Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Лабораторная работа №1

«Линейная задача быстродействия»

Студент 315 группы
А. А. Владимиров

Руководитель Практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Требуется решить линейную задачу быстродействия:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t),\ t \in [t_0, t_1];\\
&x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathcal{P}(t) \text{ — компактное подмножество } \mathbb{R}^2;\\
&x(t_0) \in \mathcal{X}_0,\ x(t_1) \in \mathcal{X}_1;\\
&t_1 - t_0 \to \min_{u(\cdot)}.
\end{aligned} \tag{1}$$

То есть необходимо найти минимальное время $t^* > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества $\mathcal{X}_0$, может попасть в некоторую точку множества $\mathcal{X}_1$. Конкретно в нашей задаче также известен вид множеств:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(t) \equiv \mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x_1 - a)^2 + \beta(x_2 - b)^2 \leqslant c\}, \quad \alpha, \beta, c > 0;\\
\mathcal{X}_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2\}, \quad r > 0;\\
\mathcal{X}_1 = \operatorname{conv}\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \quad q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned} \tag{2}$$

2 Теоретические выкладки

Для решения поставленной задачи нам потребуется известная

Теорема (ПМП для линейной задачи быстродействия)**.** *Пусть* $(x^*(t),\, u^*(t))$ *— оптимальная пара в задаче* (1)*, тогда*

$$\begin{gathered}
\exists\, \psi(t) \in \mathbb{R}^2 \ \text{— сопряженная переменная}:\\
\dot{\psi}(t) = -A^*(t) \cdot \psi(t),\ \psi(t) \neq 0,
\end{gathered} \tag{3}$$

причем имеют место

1) принцип максимума

$$\big\langle \psi(t), B(t)u^*(t) \big\rangle \overset{\text{п.в}}{=} \rho\big(\psi(t), B(t)\mathcal{P}(t)\big), \tag{4}$$

2) условие трансверсальности на левом конце

$$\big\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \big\rangle = \rho\big(\psi(t_0), \mathcal{X}_0\big), \tag{5}$$

3) условие трансверсальности на правом конце

$$\big\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \big\rangle = \rho\big(-\psi(t_1), \mathcal{X}_1\big). \tag{6}$$

Итак пусть $\psi(t), t \in [t_0, t^*]$ — сопряженная к оптимальной паре $(x^*(t),\, u^*(t))$ переменная. Сперва найдем начальную точку оптимальной траектории $x^*(t_0)$. Из левого условия трансверсальности (5) ясно, что $x^*(t_0)$ — опорная точка функции[1] $\rho\big(\psi(t_0), \mathcal{X}_0\big)$. Ивестно, что для $\mathcal{X}_0$ вида (2)

$$\text{опорная точка } x^* = \frac{r}{\|\psi\|_2}\psi,$$

где ψ — аргумент опорной функции $\rho\big(\psi, \mathcal{X}_0\big)$.

Не ограничивая общности допустим, что $\|\psi(t_0)\|_2 = 1$, тогда

$$x^*(t_0) = r\psi(t_0). \tag{7}$$

[1] здесь и далее словосочетание "опорная точка функции $\rho\big(\psi, \mathcal{M}\big)$" означает опорную точку множества $\mathcal{M}$ в направелнии вектора ψ. Подобное словоупотребление мотивировано тем, что в качестве аргумента ψ будут встречаться довольно сложные выражения, которые необходимо явно учитывать в вычислениях. В то же время классическое понятие опорная точка множества плохо отражает (во всяком случае не отражает явно) зависимость этой точки от первого аргумента опорной функции.

Далее, используя принцип максимума (4) получим управление $u^*(t)$. Обозначим за $v^*(t)$ опорную точку функции $\rho\big(\psi(t), B(t)\mathcal{P}(t)\big) = \rho\big(\psi(t), B(t)\mathcal{P}\big)$ для почти всех $t \in [t_0, t^*]$. Тогда из (4)

$$u^*(t) = B^{-1}(t)v^*(t).$$

Из определения опорной функции и свойства: $\rho\big(\psi(t), B(t)\mathcal{P}\big) = \rho\big(B^*(t)\psi(t), \mathcal{P}\big)$; очевидно следует, что

$$v^*(t) = B(t)w^*(t),$$

где $w^*(t)$ — опорная точка для $\rho\big(B^*(t)\psi(t), \mathcal{P}\big)$.

