



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по компьютерному практикуму к курсу

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
А. А. Владимиров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2021

Содержание

1	Задание 1	4
1.1	Реализация схемы Бернулли и биномиального распределения	4
1.2	Геометрическое распределение	4
1.3	Игра в орлянку	5
2	Задание 2	6
2.1	Датчик для канторова распределения	6
2.2	Свойства симметричности и самоподобия	8
2.3	Математическое ожидание и дисперсия	9
3	Задание 3	10
3.1	Экспоненциальное распределение	11
3.2	Датчик пуассоновского распределения 1	12
3.3	Датчик пуассоновского распределения 2	13
3.4	Датчик стандартного нормального распределения 1	14
4	Задание 4	15
4.1	Датчик распределения Коши	16
4.2	Датчик стандартного нормального распределения 2	16
4.3	Сравнение реализаций датчика стандартного нормального распределения	17
5	Задание 5	17
5.1	Проверка ЗБЧ и ЦПТ	18
5.2	Доверительные интервалы	18
5.3	Поведение сумм S_n/n для распределения Коши	19
6	Задание 6	20
6.1	Численное интегрирование	20
6.2	Точность вычислений	21
7	Задание 7	22
7.1	Случайный поиск	22
7.2	Отжиг	23
7.3	Оценка точности	23
8	Задание 8	24
9	Задание 9	25
9.1	Винеровский процесс	25
9.2	Процесс Орнштейна-Уленбека	26
10	Задание 10	27

1 Задание 1

Считается доступным лишь генератор равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$ случайной величины $\eta \sim \text{Uni}(0, 1)$. Требуется:

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p . На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.
2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
3. Рассмотреть игру в орлянку — бесконечную последовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш S_n определяется как сумма по всем n испытаниям 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломанной) поведение нормированной суммы $Y(i) = S_i/\sqrt{n}$, как функцию от номера испытания $i = 1, \dots, n$ для одной отдельно взятой траектории. Дать теоритическую оценку для $Y(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

1.1 Реализация схемы Бернулли и биномиального распределения

Чтобы практически реализовать схему Бернулли нужно получить н.о.р.с.в. $\xi_i \sim \text{Bern}(p), i = 1, \dots, n$. Для этого достаточно выразить ξ_i через η следующим образом: $\xi_i = \mathbb{I}(\eta < p) + \mathbb{I}(\eta \geq p)$, т.е.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \eta < p, \\ 0, & \eta \geq p. \end{cases}$$

В свою очередь $\beta \sim \text{Bin}(n, p)$ можно представить как $\beta = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Программа, по описанной выше схеме моделирующая $\text{Bin}(16, 0.5)$, дает следующий результат (рис. 1a).

1.2 Геометрическое распределение

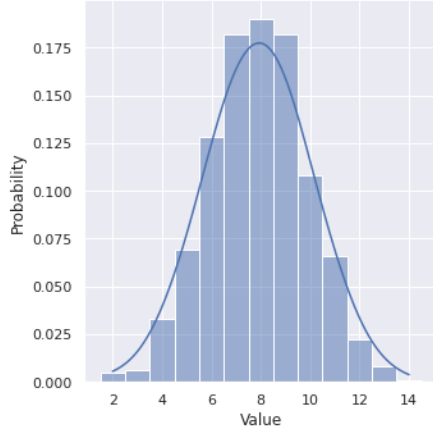
Случайная величина $\gamma \sim \text{Geom}(p)$ представима как

$$\gamma = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \xi_i = 0, i = 1, \dots, n\}.$$

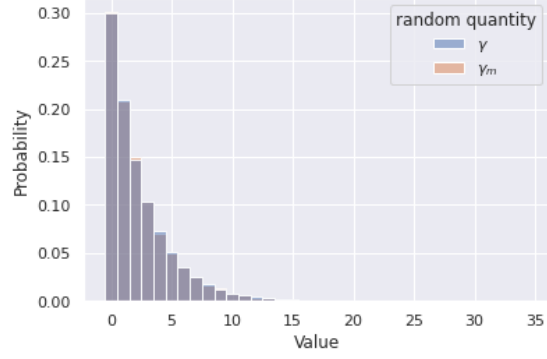
Геометрическое распределение обладает свойством отсутствия памяти, т.е.

$$\mathbb{P}(\gamma > m + n \mid \gamma \geq m) = \mathbb{P}(\gamma > n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Это свойство можно переформулировать. Пусть $\gamma \sim \text{Geom}(p)$ — случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Свойство отсутствия памяти сл. в. γ означает, что



(a) Биномиальное распределение



(b) Отсутствие памяти ($m = 5$)

Рис. 1

$$\gamma_m \sim \gamma, \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\gamma_m := (\gamma|_{\Omega_m} - m)$, $\Omega_m = \gamma^{-1}(\gamma \geq m) \in \mathcal{A}$.

То есть для каждого m распределение случайной величины γ отличается ровно на константу m от распределения сл.в. γ , индуцированной на вероятностное подпространство Ω_m .

Проверка свойства отсутствия памяти проведена численным моделированием распределений сл.в. γ и γ_m (рис. 1b).

1.3 Игра в орлянку

Даны n н.о.р.с.в.

$$\theta_j : \mathbb{P}(\theta_j = 1) = \mathbb{P}(\theta_j = -1) = \frac{1}{2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Рассматривается нормированная сумма

$$Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}, \quad \text{где } S_i = \sum_{j=1}^n \theta_j,$$

пример поведения которой проиллюстрирован на рис. 2.

Для оценки $Y(n)$ при $n \rightarrow \infty$, нам потребуется

Теорема (Центральная предельная теорема). Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных (невыврожденных) случайных величин с $\mathbb{E}\xi_1^2 \leq \infty$ и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \xrightarrow{d} \text{Norm}(0, 1).$$

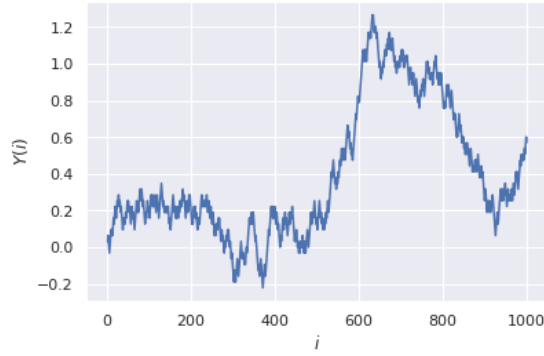


Рис. 2: Игра в орлянку ($n = 1000$)

Действительно

$$\frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{\sqrt{\mathbb{D} S_n}} = \frac{S_n - 0}{\sqrt{n \mathbb{D} \theta_1}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = Y(n) \xrightarrow{d} \text{Norm}(0, 1).$$

2 Задание 2

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лесницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.
2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $1-X$ распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение Y при условии $Y \in [0, \frac{1}{3}]$ совпадает с распределением $Y/3$) с помощью критерия Смирнова.
3. Вычислить значение математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими для разного объема выборок. Проиллюстрировать сходимость.

