Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по компьютерному практикуму к курсу

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
А. А. Владимиров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2021

Содержание

1 Задание 1

Считается доступным лишь генератор равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$ случайной величины $\eta \sim \mathrm{Uni}(0, 1)$. Требуется:

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p. На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.

2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.

3. Рассмотреть игру в орлянку — бесконечную последовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш S_n определяется как сумма по всем n испытаниями 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломанной) поведение нормированной суммы $Y(i) = S_i/\sqrt{n}$, как функцию от номера испытания $i = 1, \ldots, n$ для одной отдельно взятой траектории. Дать теоритическую оценку для $Y(n)$ при $n \to \infty$.

1.1 Реализация схемы Бернулли и биномиального распределения

Чтобы практически реализовать схему Бернулли нужно получить н.о.р.с.в. $\xi_i \sim \mathrm{Bern}(p), i = 1, \ldots, n$. Для этого достаточно выразить ξ_i через η следующим образом: $\xi_i = \mathbb{I}\,(\eta < p) + \mathbb{I}\,(\eta \geqslant p)$, т.е.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \eta < p, \\ 0, & \eta \geqslant p. \end{cases}$$

В свою очередь $\beta \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ можно представить как $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$.

Программа, по описанной выше схеме моделирующая $\mathrm{Bin}(16, 0.5)$, дает следующий результат (рис. 1a).

1.2 Геометрическое распределение

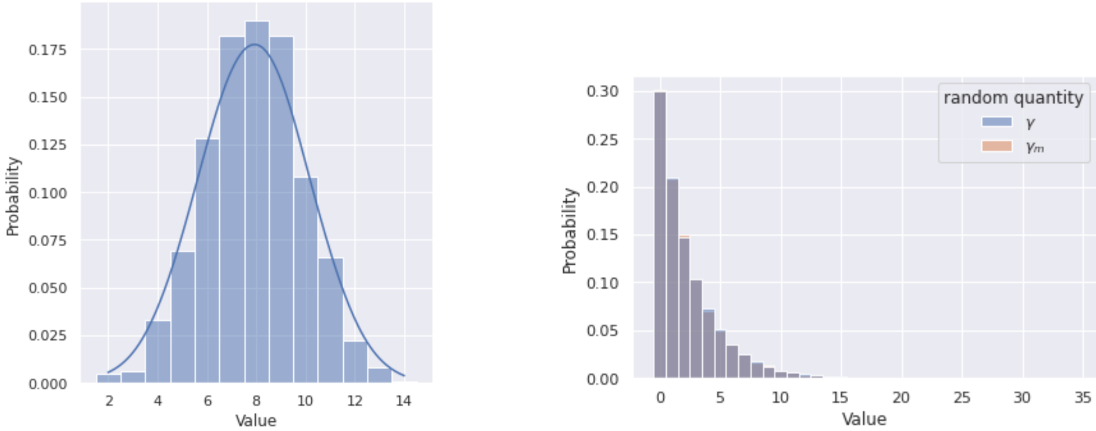
Случайная величина $\gamma \sim \mathrm{Geom}(p)$ представима как

$$\gamma = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \xi_i = 0,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Геометрическое распределение обладает свойством отсутствия памяти, т.е.

$$\mathbb{P}(\gamma > m + n \mid \gamma \geqslant m) = \mathbb{P}(\gamma > n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Это свойство можно переформулировать. Пусть $\gamma \sim \mathrm{Geom}(p)$ — случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Свойство отсутствия памяти сл. в. γ означает, что



(a) Биномиальное распределение

(b) Отсутствие памяти ($m = 5$)

Рис. 1

$$\gamma_m \sim \gamma, \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\gamma_m := (\gamma\big|_{\Omega_m} - m), \quad \Omega_m = \gamma^{-1}(\gamma \geqslant m) \in \mathcal{A}$.

То есть для каждого m распределение случайной величины γ отличается ровно на константу m от распределения сл.в. γ, индуцированной на вероятностное подпространство Ω_m.

Проверка свойства отсутствия памяти проведена численным моделированием распределений сл.в. γ и γ_m (рис. 1b).

1.3 Игра в орлянку

Даны n н.о.р.с.в.

$$\theta_j : \mathbb{P}(\theta_j = 1) = \mathbb{P}(\theta_j = -1) = \frac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Рассматривается нормированная сумма

$$Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}, \quad \text{где } S_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_j,$$

пример поведения которой проиллюстрирован на рис. 2.

