Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по компьютерному практикуму к курсу

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
А. А. Владимиров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2021

Содержание

1 Задание 1

Считается доступным лишь генератор равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$ случайной величины $\eta \sim \mathrm{Uni}(0,1)$. Требуется:

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p. На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.

2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.

3. Рассмотреть игру в орлянку — бесконечную последовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш S_n определяется как сумма по всем n испытаниями 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломанной) поведение нормированной суммы $Y(i) = S_i/\sqrt{n}$, как функцию от номера испытания $i = 1,\dots,n$ для одной отдельно взятой траектории. Дать теоритическую оценку для $Y(n)$ при $n \to \infty$.

1.1 Реализация схемы Бернулли и биномиального распределения

Чтобы практически реализовать схему Бернулли нужно получить н.о.р.с.в. $\xi_i \sim \mathrm{Bern}(p), i = 1,\dots,n$. Для этого достаточно выразить ξ_i через η следующим образом: $\xi_i = \mathbb{I}(\eta < p) + \mathbb{I}(\eta \geqslant p)$, т.е.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \eta < p, \\ 0, & \eta \geqslant p. \end{cases}$$

В свою очередь $\beta \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ можно представить как $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$.

Программа, по описанной выше схеме моделирующая $\mathrm{Bin}(16, 0.5)$, дает следующий результат (рис. 1a).

1.2 Геометрическое распределение

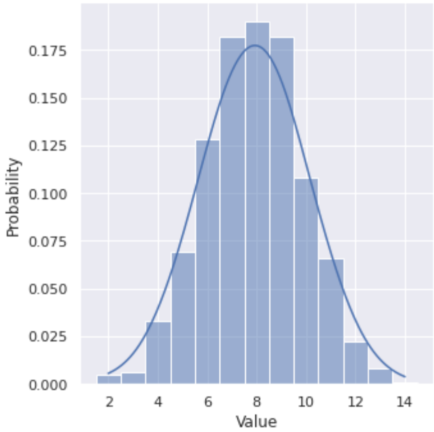
Случайная величина $\gamma \sim \mathrm{Geom}(p)$ представима как

$$\gamma = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \xi_i = 0,\ i = 1,\dots,n\}.$$

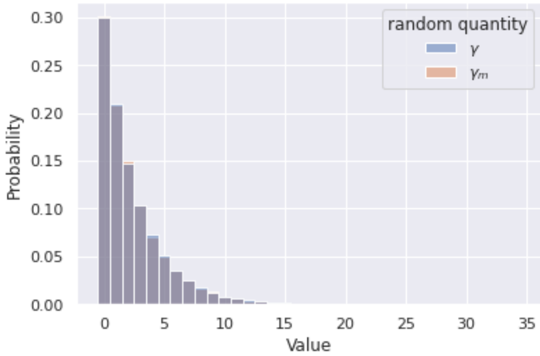
Геометрическое распределение обладает свойством отсутствия памяти, т.е.

$$\mathbb{P}(\gamma > m + n \mid \gamma \geqslant m) = \mathbb{P}(\gamma > n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Это свойство можно переформулировать. Пусть $\gamma \sim \mathrm{Geom}(p)$ — случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Свойство отсутствия памяти сл. в. γ означает, что



(a) Биномиальное распределение



(b) Отсутствие памяти ($m = 5$)

Рис. 1

$$\gamma_m \sim \gamma, \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\gamma_m := (\gamma\big|_{\Omega_m} - m), \quad \Omega_m = \gamma^{-1}(\gamma \geqslant m) \in \mathcal{A}$.

То есть для каждого m распределение случайной величины γ отличается ровно на константу m от распределения сл.в. γ, индуцированной на вероятностное подпространство Ω_m.

Проверка свойства отсутствия памяти проведена численным моделированием распределений сл.в. γ и γ_m (рис. 1b).

1.3 Игра в орлянку

Даны n н.о.р.с.в.

$$\theta_j : \mathbb{P}(\theta_j = 1) = \mathbb{P}(\theta_j = -1) = \frac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Рассматривается нормированная сумма

$$Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}, \quad \text{где } S_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_j,$$

пример поведения которой проиллюстрирован на рис. 2.

Для оценки $Y(n)$ при $n \to \infty$, нам потребуется следующая

Теорема (Центральная предельная теорема). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных (невырожденных) случайных величин с $\mathbb{E}\,\xi_1^2 \leqslant \infty$ и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}\,S_n}{\sqrt{\mathbb{D}\,S_n}} \xrightarrow{d} \operatorname{Norm}(0, 1).$$

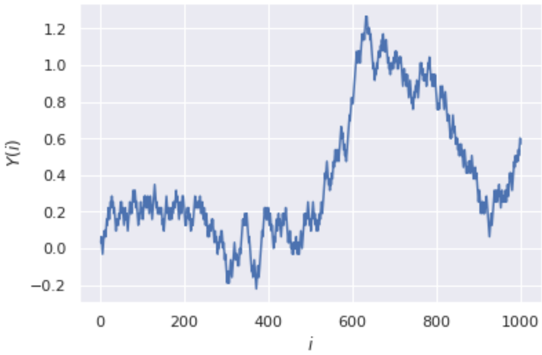


Рис. 2: Игра в орлянку ($n = 1000$)

Действительно

$$\frac{S_n - \mathbb{E}\, S_n}{\sqrt{\mathbb{D}\, S_n}} = \frac{S_n - 0}{\sqrt{n\, \mathbb{D}\, \theta_1)}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = Y(n) \xrightarrow{d} \mathrm{Norm}(0, 1).$$

2 Задание 2

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лесницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.

2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $1-X$ распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение Y при условии $Y \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ совпадает с распределением $Y/3$) с помощью критерия Смирнова.

3. Вычислить значение математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими для разного объема выборок. Проиллюстрировать сходимость.

2.1 Датчик для канторова распределения

Носителем канторова распределения является счетное пересечение множеств

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1] \\
C_1 &= [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \\
C_2 &= [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1] \\
C_3 &= [0, 1/27] \cup [2/27, 1/9] \cup [2/9, 7/27] \cup [8/27, 1/3] \cup \\
&\quad [2/3, 19/27] \cup [20/27, 7/9] \cup [8/9, 25/27] \cup [26/27, 1] \\
C_4 &= \cdots,
\end{aligned}$$

что дает нам естественный способ рекурсивного выражения сл.в. $\delta \sim \mathrm{Cant}$ через $\xi \sim \mathrm{Bern}(0.5)$:

$$\delta = \varphi_0 \cdot \mathbb{I}\left(\xi = 0\right) + \varphi_1 \cdot \mathbb{I}\left(\xi = 1\right)$$
$$\varphi_0 = \varphi_{00} \cdot \mathbb{I}\left(\xi = 0\right) + \varphi_{01} \cdot \mathbb{I}\left(\xi = 1\right), \quad \varphi_1 = \varphi_{10} \cdot \mathbb{I}\left(\xi = 0\right) + \varphi_{11} \cdot \mathbb{I}\left(\xi = 1\right)$$
$$\cdots$$

$$\mathbb{P}\left(\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{2i_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{2i_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}\right]\right) = 1,$$
$$\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_n 0} \cdot \mathbb{I}\left(\xi = 0\right) + \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_n 1} \cdot \mathbb{I}\left(\xi = 1\right).$$

Список литературы

[1] Смирнов С. Н. кафедральный курс *«Стохастический анализ и моделирование»*, 2021.

[2] Ширяев А. Н. *«Вероятность»*. Изд-во Наука, Москва, 1979.