Поскольку

$$\mathcal{P} = P\mathcal{S}_1(0) + q,$$

$$\text{где } P = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha c} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta c} \end{pmatrix},\ q = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \mathcal{S}_1(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\} \quad (\text{см. } (2)),$$

имеем

$$\rho\big(B^*(t)\psi(t), \mathcal{P}\big) = \rho\big(B^*(t)\psi(t), P\mathcal{S}_1(0) + q\big) = \rho\big(P^*B^*(t)\psi(t), \mathcal{S}_1(0)\big) + \rho\big(B^*(t)\psi(t), q\big) = \varrho_1(t) + \varrho_2(t).$$

Опорные точки функций $\varrho_1(t) + \varrho_2(t)$ известны и равны

$$q_1^*(t) = \frac{P^*B^*(t)\psi(t)}{\|P^*B^*(t)\psi(t)\|_2},\ q_2^*(t) = q, \text{ соответственно.}$$

Возвращаясь к поиску опорной точки $w^*(t)$ во множестве $\mathcal{P}$ получим

$$w^*(t) = Pq_1^*(t) + q_2^*(t) = P\frac{P^*B^*(t)\psi(t)}{\|P^*B^*(t)\psi(t)\|_2} + q.$$

Наконец, явно выразим искомую точку $u^*(t)$

$$\begin{gathered} u^*(t) = B^{-1}(t)v^*(t) = B^{-1}(t)B(t)w^*(t) = w^*(t) = (Pq_1^*(t) + q_2^*(t)) = \frac{PP^*B^*(t)\psi(t)}{\|P^*B^*(t)\psi(t)\|_2} + q, \text{ где} \\ P = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha c} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta c} \end{pmatrix},\ q = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix};\ B(t) \text{ — некоторая заданная матрица.} \end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, располагая соответсвующей сопряженной переменной $\psi(t), t \in [t_0, t^*]$ не состовляет труда получить (7), (8) начальную точку $x^*(t_0)$ и оптимальное управление $u^*(t), t \in [t_0, t^*]$. Подставляя полученные значения в (1) получим классическую задачу Коши, при соблюдении условий гладкости имеющюю единственное решение — оптимальную траекторию $x^*(t), t \in [t_0, t^*]$, где t^* — минимальное время. Более того, для получения траектории сопряженной переменной $\psi(t)$ достаточно иметь начальное условие $\psi(t_0)$ и решить соответствующую задачу Коши (3).

Замечание. *Остались не обсужденными проблемы нахождения* ***оптимальных*** $\psi(t_0)$ *и* t^*. *Первая из них решается банальным перебором (осуществляемым, разумеется, компьютером), хоть и немного оптимизированным: ввиду свойств опорных функций мы можем, не сужая множество получаемых на выходе управлений и начальных точек траекторий, подозрительных на оптимальность, перебирать лишь нормированные* $\psi(t_0)$, *т.е лежащие на единичной окружности. С нахождением* t^* *все немного сложнее. Потребуется для каждого перебираемого значения* $\psi(t_0)$, *по достижении целевого множества (или при выходе за некоторое предельно допустимое время), останавливать процесс интегрирования соответствующей задачи Коши* (1). *После осуществления перебора выбрать наименьшее* t^*_{min}. *Соответствующие* t^*_{min} *управление и траекторию будем считать приближенно оптимальными. Точность полученного приближения можно оценить сравнив значения правой и левой части правого условия трансверсальности* (6).

3 Примеры

Ниже приведены иллюстрации найденных алгоритмом решений для некотрых конфигураций системы.

3.1 автономная система

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 20 & 3 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{в (1), и}$$

$$\alpha = 1, \beta = 2, a = 0.5, b = 3, c = 2;\ r = 3;\ (q_1, q_2, q_3, q_4) = \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} \right) \quad \text{в (2).}$$

Достигнутое время $t^*_{min} \approx 0,126$; ошибка условия трансверсальности на правом конце $\approx 0,049$.