Для оценки $Y(n)$ при $n \to \infty$, нам потребуется

Теорема (Центральная предельная теорема). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных (невырожденных) случайных величин с $\mathbb{E}\,\xi_1^2 \leqslant \infty$ и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}\,S_n}{\sqrt{\mathbb{D}\,S_n}} \xrightarrow{d} \mathrm{Norm}(0, 1).$$

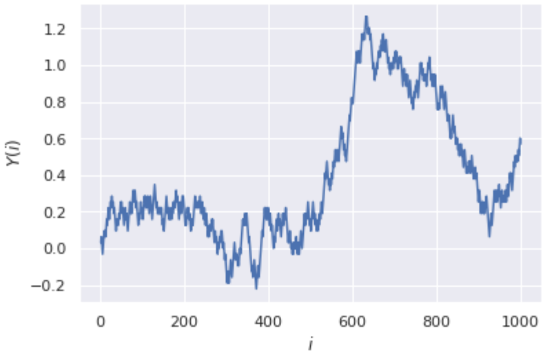


Рис. 2: Игра в орлянку ($n = 1000$)

Действительно

$$\frac{S_n - \mathbb{E}\, S_n}{\sqrt{\mathbb{D}\, S_n}} = \frac{S_n - 0}{\sqrt{n\, \mathbb{D}\, \theta_1)}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = Y(n) \xrightarrow{d} \mathrm{Norm}(0, 1).$$

2 Задание 2

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лесницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.

2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $1-X$ распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение Y при условии $Y \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ совпадает с распределением $Y/3$) с помощью критерия Смирнова.

3. Вычислить значение математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими для разного объема выборок. Проиллюстрировать сходимость.

2.1 Датчик для канторова распределения

Носителем канторова распределения является счетное пересечение множеств

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1] \\
C_1 &= [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \\
C_2 &= [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1] \\
&\dots, \\
C_n &= \bigcup_{i=1,\dots,2^n} [a_i, b_i]
\end{aligned}$$

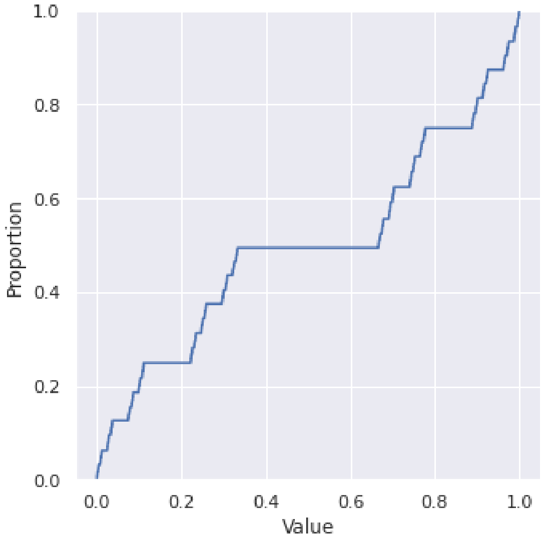


Рис. 3: Э.д.ф. канторовой сл.в.

Причем $\mathbb{P}([a_i, b_i]) = \dfrac{1}{2^n}$, $\forall i$, что дает естественный способ разложения сл.в. $\delta \sim \text{Cant}$ в ряд по $\xi \sim \text{Bern}(0.5)$

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \xi_i.$$

Для проверки корректности полученного датчика напомним следующее.

Статистикой критерия Колмогорова является величина

$$\sqrt{n} D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| \widehat{F}_n(x) - F(x) \right|,$$

где $\widehat{F}_n(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{I}(X_i \leqslant x)$ — эмпирическая функция распределения.

Теорема (Колмогоров)**.** *Если функция распределения элементов выборки $F(x)$ непрерывна, то для $x > 0$*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n} D_n \leqslant x\right) = K(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}.$$

Проверяемая гипотеза с заданным *уровнем значимости* α отвергается, если на полученной выборке $(X_1, \ldots, X_n)$ значение статистики неправдоподобно велико, т.е.

$$\sqrt{n} D_n(X_1, \ldots, X_n) \geqslant x_{1-\alpha}, \tag{1}$$

где $x_{1-\alpha}$ — наименьшее значение, удовлетворяющее условию

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}D_n \geqslant x_{1-\alpha}\right) \leqslant \alpha.$$

В силу теоремы Колмогорова "в пределе"

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}D_n \geqslant x_{1-\alpha}\right) = 1 - K(x_{1-\alpha}) = 1 - (1-\alpha) = \alpha,$$

и $x_{1-\alpha}$ есть не что иное как $(1-\alpha)$-квантиль функции $K(x)$.

