POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ MATEMATYKI
I NAUK INFORMACYJNYCH

PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

INFORMATYKA

Opracowanie symulatora transportera wahadła odwróconego na wózku

Development of simulator for transporter of inverted pendulum on a cart

Autor:

Jakub Abelski

Promotor: prof. dr hab. Krzysztof Marciniak

Warszawa, Grudzień 2016

....	....
podpis promotora	podpis autora

Streszczenie

Rozwój nowoczesnych technologii opiera się w głównej mierze na usprawnianiu istniejących zasobów oraz poszukiwaniu innowacyjnych rozwiązań. W celu ograniczenia nakładów finansowych, jak również minimalizacji ryzyka popełnienia błędu przy wdrażaniu nowych pomysłów warto rozważyć wykorzystanie narzędzi oferowanych przez środowiska symulacyjne. Komputer potrafi wykryć usterki, z niezwykłą precyzją odpowiedzieć na większość pytań postawionych przez użytkownika, a często daje możliwość wykonania optymalizacji procesu tak, by uzyskać zmaksymalizowany efekt końcowy.

Niniejsza praca wpisuje się w przestawioną retorykę, gdyż poświęcona jest opracowaniu symulatora transportera wahadła odwróconego na wózku. Bazą dla projektu jest dobrze znane zagadnienie dwuwymiarowego układu złożonego z wahadła odwróconego umieszczonego na ruchomej podstawie. Głównym zadaniem systemu jest utrzymanie wahadła w niestabilnym punkcie równowagi i reagowanie na zakłócenia pochodzące z zewnątrz poprzez odpowiedni regulator napięcia na silniku sterującym ruchem podstawy. Prezentowana praca podchodzi do tego zagadnienia w sposób niestandardowy. Wspomniany układ zostaje przeniesiony do świata trójwymiarowego, w którym dwa niezależne systemy związane z kierunkami poziomych osi głównych zostają połączone w jeden moduł sterowania układem. Zabieg ten umożliwia zadanie trajektorii ruchu transportera i przetestowanie skuteczności różnych modeli sterowania położeniem układu i wychyleniem wahadła. Dodatkowym elementem projektu jest uwzględnienie zakłócenia dynamiki w postaci zewnętrznej siły wiatru. Zadaniem transportera jest reagowanie na zakłócenie w taki sposób, by zminimalizować ryzyko stracenia kontroli nad wahadłem.

Przygotowane rozwiązanie nie posiada jeszcze odzwierciedlenia w technice, natomiast doskonale odnajduje się w świecie symulacji i pozwala na dogłębną analizę pracy układu, jak również wykorzystanie go w grach komputerowych jako wirtualnego pojazdu z nietrywialnym sterowaniem.

Celem pracy jest zbudowanie uniwersalnego symulatora z konkretną realizacją przedstawionego problemu. Dodatkowym elementem jest możliwość dokonania dogłębnej analizy procesu tworzenia symulacji i wypracowania optymalnego rozwiązania. Ponadto dokument ma na celu ilustrację architektury i ogólnego schematu działania programu, a także przedstawienie wyników przeprowadzonych testów.

Pierwszy rozdział tekstu stanowi bazę teoretyczną dalszych rozważań. Zawiera on podstawowe definicje, przybliża istotę problemu oraz istniejące rozwiązania. Rozdział drugi opisuje logikę systemu. Rozdział trzeci skupia się na opisie rozwiązania: mechanice układu i użytym algorytmom. W czwartym rozdziale omówione zostają testy i porównanie rozwiązań przyjętych w projekcie. Rozdział piąty prezentuje architekturę opracowanego systemu, natomiast rozdział szósty stanowi instrukcję obsługi dla użytkownika. Ostatni rozdział podsumowuje całość pracy, opisuje wnioski oraz przedstawia możliwe kierunki rozwoju systemu.

Abstract

Development of new technologies is based mainly on the analysis, improvement of existing resources and finding innovative solutions. Unfortunately, due to financial constraints, as well as the risk of adverse effects it is not recommended to implement the idea without special preparation. In order to significantly reduce the risks using the tools offered by simulation environments should be considered. The computer is able to forgive the mistakes made at the design stage, as well as it can investigate the matter with great precision and answer most of the questions asked by the user. In addition it has the possibility of optimizing processes, so as to obtain the final effect maximized. These arguments leave no doubt that the simulation is an essential element in implementing the new technology.