2.1 Датчик для канторова распределения

Носителем канторова распределения является счетное пересечение множеств

$$\begin{aligned} C_0 &= [0, 1] \\ C_1 &= [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \\ C_2 &= [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1] \\ &\dots, \\ C_n &= \bigcup_{i=1, \dots, 2^n} [a_i, b_i] \end{aligned}$$

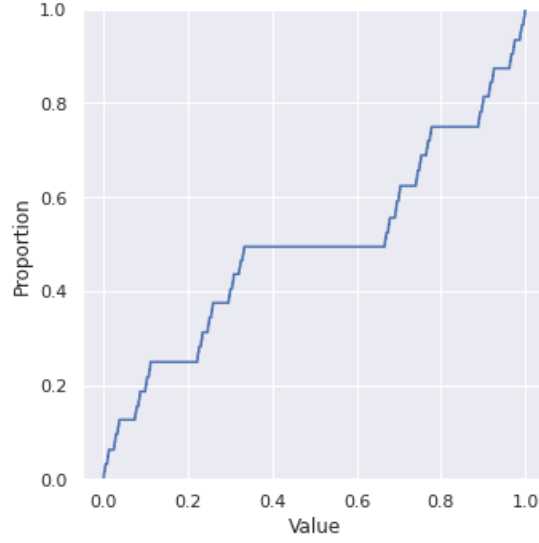


Рис. 3: Э.д.ф. канторовой сл.в.

Причем $\mathbb{P}([a_i, b_i]) = \frac{1}{2^n}$, $\forall i$, что дает естественный способ разложения сл.в. $\delta \sim \text{Cant}$ в ряд по $\xi \sim \text{Bern}(0.5)$

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \xi_i.$$

Для проверки корректности полученного датчика напомним следующее. Статистикой критерия Колмогорова является величина

$$\sqrt{n}D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right|,$$

где $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x)$ — эмпирическая функция распределения.

Теорема (Колмогоров). *Если функция распределения элементов выборки $F(x)$ непрерывна, то для $x > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}D_n \leq x) = K(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}.$$

Проверяемая гипотеза с заданным *уровнем значимости* α отвергается, если на полученной выборке (X_1, \dots, X_n) значение статистики неправдоподобно велико, т.е.

$$\sqrt{n}D_n(X_1, \dots, X_n) \geq x_{1-\alpha}, \quad (1)$$

где $x_{1-\alpha}$ — наименьшее значение, удовлетворяющее условию

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}D_n \geq x_{1-\alpha}) \leq \alpha.$$

В силу теоремы Колмогорова “в пределе”

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}D_n \geq x_{1-\alpha}) = 1 - K(x_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha,$$

и $x_{1-\alpha}$ есть не что иное как $(1 - \alpha)$ -квантиль функции $K(x)$.

Таким образом для значения статистики $\sqrt{n}D_n(X)$ на некоторой определенной выборке X справедливо

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}D_n \geq \sqrt{n}D_n(X)) = 1 - K(\sqrt{n}D_n(X)) = 1 - (1 - \alpha(X)) = \alpha(X)$$

тем самым $\sqrt{n}D_n$ — $(1 - \alpha(X))$ -квантиль, и условие (1) выполнено для тех и только тех $x_{1-\alpha}$, что

$$\begin{aligned} x_{1-\alpha(X)} &\geq x_{1-\alpha} \Leftrightarrow \\ 1 - \alpha(X) &\geq 1 - \alpha \Leftrightarrow \\ \alpha &\geq \alpha(X) \end{aligned}$$

Выходит что для полученной в результате серии испытаний статистики $\sqrt{n}D_n(X)$ значение $1 - K(\sqrt{n}D_n(X)) = \alpha(X)$ означает, что гипотезу *следует отвергнуть* тогда и только тогда, когда был принят уровень значимости α больший чем величина $\alpha(X)$. И обратно, гипотеза *может быть принята* для любого уровня значимости α меньшего чем $\alpha(X)$.

Поскольку функция $F(x)$ непрерывна и не убывает, а $\hat{F}_n(x)$ — кусочно-постоянна, то D_n можно вычислить по формуле

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{n} - F(x_{(i)}), F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right\}.$$

Посчитанная таким образом на некоторой выборке (X_1, \dots, X_n) значений датчика δ статистика D_n составляет приблизительно 0.0087. Величина $1 - K(\sqrt{n}D_n) = \alpha(X)$ равно приблизительно 0.9999, что даёт нам основания принять гипотезу о корректности построенного датчика δ , с уровнем значимости, например, 20%.

2.2 Свойства симметричности и самоподобия

Для проверки требуемых свойств необходимо к двум сгенерированным выборкам (X_1, \dots, X_n) , (Y_1, \dots, Y_m) применить критерий Смирнова, статистикой которого служит величина

$$\begin{aligned} D_{n,m} &= \sup_x \left| \hat{F}_n(x) - \hat{G}_n(x) \right|, \\ \text{где } \hat{F}_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x), \quad \hat{G}_n(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbb{I}(Y_j \leq x). \end{aligned}$$

Известен следующий результат

Теорема (Смирнов). Если гипотеза однородности верна (подробнее см. [3]), то имеет место сходимость

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{nm/(n+m)}D_{n,m} \leq x\right) \rightarrow K(x) \text{ при } n, m \rightarrow \infty,$$

где $K(x)$ — функция распределения Колмогорова.

Для нахождения статистики достаточно произвести вычисления по формулам

$$D_{n,m} = \max\{D_{n,m}^+, D_{n,m}^-\},$$

где

$$D_{n,m}^+ = \sup_x \left(\widehat{F}_n(x) - \widehat{G}_n(x) \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - \widehat{G}_n(X_{(i)}) \right\}$$

$$D_{n,m}^- = \sup_x \left(\widehat{G}_n(x) - \widehat{F}_n(x) \right) = \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{j}{m} - \widehat{F}_n(Y_{(j)}) \right\}.$$

В результате компьютерных вычислений для случайных величин δ и $1 - \delta$ получены значения $D_{n,m} \approx 0.489$ и $1 - K(\sqrt{nm/(n+m)}D_{n,m}) \approx 0.1811$, что позволяет принять гипотезу об одиноковой распределенности на уровне значимости 10%.

Соответствующие результаты для $\delta/3$ и $\delta|_{[0,3]}$ составляют приблизительно 0.3482 и 0.1427 соответственно, что подтверждает свойство самоподобия на уровне значимости 10%.

2.3 Математическое ожидание и дисперсия

Случайная величина δ обладает свойством самоподобия, т.е. для ее функции распределения $F(\cdot)$ выполнено:

- $F(x) = \frac{F(3x)}{2}$, при $\frac{2}{3} < x < 1$,
- $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{F(3x-2)}{2}$, при $\frac{2}{3} < x < 1$.

