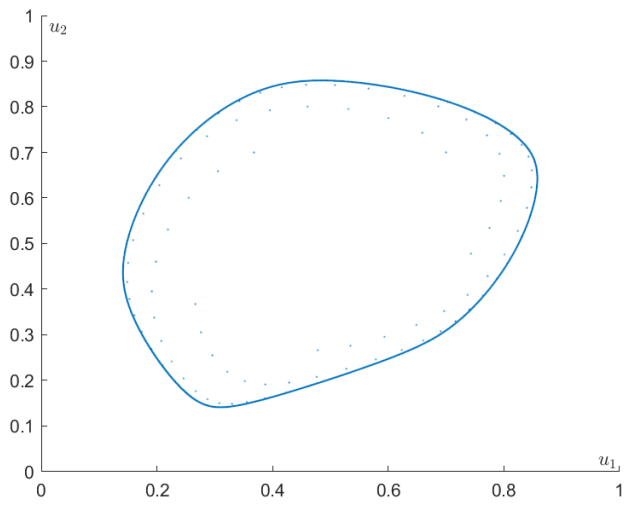


(a) $r = r_0 - 0.34$.

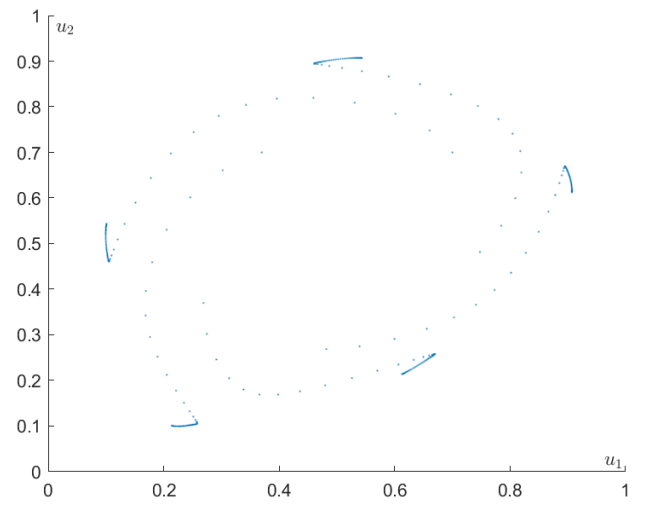


(b) $r = r_0 - 0.33$.

Рис. 13: Рост инвариантной кривой.



(a) $r = r_0 - 0.29$.



(b) $r = r_0 - 0.281$.

Рис. 14: Диссипация(?) инвариантной кривой.

Список литературы

- [1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- [2] Алимов Д. А. кафедральный курс *Динамические системы и биоматематика*, 2021.