The thesis is devoted to the development of a simulator for transporter of inverted pendulum on a cart. The project is based on well-known problem of two-dimensional system consisting of an inverted pendulum mounted on a movable platform. The main task of the system is to keep the pendulum in an unstable equilibrium and respond to noises from the environment through the special voltage controller of the platform's engine. The thesis approaches this problem in an innovative way. The system is transferred to a three-dimensional world in which two independent systems associated with the horizontal directions of the principal axes are integrated into a unit. As a result, the movement trajectory can be applied to the system and the pendulum should be transported according to given trajectory. An additional element of the project is adding the wind force. The transporter have to deal with the noise in such a way as to minimize the risk of losing control of the pendulum.

Prepared solution has not yet reflected in the technique however it perfectly finds itself in the world of simulation. The project allows for in-depth analysis of system's dynamics, as well as it can be used in computer games as a virtual vehicle with non-trivial control.

The aim of the thesis is to build a universal simulator with a concrete realization of the presented problem. An additional element is the possibility of an in-depth analysis of simulation's creation to develop the optimal solution. Furthermore, the document was prepared to illustrate the architecture and general scheme of the system, as well as present the results of tests.

The first chapter is a theoretical basis for further discussion. It includes basic definitions, brings physical background and discusses the existing solutions. The second chapter describes the logic of the whole program. The third chapter focuses on the mechanics of the system and comparison of the solutions adopted in the project. In the fourth and fifth chapter the system architecture and technical documentation are discussed. Chapter six covers manual and tests' description. The last chapter summarizes the whole work. It presents conclusions and future possible directions of development of the system.

Słowa kluczowe

Symulacja
Transporter
Wahadło odwrócone na wózku
Dynamika układu
Trajektoria ruchu
Stabilizacja układu
Regulator PID
Zakłócenia siłą wiatru
Równanie stanu
Linearyzacja
Algorytm Runge-Kutta

Podziękowania

Niniejszą pracę pragnę zadedykować rodzicom: Marcie i Janowi Abelskim, dzięki którym miałem możliwość swobodnego kształcenia się i rozwijania swoich zainteresowań.

Chciałbym wyrazić wdzięczność promotorowi: prof. Krzysztofowi Marciniakomwi za jego wsparcie i dobre rady odnośnie kwestii merytorycznych jak i praktycznej części pracy. Specjalne podziękowania dla całej kadry zakładu CAD/CAM na wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych za przekazanie podstaw umożliwiających osiągnięcie odpowiedniego zaawansowania pracy i ugruntowanie wiedzy niezbędnej w przyszłej karierze zawodowej.

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Podstawowe definicje

1.1.1 Symulacja

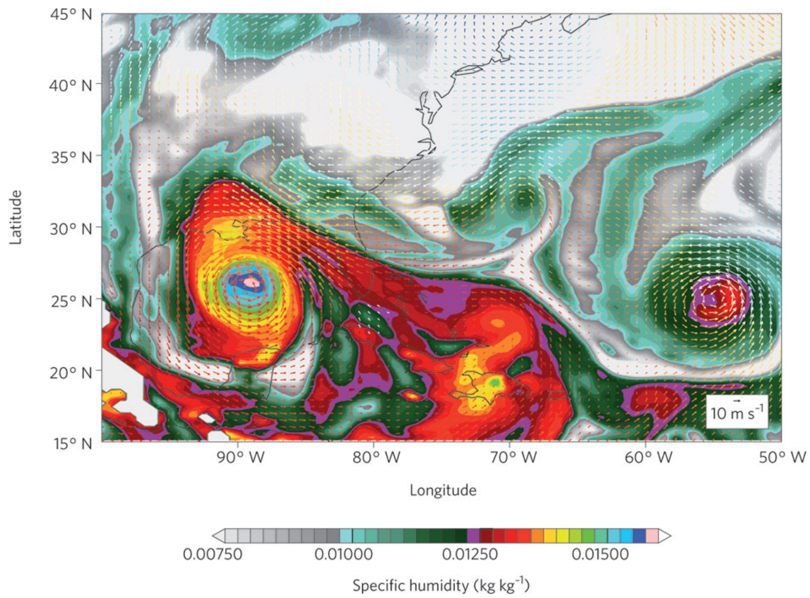
Według Słownika Języka Polskiego [6] symulacja to sztuczne odtwarzanie właściwości danego obiektu lub zjawiska za pomocą jego modelu, natomiast bardzie szczegółowo w zakresie symulacji komputerowej jest to badanie zachowania się obiektów rzeczywistych na podstawie obserwacji działania programów komputerowych symulujących to zachowanie.