Используя это свойство вычислим математическое ожидание

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \delta &= \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \int_0^{1/3} x dF(x) + \int_{2/3}^1 x dF(x) = \frac{1}{2} \int_0^{1/3} x dF(3x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{2/3}^1 x d(1/2 + F(3x-2)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y}{3} dF(y) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y+2}{3} dF(y) = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 y dF(y) + \frac{1}{6} \int_0^1 y dF(y) + \frac{1}{3} \int_0^1 dF(y) = \frac{1}{3} \mathbb{E} \delta + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

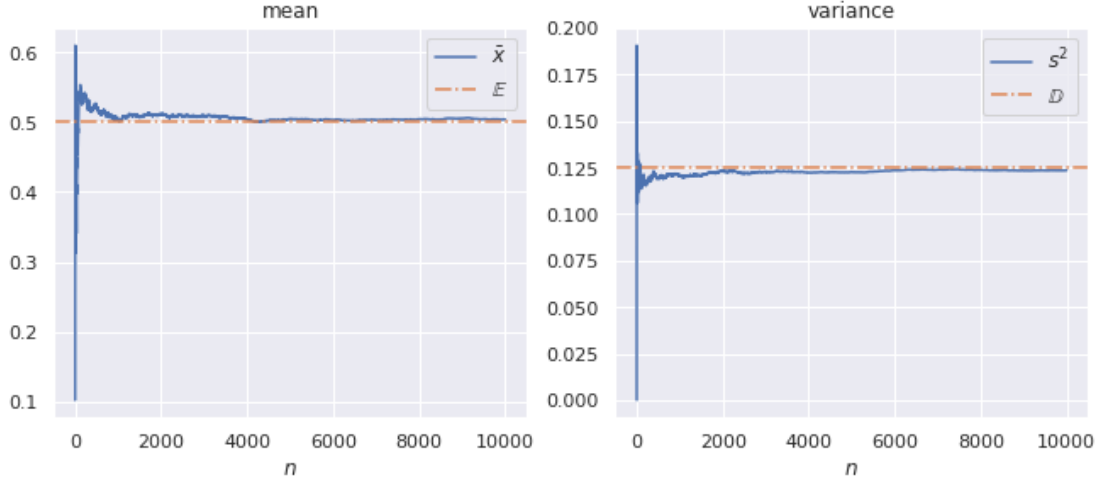


Рис. 4

Следовательно

$$\mathbb{E} \delta = \frac{1}{2}.$$

Аналогично дисперсия:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \delta^2 &= \int_0^{1/3} x^2 dF(x) + \int_{2/3}^1 x^2 dF(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{y}{3}\right)^2 dF(y) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{y+2}{3}\right)^2 dF(y) = \frac{1}{9} \mathbb{E} \delta^2 + \frac{2}{9} \mathbb{E} \delta + \frac{2}{9} = \frac{1}{9} \mathbb{E} \delta^2 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Т.е.

$$\mathbb{E} \delta^2 = \frac{3}{8},$$

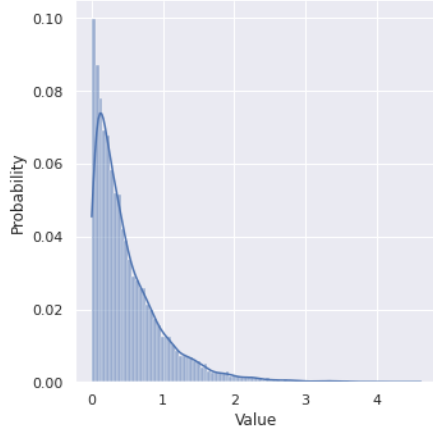
и

$$\mathbb{D} \delta = \mathbb{E} (\delta - \mathbb{E} \delta)^2 = \mathbb{E} \delta^2 - (\mathbb{E} \delta)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

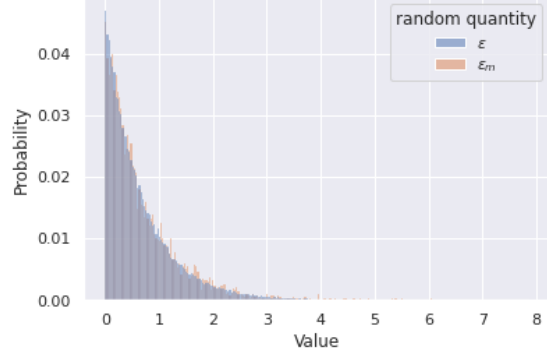
Сходимость эмпирических показателей к теоретическим показана на рис. 4.

3 Задание 3

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — независимые экспоненциально распределенные с.в. с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно. Найти распределение случайной величины $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.



(a) Экспоненциальное распределение



(b) Отсутствие памяти ($m = 2$)

Рис. 5

2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.
3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.
4. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты. Проверить при помощи t -критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера равенство дисперсий.

3.1 Экспоненциальное распределение

Напомним, что $\eta \sim \text{Uni}(0, 1)$, тогда для $\varepsilon \sim \text{Exp}(\lambda)$ справедливо ¹

$$\varepsilon \sim -\frac{1}{\lambda} \ln \eta.$$

Результат моделирования см. рис. 5а

Экспоненциальное распределение обладает свойством отсутствия памяти (рис. 5b), т.е. аналогично § 1.2:

$$\varepsilon_m \sim \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\varepsilon_m := (\gamma|_{\Omega_m} - m)$, $\Omega_m = \varepsilon^{-1}(\varepsilon \geq m) \in \mathcal{A}$.

¹см. [3] гл. 4 §1 “Метод обратной функции”.

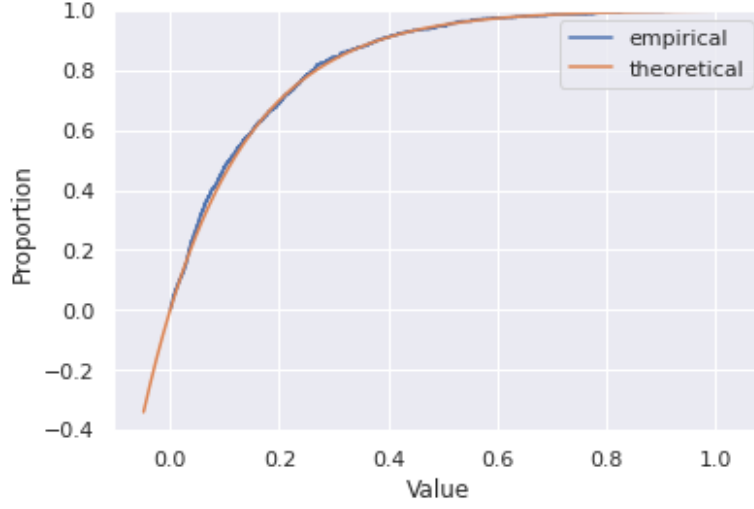


Рис. 6

Распределение сл.в. $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ имеет функцию распределения

$$\begin{aligned}
 F(y) &= \mathbb{P}(Y < y) = 1 - \mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq 1) = \\
 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq y, \dots, X_n \geq y) &= \{\text{в силу независимости сл.в. } X_i\} = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq y) = \\
 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{\text{Exp}(\lambda_i)}) &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - e^{-\lambda_i y})) = 1 - \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i y} = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)y}.
 \end{aligned}$$

Таким образом

$$Y \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

Сравните результаты, посчитанные для обоих представлений Y на рис. 6.

3.2 Датчик пуассоновского распределения 1

Для $\pi \sim \text{Pois}(\lambda)$ верно следующее представление ²

$$\pi = \max_{\mathbb{N} \cup \{0\}} (n \mid S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \leq 1),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — экспоненциальные с параметром λ н.о.р.с.в.

Результат моделирования см. 7

²см. [3] гл. 5 §1 “Моделирование дискретных величин”.

