



POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ MATEMATYKI

I NAUK INFORMACYJNYCH



PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

INFORMATYKA

Opracowanie symulatora transportera wahadła odwróconego na wózku

**Development of the simulator for the transporter
of an inverted pendulum on a cart**

Autor:

Jakub Abelski

Promotor: prof. dr hab. Krzysztof Marciniak

Warszawa, Grudzień 2016

.....

podpis promotora

.....

podpis autora

Streszczenie

Rozwój nowoczesnych technologii opiera się w głównej mierze na usprawnianiu istniejących zasobów oraz poszukiwaniu innowacyjnych rozwiązań. W celu ograniczenia nakładów finansowych, jak również minimalizacji ryzyka popełnienia błędu, przy wdrażaniu nowych pomysłów warto rozważyć wykorzystanie narzędzi oferowanych przez środowiska symulacyjne. Komputer potrafi wykryć usterki, z niezwykłą precyzją odpowiedzieć na większość pytań postawionych przez użytkownika, a często daje możliwość wykonania optymalizacji procesu tak, by uzyskać zmaksymalizowany efekt końcowy.

Niniejsza praca wpisuje się w przedstawioną retorykę, gdyż poświęcona jest opracowaniu symulatora transportera wahadła odwróconego na wózku. Bazą dla projektu jest dobrze znane zagadnienie dwuwymiarowego układu złożonego z wahadła odwróconego umieszczonego na ruchomej podstawie. Głównym zadaniem systemu jest utrzymanie wahadła w niestabilnym punkcie równowagi i reagowanie na zakłócenia pochodzące z zewnątrz poprzez odpowiedni regulator napięcia na silniku sterującym ruchem podstawy. Prezentowana praca podchodzi do zagadnienia w sposób niestandardowy. Wspomniany układ zostaje przeniesiony do świata trójwymiarowego, w którym dwa niezależne systemy związane z kierunkami poziomych osi głównych zostają połączone w jeden moduł sterowania układem. Zabieg ten umożliwia zadanie trajektorii ruchu transportera i przetestowanie skuteczności różnych modeli sterowania położeniem układu i wychyleniem wahadła. Dodatkowym elementem projektu jest uwzględnienie zakłócenia w postaci zewnętrznej siły wiatru. Zadaniem transportera jest reagowanie na zakłócenie w taki sposób, by zminimalizować ryzyko stracenia kontroli nad wahadłem.

Przygotowane rozwiązanie nie posiada jeszcze odzwierciedlenia w technice, natomiast doskonale odnajduje się w świecie symulacji i pozwala na dogłębną analizę pracy układu, jak również wykorzystanie go w grach komputerowych jako wirtualnego pojazdu z nietrywialnym sterowaniem.

Celem pracy jest zbudowanie uniwersalnego symulatora z konkretną realizacją przedstawionego problemu. Dodatkowym elementem jest możliwość dokonania dogłębnej analizy procesu tworzenia symulacji i wypracowania optymalnego rozwiązania. Ponadto dokument ma na celu ilustrację architektury i ogólnego schematu działania programu, a także przedstawienie wyników przeprowadzonych testów.

Pierwszy rozdział tekstu stanowi bazę teoretyczną dalszych rozważań. Zawiera on podstawowe definicje, przybliża istotę problemu oraz istniejące rozwiązania. Rozdział drugi opisuje logikę systemu. Rozdział trzeci skupia się na opisie rozwiązania. W czwartym rozdziale omówione zostają testy oraz porównanie użytych metod. Rozdział piąty prezentuje architekturę opracowanego systemu, natomiast rozdział szósty stanowi instrukcję obsługi dla użytkownika. Ostatni rozdział podsumowuje całość pracy, opisuje wnioski oraz przedstawia możliwe kierunki rozwoju systemu.

Abstract

Development of new technologies is based mainly on the analysis, improvement of existing resources and finding innovative solutions. Unfortunately, due to financial constraints, as well as the risk of adverse effects it is not recommended to implement the idea without special preparation. In order to significantly reduce the risks using the tools offered by simulation environments should be considered. The computer is able to forgive the mistakes made at the design stage, as well as it can investigate the matter with great precision and answer most of the questions asked by the user. In addition it has the possibility of optimizing processes, so as to obtain the final effect maximized.

The thesis is devoted to the development of the simulator for the transporter of an inverted pendulum on a cart. The project is based on well-known problem of two-dimensional system consisting of an inverted pendulum mounted on a movable platform. The main task of the system is to keep the pendulum in an unstable equilibrium and respond to noises from the environment through the special voltage controller of the platform's engine. In this project the system is transferred to a three-dimensional world in which two independent systems associated with the horizontal directions of the principal axes are integrated into a unit. As a result, the movement trajectory can be applied to the system and the pendulum should be transported according to a given trajectory. An additional element of the project is dealing with the wind force. The transporter have to respond on the noise so as to minimize the risk of losing control of the pendulum.

The prepared solution has not yet reflected in the technique however it perfectly finds itself in the world of simulation. The project allows for in-depth analysis of system's dynamics, as well as it can be used in computer games as a virtual vehicle with a non-trivial control.

The aim of the thesis is to build a universal simulator with a concrete implementation of the presented problem. An additional element is the possibility of in-depth analysis of simulation to develop the optimal solution. Furthermore, the document was prepared to illustrate the architecture and a general scheme of the system, as well as present results of tests.

The first chapter is a theoretical basis for further discussion. It includes basic definitions, shows the essence of the problem and discusses existing solutions. The second chapter describes the logic of the whole program. The third chapter focuses on the solution description. In the fourth chapter tests results and the comparison of the solutions adopted in the project are presented. The fifth and sixth chapters describe the system architecture and the user manual. The last chapter summarizes the whole work. It presents conclusions and future directions of development of the system.

Słowa kluczowe

Symulacja
Transporter
Wahadło odwrócone na wózku
Dynamika układu
Trajektoria ruchu
Stabilizacja układu
Regulator PID
Zakłócenia siłą wiatru
Równanie stanu
Linearyzacja
Algorytm Runge-Kutta

Podziękowania

Niniejszą pracę pragnę zadedykować rodzicom: Marcie i Janowi Abelskim, dzięki którym miałem możliwość swobodnego kształcenia się i rozwijania swoich zainteresowań.

Chciałbym wyrazić wdzięczność promotorowi: prof. Krzysztofowi Marciniakowi za jego wsparcie i dobre rady odnośnie kwestii merytorycznych jak i praktycznej części pracy. Specjalne podziękowania dla całej kadry zakładu CAD/CAM na wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych za przekazanie podstaw umożliwiających osiągnięcie odpowiedniego zaawansowania pracy i ugruntowanie wiedzy niezbędnej w przyszłej karierze zawodowej.

Spis treści

1	Wstęp	7
1.1	Podstawowe definicje	7
1.1.1	Symulacja	7
1.1.2	Układ dynamiczny	9
1.2	Opis problemu	12
1.2.1	Motywacja	12
1.2.2	Główne cele	12
1.3	Przegląd istniejących rozwiązań	13
1.3.1	Symulatory	13
1.3.2	Dynamika i sterowanie	14
2	Definicja projektu	16
2.1	Zakres projektu	16
2.2	Analiza wymagań	16
2.3	Ograniczenia	18
3	Opis rozwiązania	19
3.1	Podstawy matematyczno-fizyczne	19
3.1.1	Równanie stanu	19
3.1.2	Algorytm Rungego-Kutty	21
3.1.3	SLERP	21
3.1.4	Regulator PID	21
3.1.5	Regulator podwójny PID	23
3.2	Mechanika systemu	24
3.2.1	Model matematyczny ruchu	24
3.2.2	Linearyzacja modelu	28
3.2.3	Stabilizacja układu	31
3.2.4	Wprowadzenie zakłóceń do modelu	32
3.2.5	Wprowadzenie trajektorii ruchu	33
3.2.6	Manualna kontrola nad układem	36
3.3	Algorytm pracy symulatora	36
4	Testy i porównanie przyjętych rozwiązań	38
4.1	Założenia	38
4.2	Stabilizacja układu	39

4.3	Ruch po trajektorii	43
4.4	Wpływ parametrów układu	50
4.5	Wpływ zakłóceń pochodzących od siły wiatru	52
5	Architektura systemu	55
5.1	Ogólny opis rozwiązania	55
5.2	Wykorzystane narzędzia	55
5.2.1	Windows Presentation Foundation	55
5.2.2	HelixToolkit	55
5.2.3	OxyPlot	55
5.2.4	Pozostałe	55
5.3	Wzorce projektowe	55
5.4	Komponenty aplikacji	55
5.4.1	Modele	55
5.4.2	Kontrolery	55
5.5	Zarządzanie aplikacją	55
6	Instrukcja użytkownika	56
6.1	Panel kontrolny	56
6.1.1	Moduły	56
6.1.2	Opcje	56
6.1.3	Sterowanie parametrami	56
6.2	Wizualizacja	56
6.2.1	Scena	56
6.2.2	Wykresy	56
6.2.3	Podgląd stanu	56
7	Podsumowanie pracy	57
7.1	Ocena rozwiązania	57
7.1.1	Stopień realizacji projektu	57
7.1.2	Poprawność rozwiązania	57
7.2	Krytyczna refleksja	57
7.3	Możliwości rozszerzania projektu	57

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Podstawowe definicje

1.1.1 Symulacja

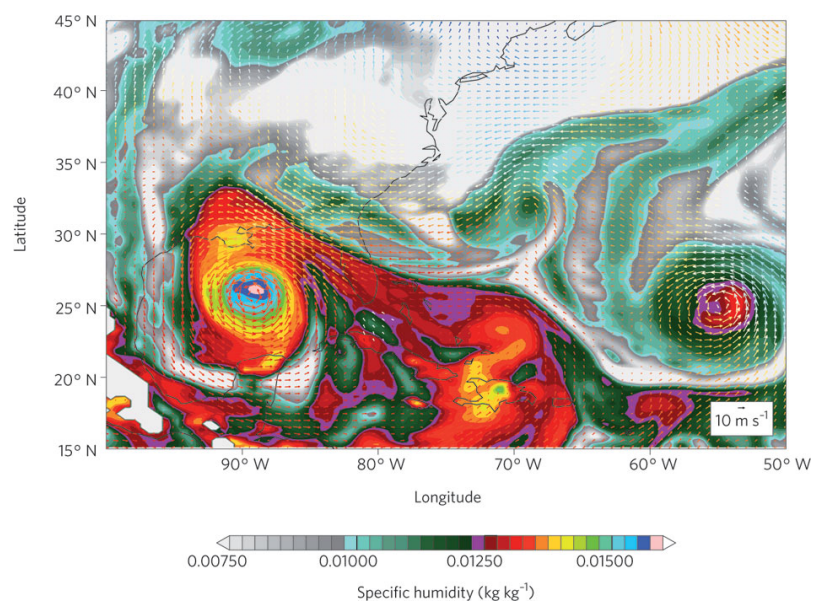
Według Słownika Języka Polskiego [6] symulacja to sztuczne odtwarzanie właściwości danego obiektu lub zjawiska za pomocą jego modelu, natomiast bardziej szczegółowo w zakresie symulacji komputerowej jest to badanie zachowania się obiektów rzeczywistych na podstawie obserwacji działania programów komputerowych symulujących to zachowanie.

Symulację komputerową wykonuje się wtedy, gdy trudno jest wyznaczyć analityczne rozwiązanie problemu lub gdy złożoność systemu uniemożliwia jakąkolwiek ręczną analizę problemu. Symulacja komputerowa wykorzystuje pewien zadany model matematyczny pod postacią kodu programu komputerowego, który jest przetwarzany, a następnie prezentowane są rezultaty.

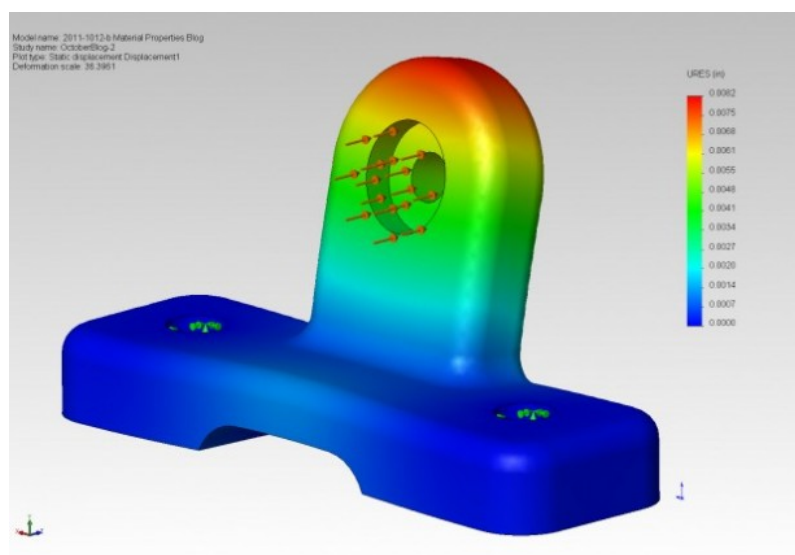
Symulacja znajduje zastosowania w wielu dziedzinach takich jak:

- Inżynieria - np. w budownictwie do badania wytrzymałości konstrukcji.
- Systemy treningowe, gry komputerowe - np. symulatory samolotów, czołgów, statków, itp.
- Ekonomia i biznes - np. do wyceny instrumentów pochodnych na giełdzie.
- Nauki społeczne - np. w badaniu dynamiki populacji.
- Nauki przyrodnicze - np. w meteorologii do wyznaczania prognozy pogody.

Kilka przykładów zastosowań symulacji komputerowej przedstawiono na ilustracjach 1.1 i 1.2.



Rysunek 1.1: Symulacja dwóch tropikalnych huraganów nad Atlantykiem [9]



Rysunek 1.2: Analiza własności materiału za pomocą symulacji SolidWorks [10]

Bazując na [7] symulacje komputerowe można podzielić ze względu na:

- Przewidywalność zdarzeń - deterministyczne, gdzie wyniki są powtarzalne i zależne tylko od zadanych parametrów i i interakcji oraz stochastyczne - generowane losowo.
- Upływ czasu - ciągły, w którym chwile pośrednie są interpolowane brzegowymi lub dyskretny, gdzie czas zwiększa się przyrostowo.
- Dane wyjściowe - statyczne, w których wynikiem jest zbiór danych lub dynamiczne, które ukazują cały proces przebiegający w czasie, np. animacja.
- Zasób komputerów - lokalny lub rozproszony.

Przygotowywana praca realizuje symulator z deterministyczną przewidywalnością zdarzeń, czas zwiększa się stałymi przyrostami z możliwością ich modyfikowania. Przetwarzanie systemu odbywa się na pojedynczym komputerze, natomiast dane wyjściowe prezentowane są w postaci dynamicznej animacji.

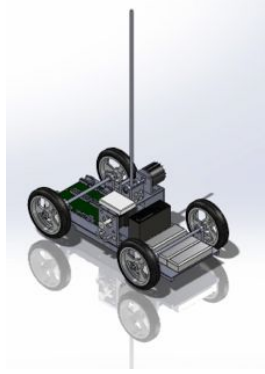
1.1.2 Układ dynamiczny

Wprowadzenie

Układ dynamiczny jest to matematyczny model zjawiska występującego w przyrodzie, określany poprzez funkcję zachowania układu w danym czasie. Model ten jest zwykle opisany poprzez układ równań różniczkowych, zwanych równaniem stanu. W danej jednostce czasowej system posiada stan wyrażony jako wektor liczb utożsamiany z punktem w przestrzeni stanu. Ewolucja układu polega na wyznaczaniu kolejnych stanów na podstawie poprzednich poprzez użycie funkcji przejścia. Funkcja ta może być deterministyczna lub stochastyczna. W pierwszym przypadku dla zadanego czasu stan wyznaczany jest jednoznacznie, w drugim przypadku na ewolucję układu wpływają dodatkowe zdarzenia losowe (przytoczone zagadnienie zostało szerzej omówione w [1]).

