



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по компьютерному практикуму к курсу

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
А. А. Владимиров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2021

Содержание

1	Задание 1	3
1.1	Реализация схемы Бернулли и биномиального распределения	3
1.2	Геометрическое распределение	3
1.3	Игра в орлянку	4
2	Задание 2	6

1 Задание 1

Считается доступным лишь генератор равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$ случайной величины $\eta \sim \text{Uni}(0, 1)$. Требуется:

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p . На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.
2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
3. Рассмотреть игру в орлянку — бесконечную последовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш S_n определяется как сумма по всем n испытаниям 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломанной) поведение нормированной суммы $Y(i) = S_i/\sqrt{n}$, как функцию от номера испытания $i = 1, \dots, n$ для одной отдельно взятой траектории. Дать теоритическую оценку для $Y(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

1.1 Реализация схемы Бернулли и биномиального распределения

Чтобы практически реализовать схему Бернулли нужно получить н.о.р.с.в. $\xi_i \sim \text{Bern}(p), i = 1, \dots, n$. Для этого достаточно выразить ξ_i через η следующим образом: $\xi_i = \mathbb{I}(\eta < p) + \mathbb{I}(\eta \geq p)$, т.е.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \eta < p, \\ 0, & \eta \geq p. \end{cases}$$

В свою очередь $\beta \sim \text{Bin}(n, p)$ можно представить как $\beta = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Программа, по описанной выше схеме моделирующая $\text{Bin}(16, 0.5)$, дает следующий результат (рис. 1a).

1.2 Геометрическое распределение

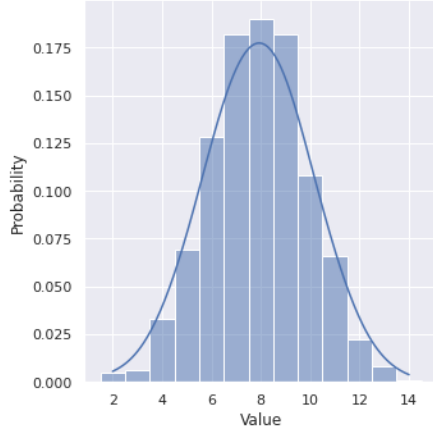
Случайная величина $\gamma \sim \text{Geom}(p)$ представима как

$$\gamma = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \xi_i = 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Геометрическое распределение обладает свойством отсутствия памяти, т.е.

$$\mathbb{P}(\gamma > m + n \mid \gamma \geq m) = \mathbb{P}(\gamma > n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Это свойство можно переформулировать. Пусть $\gamma \sim \text{Geom}(p)$ — случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Свойство отсутствия памяти сл. в. γ означает, что



(a) Биномиальное распределение



(b) Отсутствие памяти ($m = 5$)

Рис. 1

$$\gamma_m \sim \gamma, \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\gamma_m := (\gamma|_{\Omega_m} - m)$, $\Omega_m = \gamma^{-1}(\gamma \geq m) \in \mathcal{A}$.

То есть для каждого m распределение случайной величины γ отличается ровно на константу m от распределения сл.в. γ , индуцированной на вероятностное подпространство Ω_m .

Проверка свойства отсутствия памяти проведена численным моделированием распределений сл.в. γ и γ_m (рис. 1b).

1.3 Игра в орлянку

Даны n н.о.р.с.в.

$$\theta_j : \mathbb{P}(\theta_j = 1) = \mathbb{P}(\theta_j = -1) = \frac{1}{2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Рассматривается нормированная сумма

$$Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}, \quad \text{где } S_i = \sum_{j=1}^n \theta_j,$$

пример поведения которой проиллюстрирован на рис. 2.

Оценим $Y(n)$ при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} Y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{S_i}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \theta_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 0 = 0.$$

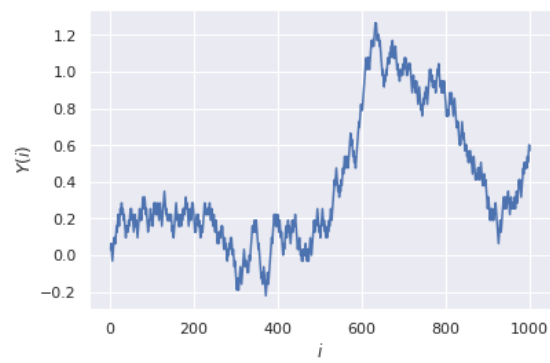


Рис. 2: Игра в орлянку ($n = 1000$)

2 Задание 2