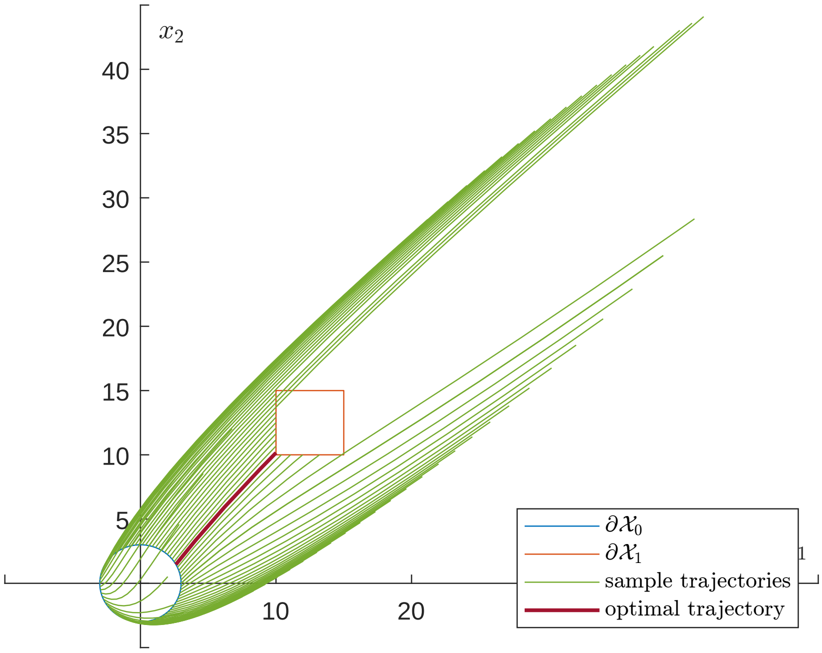

Рис. 1: Траектории подозрительные на оптимальность

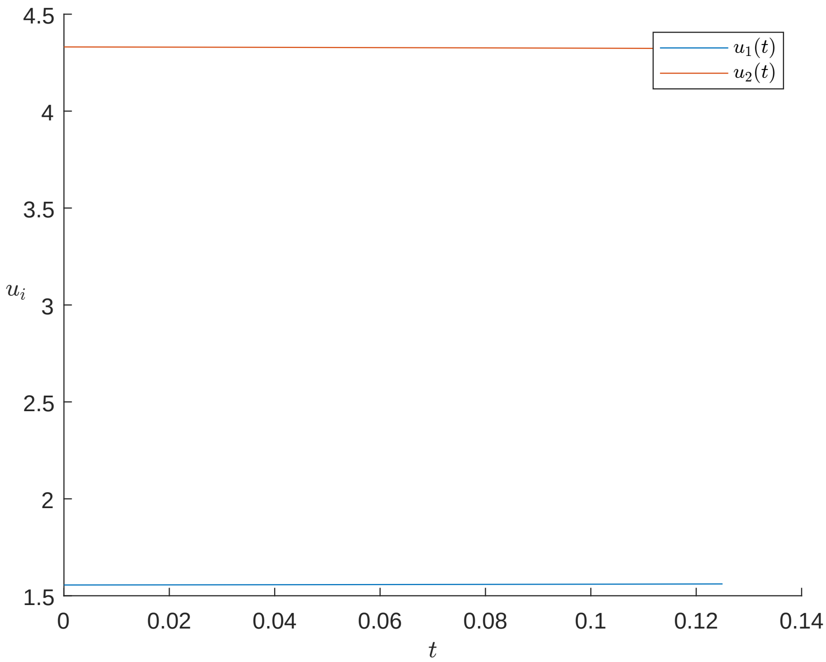

Рис. 2: Компоненты найденного приближенно-оптимального управления

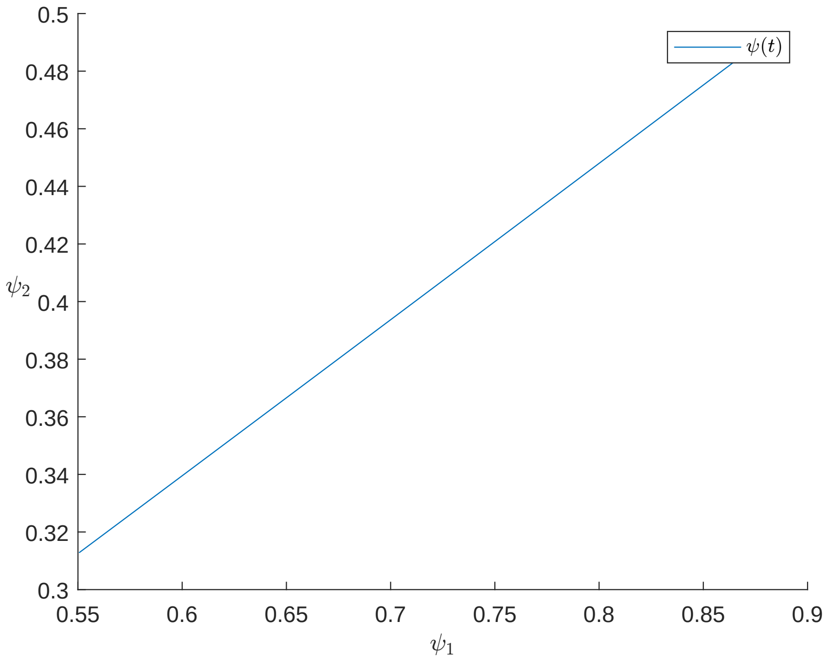

Рис. 3: Сопряженная переменная

3.2 неавтономная система

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & 2 \\ e^{-t} & \cos(t) \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ t^3 + 2t - 1 & t \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix} \quad \text{в (1), и}$$

$$\alpha = 1, \beta = 2, a = 3, b = 3, c = 5;\ r = 3,5;\ (q_1, q_2, q_3, q_4) = \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \end{pmatrix} \right) \quad \text{в (2).}$$

Достигнутое время $t^*_{min} \approx 0,607$; ошибка условия трансверсальности на правом конце $\approx 0,406$.