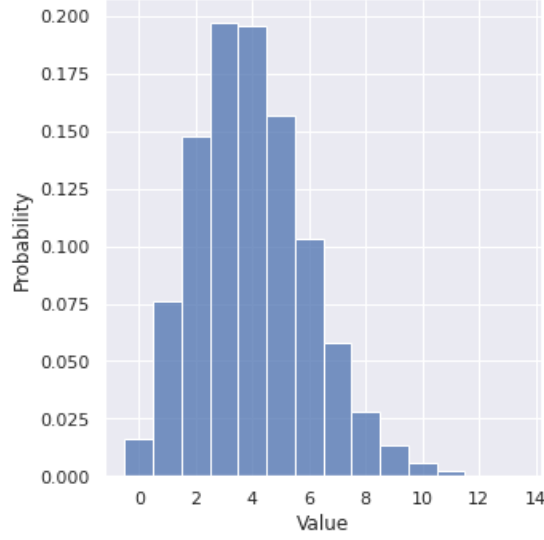


Рис. 7

3.3 Датчик пуассоновского распределения 2

Известно, что распределение $\text{Pois}(\lambda)$ получается из биномиального $\text{Bin}(n, p)$ предельным переходом при $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow \lambda$. Результат моделирования распределения пуассона на основе этого принципа предоставлен на рис. 8.

Проверим корректность нашего датчика при помощи критерия хи-квадрат Пирсона.

Пусть X_1, \dots, X_n — выборка. Разобьем множество значений ξ_1 на N промежутков (возможно, бесконечных) $\Delta_j = (a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, N$. Положим $p_j = \mathbb{P}(X_1 \in \Delta_j)$, а случайные величины ν_j — равными количеству элементов выборки в Δ_j .

Так, статистикой критерия Пирсона служит величина

$$X_n^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(\nu_j - np_j)^2}{p_j}, \quad (2)$$

предел которой, при $n \rightarrow \infty$ имеет распределение χ_{N-1}^2 .

Поскольку распределение Пуассона дискретно, промежутки Δ_j зададим как $\Delta_j = \{j-1\}$, $j = 1, \dots, N-1$; $\Delta_N = \{j \in \mathbb{N} : j > N-1\}$. N положим равным приблизительно $\log_2 n$. Теперь вычислим соответствующие частоты, вероятности и статистику. По результатам вычислений гипотеза о корректности принимается с уровнем значимости 5%.

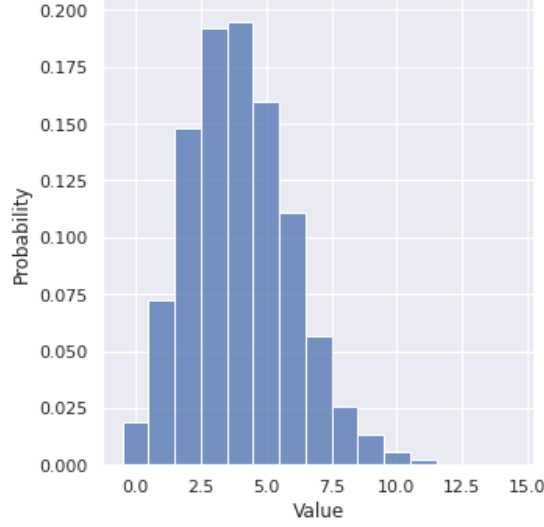


Рис. 8

3.4 Датчик стандартного нормального распределения 1

С помощью нелинейного преобразования пары н.о.р.с.в. $\eta_1, \eta_2 \sim U[0, 1]$ можно получить две н.о.р.с.в. $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$\begin{aligned} X &= -\sqrt{-2 \ln \eta_1} \cos(2\pi\eta_2), \\ Y &= -\sqrt{-2 \ln \eta_1} \sin(2\pi\eta_2). \end{aligned}$$

Результат смоделированной таким способом стандартной нормальной случайной величины см. 9.

Для проверки однородности двух независимых нормальных выборок (в нашем случае это X и Y) используют критерии Фишера и Стьюдента. Оба критерия имеют двустороннюю критическую области, т.о. при заданном уровне значимости α нулевая гипотеза принимается в случае если статистика приняла значение между $(\alpha/2)$ и $(1 - \alpha/2)$ квантилями соответствующего распределения.

Критерий Фишера служит для проверки гипотезы о соответствии дисперсий двух распределений. Его статистика имеет вид

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2}, \quad (3)$$

и распределена по закону $F_{n-1, m-1}$, т.е так же как и случайная величина $\zeta = (\frac{1}{n-1}\xi)/(\frac{1}{m-1}\eta)$, где $\xi \sim \chi_{n-1}^2, \eta \sim \chi_{m-1}^2$, ξ и η независимы.

В результате вычисления статистики (3) гипотеза о соответствии дисперсий принимается с уровнем значимости $\alpha = 5\%$.

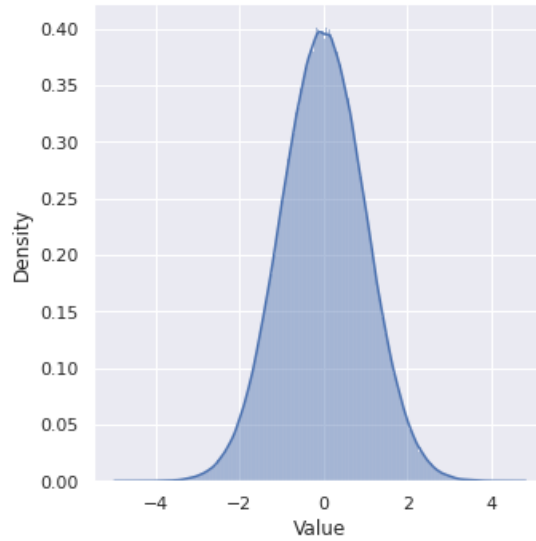


Рис. 9

Критерий Стьюдента позволяет проверить гипотезу о соответствии математических ожиданий. Статистика в данном случае имеет вид

$$\frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}(\bar{X} - \bar{Y})(n + m - 2)}{[(n - 1)S_1^2 + (m - 1)S_2^2]} \sim t_{n+m-2}, \quad (4)$$

где t_{n+m-2} — распределение Стьюдента с $(n + m - 2)$ степенями свободы.

Значение статистики Стьюдента позволяет нам принять гипотезу о равенстве мат. ожиданий с уровнем значимости $\alpha = 5\%$, что, в совокупности с уже установленным равенством дисперсий дает нам сделать вывод об однородности нормальных выборок X и Y с тем же уровнем значимости.

4 Задание 4

1. Построить датчик распределения Коши.
2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи функции `normal probabity plot` убедиться в корректности построенного датчика и обосновать наблюдаемую линейную зависимость.
3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в заданиях 3 и 4.