Wahadło odwrócone na wózku

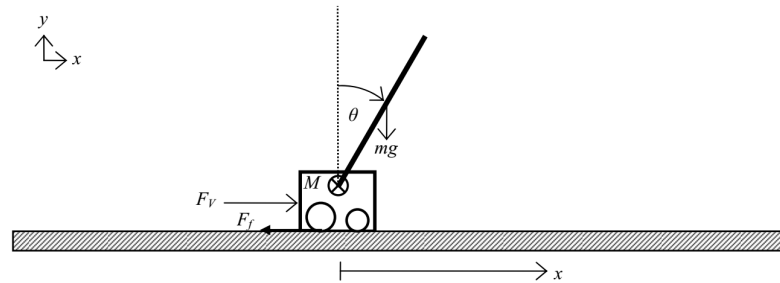
Niniejsza praca skupia się na modelu dynamiki układu złożonego z wahadła odwróconego umieszczonego na ruchomej platformie. Wahadło odwrócone jest rodzajem wahadła, w którym środek masy znajduje się powyżej punktu zaczepienia. Wahadło połączone jest z wózkiem, który porusza się w płaszczyźnie poziomej za pomocą silnika napędowego. Przykładowy układ pokazany został na ilustracji 1.3.



Rysunek 1.3: Model bezprzewodowego układu mechanicznego dla odwróconego wahadła na wózku [11]

Przedstawione ustawienie wahadła powoduje, że znajduje się ono w niestabilnym punkcie równowagi. Punkt równowagi jest miejscem przy którym element pozostaje w bezruchu (prędkość zmiany stanu jest zerowa). Wyróżniamy stabilne i niestabilne punkty równowagi. Wahadło posiada dwa punkty równowagi: stabilne znajdujące się poniżej punktu zaczepienia i niestabilne powyżej punktu równowagi. W przypadku drugiego z nich nawet niewielkie zaburzenie stanu układu wywołuje ruch wahadłowy, który ustaje dopiero po zatrzymaniu się w stabilnym punkcie równowagi.

Układ będący przedmiotem zainteresowania pokazany został na schemacie 1.4.



Rysunek 1.4: Uproszczony schemat fizyki układu wahadła odwróconego na wózku [4]

Najważniejsze elementy schematu:

- F_v - siła napędowa wózka $[N]$.
- F_f - siła tarcia $[N]$.
- m - masa wahadła $[kg]$.
- M - masa wózka $[kg]$.
- g - przyspieszenie ziemskie $[\frac{m}{s^2}]$
- θ - kąt między osią wahadła a pionową osią układu $[rad]$.

Stan układu określany jest poprzez cztery parametry:

- Położenie środka wózka w osi X.
- Prędkość liniowa wózka.
- Kąt odchylenia wahadła od osi pionowej.
- Prędkość kątowna wahadła.

Parametry fizyczne układu (wraz z nominalnymi wartościami opracowanymi na podstawie literatury [4]) pokazane zostały w poniższej tabeli 1.1.

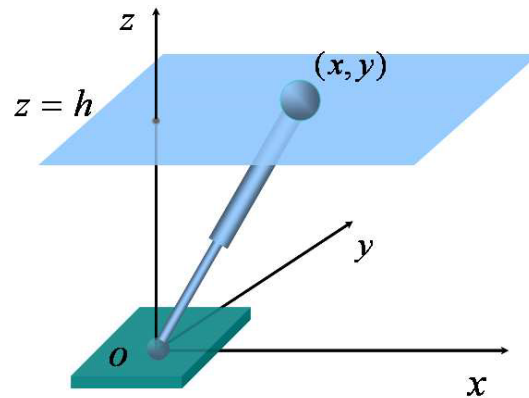
Parametr	Wartość
masa wózka	0.79 kg
masa wahadła	0.23 kg
długość wahadła	0.61 m
współczynnik tarcia wózka	7.68 $\frac{N}{ms^{-1}}$
współczynnik konwersji napięcia na siłę	1.72 $\frac{N}{V}$

Tablica 1.1: Parametry nominalne układu

Podstawowym zagadnieniem związanym z omawianym układem jest kontrola wychylenia wahadła. Urządzenie sterujące poprzez przyłożenie odpowiedniego napięcia na silniku wywołuje siłę napędową, która porusza platformą. Odpowiedni ruch podstawy pozwala na utrzymanie wahadła w punkcie równowagi.

Trójwymiarowa wersja układu

Dwuwymiarowy układ wahadła odwróconego na wózku można wykorzystać do zbudowania trójwymiarowego odpowiednika. Nowy model składa się z dwóch podukładów odpowiedzialnych za płaszczyzny związane z osiami głównymi układu, odpowiednio: O(XZ) i O(YZ). Przybliżony model znajduje się na rysunku 1.5



Rysunek 1.5: Uproszczony schemat trójwymiarowego układu wahadła odwróconego na wózku [12]

Wynikowy stan całego układu jest sumą stanów poszczególnych komponentów. Ruch trójwymiarowego modelu wyznaczany jest jako złożenie (superpozycja) ruchów podukładów. Kierunek wychylenia wahadła można wyznaczyć za pomocą elementarnych własności geometrycznych.

Opracowany w ten sposób model pozwala na poruszanie układem po płaszczyźnie $O(XY)$. Wykorzystując odpowiednie narzędzie sterujące można dokonać stabilizacji układu nie tylko dla kąta odchylenia wahadła, ale również pozycji wózka na płaszczyźnie.

1.2 Opis problemu

1.2.1 Motywacja

Opracowywane zagadnienie jest nietrywialną modyfikacją dobrze znanego zagadnienia sterowania wahadłem odwróconym na wózku. Wybrana tematyka pracy magisterskiej jest ściśle związana z zainteresowaniami autora oraz materiałem realizowanym w ramach studiów. Przygotowanie pracy daje możliwość pogłębienia wiedzy z zakresu układów dynamiki i teorii sterowania. Dodatkowo pozwala na zmierzenie się z problemem wykonania symulacji, która w profesjonalny sposób zrealizuje zadane zagadnienie, a dodatkowo będzie atrakcyjna dla użytkownika końcowego. Ponadto wypracowana koncepcja systemu nie posiada jeszcze odzwierciedlenia we współczesnej technice. Toteż ze względu na elementy innowacyjności rozwiązania, pomysł ten jest okazją do analizy niestandardowego systemu, który może mieć zastosowanie w przyszłości, przynajmniej w środowisku wirtualnym.

1.2.2 Główne cele

Podstawowym celem pracy jest opracowanie symulatora transportera wahadła odwróconego na wózku. Zagadnienie to można w naturalny sposób podzielić na kilka podproblemów, co pozwala na szczegółowy przegląd poszczególnych elementów:

- Układ wahadła odwróconego na wózku. Projekt opiera się na analizie prostego modelu fizycznego wraz z implementacją jego zachowania. Dodatkowo rozszerza podstawową, dwuwymiarową wersję, na układ trójwymiarowy, by zwiększyć poziom skomplikowania, ocenić użyteczność zaproponowanego pomysłu i wzbogacić efekt końcowy. Dodatkowym elementem jest wprowadzenie zakłóceń do układu w postaci podmuchów powietrza. Istotny jest również przegląd przypadków szczególnych i wypracowanie odpowiedniej reakcji na ich zaistnienie. Projekt powinien w pełni przedstawić zadane zagadnienie, wraz z możliwością wprowadzania modyfikacji układu i pełnym podglądem na jego stan. Dysponując w pełni zaimplementowanym modelem bazowym można badać zachowanie układu wobec zadanych parametrów wejściowych i dynamicznych.
- Stabilizacja układu. Naturalnym zagadnieniem wiążącym się z układem wahadła odwróconego na wózku jest próba stabilizacji wychylenia wahadła w obrębie pionowej osi układu tak, by komponent pozostawał w niestabilnym punkcie równowagi. Celem projektu jest zrealizowanie wspomnianej stabilizacji za pomocą regulacji napięcia podawanego na wejście do silników sterujących wózkiem. Zadanie to wymaga wykorzystania wiedzy z zakresu teorii sterowania, w szczególności pojęcia regulatora. Praca powinna oprzeć się na implementacji odpowiedniego regulatora i przetestowaniu jego działania względem poszczególnych parametrów systemu.
- Transport układu. Osiągnięcie kontroli nad wychyleniem wahadła pozwala na dalsze rozszerzanie funkcjonalności systemu. Kolejnym etapem projektu jest stworzenie modułu sterującego ruchem całego układu. System powinien umożliwić stworzenie dowolnej trajektorii ruchu lub wczytanie przygotowanego przykładu, a następnie zmuszenie układu fizycznego do odwzorowania zadanej ścieżki ruchu.
- Opracowanie symulatora. System nie będzie użyteczny, jeśli nie zostanie zaprezentowany użytkownikowi końcowemu w wygodnej i atrakcyjnej wizualnie formie. Ostatnim istotnym celem projektu jest stworzenie aplikacji na komputer, której zadaniem będzie wizualizacja zachowania całego układu fizyki. Ponadto program powinien posiadać intuicyjny panel sterowania oraz dostarczać na bieżąco pełnej informacji na temat stanu systemu. Dodatkowym walorem aplikacji może być tryb interakcyjny, który pozwoli użytkownikowi nie tylko na przegląd mechaniki układu, lecz również na zabawę w sterowanie pojazdem.

1.3 Przegląd istniejących rozwiązań

1.3.1 Symulatory

W obecnych czasach oprogramowanie symulacyjne jest podstawą funkcjonowania wielu gałęzi przemysłu. Przed przystąpieniem do realizacji projektu autor skupił się na przeglądzie najbardziej popularnych narzędzi symulacyjnych w celu znalezienia kluczowych cech, jakie powinien spełniać dobry symulator. Na szczególną uwagę zasługują trzy rozwiązania:

- Simulink - pakiet numeryczny MATLAB firmy The MathWorks służący do przeprowadzania symulacji komputerowych. Narzędzie pozwala na tworzenie modeli poprzez wybór komponentów z interfejsu graficznego. Zapewnia symulację z czasem dyskretnym i ciągłym. Simulink wykorzystywany jest głównie do cyfrowego przetwarzania sygnałów, teorii sterowania i analizy obwodów elektrycznych.
- LabVIEW - środowisko programistyczne firmy National Instruments skupiające się głównie na pomiarach i analizie danych. Pozwala na tworzenie modeli poprzez specjalny graficzny język programowania. LabVIEW znajduje zastosowanie w ośrodkach badawczych i testach przemysłowych.
- SolidWorks Simulation - pakiet symulacyjny będący częścią programu komputerowego typu CAD firmy Dassault Systèmes. Umożliwia analizę modeli pod wieloma kątami technicznym, symulację ruchu układu w obecności różnych czynników zewnętrznych. Narzędzie wykorzystywane przez wiodące firmy zajmujące się przemysłem.

Przytoczone przykłady zostały zanalizowane pod kątem budowy, możliwości technicznych, sposobu prezentacji danych i interakcji z użytkownikiem. Wypracowane wnioski dały gruntowną podstawę do stworzenia własnego rozwiązania opartego na kilku najważniejszych cechach dobrej symulacji:

- Modularna budowa - program powinien być zbudowany z respektowaniem standardów inżynierii oprogramowania. Poszczególne funkcjonalności powinny być wyodrębnione i tworzyć pojedyncze pakiety, które będzie można wykorzystywać jako samodzielne elementy.
- Prostota - konkretne narzędzie powinno spełniać wszystkie wymagania techniczne i ukazywać rezultaty w jak najbardziej przejrzysty sposób. Dodatkowe elementy powodują jedynie przesłonięcie kluczowych funkcjonalności.
- Dostęp do danych - symulacja powinna w każdej chwili udostępniać komplet niezbędnych danych fizycznych, wizualizować stan zadanego układu oraz gromadzić istotne parametry w formie wykresów lub diagramów.
- Sterowanie - modyfikacja parametrów symulacji powinna być intuicyjna dla każdego użytkownika.

1.3.2 Dynamika i sterowanie

Zagadnienie stabilizacji dwuwymiarowego układu wahadła odwróconego na wózku zostało szeroko omówione w wielu pracach naukowych. Ze względu na prostotę podstawowego modelu temat ten często pojawia się jako materiał na laboratorium na studiach poświęconych automatyce i robotyce (przykładem jest instrukcja [4]).

Dokładna analiza problemu opiera się na wyborze jednego z dwóch modeli: nieliniowego lub zlinearyzowanego. W pierwszym przypadku model wiernie odwzorowuje zachowanie wahadła niezależnie od jego wychylenia, w drugim pojawia się ograniczenie

na nieznaczne wychylenia wahadła. Większość przeanalizowanych prac realizuje drugie założenie ze względu na znaczne uproszczenia obliczeń. Kolejnym wyróżnikiem jest sposób stabilizacji układu. Istnieje wiele narzędzi z zakresu teorii sterowania, które pozwalają na kontrolowanie układu. Najbardziej popularnymi są regulatory: PID i LQR. Szczegółowy przegląd i porównanie narzędzi zostało omówione w artykule [16]. Autor pracy skupił się wyłącznie na sterowaniu regulatorem PID, jednakże pozostawił możliwość zamiany kontrolera na dowolny inny.

Zagadnienie trójwymiarowe znajduje swoje odniesienie jedynie w modelowaniu poruszania dwunożnego robota, w którym skomplikowany model zostaje zastąpiony wahadłem. Stabilizacja uproszczonego modelu pozwala na poruszanie robotem przy zachowaniu stabilności jego postawy. Temat został gruntownie przedstawiony w artykule [15].

Symulacja transportera układu nie jest zagadnieniem szeroko omówionym, toteż autor oparł rozwiązanie na ogólnej wiedzy z zakresu dynamiki układów i sterowania.

Rozdział 2

Definicja projektu

2.1 Zakres projektu

Projekt obejmuje opracowanie biblioteki fizyki dla transportera wahadła odwróconego na wózku oraz symulatora wizualizującego działanie biblioteki. Aplikacja przeznaczona jest na platformę Windows.

Projekt podzielony jest na kilka głównych elementów:

- Budowa dynamiki układu w oparciu o podstawy matematyczno-fizyczne.
- Opracowanie modułu kontroli układem w celu zapewnienia stabilności.
- Wprowadzenie modułu zakłóceń w postaci siły wiatru.
- Obsługa trajektorii ruchu.
- Wizualizacja układu na trójwymiarowej scenie.
- Zarządzanie animacją i modyfikacja parametrów układu.
- Umożliwienie użytkownikowi ręcznej kontroli systemu poprzez tryb gry.

2.2 Analiza wymagań

Wymagania względem projektu można podzielić na funkcjonalne i нефункционалне. Pierwsze odnoszą się do konkretnych zadań, jakie aplikacja powinna realizować. Drugie dotyczą ogólnych cech jakimi program powinien się charakteryzować.

Podstawowe wymagania нефункционалне:

- Użyteczność - program powinien w pełni realizować postawione zadania, a dodatkowo zachęcać użytkownika do zrozumienia tematyki.
- Stabilność - aplikacja powinna działać poprawnie bez względu na interakcję użytkownika.

- Łatwość użytkowania - korzystanie z funkcjonalności powinno być intuicyjne, ponadto wszystkie najważniejsze informacje powinny zostać zebrane w charakterze pomocy.
- Łatwość modyfikowania - program powinien umożliwiać dostosowywanie ustawień w zależności od potrzeb użytkownika.
- Modularność - każdy element systemu powinien być skonstruowany jako oddzielny moduł udostępniający szereg funkcji.
- Rozszerzalność - kod źródłowy aplikacji powinien być przejrzysty, łatwy do zarządzania i rozszerzalny.