Таким образом для значения статистики $\sqrt{n}D_n(X)$ на некоторой определенной выборке X справедливо

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}D_n \geqslant \sqrt{n}D_n(X)\right) = 1 - K(\sqrt{n}D_n(X)) = 1 - (1 - \alpha(X)) = \alpha(X)$$

тем самым $\sqrt{n}D_n$ — $(1-\alpha(X))$-квантиль, и условие (1) выполнено для тех и только тех $x_{1-\alpha}$, что

$$\begin{gathered} x_{1-\alpha(X)} \geqslant x_{1-\alpha} \Leftrightarrow \\ 1-\alpha(X) \geqslant 1-\alpha \Leftrightarrow \\ \alpha \geqslant \alpha(x) \end{gathered}$$

Выходит что для полученной в результате серии испытаний статистики $\sqrt{n}D_n(X)$ значение $1 - K(\sqrt{n}D_n(X)) = \alpha(X)$ означает, что гипотезу *следует отвергнуть* тогда и только тогда, когда был принят уровень значимости α больший чем величина $\alpha(X)$. И обратно, гипотеза *может быть принята* для любого уровня значимости α меньшего чем $\alpha(X)$.

Поскольку функция $F(x)$ непрерывна и не убывает, а $\hat{F}_n(x)$ — кусочно-постоянна, то D_n можно вычислить по формуле

$$D_n(x_1,\ldots,x_n) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{n} - F(x_{(i)}),\ F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n}\right\}.$$

Посчитанная таким образом на некотрой выборке $(X_1,\ldots,X_n)$ значений датчика δ статистика D_n составляет приблизительно 0.0087. Величина $1 - K(\sqrt{n}D_n) = \alpha(X)$ равно приблизительно 0.9999, что даёт нам основания принять гипотезу о корректности построенного датчика δ, с уровнем значимости, например, 20%.

2.2 Свойства симметричности и самоподобия

Для проверки требуемых свойств необходимо к двум сгенерированным выборкам $(X_1,\ldots,X_n)$, $(Y_1,\ldots,Y_m)$ применить критерий Смирнова, статистикой которого служит величина

$$D_{n,m} = \sup_x \left|\widehat{F}_n(x) - \widehat{G}_n(x)\right|,$$

$$\text{где } \widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}\left(X_i \leqslant x\right), \quad \widehat{G}_n(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{I}\left(Y_i \leqslant x\right).$$

Известен следующий результат

Теорема (Смирнов)**.** *Если гипотеза однородонсти верна (подробнее см. [3]), то имеет место сходимость*

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{nm/(n+m)}D_{n,m} \leqslant x\right) \to K(x) \textit{при } n, m \to \infty,$$

где $K(x)$ — *функция распределения Колмогорова.*

Для нахождения статистики достаточно произвести вычисления по формулам

$$D_{n,m} = \max\{D^+_{n,m}, D^-_{n,m}\},$$

где

$$D^+_{n,m} = \sup_x \left(\widehat{F}_n(x) - \widehat{G}_n(x)\right) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left\{\frac{i}{n} - \widehat{G}_n(X_{(i)})\right\}$$
$$D^-_{n,m} = \sup_x \left(\widehat{G}_n(x) - \widehat{F}_n(x)\right) = \max_{1\leqslant j\leqslant m} \left\{\frac{j}{m} - \widehat{F}_n(Y_{(j)})\right\}.$$

В результате компьютерных вычислений для случайных величин δ и $1-\delta$ получены значения $D_{n,m} \approx 0.489$ и $1 - K(\sqrt{nm/(n+m)}D_{n,m}) \approx 0.1811$, что позволяет принять гипотезу об одиноковой распределенности на уровне значимости 10%.

Соответствующие результаты для $\delta/3$ и $\delta\big|_{[0,3]}$ составляют приблизительно 0.3482 и 0.1427 соответственно, что подтверждает свойство самоподобия на уровне значимости 10%.

2.3 Математическое ожидание и диспесия

Случайная величина δ обладает свойством самоподобия, т.е. для ее функции распределения $F(\cdot)$ выполнено:

- $F(x) = \dfrac{F(3x)}{2}$, при $\dfrac{2}{3} < x < 1$,
- $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{F(3x-2)}{2}$, при $\dfrac{2}{3} < x < 1$.