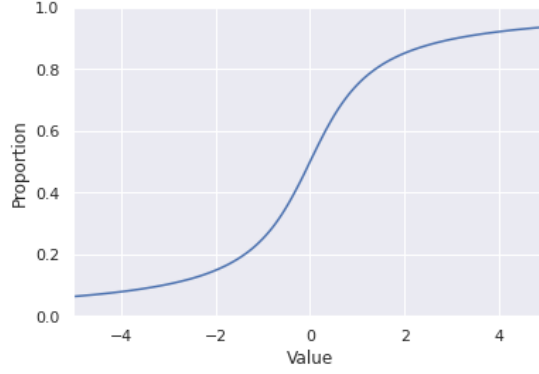


Рис. 10

4.1 Датчик распределения Коши

Для моделирования абсолютно непрерывных распределений используется метод обратной функции, основанный на том факте, что случайная величина

$$\xi = F^{-1}(\eta), \text{ где } \eta \sim U(0, 1)$$

имеет функцию распределения $F(x)$. ($F(x)$ — непрерывная, строго возрастающая функция распределения.)

Функция распределения Коши $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg(\frac{x-x_0}{\gamma})$. Обратная к ней $F^{-1}(y) = x_0 + \gamma \operatorname{tg}[\pi(y - \frac{1}{2})]$. Таким образом искомая формула для моделирования $\xi \sim \text{Cauchy}(x_0, \gamma)$ имеет вид

$$\xi = x_0 + \gamma \operatorname{tg}[\pi(\eta - \frac{1}{2})], \eta \sim U(0, 1).$$

Пример результата работы полученного датчика представлен на рис.10.

4.2 Датчик стандартного нормального распределения 2

Будем генерировать стандартную нормальную случайную величину методом Фон-Неймана используя стандартное распределение Коши ($\eta \sim \text{Cauchy}(0, 1)$) и распределение Бернулли.

Требуемая выборка $\{X_i\}_{i=1}^n$ получается следующим образом. Для очередного i генерируется некоторое значение x из закона $\eta \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ до тех пор, пока результат проведенного затем испытания Бернулли $\nu(x)$ с вероятностью успеха $\frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 + 1)$ не будет положительным. Тогда значение элемента выборки X_i принимается равным x .

Результат моделирования см. на рис. 11.

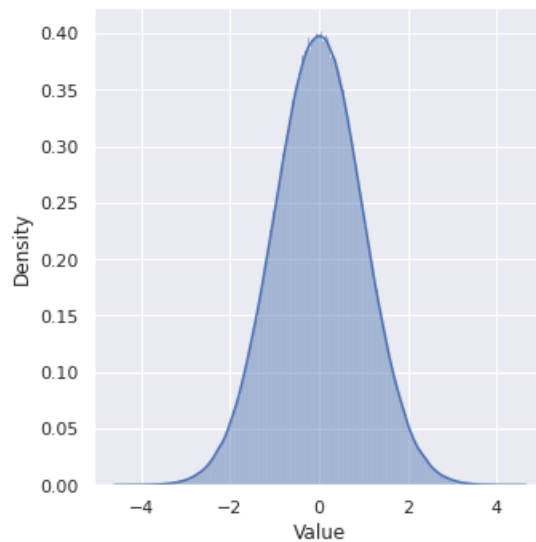


Рис. 11

4.3 Сравнение реализаций датчика стандартного нормального распределения

По результатам 1000 запусков функций генерации выборки размера 1000 среднее время работы составляет

- $555\mu s \pm 28.6\mu s$ для датчика из 4.2
- $83.6\mu s \pm 5.61\mu s$ для датчика из 3.4

5 Задание 5

1. Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Убедиться эмпирически в справедливости ЗБЧ и ЦПТ, т.е. исследовать поведение суммы S_n и эмпирического распределения величины

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}}.$$

2. Считая μ и σ^2 неизвестными, для пункта 1 построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии.
3. Пусть $X_i \sim K(a, b)$ имеет распределение Коши со сдвигом a и масштабом b . Проверить эмпирически, как ведут себя суммы S_n/n . Результат объяснить, а также найти закон распределения данных сумм.

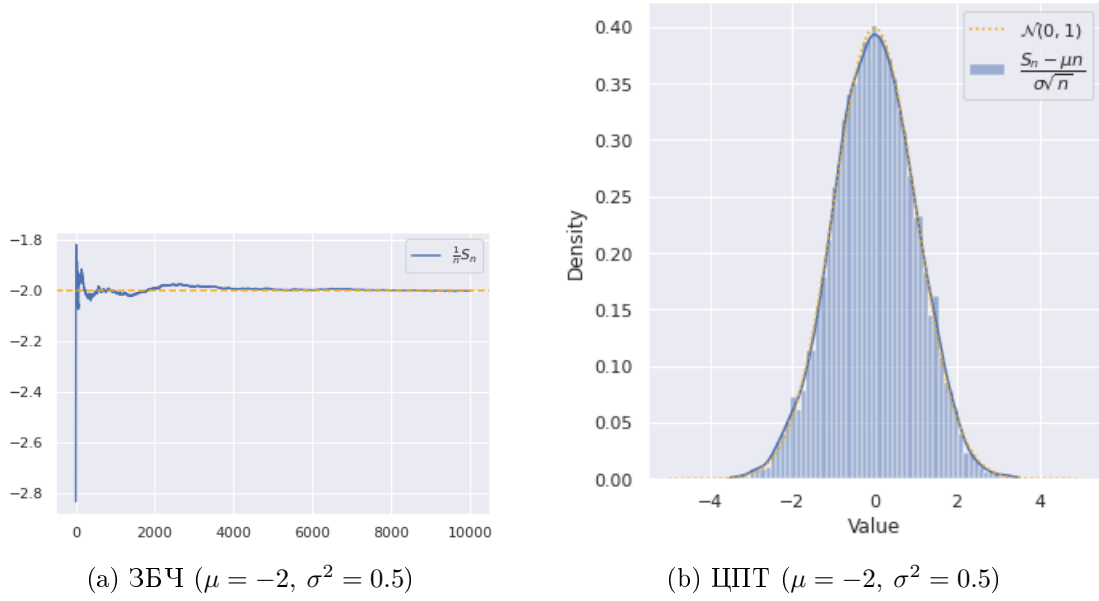


Рис. 12

5.1 Проверка ЗБЧ и ЦПТ

Действительно, для выборки $\{X_i\} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ значение $\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ведет себя в соответствии с законом больших чисел (см. рис. 12a), т.е

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Результаты опыта соответствуют и центральной предельной теореме, т.е

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ as } n \rightarrow \infty. \text{ (см. рис. 12b)}$$

5.2 Доверительные интервалы

Пусть имеется выборка $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, где μ и σ^2 — неизвестны. Исходя из

Теорема. Для нормальной выборки $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ выборочное среднее $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$ и выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ независимы, причем $nS^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$, а $\sqrt{n-1}(\bar{X} - \mu)/S \sim t_{n-1}$.