Najważniejsze wymagania funkcjonalne:

- Zarządzanie aplikacją
 - Wybór jednego z trybów działania aplikacji (podstawowy, śledzenie trajektorii, tryb gry).
 - Modyfikacja parametrów startowych układu.
 - Możliwość ustawienia aktualnego regulatora i generatora wiatru.
 - Modyfikacja dokładności śledzenia trajektorii.
 - Zarządzanie parametrami wiatru w trakcie przebiegu animacji.
 - Wybór trajektorii z zestawu przygotowanych przykładów.
 - Możliwość stworzenia nowej trajektorii poprzez zadanie jej parametryzacji.
- Wizualizacja
 - Trójwymiarowa scena z możliwością swobodnej manipulacji kamerą.
 - Umieszczenie modelu transportera w postaci platformy na kołach z przyczepionym odwróconym wahadłem.
 - Wyświetlanie płaszczyzny, po której porusza się model, wraz z podziałką metryczną.
 - W zależności od ustawień wyświetlania pokazywanie trajektorii ruchu wahadła i wózka.
 - Kontrolowanie postępu animacji poprzez odpowiedni panel.
 - Możliwość przełączania wyświetlania między trybami: prostych kolorów i tekstur.
 - Możliwość ręcznego sterowania układem za pomocą myszy i klawiatury.
- Prezentacja danych
 - Dynamiczne wykresy dla kluczowych danych, tj. błąd regulacji czy podawane napięcie na silniku.

- Możliwość zapisywania aktualnie wygenerowanych wykresów.
- Wyświetlanie aktualnego stanu układu.
- Prezentacja informacji ogólnych na temat aplikacji i dynamiki układu oraz interaktywnej pomocy.

2.3 Ograniczenia

W trakcie wstępnej analizy projektu przyjęto zestaw ograniczeń w celu zachowania spójności pracy i uniknięcia nadmiernego rozszerzania mniej istotnych elementów. Są to:

- Konieczność spełnienia wszystkich podstawowych wymagań wymienionych w poprzedniej sekcji.
- Możliwość uproszczenia modelu w celu zmniejszenia złożoności obliczeń.
- Ograniczenie realizacji stabilizacji układu do użycia różnych odmian regulatora PID.
- Ograniczenie jakości wizualizacji do wyświetlania prostego modelu układu na trójwymiarowej scenie.

Rozdział 3

Opis rozwiązania

3.1 Podstawy matematyczno-fizyczne

Dokładne omówienie rozwiązań przyjętych w pracy wymaga rozwinięcia kilku zasadniczych pojęć. Przytoczone zagadnienia zostały opracowane w oparciu o materiały z wykładów poświęconych projektowaniu środowiska wirtualnego: [2] oraz [3], a także tekst: [8].

3.1.1 Równanie stanu

Stan układu jest to informacja umożliwiająca określenie zachowania układu w danej jednostce czasu. Zawiera w sobie zakumulowane dane z całego przebiegu ruchu od chwili początkowej do obecnej. Jest to tzw. własność pamięci układu. Istotnym zagadnieniem związanym ze stanem układu jest charakterystyka związków między jego zmiennymi. Związki te określane są mianem równania stanu. Równanie to przyjmuje postać równania różniczkowego pierwszego rzędu i stanowi matematyczny model układu fizycznego.

Pojedynczy stan można określić jako wektor zmiennych będący punktem w n -wymiarowej przestrzeni stanów. Wówczas dynamikę układu można przedstawić poprzez n -wymiarową rozmaitość różniczkową N z powiązaniem prostopadłym polem wektorowym $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Trajektorie elementów układu dynamicznego wyrazić można poprzez równanie:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

z zadaniem warunkiem początkowym:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.2)$$

W sytuacji gdy prawa strona równania 3.1 nie zależy od czasu przyjmuje się, że układ dynamiczny jest autonomiczny. Wówczas wyznaczenie punktów stacjonarnych układu polega na rozwiązaniu równania:

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

Przedstawiony model jest jednoznacznie zdefiniowany przez warunek początkowy. Jednakże w rozwiązaniach praktycznych dużo korzystniejszym rozwiązaniem jest stworzenie rozwiązania, które oprócz obserwacji umożliwia również kontrolę. Aby to osiągnąć uzupełnia się model o dodatkowy wektor \mathbf{u} zawierający parametry modyfikujące

trajektorie układu. Odpowiednie równanie trajektorii przybiera wówczas następującą postać:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.4)$$

W większości przypadków aplikacje symulacyjne nie wymagają rozwiązywania skomplikowanego nieliniowego równania. Toteż często stosowaną praktyką jest upraszczanie poprzez linearyzację układu. W przypadku układu autonomicznego zmienność zostaje zastąpiona stałymi elementami: macierzą A związaną ze stanem układu oraz B związaną ze sterowaniem. Dodatkowo należy przyjąć, że w niektórych systemach zmienne stanu mogą być niedostępne w sposób bezpośredni, dlatego należy zdefiniować dodatkowe równanie pozwalające wyprowadzić zmienne wyjściowe układu.

Ostatecznie równanie stanu dla systemu liniowego niezmienniczego w czasie (ang. Linear Time Invariant) wygląda w sposób następujący:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.5)$$

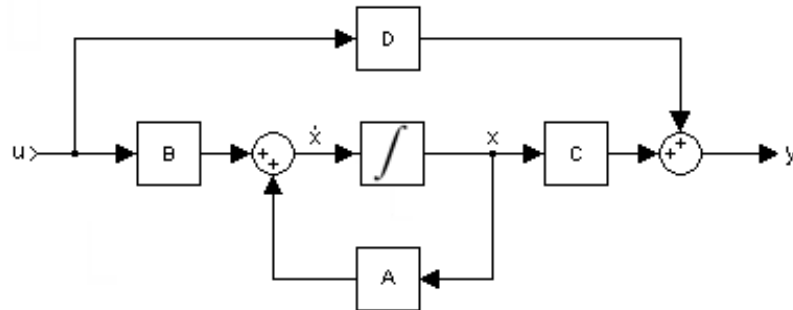
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.6)$$

gdzie:

- $x(t)$ - wektor stanu
- $u(t)$ - wektor sterowania
- $y(t)$ - wektor wyjściowy
- $A^{q \times n}$ - macierz stanu
- $B^{q \times m}$ - macierz sterowania
- $C^{p \times n}$ - macierz wyjścia
- $D^{p \times m}$ - macierz sterowania bezpośredniego

Parametry q i p są zwykle równe n , toteż macierz stanu jest najczęściej macierzą kwadratową. Macierz D pojawia się tylko w przypadku układów właściwych, czyli takich które posiadają transmitancję właściwą.

Model równań stanu dla układu ciągłego ilustruje schemat 3.1.



Rysunek 3.1: Schemat równań stanu dla układu ciągłego [13]

3.1.2 Algorytm Rungego-Kutty

Algorytm Rungego-Kutty jest to iteracyjna metoda rozwiązywania równań i układów równań różniczkowych zwyczajnych. Określenie to stosuje się również do całej rodziny jawnych i niejawnych metod z uwzględnieniem pewnych modyfikacji. Zwyczajowo jednak przyjmuje się konkretną implementację w postaci metody czwartego rzędu.

Zadaniem algorytmu jest wyznaczenie rozwiązania y na podstawie równania postaci $\dot{y} = f(x, y)$ oraz wartości początkowej $y(x_0) = y_0$. Ustalając krok całkowania h można wyznaczyć rozwiązanie w sposób iteracyjny:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

$$\Delta y_n = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Współczynniki $k_{1...4}$ wyznaczone są następująco:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Rezultatem działania metody jest zestaw kolejnych punktów przybliżających rozwiązanie. W przypadku układu równań różniczkowych postępowanie jest analogiczne.

Rozwiązanie opracowane przez autora korzysta z modyfikacji bazowego algorytmu zwanej metodą Casha-Karpa, która pozwala na adaptacyjny dobór parametru kroku całkowania h .

3.1.3 SLERP

SLERP (ang. spherical linear interpolation) jest to interpolacja wprowadzona przez Kena Shoemake w celach animacji rotacji trójwymiarowych. Technika zapewnia gładki ruch ze stałą prędkością między punktami końcowymi.

SLERP bazuje na fakcie, że każdy punkt krzywej, po której porusza się obiekt jest kombinacją liniową punktów końcowych animacji: p_0 i p_1 . Niech t będzie parametrem takim, że: $0 \leq t \leq 1$. Dodatkowo niech ω będzie kątem zakreślanym w trakcie przejścia, więc spełniającym równanie $\cos(\omega) = p_0 \cdot p_1$. Wówczas formuła geometryczna interpolacji wygląda następująco:

$$SLERP(p_0, p_1, t) = \frac{\sin((1-t)\omega)}{\sin(\omega)}p_0 + \frac{\sin(t\omega)}{\sin(\omega)}p_1$$

3.1.4 Regulator PID

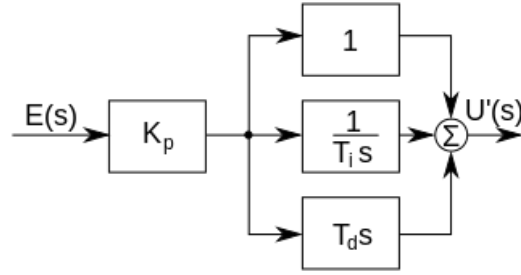
Regulator PID (ang. proportional-integral-derivative controller) jest to element obwodu regulacji, którego głównym zadaniem jest generowanie odpowiedniego sygnału sterującego, zmuszającego układ do określonego zachowania. Narzędzie to jest bardzo często

wykorzystywane w przemysłowych układach regulujących. Regulator ustawiony jest w pętli sprzężenia zwrotnego. W trakcie jednego cyklu wyznacza różnicę między wartością docelową i obecną (uchybu) oraz podaje na wejście regulowanego układu sygnał kompensujący uchyb.

Regulator PID składa się z trzech komponentów:

- człon proporcjonalny **P**, który reaguje na obecne wartości uchybu,
- człon całkujący **I**, który przechowuje informację na temat poprzednich wartości uchybu,
- człon różniczkujący **D**, który przewiduje następne wartości uchybu.

Schemat poglądowy regulatora PID zawarty został na ilustracji 3.2



Rysunek 3.2: Schemat blokowy idealnego regulatora PID [14]

Sygnał wyjściowy z regulatora jest sumą ważoną poszczególnych komponentów. Regulator wykonuje algorytm:

$$u(t) = K_p[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}] \quad (3.7)$$

gdzie:

- $u(t)$ - sygnał sterujący z regulatora
- $e(t)$ - uchyb regulacji
- K_p - wzmocnienie członu proporcjonalnego
- T_i - czas zdwojenia członu całkującego
- T_d - czas wyprzedzenia członu różniczkującego

Algorytm 3.7 można poddać dyskretyzacji z krokiem całkowania h . Poszczególne iteracje będą wówczas wyznaczone w następujący sposób:

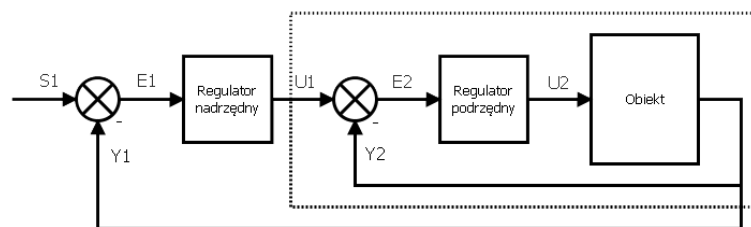
$$u(i) = K_p[e(i) + \frac{h}{T_i} \sum_{k=0}^i e(k) + T_d \frac{e(i) - e(i-1)}{h}] \quad (3.8)$$

Uzyskanie poprawnego działania regulatora PID wymaga dobrania odpowiednich wartości nastaw. Optymalizacji parametrów dokonuje się poprzez ręczne strojenie lub wyznaczenie algorytmiczne (np. metodą Zieglera-Nicholsa). Warto przy okazji zwrócić uwagę na to, że regulator PID nie gwarantuje optymalnego sterowania ani stabilności układu. W celu uzyskania powyższych cech należy rozważyć zastosowanie innego typu regulacji np. regulatora LQR.

3.1.5 Regulator podwójny PID

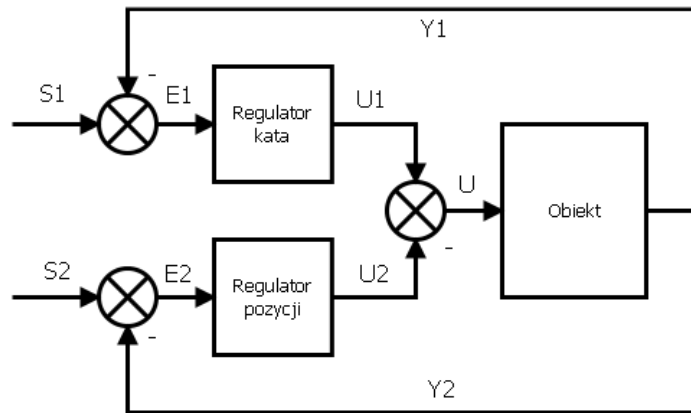
Utrzymanie układu wahadła odwróconego na wózku w niestabilnym punkcie równowagi wymaga uzupełnienia systemu o mechanizm kontroli. Regulator PID może pełnić funkcję narzędzia utrzymującego zerowe odchylenie wahadła względem osi pionowej. Niestety, w sytuacji, gdy celem układu jest dodatkowo stabilizacja położenia, nie wystarczy pojedynczy regulator PID. Rozwiązaniem tego problemu jest rozbudowa struktury na dwa komponenty odpowiedzialne za poszczególne wielkości regulowane. W literaturze pojawia się kilka zagadnień, z których najbardziej popularne to:

- układ regulacji kaskadowej przedstawiony na rysunku 3.3. Jest to klasyczne podejście zbudowane na podstawie szybkiej "pętli wewnętrznej" i "wolnej" pętli zewnętrznej. Regulator nadrzędny odpowiada za sterowanie położeniem wózka. Wartość wyjściowa z regulatora staje się wartością zadaną dla wewnętrznego układu, który zajmuje się regulacją kąta odchylenia wahadła od pionu. Wyjście z regulatora wewnętrznego podawane jest ostatecznie do sterowanego układu. Koncepcja ta pozwala na utrzymanie stabilności wahadła z dodatkowym uwzględnieniem dostosowywania pozycji wózka.



Rysunek 3.3: Schemat blokowy kaskadowego układu sterowania regulatorami PID[5]

- Układ regulacji równoległej pokazany na ilustracji 3.4. Działanie tego układu jest zbliżone do wariantu kaskadowego. Cechą odrębną jest fakt, że sterowanie podawane na układ wyznaczone jest jako różnica sterowań poszczególnych podukładów sterujących. Rozwiązanie to generuje problem wzajemnego zakłócania regulatorów, toteż należy uwzględnić w modelu, że regulator odchylenia wahadła musi być szybszy od regulatora położenia. Zabieg ten spowoduje, że tylko sterownik położenia potraktuje dodatkowe sterowanie jako zakłócenie.



Rysunek 3.4: Schemat blokowy równoległego układu sterowania regulatorami PID[5]

Definicja oznaczeń na schematach 3.3 i 3.4:

- $S1, S2$ - wartości zadane
- $E1, E2$ - uchyby regulacji
- $U1, U2$ - wyjścia z regulatorów
- $Y1, Y2$ - wyjścia z układu sterowanego

3.2 Mechanika systemu

3.2.1 Model matematyczny ruchu

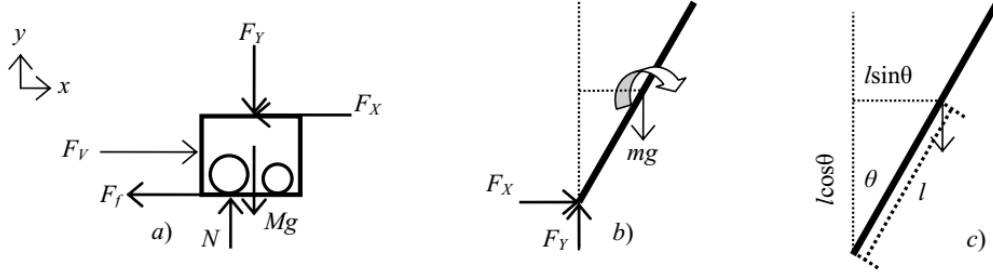
Schemat

Wykonanie poprawnej symulacji dowolnego zjawiska fizycznego wymaga na wstępie stworzenia odpowiedniego modelu matematycznego, który przybliży charakterystykę danego zjawiska. Niniejsza sekcja poświęcona jest omówieniu modelu ruchu wahadła odwróconego na wózku. Pełny model zrealizowany w projekcie zawiera w sobie dwa wspomniane układy, które są ze sobą połączone. Jednakże ich niezależność pozwala na swobodne rozpatrywanie pojedynczego układu. Wstępne informacje na temat zadania zostały przedstawione w sekcji 1.1.2. Dalsze rozważania będą dotyczyły analizy rozkładu sił w modelu oraz wyprowadzenia równań ruchu na podstawie pracy [4].