Symulację komputerową wykonuje się wtedy, gdy trudno jest wyznaczyć analityczne rozwiązanie problemu lub gdy złożoność systemu uniemożliwia jakąkolwiek ręczną analizę problemu. Symulacja komputerowa wykorzystuje pewien zadany model matematyczny pod postacią kodu programu komputerowego, który jest przetwarzany, a następnie prezentowane są rezultaty.

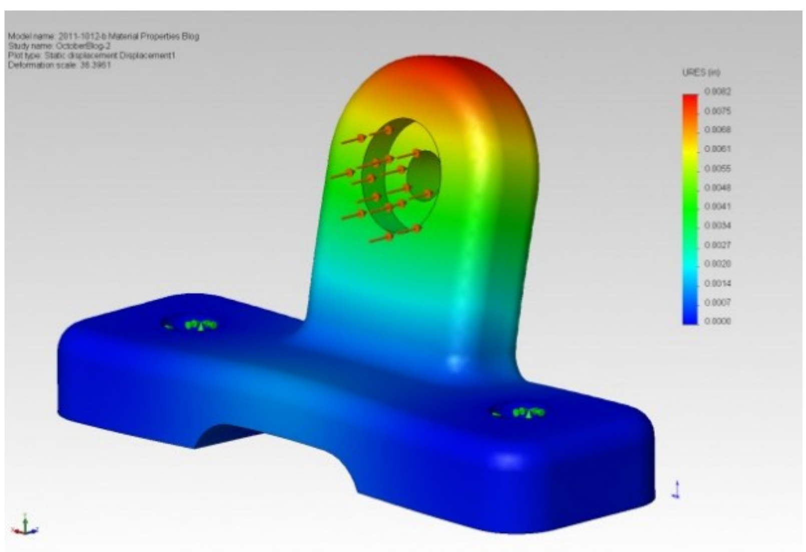
Symulacja znajduje zastosowania w wielu dziedzinach takich jak:

- Inżynieria - np. w budownictwie do badania wytrzymałości konstrukcji.
- Systemy treningowe, gry komputerowe - np. symulatory samolotów, czołgów, statków, itp.
- Ekonomia i biznes - np. do wyceny instrumentów pochodnych na giełdzie.
- Nauki społeczne - np. w badaniu dynamiki populacji.
- Nauki przyrodnicze - np. w meteorologii do wyznaczania prognozy pogody.

Kilka przykładów zastosowań symulacji komputerowej przedstawiono na ilustracjach 1.1 i 1.2.



Rysunek 1.1: *Symulacja dwóch tropikalnych huraganów nad Atlantykiem [9]*



Rysunek 1.2: *Analiza własności materiału za pomocą symulacji SolidWorks [10]*

Bazując na [7] symulacje komputerowe można podzielić ze względu na:

- Przewidywalność zdarzeń - deterministyczne, gdzie wyniki są powtarzalne i zależne tylko od zadanych parametrów i i interakcji oraz stochastyczne - generowane losowo.
- Upływ czasu - ciągły, w którym chwile pośrednie są interpolowane brzegowymi lub dyskretny, gdzie czas zwiększa się przyrostowo.
- Dane wyjściowe - statyczne, w których wynikiem jest zbiór danych lub dynamiczne, które ukazują cały proces przebiegający w czasie, np. animacja.
- Zasób komputerów - lokalny lub rozproszony.

Przygotowywana praca realizuje symulator z deterministyczną przewidywalnością zdarzeń, czas zwiększa się stałymi przyrostami z możliwością ich modyfikowania. Przetwarzanie systemu odbywa się na pojedynczym komputerze, natomiast dane wyjściowe prezentowane są w postaci dynamicznej animacji.

