Курсовая работа (часть 1)

Исследование динамических систем с дискретным временем

В каждом из представленных вариантов №1-№7 необходимо:

- Найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость;

- Доказать, что имеется цикл длины 2;

- Найти циклы длины 3 и построить бифуркационную диаграмму в зависимости от значения параметра ($r > 0$);

- Построить зависимость показателя Ляпунова от значения параметра ($r > 0$);
- Для систем с запаздыванием построить бифуркационную диаграмму, построить инвариантную кривую в случае существования бифуркации Неймарка–Сакера.

В вариантах №8-№12 для динамической системы (модели динамики популяции натурального планктона «ротифера») необходимо:

- Найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость;

- Найти циклы длины 2 и 3;

- Построить бифуркационную диаграмму;

- Построить зависимость показателя Ляпунова от значения параметра ($a > 0$).

1.
$$u_{t+1} = ru_t\left(4 - u_t^2\right), \quad 0 < u_t < 2;$$
$$u_{t+1} = ru_t\left(4 - u_{t-1}^2\right), \quad 0 < u_t < 2;$$

2.
$$u_{t+1} = ru_t\left(8 - u_t^3\right), \quad 0 < u_t < 2;$$
$$u_{t+1} = ru_t\left(8 - u_{t-1}^3\right), \quad 0 < u_t < 2;$$

3.

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}\,(1-u_t)\,, \quad 0<u_t<1;$$
$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}\,(1-u_{t-1})\,, \quad 0<u_t<1;$$

4.

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}\left(1-u_t^2\right), \quad 0<u_t<1;$$
$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}\left(1-u_{t-1}^2\right), \quad 0<u_t<1;$$

5.

$$u_{t+1} = ru_t e^{-\frac{r}{2}u_t^2}, \quad u_t>0;$$
$$u_{t+1} = ru_t e^{-\frac{r}{2}u_{t-1}^2}, \quad u_t>0;$$

6.

$$u_{t+1} = ru_t^2 e^{-\frac{r}{2}u_t}, \quad u_t>0;$$
$$u_{t+1} = ru_t^2 e^{-\frac{r}{2}u_{t-1}}, \quad u_t>0;$$

7.

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}e^{-u_t}, \quad u_t>0;$$
$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}e^{-u_{t-1}}, \quad u_t>0;$$

8.
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{\frac{b}{N_t} - \frac{c}{N_t^2} - a\right\}, \quad a>0, b=0.092, c=-0.031;$$

9.
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{\frac{b}{N_t} - \frac{c}{N_t^2} - a\right\}, \quad a>0, b=3.538, c=-0.799;$$

10.
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{\frac{b}{N_t} - \frac{c}{N_t^2} - a\right\}, \quad a>0, b=1.422, c=-0.109;$$

11.
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{\frac{b}{N_t} - \frac{c}{N_t^2} - a\right\}, \quad a>0, b=0.44, c=-0.011;$$

12.
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{\frac{b}{N_t} - \frac{c}{N_t^2} - a\right\}, \quad a>0, b=3.533, c=0.789;$$

13. Дана динамическая система ($a>0$, $r>1$):

$$\begin{cases} N_{t+1} = rN_t e^{-aP_t}, \\ P_{t+1} = N_t\left(1-e^{-aP_t}\right). \end{cases}$$

- Найти неподвижные точки системы и исследовать их устойчивость;
- В плоскости (N_t, P_t) построить траектории системы.

14. Дана динамическая система ($a > 0$, $b > 0$):

$$\begin{cases} N_{t+1} = aN_t\left(1 - N_t\right) - N_tP_t, \\ P_{t+1} = \frac{1}{b}N_tP_t. \end{cases}$$

- Найти неподвижные точки системы и исследовать их устойчивость;
- Построить параметрический портрет системы;
- Доказать, что в системе возникает бифуркация Неймарка–Сакера.

15. Дана динамическая система:

$$\begin{cases} u_1(t+1) = u_1(t)\left(k_1u_2(t) - f(t)\right), \\ u_2(t+1) = u_2(t)\left(k_2u_1(t) - f(t)\right), \end{cases}$$

где $f(t) = \left(k_1 + k_2\right)u_1(t)u_2(t)$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $u_1(t) + u_2(t) = 1$, $u_1(t) \geqslant 0$, $u_2(t) \geqslant 0$, $\forall t \geqslant 0$.

- Найти неподвижные точки системы и исследовать их устойчивость;
- Построить параметрический портрет системы;
- Доказать, что в системе возникает бифуркация Неймарка–Сакера.