W przyjętym rozwiązaniu skupiono się na podstawowych siłach rządzących światem rzeczywistym. Ruch układu odbywa się w obecności siły grawitacji o przyspieszeniu ziemskim g . Na wózek działają dodatkowo siły: tarcia F_f i napędu pochodzącego od silnika F_v . Nacisk wózka Mg równoważony jest przez siłę sprężystości podłoża N . Ponadto należy rozważyć siły wzajemnego oddziaływania między wózkiem a wahadłem: F_x i F_y bazując na trzeciej zasadzie dynamiki Newtona:

W inercjalnym układzie odniesienia siły wzajemnego oddziaływania dwóch ciał mają takie same wartości, taki sam kierunek, przeciwne zwroty i różne punkty przyłożenia.

Pełny rozkład sił, wraz z wyznaczeniem odległości, przedstawiony został na schemacie 3.5.



Rysunek 3.5: Schemat rozkładu sił dla: a) wózka, b) wahadła, c) odległości między komponentami [4]

Idealny model wahadła zakłada, że składa się ono z obiektu masowego zawieszonego na nierozciągliwej cienkiej nici o długości l . Wobec tego można przyjąć, że ogół sił pochodzących od wahadła skupiony jest w obrębie jego środka masy. Uwzględniając fakt, że punkt zaczepienia wahadła znajduje się na środku wózka, którego pozycja określona jest współrzędną x , lokację środka masy można wyznaczyć jako:

$$\begin{aligned} x_g &= x + l \sin(\theta) \\ y_g &= l \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Siła napędowa pochodząca od silnika powoduje, że układ zyskuje zdolność do wymuszonego poruszania się po powierzchni. Siła ta regulowana jest poprzez napięcie przyłożone do silnika. Wzór na wyznaczenie tej siły wygląda następująco:

$$F_v = \gamma_v V \quad (3.10)$$

gdzie γ_f jest stałym współczynnikiem konwersji napięcia na siłę.

Siła tarcia związana jest z oddziaływaniem między wózkiem a podłożem. W analizowanym modelu wykorzystano zjawisko tarcia kinetycznego zależnego od prędkości ruchu, które można wyznaczyć jako:

$$F_f = \gamma_f \frac{dx}{dt} \quad (3.11)$$

gdzie γ_f jest stałym współczynnikiem tarcia wózka.

Ruch postępowy

Analiza ruchu postępowego została podzielona na dwa podproblemy związane z osiami głównymi układu oraz rozpatrzona oddzielnie dla wózka i wahadła. Umożliwia to przejrzyste zbadanie oddziaływań i łatwe wyprowadzenie równań ruchu. W przypadku wahadła można określić ruch w pionie i w poziomie, dla wózka tylko poziomy.

Zachowanie układu zostało scharakteryzowane w oparciu o drugie prawo dynamiki Newtona, które mówi:

W układzie inercyjnym, suma sił F działających na ciało jest równa masie ciała m pomnożonej przez jego przyspieszenie a :

$$F = ma \quad (3.12)$$

Korzystając z przytoczonego twierdzenia 3.12 zależność dla wózka w poziomie wygląda następująco:

$$F_v - F_x - F_f = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3.13)$$

Po uwzględnieniu charakterystyki siły tarcia i napędu 3.11:

$$\gamma_v V - F_x - \gamma_f \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3.14)$$

Analogicznie dla wahadła ruch w poziomie można określić równaniem:

$$F_x = m \frac{d^2 x_g}{dt^2} \quad (3.15)$$

Dalsze rozważania wymagają wyznaczenia pierwszej i drugiej pochodnej czasowej po poziomej trajektorii środka masy wahadła.

Dla pierwszej pochodnej należy skorzystać z 3.9:

$$\frac{dx_g}{dt} = \frac{d(x + l \sin(\theta))}{dt} = \frac{dx}{dt} + l \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (3.16)$$

Wyznaczenie drugiej pochodnej można uzyskać poprzez różniczkowanie równania 3.16:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_g}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} + l \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \right) \\ &= \frac{d^2 x}{dt^2} + l \left(\frac{d \cos(\theta)}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \cos(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \\ &= \frac{d^2 x}{dt^2} - l \sin(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \cos(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wykorzystując wyznaczone pochodne oraz równanie 3.15 można wyznaczyć poziomą siłę reakcji między wózkiem a wahadłem:

$$F_x = m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - l \sin(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \cos(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \quad (3.18)$$

Po wstawieniu uzyskanych wyprowadzeń do równania ruchu wózka w poziomie 3.14 i dokonaniu uporządkowania zmiennych ostateczna postać równania wygląda następująco:

$$(M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma_f \frac{dx}{dt} = \gamma_v V + m l \sin(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - m l \cos(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (3.19)$$

W przypadku ruchu w pionie należy rozważyć wyłącznie ruch wahadła. Bazując na twierdzeniu 3.12 równanie ruchu można podać w postaci:

$$F_y - mg = m \frac{d^2 y_g}{dt^2} \quad (3.20)$$

Podobnie jak dla ruchu w poziomie niezbędne będzie wyznaczenie pochodnych czasowych trajektorii środka masy.

Pierwsza pochodna przybiera postać:

$$\frac{dy_g}{dt} = \frac{d(l \cos(\theta))}{dt} = -l \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (3.21)$$

Druga pochodna:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_g}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(-l \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \right) \\ &= -l \left(\frac{d \sin(\theta)}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \sin(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \\ &= -l \cos(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - l \sin(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Łącząc wyznaczone pochodne z równaniem 3.20 można wyprowadzić wzór na pionową siłę reakcji między wózkiem a wahadłem:

$$F_y = mg + -ml \cos(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - ml \sin(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (3.23)$$

Wzór ten będzie niezbędny do dalszych rozważań poświęconych ruchowi obrotowemu.

Ruch obrotowy

Ruch obrotowy układu przejawia się w dynamice wahadła, które obraca się względem zadanego punktu zaczepienia. Analiza tego ruchu została przeprowadzona w oparciu o drugą zasadę dynamiki ruchu obrotowego:

Jeśli na ciało, o momencie bezwładności względem osi obrotu I , działają zewnętrzne siły o wypadkowym momencie siły M , to w rezultacie tego oddziaływania ciało będzie obracać się z przyspieszeniem kątowym ϵ takim, że:

$$M = I\epsilon \quad (3.24)$$

Moment siły i przyspieszenieątowe są pseudowektorami o zgodnych kierunkach i zwrotach. Poszczególne siły \mathbf{F} o wektorach pozycji \mathbf{r} generują momenty sił zdefiniowane jako:

$$\overline{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r} \quad (3.25)$$

Sumując wszystkie momenty sił działające na środek masy wahadła można uzyskać wzór:

$$F_y l \sin(\theta) - F_x l \cos(\theta) = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (3.26)$$

Korzystając z wyznaczonych wcześniej sił reakcji 3.18 i 3.23 wzór przyjmie postać:

$$\begin{aligned} & (mg + -ml \cos(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - ml \sin(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2}) l \sin(\theta) \\ & - m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - l \sin(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + l \cos(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2}\right) l \cos(\theta) = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Po wymnożeniu i pogrupowaniu poszczególnych elementów wzór wygląda następująco:

$$mgl \sin(\theta) - ml^2 (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \frac{d^2 \theta}{dt^2} - ml \cos(\theta) \frac{d^2 x}{dt^2} = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (3.28)$$

Korzystając z trywialnej równości trygonometrycznej

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad (3.29)$$

oraz dokonując kolejnego pogrupowania, ostateczną postać równania ruchu obrotowego wahadła można wyrazić jako:

$$(I + ml^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = mgl \sin(\theta) - ml \cos(\theta) \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3.30)$$

Podsumowując powyższe rozważania, równania ruchu układu wahadła odwróconego na wózku to:

$$\begin{aligned} (M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma_f \frac{dx}{dt} &= \gamma_v V + ml \sin(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - ml \cos(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ (I + ml^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= mgl \sin(\theta) - ml \cos(\theta) \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.2.2 Linearyzacja modelu

Założenia

Opracowany w poprzedniej sekcji model ruchu jest modelem nieliniowym. W celu uzyskania rozwiązania wygodniejszego obliczeniowo, bez istotnych strat na dokładności, i pozwalającego na zastosowanie rozwiązań z zakresu teorii sterowania przeprowadzona została linearyzacja modelu.

Charakterystyka realizowanego problemu pozwoliła na przyjęcie założenia, że kąt odchylenia wahadła od osi pionowej jest stosunkowo niewielki. Uzasadnieniem tego stwierdzenia jest fakt, iż docelowy system będzie wyposażony w narzędzie stabilizujące wychylenie, wobec czego w stanie ustalonym kąt ten będzie bliski zeru. Powyższe założenie umożliwia dokonania kilku istotnych uproszczeń w modelu:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &\approx \theta \\ \cos(\theta) &\approx 1 \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &\approx 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Jeśli dodatkowo przyjmiemy środek masy wahadła za środek ciężkości, wtedy moment bezwładności $I = 0$.

Konwersja równań

Uwzględniając powyższe rozważania, równania ruchu 3.31 można zapisać na nowo:

$$\begin{aligned} (M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma_f \frac{dx}{dt} &= \gamma_v V - ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ l \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= g\theta - \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Po uporządkowaniu zmiennych równania przyjmują postać:

$$\begin{aligned} (M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma_f \frac{dx}{dt} &= \gamma_v V \\ l \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} &= g\theta \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aby móc przeprowadzić dalsze rozważania niezbędne będzie wykonanie rozdzielania równań w taki sposób, aby każde z nich zawierało relację między drugą pochodną po odpowiedniej zmiennej a pierwszymi pochodnymi i samymi zmiennymi. Dokonać tego można poprzez podstawienie jednego równania do drugiego i wyznaczenie odpowiednich zależności.

$$\begin{aligned} (M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + ml \left(\frac{g\theta}{l} - \frac{1}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \gamma_f \frac{dx}{dt} &= \gamma_v V \\ M \frac{d^2 x}{dt^2} + mg\theta + \gamma_f \frac{dx}{dt} &= \gamma_v V \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{mg\theta}{M} - \frac{\gamma_f}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{\gamma_v V}{M} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Podstawiając wynik 3.35 do 3.34 uzyskuje się:

$$\begin{aligned} l \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{mg\theta}{M} - \frac{\gamma_f}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{\gamma_v V}{M} &= g\theta \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \frac{(M + m)g\theta}{Ml} + \frac{\gamma_f}{Ml} \frac{dx}{dt} - \frac{\gamma_v V}{Ml} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ostatecznie równania ruchu w postaci rozdzielonej prezentują się następująco:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{mg\theta}{M} - \frac{\gamma_f}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{\gamma_v V}{M} \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \frac{(M + m)g\theta}{Ml} + \frac{\gamma_f}{Ml} \frac{dx}{dt} - \frac{\gamma_v V}{Ml} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Wyprowadzone w ten sposób równania pozwolą w łatwy sposób uzyskać zapis w formie równań stanu.

Równanie stanu

Wprowadzenie zagadnienia równań stanu zostało przedstawione w sekcji 3.1.1. Dla problemu liniowego równanie stanu można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}\end{aligned}\tag{3.38}$$

W przypadku układu wahadła odwróconego na wózku wektor stanu można skonstruować w następującej postaci:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix}\tag{3.39}$$

Ze względu na fakt, że sterowanie układem odbywa się wyłącznie przy pomocy regulacji napięcia na silniku, wektor sterowania będzie jednoelementowy:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix}\tag{3.40}$$

W realizowanym problemie nie występuje macierz sterowania bezpośredniego D , natomiast ze względu na jawność wszystkich parametrów stanu, macierz C jest macierzą jednostkową. Dlatego w dalszych rozważaniach będą uwzględniane wyłącznie macierze: stanu A i sterowania B .

Dysponując równaniami 3.37 można w łatwy sposób ustalić postać macierzy dla równania stanu.

Macierz stanu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{\gamma_f}{M} & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & \frac{\gamma_f}{Ml} & 0 \end{bmatrix}\tag{3.41}$$

Macierz sterowania (zredukowana do wektora):

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma_v}{M} \\ -\frac{\gamma_v}{Ml} \end{bmatrix}\tag{3.42}$$

Zbierając razem wszystkie wyznaczone elementy, finalna postać równania stanu określona jest w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\theta \\ \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{\gamma_f}{M} & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & \frac{\gamma_f}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma_v}{M} \\ -\frac{\gamma_v}{Ml} \end{bmatrix} [V] \quad (3.43)$$

Otrzymana charakterystyka dynamiki może być w łatwy sposób rozwiązywana za pomocą algorytmu Rungego-Kutty przedstawionego w sekcji 3.1.2. Dodatkowo forma ta pozwala na określenie podstawowych cech układu dynamicznego jakimi są obserwowalność i kontrolowalność.

Obserwowalność pozwala określić na ile dobrze informacja o stanie wewnętrznym układu jest osiągalna z poziomu jego wyjścia. Sprawdzenie tego parametru wymaga wyznaczenia macierzy obserwowalności i ustalenia jej rzędu. Warunek na obserwowalność dla układu o n parametrach stanu wygląda następująco:

$$Rank(A^T|C^T) = n \quad (3.44)$$

gdzie

$$X|Y := [X, XY, X^2Y, \dots, X^{n-1}Y] \quad (3.45)$$

Sprawdzenie warunku obserwowalności dla rozwiązywanego zadania pokazuje, iż układ dynamiczny spełnia kryterium obserwowalności.

Kontrolowalność służy określeniu możliwości sterowania układem. Model jest kontrolowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny stan końcowy jest osiągalny z dowolnego stanu początkowego w skończonym czasie. Warunek pozwalający na sprawdzenie cechy dla układu o n parametrach stanu wygląda następująco:

$$Rank(A|B) = n \quad (3.46)$$

Sprawdzenie kryterium ustaliło, że zbudowany układ wykazuje cechy kontrolowalności.

3.2.3 Stabilizacja układu

Jednym z kluczowych zadań jakie zostały wyznaczone do zrealizowania w projekcie jest stabilizacja odchylenia wahadła od osi pionowej. Problem ten rozwiązywany jest poprzez sterowanie napięciem na silniku napędzającym wózek. W celu ocenienia poziomu trudności zagadnienia wykonano wstępnie kilka wariantów sterowania niezależnego od uchybu. Były to:

- Brak sterowania - do oceny zachowania zbudowanego modelu.
- Sterowanie losowe - generowanie losowych wartości napięcia.

- Sterowanie sinusoidalne - podawanie na wejście układu napięcia o charakterystyce wykresu funkcji sinus zależnego od czasu.