1.1.2 Układ dynamiczny

Wprowadzenie

Układ dynamiczny jest to matematyczny model zjawiska występującego w przyrodzie, określany poprzez funkcję zachowania układu w danym czasie. Model ten jest zwykle opisany poprzez układ równań różniczkowych, zwanych równaniem stanu. W danej jednostce czasowej system posiada stan wyrażony jako wektor liczb utożsamiany z punktem w przestrzeni stanu. Ewolucja układu polega na wyznaczaniu kolejnych stanów na podstawie poprzednich poprzez użycie funkcji przejścia. Funkcja ta może być deterministyczna lub stochastyczna. W pierwszym przypadku dla zadanego czasu stan wyznaczany jest jednoznacznie, w drugim przypadku na ewolucję układu wpływają dodatkowe zdarzenia losowe (przytoczone zagadnienie zostało szerzej omówione w [1]).

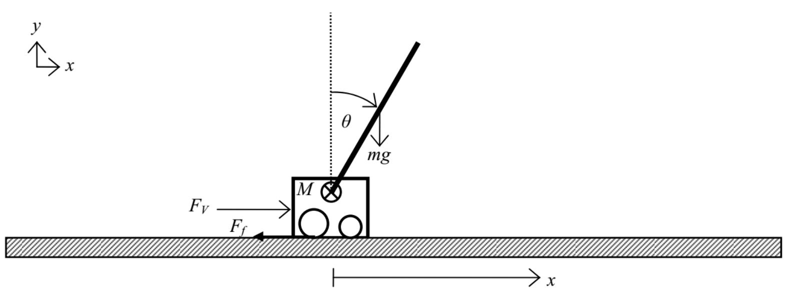
Wahadło odwrócone na wózku

Niniejsza praca skupia się na modelu dynamiki układu złożonego z wahadła odwróconego umieszczonego na ruchomej platformie. Wahadło odwrócone jest rodzajem wahadła, w którym środek masy znajduje się powyżej punktu zaczepienia. Wahadło połączone jest z wózkiem, który porusza się w płaszczyźnie poziomej za pomocą silnia napędowego. Przykładowy układ pokazany został na ilustracji 1.3.

Rysunek 1.3: *Model bezprzewodowego układu mechanicznego dla odwróconego wahadła na wózku [11]*

Przedstawione ustawienie wahadła powoduje, że znajduje się ono w niestabilnym punkcie równowagi. Punkt równowagi jest miejscem przy którym element pozostaje w bezruchu (prędkość zmiany stanu jest zerowa). Wyróżniamy stabilnie i niestabilne punkty równowagi. Wahadło posiada dwa punkty równowagi: stabilne znajdujące się poniżej punktu zaczepienia i niestabilnie powyżej punktu równowagi. W przypadku drugiego z nich nawet niewielkie zaburzenie stanu układu wywołuje ruch wahadłowy, który ustaje dopiero po zatrzymaniu się w stabilnym punkcie równowagi.

Układ będący przedmiotem zainteresowania pokazany został na schemacie 1.4.



Rysunek 1.4: *Uproszczony schemat fizyki układu wahadła odwróconego na wózku [4]*

Najważniejsze elementy schematu:

- F_v - siła napędowa wózka $[N]$.
- F_f - siła tarcia $[N]$.
- m - masa wahadła $[kg]$.
- M - masa wózka $[kg]$.
- g - przyspieszenie ziemskie $[\frac{m}{s^2}]$
- θ - kąt między osią wahadła a pionową osią układu $[rad]$.

Stan układu określany jest poprzez cztery parametry:

- Położenie środka wózka w osi X.
- Prędkość liniowa wózka.
- Kąt odchylenia wahadła od osi pionowej.
- Prędkość kątowa wahadła.