Используя это свойство вычислим математическое ожидание

$$\mathbb{E}\,\delta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) = \int\limits_0^{1/3} x\,dF(x) + \int\limits_{2/3}^{1} x\,dF(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/3} x\,dF(3x) +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{2/3}^{1} x\,d(1/2 + F(3x-2)) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{y}{3}\,dF(y) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{y+2}{3}\,dF(y) =$$
$$\frac{1}{6}\int\limits_0^1 y\,dF(y) + \frac{1}{6}\int\limits_0^1 y\,dF(y) + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 dF(y) = \frac{1}{3}\,\mathbb{E}\,\delta + \frac{1}{3}.$$

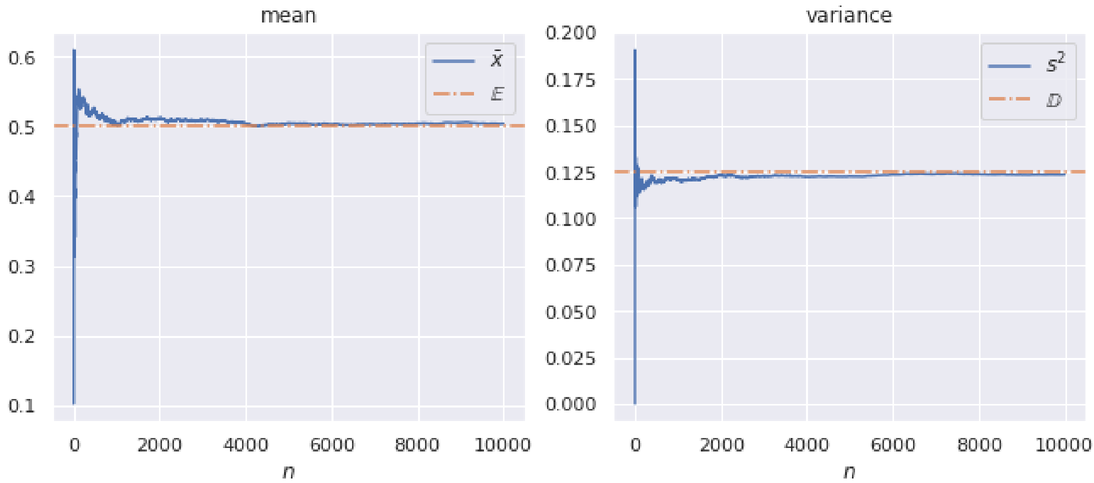


Рис. 4

Следовательно

$$\mathbb{E}\,\delta = \frac{1}{2}.$$

Аналогично дисперсия:

$$\mathbb{E}\,\delta^2 = \int_0^{1/3} x^2\,dF(x) + \int_{2/3}^{1} x^2\,dF(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{y}{3}\right)^2 dF(y) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{y+2}{3}\right)^2 dF(y) = \frac{1}{9}\,\mathbb{E}\,\delta^2 + \frac{2}{9}\,\mathbb{E}\,\delta + \frac{2}{9} = \frac{1}{9}\,\mathbb{E}\,\delta^2 + \frac{1}{3}.$$

Т.е.

$$\mathbb{E}\,\delta^2 = \frac{3}{8},$$

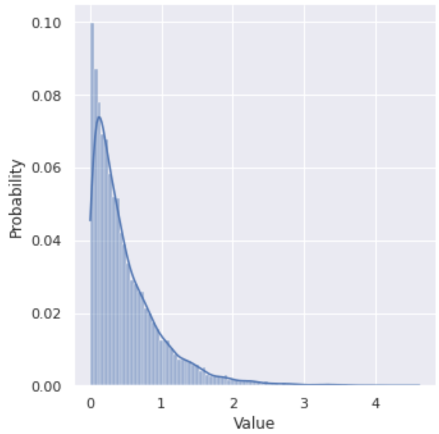
и

$$\mathbb{D}\,\delta = \mathbb{E}\,(\delta - \mathbb{E}\,\delta)^2 = \mathbb{E}\,\delta^2 - (\mathbb{E}\,\delta)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

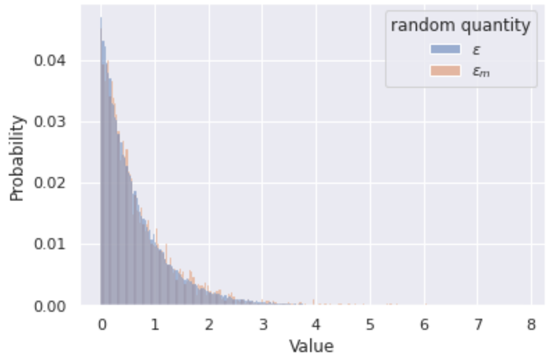
Сходимость эмпирических показателей к теоретическим показана на рис. 4.

3 Задание 3

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые экспоненциально распределенные с.в. с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ соответственно. Найти распределение случайной величины $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.



(a) Экспоненциальное распределение



(b) Отсутствие памяти ($m = 2$)

Рис. 5

2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.