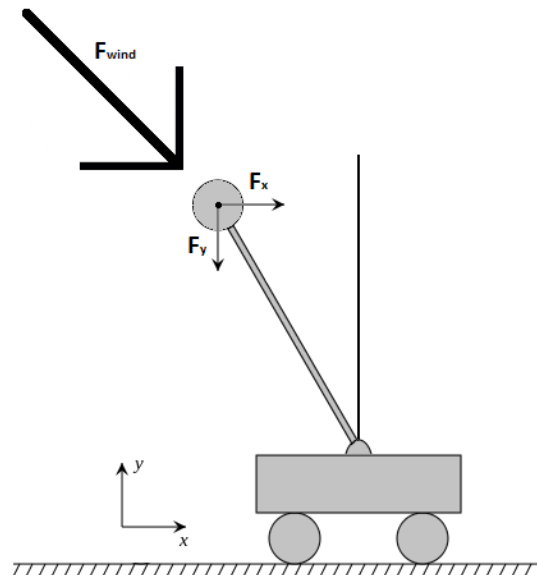
Docelową strategią kontroli nad układem było wprowadzenie regulatora PID. Opis narzędzia został podany w sekcji 3.1.4. Porównanie rozwiązań zostanie omówione w rozdziale poświęconym testom.

Wynikiem zastosowania odpowiedniej regulacji powinna być stabilizacja układu w obrębie zerowego odchylenia wahadła od osi pionowej układu. Dodatkowo warto zauważyć, że omawiany problem wymaga zastosowania podwójnego kompletu sterowników, ze względu na trójwymiarowy charakter finalnego modelu. Jednakże podobne jak w przypadku samego układu, oba kontrolery będą działały niezależnie.

3.2.4 Wprowadzenie zakłóceń do modelu

Przygotowana praca obejmuje dodatkowe zagadnienie jakim są zakłócenia pochodzące od siły wiatru. Wiatr zdefiniowany został jako trójwymiarowy wektor kierunkowy oraz wartość określająca jego moc. W projekcie przyjęto, że siła wiatru oddziałuje jedynie na wahadło. Założenie to bierze swoją genezę z chęci wprowadzenia zaburzenia kąta odchylenia wahadła od osi pionowej i przeprowadzenia testów stabilizacji powstałych zakłóceń. Kierunek siły wiatru rzutowany został na dwie płaszczyzny związane z wzajemnie prostopadłymi układami dwuwymiarowymi. Wyznaczone w ten sposób siły przyłożone zostały w obydwu układach do środka masy wahadła, a następnie rozłożone na dwie składowe związane z osiami głównymi poszczególnych układów.

Powstały w ten sposób dwuwymiarowy rozkład sił przedstawiony został na schemacie 3.6.



Rysunek 3.6: Układ wahadła odwróconego na wózku w obecności siły wiatru

Uzyskane siły F_x i F_y uwzględnione zostały jako dodatkowe oddziaływania względem modelu podstawowego. Aby wyznaczyć ich wpływ na dynamikę układu przepro-

wadzano rozważania analogiczne do tych, przedstawionych w sekcji 3.2.1. W rezultacie ustalono poprawkę, która będzie doliczana wyłącznie wtedy, gdy do układu wprowadzone zostanie zakłócenie. Poszczególne wzory umieszczono w tabeli 3.1.

Element równania stanu	Zakłócenie
Prędkość liniowa $\frac{dx}{dt}$	0
Prędkość kątowna $\frac{d\theta}{dt}$	0
Przyspieszenie liniowe $\frac{d^2x}{dt^2}$	$\frac{F_x - F_y\theta}{M}$
Przyspieszenie kątowne $\frac{d^2\theta}{dt^2}$	$\frac{(F_y\theta - F_x)(M+m)}{Mm}$

Tablica 3.1: Wzory na wyznaczenie poprawki związanej z zakłóceniem układu

Omówiony model zakłóceń dotyczy pojedynczej pętli obliczeń, w której kierunek i moc wiatru są ustalone. Obsługa całego przebiegu symulacji wymaga rozważenia pełnej charakterystyki siły wiatru, w szczególności zmienności jej kierunku. W projekcie przyjęto, że wektor kierunku wiatru generowany będzie losowo z podprzestrzeni spełniającej nierówność: $|z| < 0.5$, natomiast moc wiatru i tempo jego zmiany będą dowolnie sterowalnymi parametrami. Dodatkowo opracowano kilka metod zmiany kierunku wiatru:

- Skoki losowe - przez zadany czas wiatr wieje z określonego kierunku, następnie generowany jest nowy losowy kierunek.
- Skoki naprzemienne - przez zadany czas wiatr wieje z określonego kierunku, następnie generowany jest nowy kierunek w taki sposób, by wektor kierunkowy należał do półprzestrzeni przeciwnej do tej, w której znajduje się obecnie wybrany kierunek.
- Gładkie przejścia - generowane są dwa kierunki podobnie jak w skokach naprzemiennych, które oznaczane są jako kierunek początkowy i końcowy. W trakcie przebiegu symulacji kierunek wiatru wyznaczany jest jako interpolacja wspomnianych dwóch wektorów. W celu uzyskania gładkiej zmiany kierunku wykorzystano interpolację SLERP omówioną w sekcji 3.1.3.

3.2.5 Wprowadzenie trajektorii ruchu

Zbudowany w dotychczasowy sposób system umożliwia stabilizację wahadła z uwzględnieniem zewnętrznych zakłóceń. Jednakże istotą projektu było przeniesienie układu do świata trójwymiarowego i swobodne poruszanie modelem po płaszczyźnie. Aby zapewnić ten warunek niezbędne jest rozszerzenie zagadnienia stabilizacji o zarządzanie pozycją wózka. Podobnie jak w przypadku regulacji kąta, zagadnienie można rozpatrywać w sytuacji dwuwymiarowej, ze względu na niezależne działanie podukładów. Ustalając pewne położenie x jako punkt docelowy oraz x_0 jako miejsce startu problem można

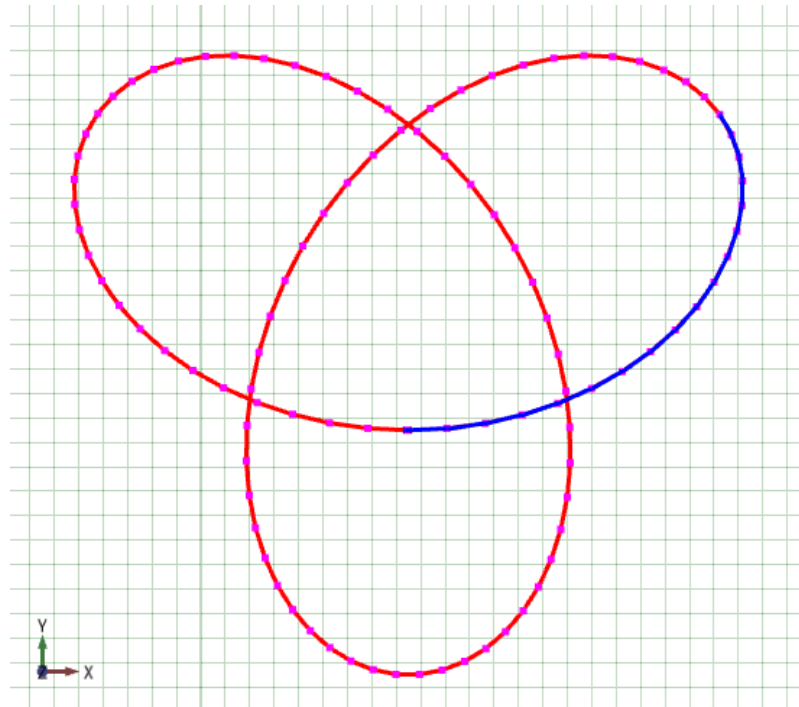
określić jako stabilizację układu w punkcie x przy równoczesnym zadbaniu o utrzymanie wahadła w bezpiecznym wychyleniu. Ze względu na konieczność przebycia drogi $x - x_0$ przez pewien czas wahadło musi opuścić niestabilny punkt równowagi tak, by pokierować wózek do celu za pomocą wygenerowanej siły. Ponadto należy zwrócić uwagę na fakt, że wychylenie wahadła w kierunku docelowego punktu nie zapewni bezpośredniego ruchu podstawy w pożądaną stronę. Układ wykona kompensację wychylenia poprzez przesunięcie wózka w stronę przeciwną do zamierzonej i dopiero po pewnym czasie zacznie poruszać się z powrotem w pożądanym kierunku. Postawione komplikacje zmuszają do zastosowania specjalistycznego narzędzia umożliwiającego równoczesną kontrolę zachowania wahadła i wózka. W realizowanym projekcie skorzystano z podwójnego regulatora PID, którego charakterystykę przedstawiono w sekcji 3.1.5. Wybrany regulator może być zaimplementowany na wiele sposobów. Autor pracy wybrał trzy metody, które zostały poddane gruntownym badaniom:

- Regulator kaskadowy PID
- Regulator równoległy PID
- Regulator równoległy PD (rezygnacja z członu całkującego)

Pożądana wersja kontrolera powinna w możliwie najkrótszym czasie ustabilizować pozycję wózka w zadanym punkcie docelowym, nie doprowadzając do utraty kontroli nad wahadłem. Porównanie rozwiązań zostało przedstawione w rozdziale poświęconym testom.

Dysponując sterowaniem pozwalającym na swobodny ruch układu do zadanego punktu można podjąć próbę zadania pełnej trajektorii ruchu. W fazie planowania projektu przyjęto, że trajektoria będzie składać się z ciągu dwuwymiarowych punktów kontrolnych zapisanych w pliku.

Przykładowa trajektoria zbudowana ze 100 punktów kontrolnych (z zaznaczonym ruchem wykonanym przez układ) pokazana została na rysunku 3.7.



Rysunek 3.7: *Trajektoria ruchu w postaci płaskiego węzła koniczyny (ang. Trefoil Knot)*

Zadaniem symulatora jest wczytanie wybranej trajektorii i próba przeprowadzenia układu wzdłuż zadanej ścieżki ruchu z ustaloną dokładnością. Śledzenie trajektorii zrealizowano za pomocą następującego algorytmu:

1. Wczytanie i wyświetlenie zadanej trajektorii ruchu.
2. Wyznaczenie średniej odległości między punktami w celu kalibracji progów dokładności ruchu.
3. Ustawienie układu w punkcie startowym.
4. Dobór parametrów startowych (w tym dokładności realizacji ruchu).
5. W pętli po kolejnych punktach kontrolnych:
 - (a) Wykonanie stabilizacji układu w danym punkcie kontrolnym wraz z graficznym zaznaczeniem zakreślonej przez układ faktycznej trajektorii ruchu.
 - (b) Jeśli układ znajduje się w odpowiednio niedużej odległości od celu, zmiana punktu kontrolnego na następny. W przypadku braku kolejnych punktów, zakończenie śledzenia ruchu.

Ostatnim elementem związanym z omawianym problemem jest tworzenie trajektorii ruchu. Autor pracy przygotował kilka reprezentatywnych przykładów, które umożliwiają precyzyjne zbadanie różnych technik regulacji. Dodatkowo wykonana aplikacja pozwala na tworzenie dowolnych trajektorii ruchu poprzez podanie parametryzacji krzywej wraz z warunkami brzegowymi i pożądaną ilością punktów kontrolnych.

3.2.6 Manualna kontrola nad układem

W trakcie realizacji projektu autor pracy spostrzegł, że poruszanie układem jest zadaniem nietrywialnym i wymaga głębszego zrozumienia charakterystyki modelu. Użytkownik końcowy programu powinien móc przekonać się jak poszczególne zmiany stanu układu wpływają na ogólną dynamikę systemu i komplikację w jego sterowaniu. Aby spełnić to założenie przygotowano dodatkowy tryb pracy symulatora określony jako tryb gry. Moduł ten umożliwia modyfikowanie wychylenia wahadła poprzez modyfikację wartości zadanej uchybu kąta odchylenia wahadła od pionu. W rezultacie użytkownik zyskuje narzędzie do manualnego poruszania układem. Wprowadzając dodatkowo trajektorię ruchu, użytkownik ma możliwość podjęcia próby przeprowadzenia wózka wzdłuż zadanej ścieżki. Po włączeniu modułu zakłóceń pochodzących od siły wiatru pojawia się problem manualnego utrzymania stałej pozycji wózka, na przekór działającemu zakłóceniu. Wszystkie wymienione elementy pozwalają doświadczalnie zbadać charakterystykę układu, stanowiąc przy okazji przyjemną zabawę.

3.3 Algorytm pracy symulatora

Głównym zadaniem symulatora jest wizualizacja mechaniki układu wahadła odwróconego na wózku w obecności różnych założeń zaprezentowanych w poprzednich sekcjach. Dodatkowo narzędzie pozwala na pełną konfigurację wszystkich kluczowych parametrów, zarówno samego układu, jak i całej symulacji. Ogólny przebieg pracy symulatora prezentuje poniższy algorytm:

1. Wybór trybu pracy między stabilizacją wahadła, śledzeniem trajektorii i trybem gry.
2. Konfiguracja opcji symulacji takich jak: typ regulatora, rodzaj zakłóceń, tryb wyświetlania.
3. Ustalenie parametrów początkowych systemu:
 - Krok czasowy obliczeń
 - Początkowe wychylenie wahadła w osiach OX i OY.
 - Długość wahadła
 - Masa wahadła
 - Masa wózka
4. Określenie mocy i szybkości zmiany kierunku siły wiatru (modyfikowalne w trakcie trwania animacji).
5. Przygotowanie kontrolerów i uruchomienie symulacji dla zadanego środowiska.
6. W pętli czasowej do zatrzymania symulacji:
 - (a) Pobranie aktualnego punktu kontrolnego (w przypadku trybu śledzenia trajektorii).

- (b) Pobranie aktualnego stanu wiatru (w przypadku włączenia zakłóceń).
 - (c) Podanie do kontrolera napięcia na silniku uchybu kąta i pozycji.
 - (d) Wyznaczenie napięcia regulującego, przekazanie wyniku do modułu obliczeniowego.
 - (e) Wyznaczenie rozwiązań równań stanu dla dwuwymiarowych układów przy pomocy algorytmu Rungego-Kutty.
 - (f) Wyznaczenie złożenia podukładów w model trójwymiarowy.
 - (g) Aktualizacja wizualizacji, wykresów i czasu.
7. Zakończenie symulacji, powrót do stanu początkowego.

Rozdział 4

Testy i porównanie przyjętych rozwiązań

4.1 Założenia

Testowanie poprawności działania jest niezbędnym elementem w procesie tworzenia oprogramowania symulacyjnego. Jedynie gruntowna seria prób sprawdzających wszystkie istotne funkcjonalności pozwala na stwierdzenie czy opracowane rozwiązanie daje akceptowalne wyniki i w rezultacie jest użyteczne dla użytkownika końcowego. Dodatkowo testy pozwalają na porównanie różnych strategii opracowanych w trakcie projektowania modelu systemu i wybór najlepszego zestawu rozwiązań.

Autor pracy skupił się na zbadaniu ogólnej pracy symulatora w zależności od zadanej interakcji użytkownika, jak również wykorzystał fazę testów do analizy porównawczej kilku aspektów projektu, w szczególności:

- Stabilizacja układu wahadła odwróconego na wózku za pomocą różnych metod regulacji.
- Ruch układu po zadanej trajektorii przy użyciu poszczególnych wariantów regulatora podwójnego PID.
- Wpływ poszczególnych parametrów początkowych na jakość stabilizacji.
- Wpływ zakłóceń pochodzących od siły wiatru na zachowanie układu.

Każde z zagadnień zostało dokładnie omówione w poszczególnych sekcjach wraz z prezentacją wykresów i wypracowanych wniosków.