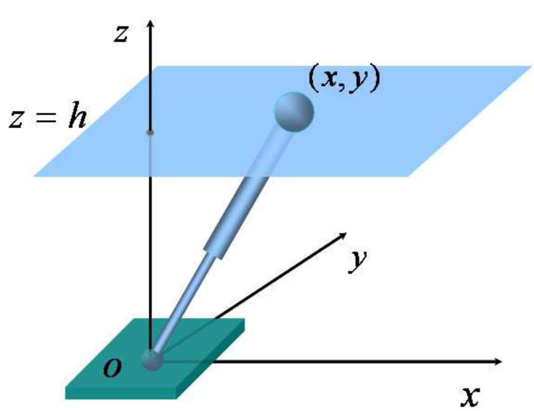
Parametry fizyczne układu (wraz z nominalnymi wartościami opracowanymi na podstawie literatury [4]) pokazane zostały w poniższej tabeli:

Parametr	Wartość
masa wózka	0.79 kg
masa wahadła	0.23 kg
długość wahadła	0.61 m
współczynnik tarcia wózka	7.68 $\frac{N}{ms^{-1}}$
współczynnik konwersji napięcia na siłę	1.72 $\frac{N}{V}$

Podstawowym zagadnieniem związanym z omawianym układem jest kontrola wychylenia wahadła. Urządzenie sterujące poprzez przyłożenie odpowiedniego napięcia na silniku wywołuje siłę napędową, która porusza platformą. Odpowiedni ruch podstawy pozwala na utrzymanie wahadła w punkcie równowagi.

Trójwymiarowa wersja układu

Dwuwymiarowy układ wahadła odwróconego na wózku można wykorzystać do zbudowania trójwymiarowego odpowiednika. Nowy model składa się z dwóch podukładów odpowiedzialnych za płaszczyzny związane z osiami głównymi układu, odpowiednio: O(XZ) i O(YZ). Przybliżony model znajduje się na rysunku 1.5



Rysunek 1.5: *Uproszczony schemat trójwymiarowego układu wahadła odwróconego na wózku [12]*

Wynikowy stan całego układu jest sumą stanów poszczególnych komponentów. Ruch trójwymiarowego modelu wyznaczany jest jako złożenie (superpozycja) ruchów podukładów. Kierunek wychylenia wahadła można wyznaczyć za pomocą elementarnych własności geometrycznych.

Opracowany w ten sposób model pozwala na poruszanie układem po płaszczyźnie O(XY). Wykorzystując odpowiednie narzędzie sterujące można dokonać stabilizacji układu nie tylko dla kąta odchylenia wahadła, ale również pozycji wózka na płaszczyźnie.

1.2 Opis problemu

1.2.1 Motywacja

Opracowywane zagadnienie jest nietrywialną modyfikacją dobrze znanego zagadnienia sterowania wahadłem odwróconym na wózku. Wybrana tematyka pracy magisterskiej jest ściśle związana z zainteresowaniami autora oraz materiałem realizowanym w ramach studiów. Przygotowanie pracy daje możliwość pogłębienia wiedzy z zakresu układów dynamiki i teorii sterowania. Dodatkowo pozwala na zmierzenie się z problemem wykonania symulacji, która w profesjonalny sposób zrealizuje zadane zagadnienie, a dodatkowo będzie atrakcyjna dla użytkownika końcowego. Ponadto wypracowana koncepcja systemu nie posiada jeszcze odzwierciedlenia we współczesnej technice. Toteż ze względu na elementy innowacyjności rozwiązania, pomysł ten jest okazją do analizy niestandardowego systemu, który może mieć zastosowanie w przyszłości, przynajmniej w środowisku wirtualnym.

1.2.2 Główne cele

Podstawowym celem pracy jest opracowanie symulatora transportera wahadła odwróconego na wózku. Zagadnienie to można w naturalny sposób podzielić na kilka podproblemów, co pozwala na szczegółowy przegląd poszczególnych elementów:

- Układ wahadła odwróconego na wózku. Projekt opiera się na analizie prostego modelu fizycznego wraz z implementacją jego zachowania. Dodatkowo rozszerza podstawową, dwuwymiarową wersję, na układ trójwymiarowy, by zwiększyć poziom skomplikowania, ocenić użyteczność zaproponowanego pomysłu i wzbogacić efekt końcowy. Dodatkowym elementem jest wprowadzenie zakłóceń do układu w postaci podmuchów powietrza. Istotny jest również przegląd przypadków szczególnych i wypracowanie odpowiedniej reakcji na ich zaistnienie. Projekt powinien w pełni przedstawić zadane zagadnienie, wraz z możliwością wprowadzania modyfikacji układu i pełnym podglądem na jego stan. Dysponując w pełni zaimplementowanym modelem bazowym można badać zachowanie układu wobec zadanych parametrów wejściowych i dynamicznych.