3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.

4. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты. Проверить при помощи t-критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера равенство дисперсий.

3.1 Экспоненциальное распределение

Напомним, что $\eta \sim \mathrm{Uni}(0,1)$, тогда для $\varepsilon \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ справделиво [1]

$$\varepsilon \sim -\frac{1}{\lambda}\ln\eta.$$

Результат моделирования см. рис. 5a

Экспоненциальное распределение обладает свойством отсутствия памяти (рис. 5b), т.е. аналогично § 1.2:

$$\varepsilon_m \sim \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\varepsilon_m := (\gamma\big|_{\Omega_m} - m)$, $\Omega_m = \varepsilon^{-1}(\varepsilon \geqslant m) \in \mathcal{A}$.

[1] см. [3] гл. 4 §1 “Метод обратной функции”.

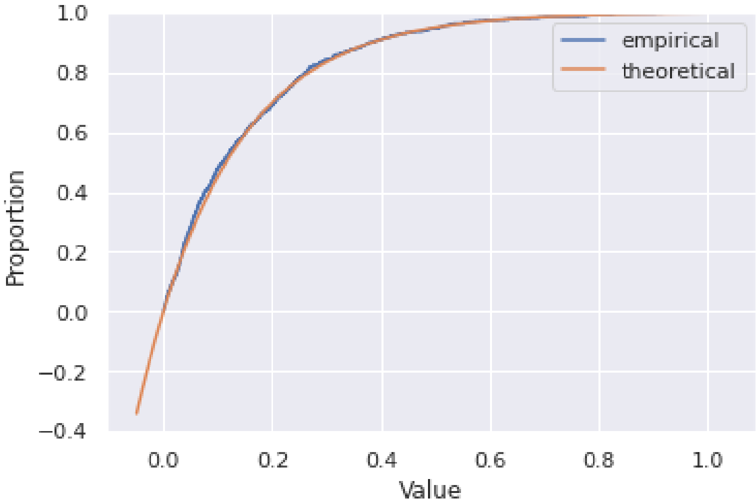


Рис. 6

Распределение сл.в. $Y = \min(X_1, X_2, \dots X_n)$ имеет функцию распределения

$$F(y) = \mathbb{P}\left(Y < y\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y \geqslant 1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\min(X_1, X_2, \dots X_n) \geqslant 1\right) =$$

$$1 - \mathbb{P}\left(X_1 \geqslant y, \dots, X_n \geqslant y\right) = \{\text{в силу независимости сл.в. } X_i\} \ = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \geqslant y\right) =$$

$$1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{Exp(\lambda_i)}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - (1 - e^{-\lambda_i y})) = 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i y} = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) y}.$$

Таким образом

$$Y \sim \mathrm{Exp}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

Сравните результаты, посчитанные для обоих представлений Y на рис. 6.

3.2 Датчик пуассоновского распределения 1

Для $\pi \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ верно следующее представление [2]

$$\pi = \max_{\mathbb{N} \cup \{0\}} (n \mid S_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \leqslant 1),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — пуассоновские с параметром λ н.о.р.с.в.

Результат моделировния см. 7

[2] см. [3] гл. 5 §1 “Моделирование дискретных величин”.

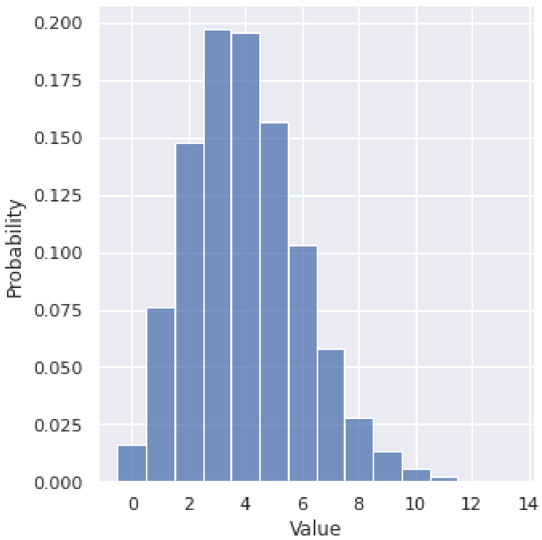

Probability
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
0
2
4
6
8
10
12
14
Value

Рис. 7

Список литературы

[1] Смирнов С. Н. кафедральный курс *«Стохастический анализ и моделирование»*, 2021.

[2] Ширяев А. Н. *«Вероятность»*. Изд-во Наука, Москва, 1979.

[3] Лагутин М. Б. *«Наглядная математическая статистика»*. Изд-во Бином, Москва, 2009.