Doświadczalnie stwierdzono, że najbardziej reprezentatywnymi rodzajami wykresów będą:

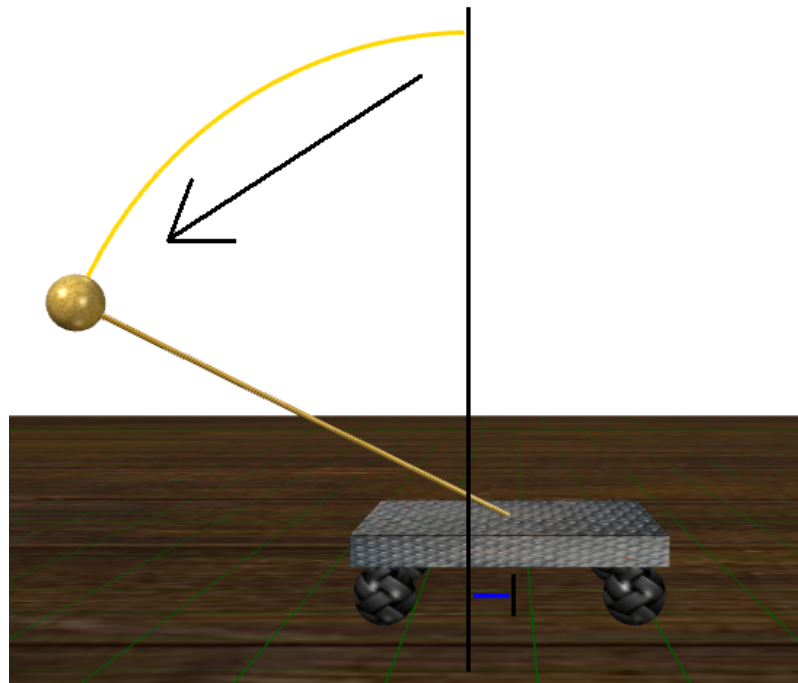
- Wykres zależności uchybu (kąta bądź pozycji) od czasu.
- Wykres zależności napięcia na silniku od czasu.
- Wykres trajektorii ruchu (dla trybu śledzenia trajektorii).

Konfiguracja parametrów początkowych została przeprowadzona zgodnie z przyjętymi wartościami nominalnymi przedstawionymi w tabeli 1.1. Pozostałe nieokreślone parametry ustawiono na następujące wartości:

- Odstęp czasu: 0.01 s.
- Wychylenie w osi OX: 0.8 rad.
- Wychylenie w osi OY: -0.4 rad.

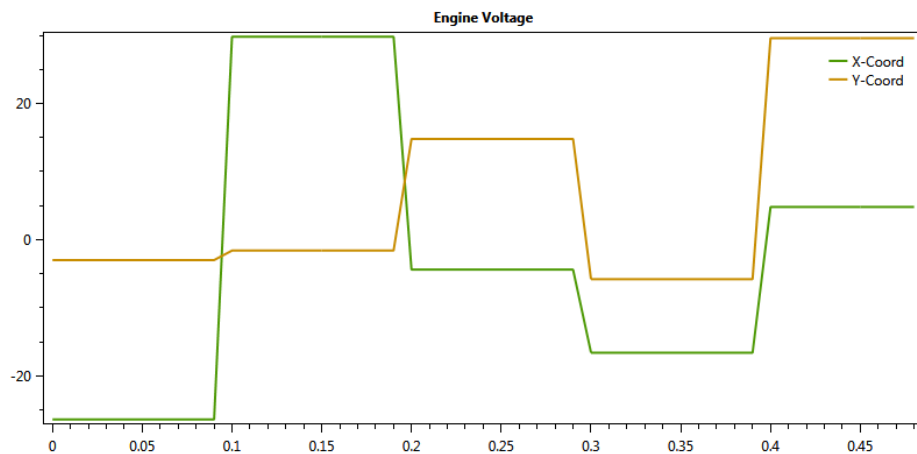
4.2 Stabilizacja układu

Brak jakiegokolwiek narzędzia sterującego powoduje, że symulacja układu ogranicza się do wizualizacji zachowania wahadła i wózka w zależności od wychylenia wahadła. Nawet niewielkie zaburzenia kąta powodują, że wahadło opuszcza niestabilny punkt równowagi o opada na wózek. W tym czasie podstawa wykonuje ruch w stronę przeciwną do kierunku wychylenia wahadła. Omawiana sytuacja została pokazana na rysunku 4.1.

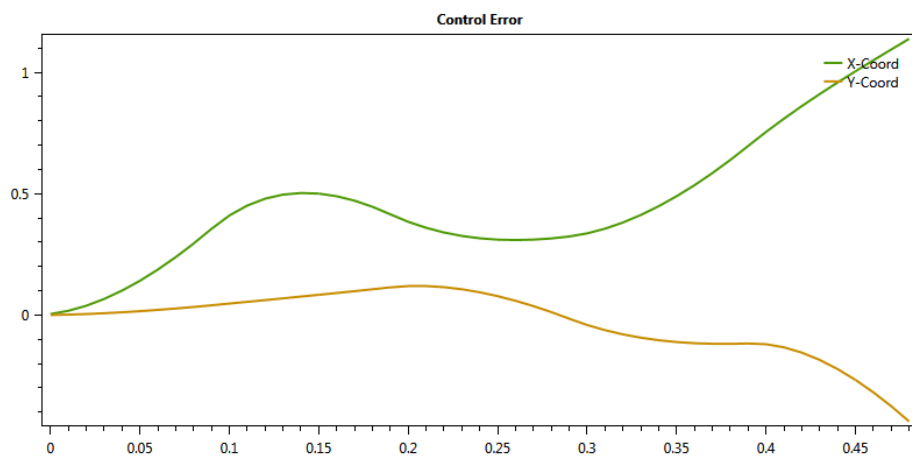


Rysunek 4.1: Wizualizacja zachowania układu w przypadku braku sterowania

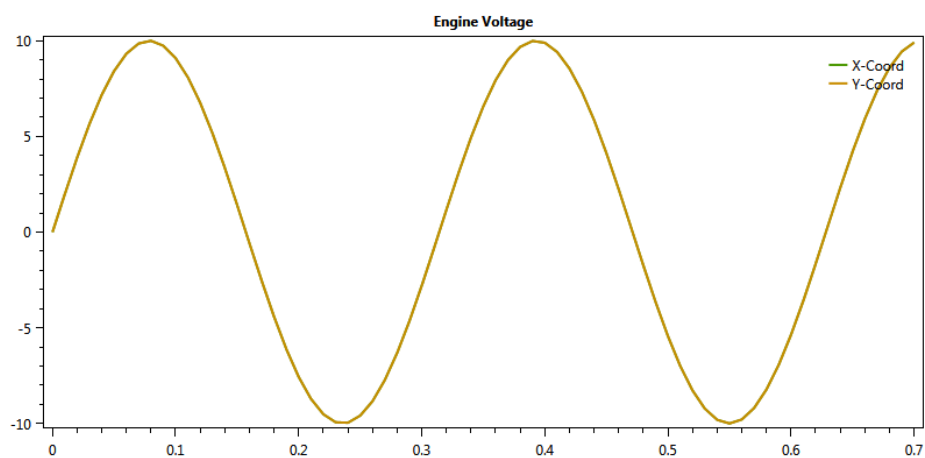
Przeprowadzono sprawdzenie zachowania układu w obecności regulatora napięcia na silniku sterującym platformą. W pierwszym przypadku zastosowano sterowanie niezależne od uchybu w celu zbadania reakcji układu na dowolny moduł kontrolujący. Dla uproszczenia sytuacji zaniechano wstępnego wychylania wahadła. Wyniki testu pokazano na wykresach: 4.2, 4.3, 4.4, 4.5.



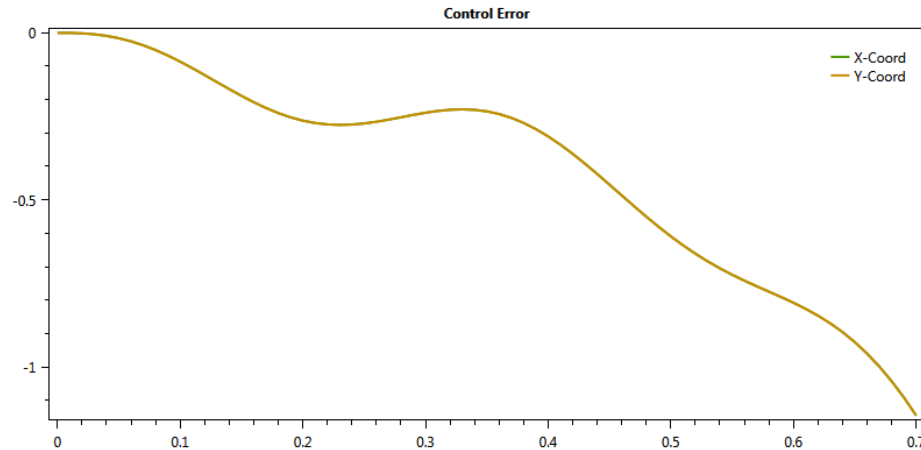
Rysunek 4.2: Sterowanie losowym napięciem: wykres napięcia na silniku



Rysunek 4.3: Sterowanie losowym napięciem: wykres uchybu kąta



Rysunek 4.4: Sterowanie sinusoidalnym napięciem: wykres napięcia na silniku



Rysunek 4.5: Sterowanie sinusoidalnym napięciem: wykres uchybu kąta

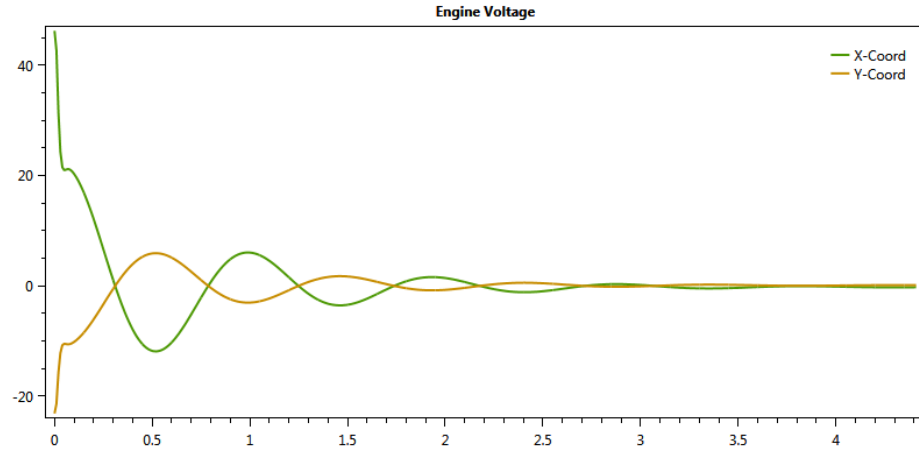
Zgodnie z oczekiwaniami przyjęta regulacja nie spowodowała utrzymania wahadła w punkcie równowagi. Już po krótkim czasie trwania symulacji wahadło opada na platformę uniemożliwiając dalsze sterowanie. Wykonany test jednoznacznie stwierdził, że zadanie stabilizacji wahadła może być zrealizowane wyłącznie przez odpowiednio przygotowany kontroler.

Kolejny test dotyczył pracy regulatora PID, dedykowanego narzędzia służącego do stabilizacji układu. Przed przystąpieniem do wykonania symulacji należało zadbać o poprawny dobór nastaw regulatora. Autor pracy wykorzystał w tym celu parametry zaproponowane w pracy [5]. Są to:

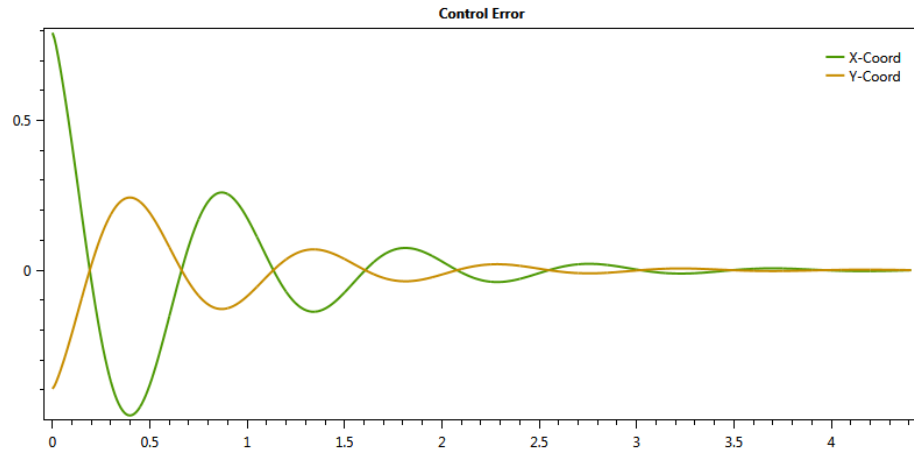
- $K_p = -50.8$
- $T_i = 7.26$
- $T_d = 0.24$

W celu weryfikacji ich poprawności przeprowadzono testy jakości stabilizacji dla pewnych modyfikacji poszczególnych wartości. Wyniki pokazały, że nie udało się uzyskać lepszej jakości dla innego zestawu parametrów niż podane.

Dla tak przygotowanego środowiska przeprowadzono test stabilizacji analogiczny do dwóch poprzednich przykładów. Wyniki przedstawiono na wykresach 4.6 oraz 4.7.



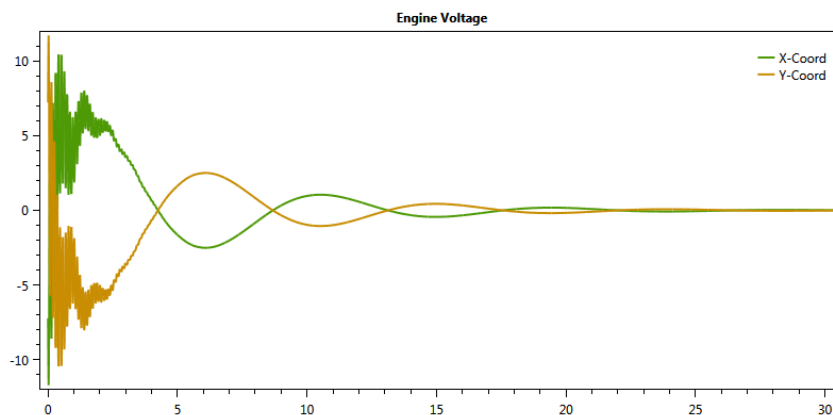
Rysunek 4.6: Sterowanie poprzez regulator PID: wykres napięcia na silniku



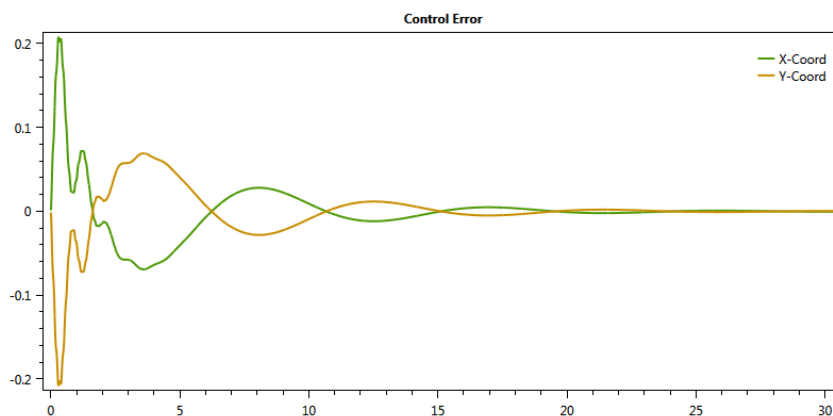
Rysunek 4.7: Sterowanie poprzez regulator PID: wykres uchybu kąta

Charakterystyka wykresów jednoznacznie wskazuje na stopniowe wygaszanie wychyleń wahadła wraz z narastającym czasem. Regulator PID podając odpowiednie napięcie do układu powodując kompensację ruchu obrotowego wahadła przez ruch postępowy wózka. W ostateczności wahadło stabilizuje swoje wychylenie w obydwu osiach układu.