- Stabilizacja układu. Naturalnym zagadnieniem wiążącym się z układem wahadła odwróconego na wózku jest próba stabilizacji wychylenia wahadła w obrębie pionowej osi układu tak, by komponent pozostawał w niestabilnym punkcie równowagi. Celem projektu jest zrealizowanie wspomnianej stabilizacji za pomocą regulacji napięcia podawanego na wejście do silników sterujących wózkiem. Zadanie to wymaga wykorzystania wiedzy z zakresu teorii sterowania, w szczególności pojęcia regulatora. Praca powinna oprzeć się na implementacji odpowiedniego regulatora i przetestowaniu jego działania względem poszczególnych parametrów systemu.

- Transport układu. Osiągnięcie kontroli nad wychyleniem wahadła pozwala na dalsze rozszerzanie funkcjonalności systemu. Kolejnym etapem projektu jest stworzenie modułu sterującego ruchem całego układu. System powinien umożliwić stworzenie dowolnej trajektorii ruchu lub wczytanie przygotowanego przykładu, a następnie zmuszenie układu fizycznego do odwzorowania zadanej ścieżki ruchu.

- Opracowanie symulatora. System nie będzie użyteczny, jeśli nie zostanie zaprezentowany użytkownikowi końcowemu w wygodnej i atrakcyjnej wizualnie formie. Ostatnim istotnym celem projektu jest stworzenie aplikacji na komputer, której zadaniem będzie wizualizacja zachowania całego układu fizyki. Ponadto program powinien posiadać intuicyjny panel sterowania oraz dostarczać na bieżąco pełnej informacji na temat stanu sytemu. Dodatkowym walorem aplikacji może być tryb interakcyjny, który pozwoli użytkownikowi nie tylko na przegląd mechaniki układu, lecz również na zabawę w sterowanie pojazdem.

1.3 Przegląd istniejących rozwiązań

1.3.1 Symulatory

W obecnych czasach oprogramowanie symulacyjne jest podstawą funkcjonowania wielu gałęzi przemysłu. Przed przystąpieniem do realizacji projektu autor skupił się na przeglądzie najbardziej popularnych narzędzi symulacyjnych w celu znalezienia kluczowych cech, jakie powinien spełniać dobry symulator. Na szczególną uwagę zasługują trzy rozwiązania:

- Simulink - pakiet numeryczny MATLAB firmy The MathWorks służący do przeprowadzania symulacji komputerowych. Narzędzie pozwala na tworzenie modeli poprzez wybór komponentów z interfejsu graficznego. Zapewnia symulację z czasem dyskretnym i ciągłym. Simulink wykorzystywany jest głównie do cyfrowego przetwarzania sygnałów, teorii sterowania i analizy obwodów elektrycznych.

- LabVIEW - środowisko programistyczne firmy National Instruments skupiające się głównie na pomiarach i analizie danych. Pozwala na tworzenie modeli poprzez specjalny graficzny język programowania. LabVIEW znajduje zastosowanie w ośrodkach badawczych i testach przemysłowych.

- SolidWorks Simulation - pakiet symulacyjny będący częścią programu komputerowego typu CAD firmy Dassault Systèmes. Umożliwia analizę modeli pod wieloma kątami technicznym, symulację ruchu układu w obecności różnych czynników zewnętrznych. Narzędzie wykorzystywane przez wiodące firmy zajmujące się przemysłem.

Przytoczone przykłady zostały zanalizowane pod kątem budowy, możliwości technicznych, sposobu prezentacji danych i interakcji z użytkownikiem. Wypracowane wnioski dały gruntowną podstawę do stworzenia własnego rozwiązania opartego na kilku najważniejszych cechach dobrej symulacji:

- Modularna budowa - program powinien być zbudowany z respektowaniem standardów inżynierii oprogramowania. Poszczególne funkcjonalności powinny być wyodrębnione i tworzyć pojedyncze pakiety, które będzie można wykorzystywać jako samodzielne elementy.