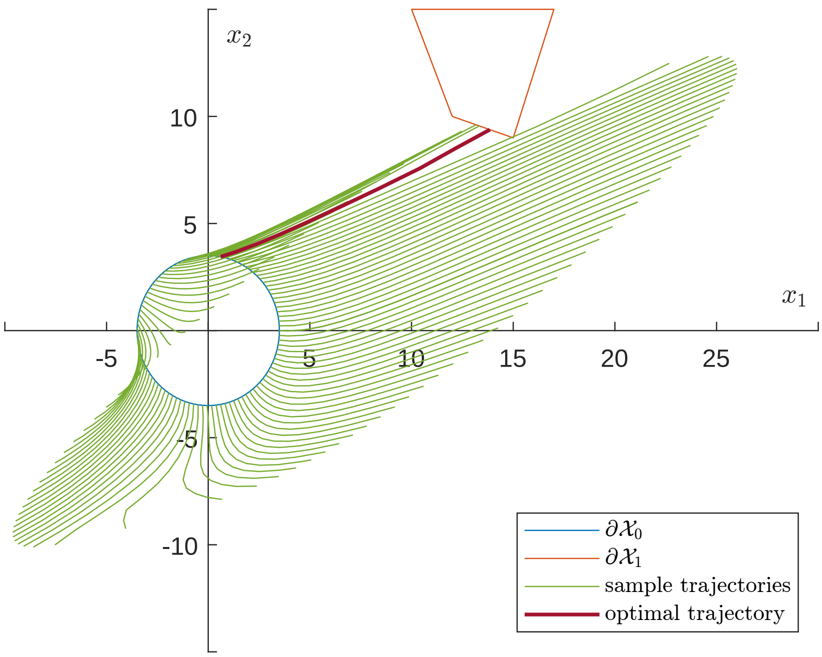

Рис. 4: Траектории подозрительные на оптимальность

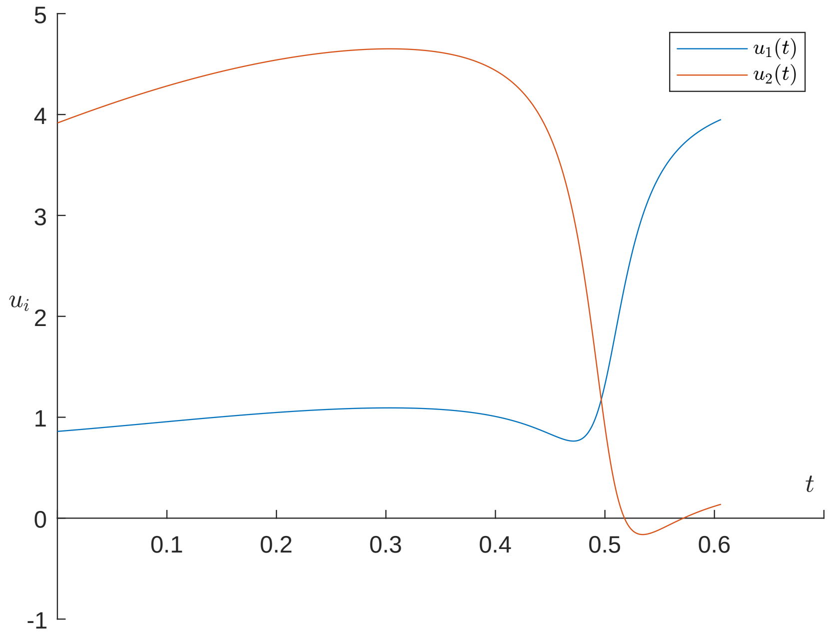

Рис. 5: Компоненты найденного приближенно-оптимального управления

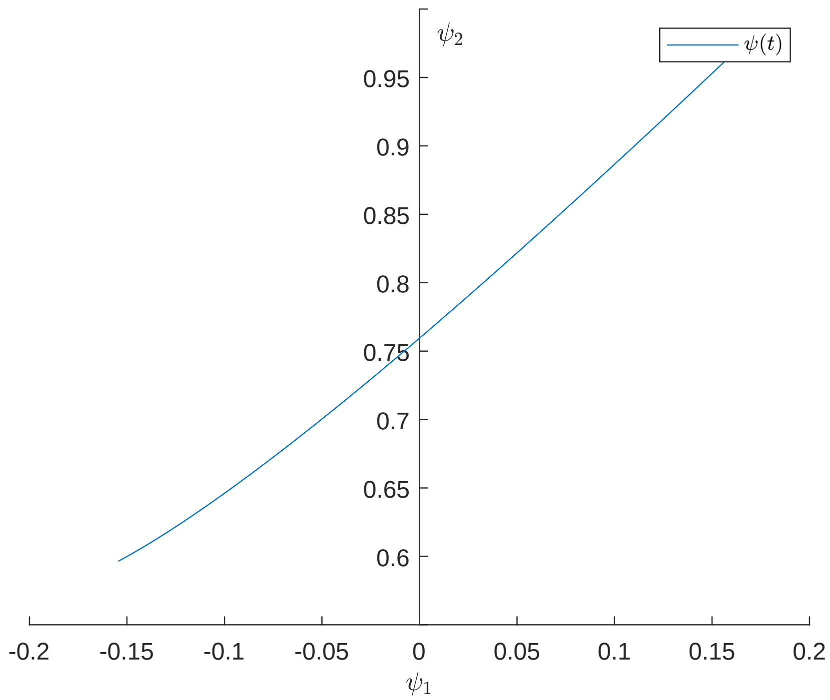

Рис. 6: Сопряженная переменная

3.3 отсутствие свойства непрерывности в поставленной задаче

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & 2 \\ e^{-t} & \cos(t) \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ t^3 + 2t - 1 & t \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix} \quad \text{в (1), и}$$

$$\alpha = 1, \beta = 2, a = 3, b = 3, c = 5;\ r = 3,5;\ (q_1, q_2, q_3, q_4) = \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 17 \end{pmatrix} \right) \quad \text{в (2).}$$