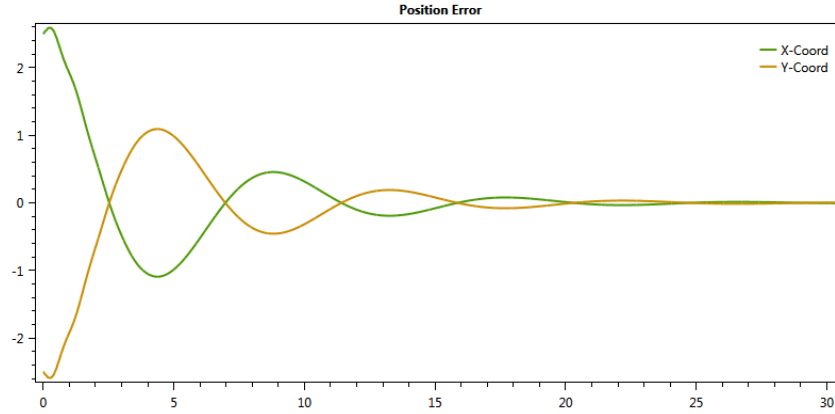
4.3 Ruch po trajektorii



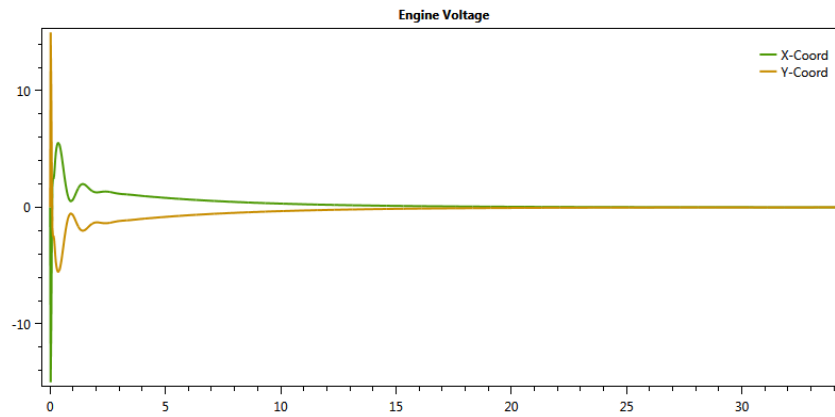
Rysunek 4.8: Stabilizacja w punkcie kontrolnym za pomocą podwójnego regulatora kaskadowego PID: wykres napięcia na silniku



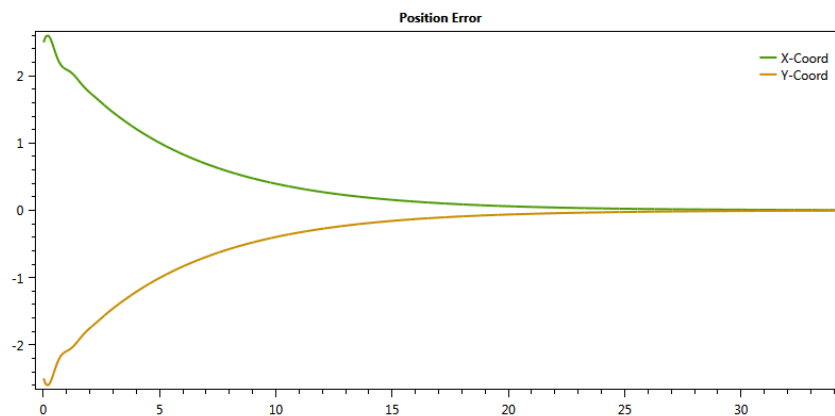
Rysunek 4.9: Stabilizacja w punkcie kontrolnym za pomocą podwójnego regulatora kaskadowego PID: wykres uchybu kąta



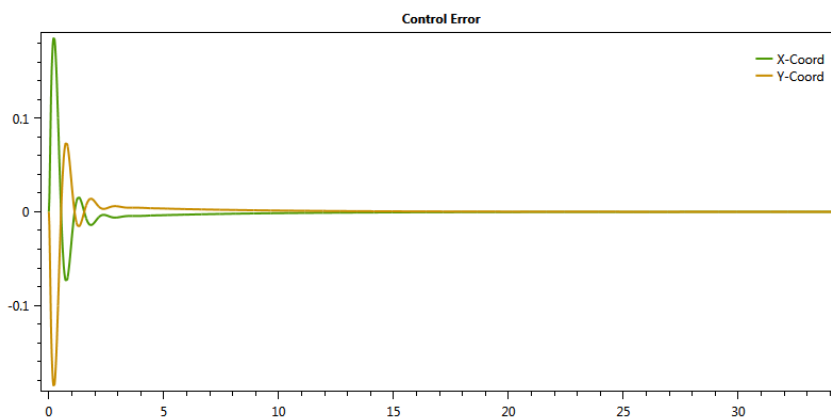
Rysunek 4.10: Stabilizacja w punkcie kontrolnym za pomocą podwójnego regulatora kaskadowego PID: wykres uchybu pozycji



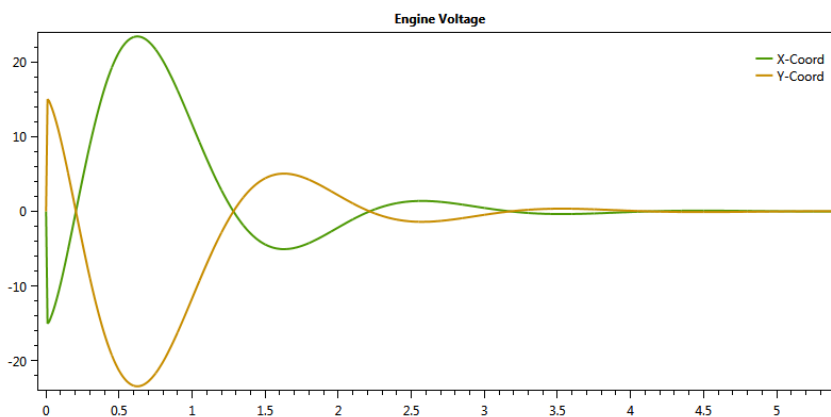
Rysunek 4.11: Stabilizacja w punkcie kontrolnym za pomocą podwójnego regulatora równoległego PID: wykres napięcia na silniku



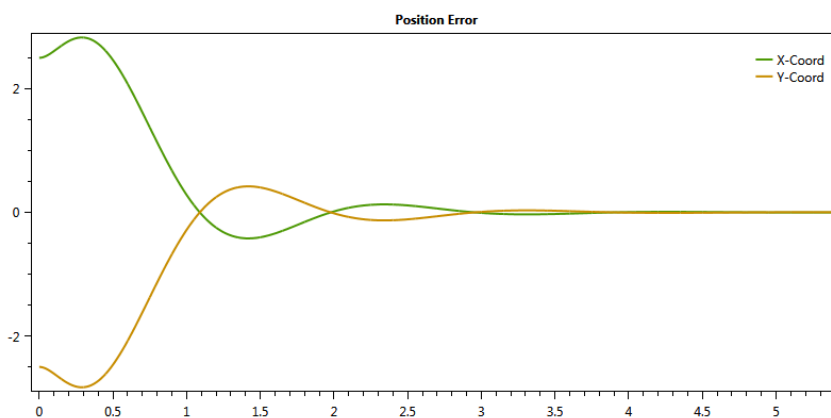
Rysunek 4.12: Stabilizacja w punkcie kontrolnym za pomocą podwójnego regulatora równoległego PID: wykres uchybu kąta



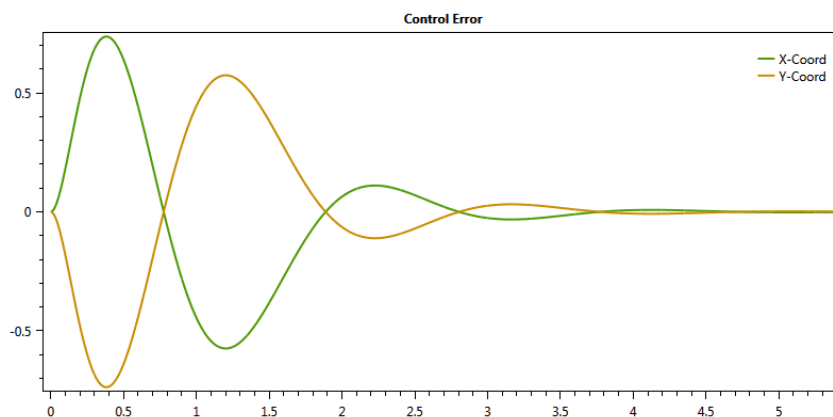
Rysunek 4.13: Stabilizacja w punkcie kontrolnym za pomocą podwójnego regulatora równoległego PID: wykres uchybu pozycji



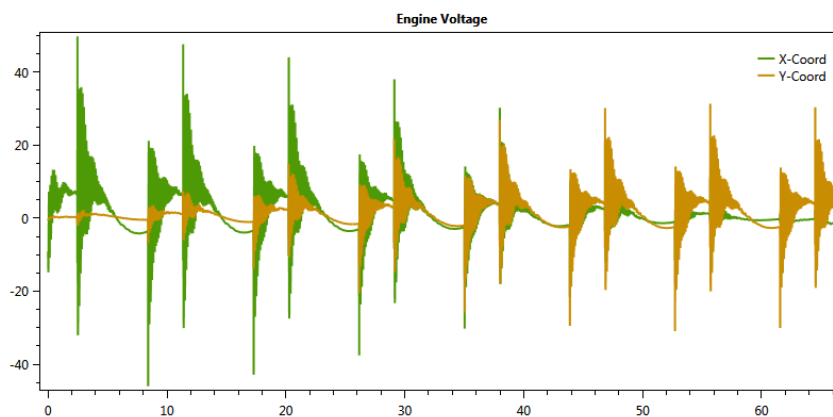
Rysunek 4.14: Stabilizacja w punkcie kontrolnym za pomocą podwójnego regulatora równoległego PD: wykres napięcia na silniku



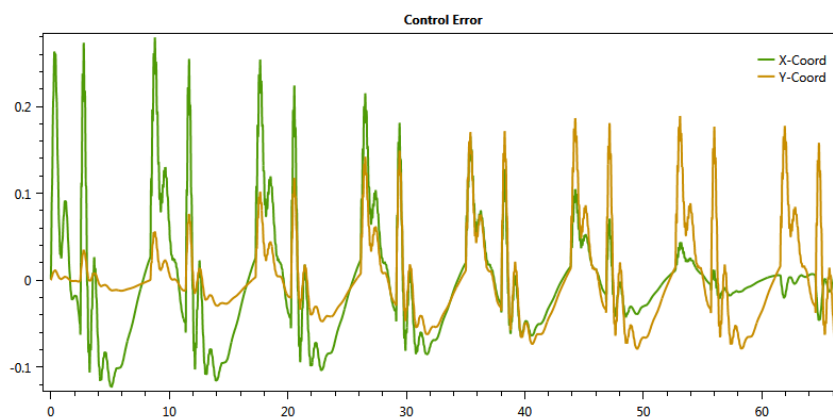
Rysunek 4.15: Stabilizacja w punkcie kontrolnym za pomocą podwójnego regulatora równoległego PD: wykres uchybu kąta



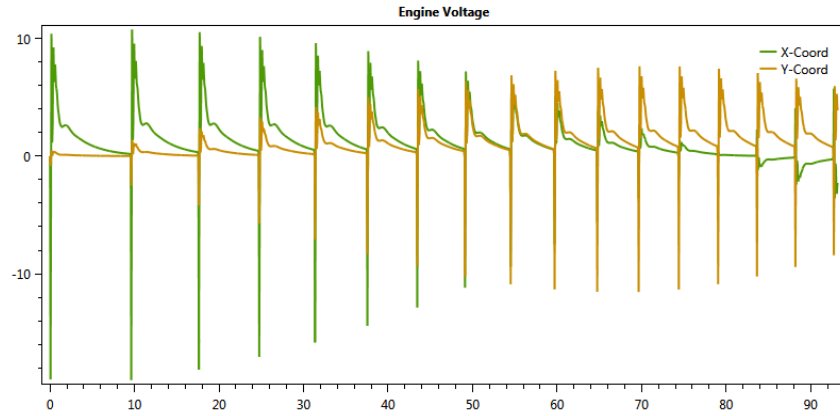
Rysunek 4.16: Stabilizacja w punkcie kontrolnym za pomocą podwójnego regulatora równoległego PD: wykres uchybu pozycji



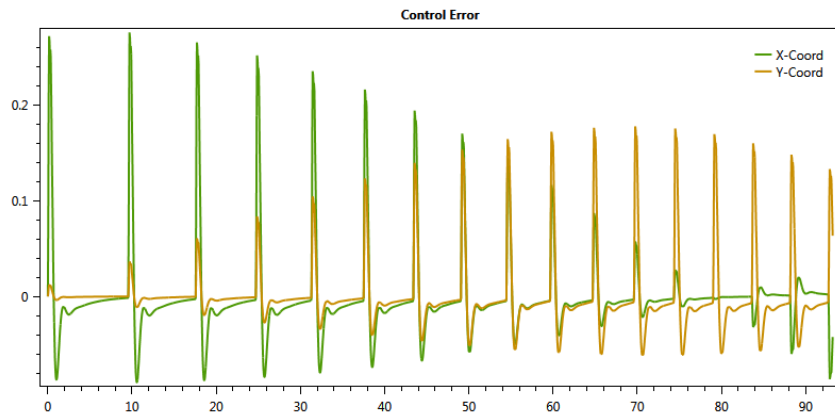
Rysunek 4.17: Śledzenie trajektorii węzła końcowego poprzez podwójny regulator kaskadowy PID: wykres napięcia na silniku



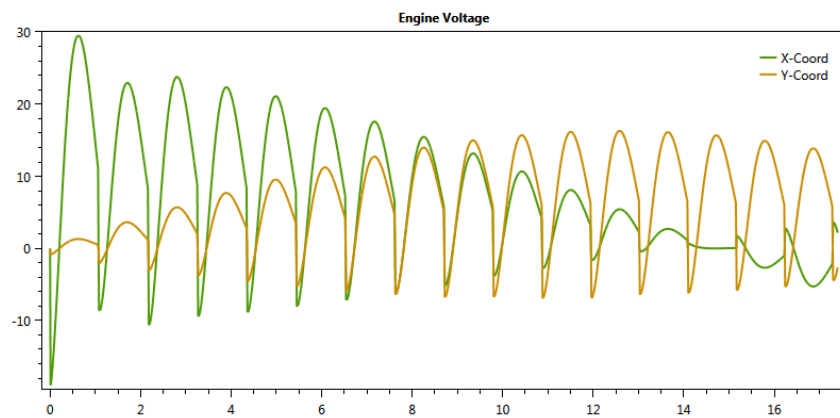
Rysunek 4.18: Śledzenie trajektorii węzła końcowego poprzez podwójny regulator kaskadowy PID: wykres uchybu kąta



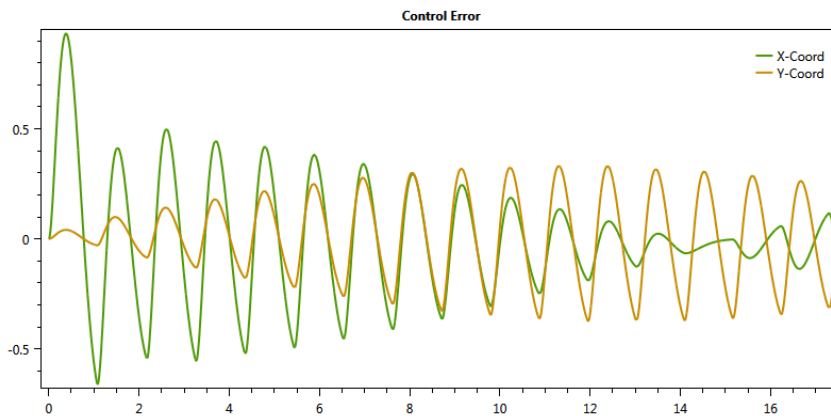
Rysunek 4.19: Śledzenie trajektorii węzła końcowego poprzez podwójny regulator równoległy PID: wykres napięcia na silniku



Rysunek 4.20: Śledzenie trajektorii węzła końcowego poprzez podwójny regulator równoległy PID: wykres uchybu kąta