- Prostota - konkretne narzędzie powinno spełniać wszystkie wymagania techniczne i ukazywać rezultaty w jak najbardziej przejrzysty sposób. Dodatkowe elementy powodują jedynie przesłonięcie kluczowych funkcjonalności.

- Dostęp do danych - symulacja powinna w każdej chwili udostępniać komplet niezbędnych danych fizycznych, wizualizować stan zadanego układu oraz gromadzić istotne parametry w formie wykresów lub diagramów.

- Sterowanie - modyfikacja parametrów symulacji powinna być intuicyjna dla każdego użytkownika.

1.3.2 Dynamika i sterowanie

Zagadnienie stabilizacji dwuwymiarowego układu wahadła odwróconego na wózku zostało szeroko omówione w wielu pracach naukowych. Ze względu na prostotę podstawowego modelu temat ten często pojawia się jako materiał na laboratorium na studiach poświęconych automatyce i robotyce (przykładem jest instrukcja [4]).

Dokładna analiza problemu opiera się na wyborze jednego z dwóch modeli: nieliniowego lub zlinearyzowanego. W pierwszym przypadku model wiernie odwzorowuje zachowanie wahadła niezależnie od jego wychylenia, w drugim pojawia się ograniczenie na nieznaczne wychylenia wahadła. Większość przeanalizowanych prac realizuje drugie założenie ze względu na znaczne uproszczenia obliczeń. Kolejnym wyróżnikiem jest sposób stabilizacji układu. Istnieje wiele narzędzi z zakresu teorii sterowania, które pozwalają na kontrolowanie układu. Najbardziej popularnymi są regulatory: PID i LQR. Szczegółowy przegląd i porównanie narzędzi zostało omówione w artykule [16]. Autor pracy skupił się wyłącznie na sterowaniu regulatorem PID, jednakże pozostawił możliwość zamiany kontrolera na dowolny inny.

Zagadnienie trójwymiarowe znajduje swoje odniesienie jedynie w modelowaniu poruszania dwunożnego robota, w którym skomplikowany model zostaje zastąpiony wahadłem. Stabilizacja uproszczonego modelu pozwala na poruszanie robotem przy zachowaniu stabilności jego postawy. Temat został gruntownie przedstawiony w artykule [15].

Symulacja transportera układu nie jest zagadnieniem szeroko omówionym, toteż autor oparł rozwiązanie na ogólnej wiedzy z zakresu dynamiki układów i sterowania.

Rozdział 2

Definicja projektu

2.1 Zakres projektu

Projekt obejmuje opracowanie biblioteki fizyki dla transportera wahadła odwróconego na wózku oraz symulatora wizualizującego działanie biblioteki. Aplikacja przeznaczona jest na platformę Windows.

Projekt podzielony jest na kilka głównych elementów:

- Budowa dynamiki układu w oparciu o podstawy matematyczno-fizyczne.
- Opracowanie modułu kontroli układem w celu zapewnienia stabilności.
- Wprowadzenie modułu zakłóceń w postaci siły wiatru.
- Obsługa trajektorii ruchu.
- Wizualizacja układu na trójwymiarowej scenie.
- Zarządzanie animacją i modyfikacja parametrów układu.
- Umożliwienie użytkownikowi ręcznej kontroli systemu poprzez tryb gry.

2.2 Analiza wymagań

Wymagania względem projektu można podzielić na funkcjonalne i niefunkcjonalne. Pierwsze odnoszą się do konkretnych zadań, jakie aplikacja powinna realizować. Drugie dotyczą ogólnych cech jakimi program powinien się charakteryzować.

Podstawowe wymagania niefunkcjonalne:

- Użyteczność - program powinien w pełni realizować postawione zadania, a dodatkowo zachęcać użytkownika do zrozumienia tematyki.
- Stabilność - aplikacja powinna działać poprawnie bez względu na interakcję użytkownika.