можно построить доверительные интервалы

- для параметра сдвига μ :

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - \frac{y_{1-\alpha/2}S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} - \frac{y_{\alpha/2}S}{\sqrt{n-1}}\right) = \mathbb{P}\left(y_{\alpha/2} < \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X} - \mu)}{S} < y_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

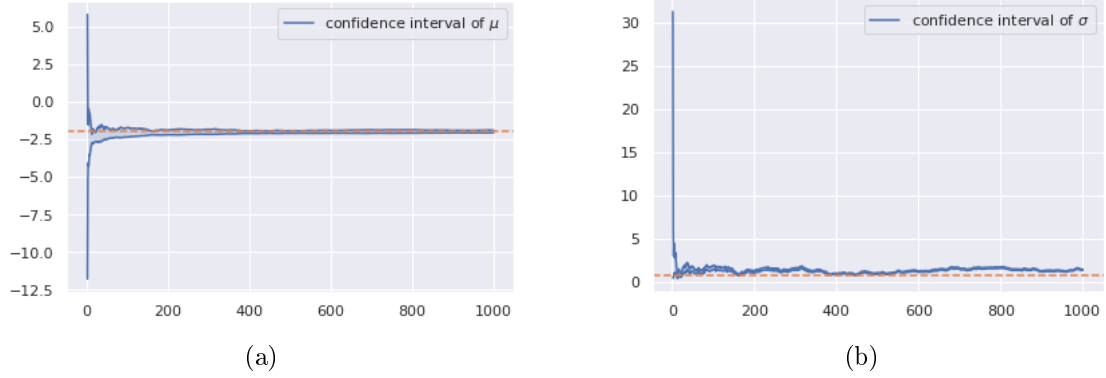


Рис. 13

где y_p — p -квантиль распределения Стьюдента t_{n-1} (в силу симметрии закона $y_{\alpha/2} = -y_{1-\alpha/2}$);

- и для параметра масштаба σ :

$$\mathbb{P} \left(\frac{\sqrt{n}S}{\sqrt{z_{1-\alpha/2}}} < \sigma < \frac{\sqrt{n}S}{\sqrt{z_{\alpha/2}}} \right) = \mathbb{P} \left(z_{\alpha/2} < \frac{nS^2}{\sigma^2} < z_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha,$$

где z_p — p -квантиль закона χ_{n-1}^2 .

Доверительные интервалы для некоторой выборки из $\mathcal{N}(-2, 0.5)$ для разных n приведены на рис. 13

5.3 Поведение сумм S_n/n для распределения Коши

Как известно распределение Коши не имеет математического ожидания (ни конечного, ни бесконечного), а потому для него не выполняется ЗБЧ, и сходимость выборочного среднего S_n/n не имеет места. Тем не менее распределение $\text{Cauchy}(a, b)$ симметрично относительно a и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x p_c(x) dx$ сходится в смысле главного значения к a . Этими наблюдениями объясняется полученное на опыте поведение сумм S_n/n : их значение в основном держится около некоторой средней величины определяемой значением a (сходимость *v.p.*) и "периодическими" сильными выбороками (расходимость в целом) от a ее отклонившими. График сумм S_n/n для некоторой выборки X_i представлен на рис. 14.

Ввиду отсутствия математического ожидания не выполнена и ЦПТ, и сходимость S_n/n по распределению с ее помощью доказать не получится. Вместо этого воспользуемся аппаратом характеристических функций. Характеристическая функция распределения Коши с параметрами a, b имеет вид

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{\pi(b^2 + (x-a)^2)} dx = e^{ait-b|t|}.$$

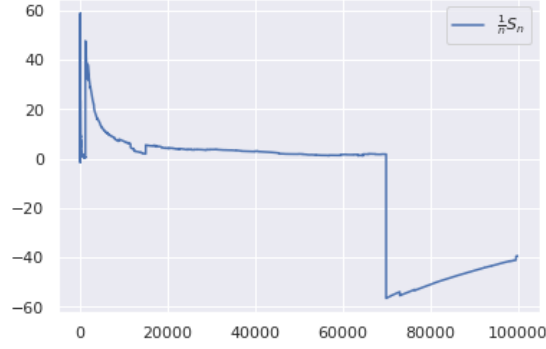


Рис. 14: $a = 0, b = 3$

Характеристическая функция суммы независимых случайных величин есть произведение их характеристических функций, а потому

$$\psi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \psi_{\sum \frac{1}{n} X_i}(t) = \prod \psi_{\frac{1}{n} X_i}(t) = \prod \psi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = e^{n(ai\frac{t}{n} - b|\frac{t}{n}|)} = e^{ait - b|t|}. \quad (5)$$

Поскольку хар. функция однозначно задает распределение, равенство (5) доказывает что величина $\frac{S_n}{n}$ (так же как и X_i) распределена по Коши с параметрами a и b .

6 Задание 6

1. Посчитать интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(x_1^2 + \dots + x_{10}^2 + \frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}\right)}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10} \quad (6)$$

— методом Монте-Карло

— методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана

2. Для каждого случая оценить точность вычислений.

6.1 Численное интегрирование

Перепишем (6) следующим образом

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{\mathbb{R}^{10}} \frac{e^{-\left(x_1^2 + \dots + x_{10}^2 + \frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}\right)}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10} = \\ & \int \dots \int_{\mathbb{R}^{10}} \frac{\pi^5 e^{-\frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2} \cdot \frac{e^{-(x_1^2 + \dots + x_{10}^2)}}{\pi^5} dx_1 dx_2 \dots dx_{10} = \int \dots \int_{\mathbb{R}^{10}} f(x) \cdot p(x) dx, \end{aligned}$$

где $p(x)$ — плотность многомерного нормального распределения $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2}E)$, $E \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$. Таким образом

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^{10}} f(x) \cdot p(x) dx = \mathbb{E} f(\eta), \quad \eta \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}E).$$

По усиленному закону больших чисел имеем

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E} f(\eta) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{10}} f(x) \cdot p(x) dx = I,$$

что дает нам основания использовать метод Монте-Карло для вычисления интеграла (6).

Другим способом вычисления может служить метод квадратур, для реализации которого проведем замену

$$x_i = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}t_i), \quad t_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, 10}.$$

Тогда (6) примет вид

$$I = \pi^{10} \int \cdots \int_{[0,1]^{10}} \frac{e^{-\left(\sum_{i=1}^{10} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}t_i)^2 + \frac{1}{2^7 \prod_{i=1}^{10} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}t_i)^2}\right)}}{\prod_{i=1}^{10} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}t_i)^2 \cdot \prod_{i=1}^{10} \cos(\frac{\pi}{2}t_i)^2} dt. \quad (7)$$

Интеграл (7) уже можно вычислить, например, стандартным методом прямоугольников на равномерной сетке.

6.2 Точность вычислений

В соответствии с ЦПТ и правилом трех сигм, при достаточно больших n погрешность метода Монте-Карло с вероятностью около 0.997 составляет

$$\psi_n = 3 \frac{\sqrt{\mathbb{D} f(\eta)}}{\sqrt{n}} \geq |\hat{I}_n - I|.$$

Для вычисления погрешности будем приближать значение $\mathbb{D} f(\eta)$ выборочной дисперсией

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^2(x_i) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right)^2.$$

Результаты работы программы представлены на таблице 1.

Как известно погрешность метода прямоугольников составляет

$$\psi_n = \frac{h^2}{24} (b - a) \sum_{i,j=1}^{10} \max |f''_{x_i x_j}| = \frac{1}{6n^2} \sum_{i,j=1}^{10} \max |f''_{x_i x_j}|.$$

Результаты работы программы см. на таблице 2.