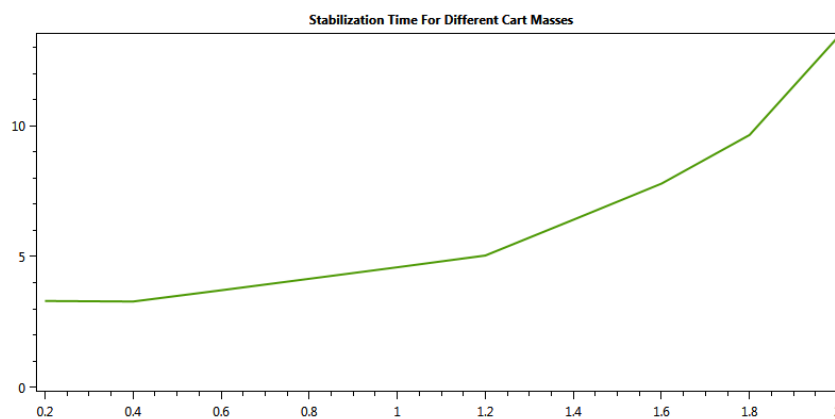


Rysunek 4.21: Śledzenie trajektorii węzła końcowego poprzez podwójny regulator równoległy PD: wykres napięcia na silniku

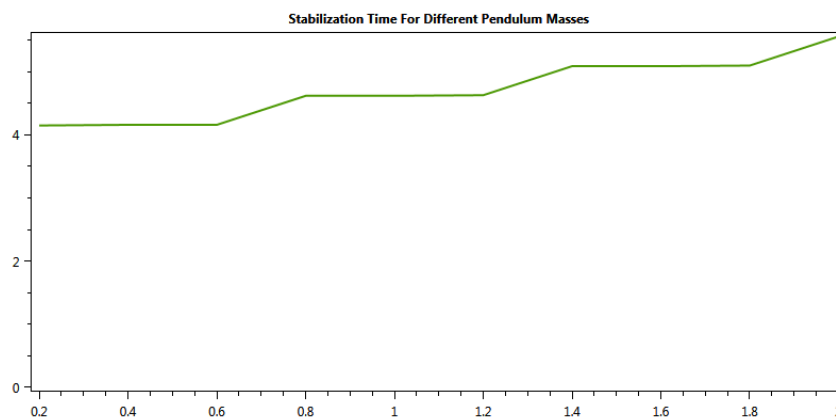


Rysunek 4.22: Śledzenie trajektorii węzła końcowego poprzez podwójny regulator równoległy PD: wykres uchybu kąta

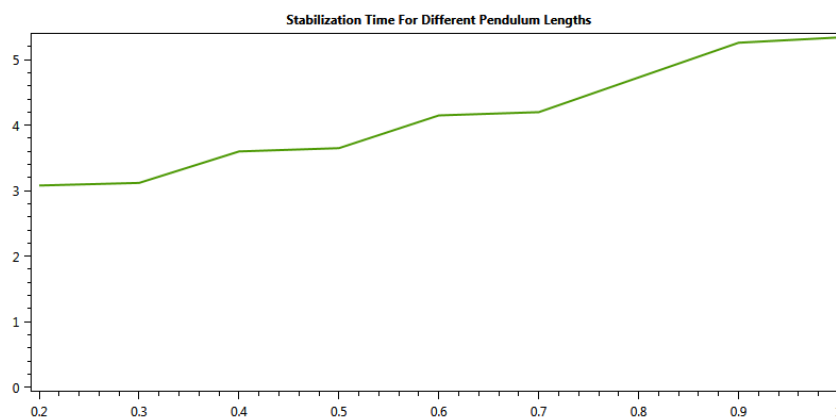
4.4 Wpływ parametrów układu



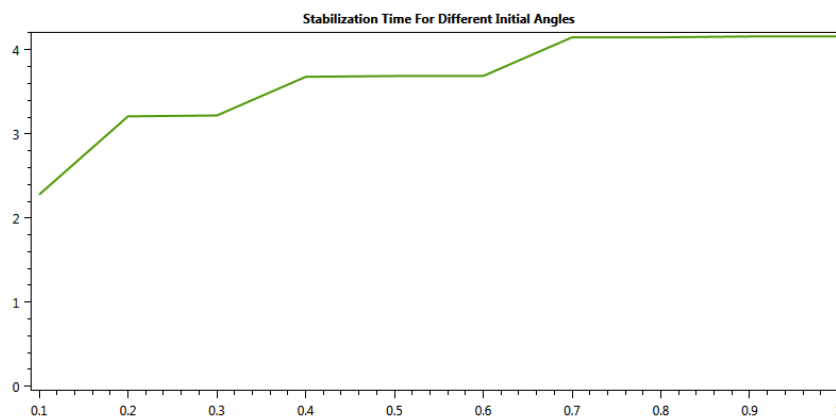
Rysunek 4.23: Wykres wpływu masy wózka na czas trwania stabilizacji układu



Rysunek 4.24: Wykres wpływu masy wahadła na czas trwania stabilizacji układu

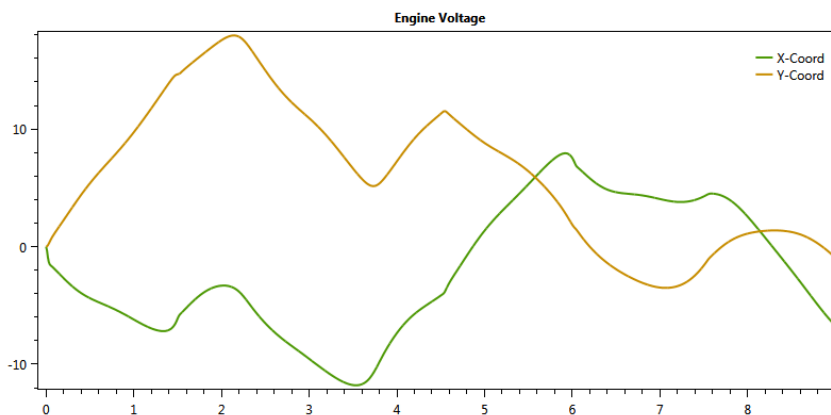


Rysunek 4.25: Wykres wpływu długości wahadła na czas trwania stabilizacji układu

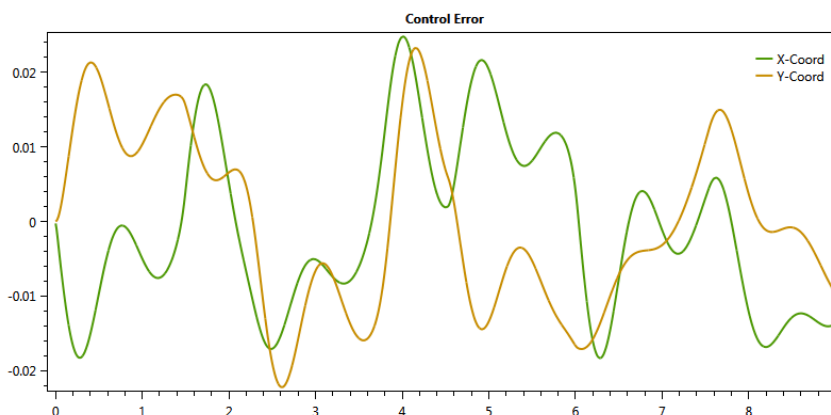


Rysunek 4.26: Wykres wpływu początkowego wychylenia wahadła na czas trwania stabilizacji układu

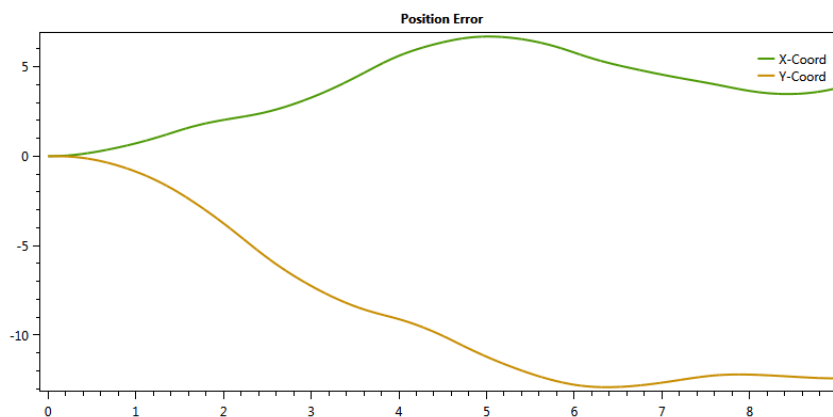
4.5 Wpływ zakłóceń pochodzących od siły wiatru



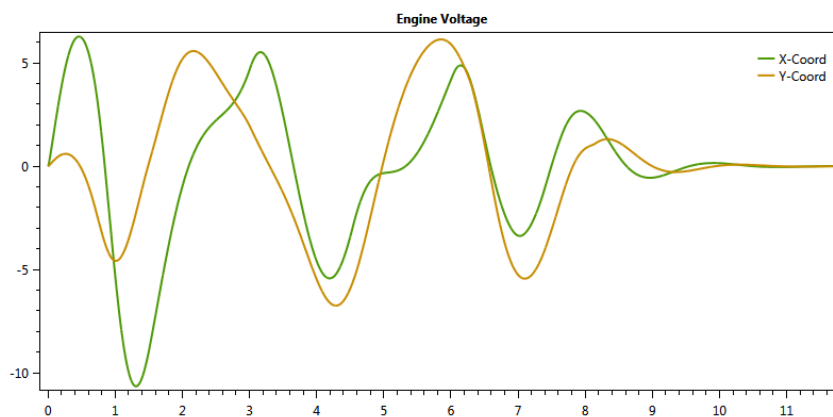
Rysunek 4.27: Wpływ siły wiatru na układ sterowany regulatorem PID: wykres napięcia na silniku



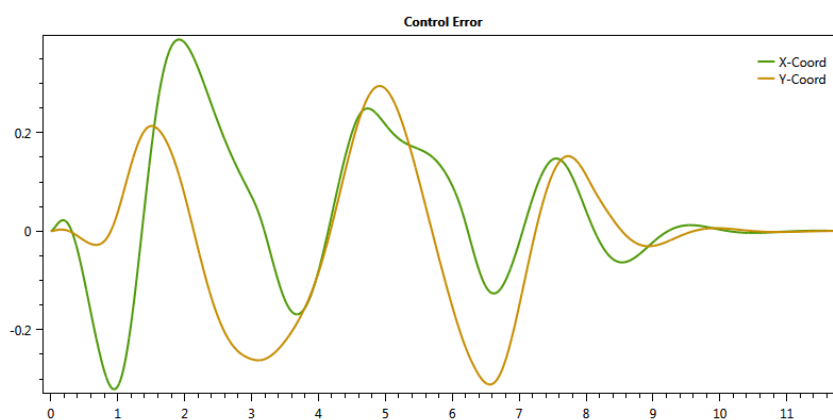
Rysunek 4.28: Wpływ siły wiatru na układ sterowany regulatorem PID: wykres uchybu kąta



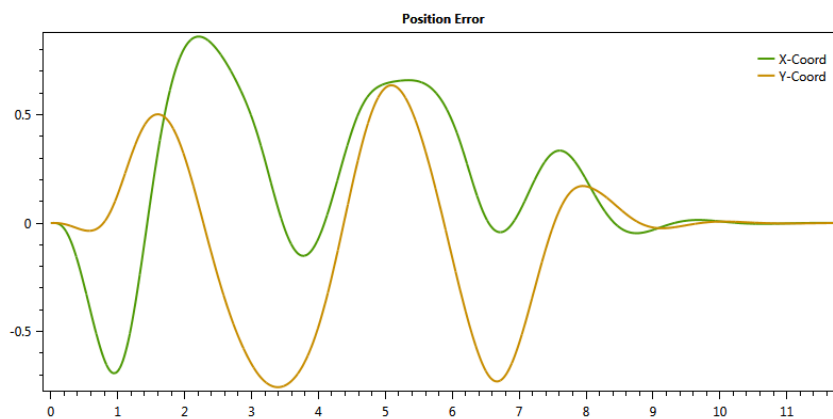
Rysunek 4.29: Wpływ siły wiatru na układ sterowany regulatorem PID: wykres uchybu pozycji



Rysunek 4.30: Wpływ siły wiatru na układ sterowany podwójny regulator równoległy PD: wykres napięcia na silniku



Rysunek 4.31: Wpływ siły wiatru na układ sterowany podwójny regulator równoległy PD: wykres uchybu kąta



Rysunek 4.32: Wpływ siły wiatru na układ sterowany podwójny regulator równoległy PD: wykres uchybu pozycji

Rozdział 5

Architektura systemu

5.1 Ogólny opis rozwiązania

5.2 Wykorzystane narzędzia

5.2.1 Windows Presentation Foundation

5.2.2 HelixToolkit

5.2.3 OxyPlot

5.2.4 Pozostałe

5.3 Wzorce projektowe

5.4 Komponenty aplikacji

5.4.1 Modele

5.4.2 Kontrolery

5.5 Zarządzanie aplikacją

Rozdział 6

Instrukcja użytkownika

6.1 Panel kontrolny

6.1.1 Moduły

6.1.2 Opcje

6.1.3 Sterowanie parametrami

6.2 Wizualizacja

6.2.1 Scena

6.2.2 Wykresy

6.2.3 Podgląd stanu

Rozdział 7

Podsumowanie pracy

7.1 Ocena rozwiązania

7.1.1 Stopień realizacji projektu

7.1.2 Poprawność rozwiązania

7.2 Krytyczna refleksja

7.3 Możliwości rozszerzania projektu

Bibliografia

- [1] Marciniak K., *Dynamic systems*, w: *Modelling in state space*, Warszawa, 2003.
- [2] Marciniak K., *Control systems*, w: *Modelling in state space*, Warszawa, 2003.
- [3] Marciniak K., *Design of Closed loop control*, w: *Modelling in state space*, Warszawa, 2003.
- [4] Robles R., Shardt Y., *Linear motion inverted pendulum, derivation of the state-space model*
<http://www.jtjt.pl/www/pages/odwrocone-wahadlo/LMIP.pdf>
- [5] Tyma J., *Odwrócone wahadło*
<http://www.jtjt.pl/odwrocone-wahadlo>
- [6] *Słownik Języka Polskiego*
<http://sjp.pwn.pl>
- [7] *Symulacja komputerowa*,
https://pl.wikipedia.org/wiki/Symulacja_komputerowa
- [8] Neumann E., *Runge-Kutta Algorithm*, 2016,
<http://www.myphysicslab.com/explain/runge-kutta-en.html>
- [9] Hawkins E., Vidale P. *Two tropical Atlantic hurricanes in a high-resolution atmospheric simulation with the HadGEM3 global climate model at a resolution of N512*, 27.07.2012,
http://www.nature.com/nclimate/journal/v2/n8/fig_tab/nclimate1639_F1.html
- [10] 3DVision Technologies *The Importance of Material Properties in Analysis with SolidWorks Simulation*, 18.05.2012
<http://blogs.solidworks.com/solidworksblog/2012/05/material-properties-in-analysis.html>
- [11] *Wireless Inverted Pendulum Cart*,
http://www.mne.k-state.edu/static/nlc/tiki-index.php?page=S_H_WirelessInvertedPendulumCart
- [12] *Project: Gait Pattern Generation*,
<http://www.wrighteagle.org/en/research/projgait.php>

- [13] *State space model integral*, 2011
https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:State_space_model_integral.PNG
- [14] *Schemat blokowy idealnego regulatora PID*, 2010
https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Schemat_blokowy_regulatora_pid_idealnego.svg
- [15] Kajita S., *The 3D Linear Inverted Pendulum Mode: A simple modeling for a biped walking pattern generation*, 2001
- [16] Prasad L., *Optimal Control of Non linear Inverted Pendulum Dynamical System with Disturbance Input using PID Controller & LQR*, 2011

Warszawa, dnia 4 grudnia 2016

Oświadczenie

Oświadczam, że pracę magisterską pod tytułem: „Opracowanie symulatora transportera wahadła odwróconego na wózku”, której promotorem jest prof. dr hab. Krzysztof Marciniak, wykonałem samodzielnie, co poświadczam własnoręcznym podpisem.

.....