В данном примере наглядно виден эффект отсутствия непрерывной зависимости минимального времени t^*_{min} от целевого множества. Параметры данной задачи идентичны предыдущей, за исключением

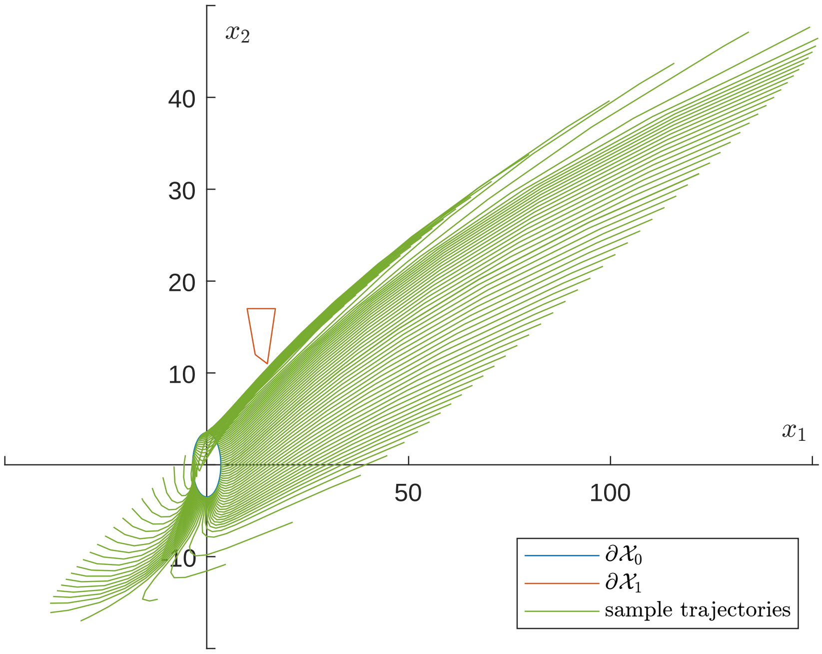

Рис. 7: Траектории подозрительные на оптимальность (масштаб осей отн. пр. 3.2 изменен)

лишь того, что целевое множество сдвинуто немного вверх. Уже при таком малом смещении решение задачи качественно меняется: множество $\mathcal{X}_1$ становится в принципе недостижимым за обозримый промежуток времени.

Список литературы

[1] Комаров Ю. А. кафедральный курс *«Оптимальное управление (линейные системы)»*, 2020.