Объем выборки	Результат	Величина ошибки	Время работы (сек.)
$n = 10^3$	120.0206	13.7449	0.1
$n = 10^4$	122.5785	3.3040	0.4
$n = 10^5$	124.7199	1.0937	3.5
$n = 10^6$	124.7844	0.4395	23.9

Таблица 1

Мощность сетки	Результат	Время работы (сек.)
$n = 10^3$	1572.5830	0.1
$n = 10^4$	1247.9712	1.3
$n = 10^5$	794.7241	4.4

Таблица 2

7 Задание 7

1. Методом случайного поиска найти минимальное значение функции f на множестве $A = \{x_1, x_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, т.е. $y = \min f(x)$, где

$$f(x) = x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_1x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

при $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$, функция доопределяется по непрерывности при $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$.

2. Методом имитации отжига найти минимальное значение функции Розенброка g в пространстве \mathbb{R}^2 , где

$$g(x) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$$

3. Оценить точность. Сравнить результаты со стандартными методами оптимизации.

7.1 Случайный поиск

Случайный поиск реализуем следующим образом. Равномерно разбросаем на единичном круге A точки $(X_i, Y_i) \sim \text{Uniform}(A)$, т.е.

$$\begin{aligned} X_i &= \sqrt{r} \cos(\varphi), \\ Y_i &= \sqrt{r} \sin(\varphi), \end{aligned}$$

где $r \sim \text{Uniform}[0, 1]$, $\varphi \sim \text{Uniform}[0, 2\pi]$. Из полученной выборки возьмем точку (X_k, Y_k) доставляющую минимум функции f . Она и будет результатом работы алгоритма. Испытания см. таб. 3.

Объем выборки	<i>argmin</i>	<i>min</i>
$n = 10^3$	(0.4135, -0.9091)	-1.2351
$n = 10^4$	(-0.3691, -0.9256)	-1.2557
$n = 10^5$	(-0.3472, -0.9372)	-1.2832
$n = 10^6$	(-0.3576, -0.9338)	-1.2883

Таблица 3

7.2 Отжиг

Алгоритм метода принимает некоторую точку x_0 как исходные данные. Затем строится минимизирующая последовательность $\{x_i\}$. Точка x_{i+1} получается на основе текущей точки x_i , а именно: случайно генерируется точка x^* , например из распределения $\mathcal{N}(x_i, q_i \sigma^2 E)$, после чего точка x^* с некоторой вероятностью становится точкой x_{i+1}

$$\mathbb{P}(x^* \rightarrow x_{i+1} | x_i) = \begin{cases} 1, & F(x^*) \leq F(x_i), \\ \exp\left(-\frac{F(x^*) - F(x_i)}{q_i}\right), & F(x^*) \geq F(x_i). \end{cases}$$

В качестве $\{q_i\}$ берется обычно некоторая убывающая последовательность, например геометрическая прогрессия со знаменателем меньшим единицы.

За 100 шагов алгоритм с параметрами: $x_0 = (0, 0)$, $\sigma = 2$, $q_0 = 1000$, $k = 0.93$ нашел $\min = 0.0031$ в точке $x_{100} = (1.0382, 1.0820)$.

7.3 Оценка точности

Оценим точность случайного поиска. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — точка минимума, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ — результат работы алгоритма.

Вероятность того что хотя бы одна точка попадет в ε -окрестность x составляет $1 - (1 - 2\varepsilon^2)^n$. Таким образом

$$\mathbb{P}(|x - \hat{x}| < \varepsilon) = 1 - (1 - 2\varepsilon^2)^n.$$

Ясно, что $|f(x) - f(\hat{x})| < \|f'\| |x - \hat{x}| < \max_A \|f'\| |x - \hat{x}|$. Можно оценить $\max_A \|f'\|$ как

$$\|f'\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} \leq 34.26.$$

Итого мы можем оценить ошибку $\psi_n = |f(x) - f(\hat{x})|$ сверху величиной ε , с вероятностью $1 - (1 - 2(\frac{\varepsilon}{34.26})^2)^n$.

8 Задание 8

Применить метод Монте-Карло к решению первой краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в единичном круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x, y) \in D, \\ u|_{\delta D} = f(x, y), \\ u \in C^2(D), f \in C(\delta D), \\ D = \{x, y : x^2 + y^2 \leq 1\} \end{cases} \quad (8)$$

Для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ найти аналитическое решение и сравнить с полученным по методу Монте-Карло.

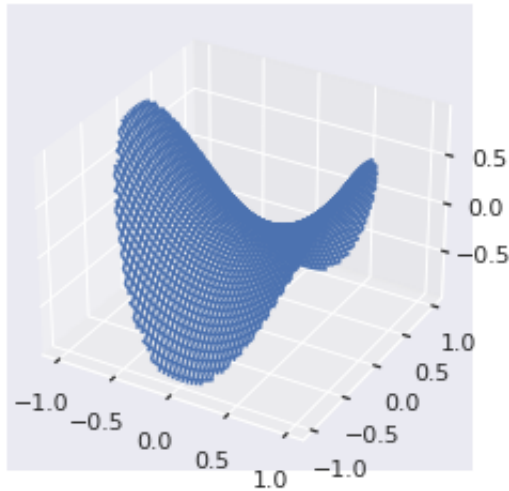
Численное решение уравнения Дирихле (8) в круге D можно получить таким способом. Для каждой точки M из заданной заранее сетки N раз проводится следующая процедура. Сначала строится окружность с центром в точке M и максимальным радиусом, таким что эта окружность еще принадлежит замыканию D . На окружности разыгрывается случайная равномерно распределенная точка M_1 . Если $\rho(M_1, \partial D) < \varepsilon$, то процесс обрывается и выбирается граничное значение $f(Q^1)$, где Q^1 — ближайшая граничная точка, иначе M_1 принимается за следующую точку и процедура продолжается.

После того как такой процесс блуждания производится N раз считается среднее арифметическое

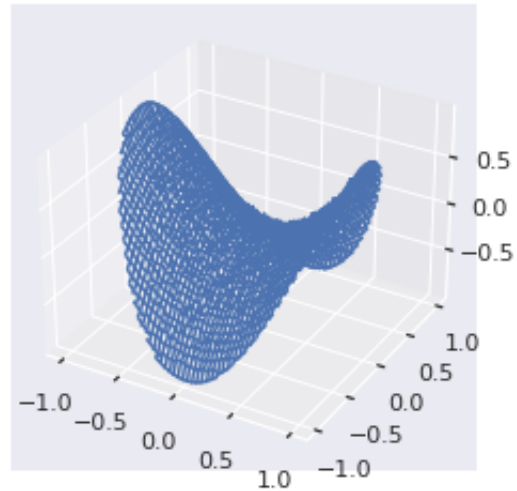
$$\frac{f(Q^1) + f(Q^2) + \dots + f(Q^N)}{N},$$

являющееся приближенным значением искомого решения $u(M)$.

Аналитическим решением (8) для $f(x, y) = x^2 - y^2$ является, очевидно $u = x^2 - y^2$. Сравните аналитическое решение с результатом работы описанного выше алгоритма на рис. 15



(a) Аналитическое решение



(b) Численное решение ($N = 1000$)

Рис. 15

9 Задание 9

Рассмотреть два вида процессов:

- Винеровский процесс $W(t), t \in [0, 1], W(0) = 0$.
- Процесс Орнштейна–Уленбека $X(t), t \in [0, 1], X(0) = X_0$, то есть стационарный марковский гауссовский процесс. Начальные значения X_0 генерируются случайным образом так, чтобы полученный процесс был стационарным.

Для данных гауссовских процессов

1. Найти ковариационную функцию и переходные вероятности.
2. Моделировать независимые траектории процесса с данными переходными вероятностями методом добавления разбиения отрезка.
3. Построить график траектории, не соединяя точки ломаной, с целью получения визуально непрерывной линии.

9.1 Винеровский процесс

По определению ([1]) ковариационная функция Винеровского процесса W_t имеет вид $\text{cov}(t, s) = \min(t, s)$. Плотность многомерного нормального распределения $\mathcal{N}(m, R)$

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|R|}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T R^{-1}(x-m)},$$

где R — ковариационная матрица. Для моделирования Винеровского процесса достаточно знать, что $W_0 = 0, W_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и для $t_0, t_1, \alpha \in (0, 1)$ условное распределение в момент $t = (1 - \alpha)t_0 + \alpha t_1$ имеет плотность

$$p_{W_t|W_{t_0}, W_{t_1}}(x | x_0, x_1) = \frac{p_{W_{t_0}, W_t, W_{t_1}}(x_0, x, x_1)}{p_{W_{t_0}, W_{t_1}}(x_0, x_1)},$$

где

$$\begin{aligned} p_{W_{t_0}, W_t, W_{t_1}} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|R_3|}} e^{-\frac{1}{2} x^T R_3^{-1} x}, \\ p_{W_{t_0}, W_{t_1}} &= \frac{1}{(2\pi) \sqrt{|R_2|}} e^{-\frac{1}{2} x^T R_2^{-1} x}, \\ R_3 &= \begin{pmatrix} t_0 & t_0 & t_0 \\ t_0 & t & t \\ t_0 & t & t_1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} t_0 & t_0 \\ t_0 & t_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$p_{W_t|W_{t_0}, W_{t_1}}(x | x_0, x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)(t_1-t_0)}} e^{-\frac{(x - ((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1))^2}{2\alpha(1-\alpha)(t_1-t_0)}},$$

т.е. $W_t \sim \mathcal{N}(x, \alpha(1-\alpha)(t_1-t_0))$. В случае $\alpha = \frac{1}{2}$ $W_t \sim \mathcal{N}(x, \frac{t_1-t_0}{4})$

Таким образом, для моделирования Винеровского процесса достаточно получить некоторые значения $W_0 = 0, W_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, и затем последовательно методом бисекции разыгрывать величины $W_t \sim \mathcal{N}(x, \frac{t_1-t_0}{4})$.

9.2 Процесс Орнштейна-Уленбека

Из стационарности процесса Орнштейна-Уленбека X_t следует, что $\mathbb{E} X_t = a$, $\mathbb{D} X_t = \sigma^2$ и

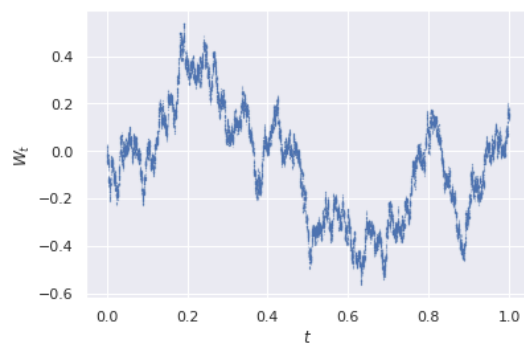
$$\text{cov}(X_t, X_s) = \sigma^2 \rho(x, y) = \sigma^2 \rho(x) \rho(y) = \sigma^2 e^{-\theta(x+y)}$$

Условное распределение имеет вид $(X_t | X_s = x) \sim \mathcal{N}(x e^{\theta|t-s|}, \sigma^2(1 - e^{-2\theta|t-s|}))$.

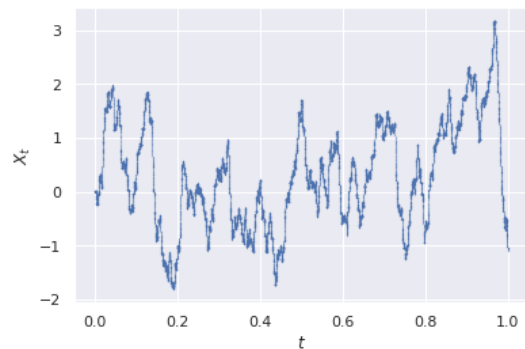
Процесс Орнштейна-Уленбека моделируется так же как и Винеровский, лишь с учетом того, что $X_0 \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $X_1 \sim \mathcal{N}(x_0 e^{-\theta T}, \sigma^2(1 - e^{-2\theta T}))$, и

$$X_{\frac{t_0+t_1}{2}} \sim \mathcal{N}\left((x_0 + x_1) \frac{e^{-\frac{\theta(t_1-t_0)}{2}}}{1 + e^{-\theta(t_1-t_0)}}, \sigma^2 \frac{1 - e^{-\theta(t_1-t_0)}}{1 + e^{-\theta(t_1-t_0)}}\right)$$

Результат моделирования процессов см. рис. 16



(a) Винеровский процесс



(b) Процесс Орнштейна-Уленбека

Рис. 16

10 Задание 10

Произвести фильтрацию одномерного процесса Орнштейна-Уленбека:

1. Используя генератор белого шума, добавить случайную ошибку с известной дисперсией к реализации процесса Орнштейна-Уленбека.
2. При помощи одномерного фильтра Калмана оценить траекторию процесса по зашумленному сигналу. Параметры процесса и белого шума считать известными.
3. Рассмотреть случай, когда шум
 - Является гауссовским.
 - Имеет распределение Коши.

11 Задание 11

Построить двумерное пуассоновское поле, отвечающее сложному пуассоновскому процессу:

1. Первая интерпретация: система массового обслуживания. При этом первая координата поля — время поступления заявки в СМО (равномерное распределение), вторая — время её обслуживания (распределение χ^2 с 10-ю степенями свободы).
2. Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интенсивностью $\lambda(t) = \lambda_0(1 + \cos(t))$ и единичными скачками. Свести данную задачу моделирования неоднородного пуассоновского процесса при помощи метода Льюиса и Шедлера к моделированию двумерного пуассоновского поля, где первая координата имеет равномерное распределение, а вторая — распределение Бернулли.

3. Третья интерпретация: работа страховой компании. Первая координата — момент наступления страхового случая (равномерное распределение), вторая координата — величина ущерба (распределение Парето). Поступление капитала по времени линейно со скоростью $c > 0$, начальный капитал $W > 0$.
4. Для каждой системы рассмотреть всевозможные случаи поведения системы в зависимости от значения параметров.

Список литературы

- [1] Смирнов С. Н. кафедральный курс «*Стохастический анализ и моделирование*», 2021.
- [2] Ширяев А. Н. «*Вероятность*». Изд-во Наука, Москва, 1979.
- [3] Лагутин М. Б. «*Наглядная математическая статистика*». Изд-во Бином, Москва, 2009.
- [4] Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. «*Метод статистических испытаний*». Изд-во физ-мат литературы, Москва, 1961.