- Łatwość użytkowania - korzystanie z funkcjonalności powinno być intuicyjne, ponadto wszystkie najważniejsze informacje powinny zostać zebrane w charakterze pomocy.
- Łatwość modyfikowania - program powinien umożliwiać dostosowywanie ustawień w zależności od potrzeb użytkownika.
- Modularność - każdy element systemu powinien być skonstruowany jako oddzielny moduł udostępniający szereg funkcji.
- Rozszerzalność - kod źródłowy aplikacji powinien być przejrzysty, łatwy do zarządzania i rozszerzalny.

Najważniejsze wymagania funkcjonalne:

- Zarządzanie aplikacją
  - Wybór jednego z trybów działania aplikacji (podstawowy, śledzenie trajektorii, tryb gry).
  - Modyfikacja parametrów startowych układu.
  - Możliwość ustawienia aktualnego regulatora i generatora wiatru.
  - Modyfikacja dokładności śledzenia trajektorii.
  - Zarządzanie parametrami wiatru w trakcie przebiegu animacji.
  - Wybór trajektorii z zestawu przygotowanych przykładów.
  - Możliwość stworzenia nowej trajektorii poprzez zadanie jej parametryzacji.
- Wizualizacja
  - Trójwymiarowa scena z możliwością swobodnej manipulacji kamerą.
  - Umieszczenie modelu transportera w postaci platformy na kołach z przyczepionym odwróconym wahadłem.
  - Wyświetlanie płaszczyzny, po której porusza się model, wraz z podziałką metryczną.
  - W zależności od ustawień wyświetlania pokazywanie trajektorii ruchu wahadła i wózka.
  - Kontrolowanie postępu animacji poprzez odpowiedni panel.
  - Możliwość przełączania wyświetlania między trybami: prostych kolorów i tekstur.
  - Możliwość ręcznego sterowania układem za pomocą myszy i klawiatury.
- Prezentacja danych
  - Dynamiczne wykresy dla kluczowych danych, tj. błąd regulacji czy podawane napięcie na silniku.

  - Możliwość zapisywania aktualnie wygenerowanych wykresów.
  - Wyświetlanie aktualnego stanu układu.
  - Prezentacja informacji ogólnych na temat aplikacji i dynamiki układu oraz interaktywnej pomocy.

2.3 Ograniczenia

W trakcie wstępnej analizy projektu przyjęto zestaw ograniczeń w celu zachowania spójności pracy i uniknięcia nadmiernego rozszerzania mniej istotnych elementów. Są to:

- Konieczność spełnienia wszystkich podstawowych wymagań wymienionych w poprzedniej sekcji.
- Możliwość uproszczenia modelu w celu zmniejszenia złożoności obliczeń.
- Ograniczenie realizacji stabilizacji układu do użycia różnych odmian regulatora PID.
- Ograniczenie jakości wizualizacji do wyświetlania prostego modelu układu na trójwymiarowej scenie.

Rozdział 3

Opis rozwiązania

3.1 Podstawy matematyczno-fizyczne

Dokładne omówienie rozwiązań przyjętych w pracy wymaga rozwinięcia kilku zasadniczych pojęć. Przytoczone zagadnienia zostały opracowane w oparciu o materiały z wykładów poświęconych projektowaniu środowiska wirtualnego: [2] oraz [3], a także tekst: [8].

3.1.1 Równanie stanu

Stan układu jest to informacja umożliwiająca określenie zachowania układu w danej jednostce czasu. Zawiera w sobie zakumulowane dane z całego przebiegu ruchu od chwili początkowej do obecnej. Jest to tzw. własność pamięci układu. Istotnym zagadnieniem związanym ze stanem układu jest charakterystyka związków między jego zmiennymi. Związki te określane są mianem równania stanu. Równanie to przyjmuje postać równania różniczkowego pierwszego rzędu i stanowi matematyczny model układu fizycznego.

Pojedynczy stan można określić jako wektor zmiennych będący punktem w n-wymiarowej przestrzeni stanów. Wówczas dynamikę układu można przedstawić poprzez n-wymiarową rozmaitość różniczkową N z powiązanym prostopadłym polem wektorowym $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Trajektorie elementów układu dynamicznego wyrazić można poprzez równanie:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \tag{3.1}$$

z zadanym warunkiem początkowym:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0} \tag{3.2}$$

W sytuacji gdy prawa strona równania 3.1 nie zależy od czasu przyjmuje się, że układ dynamiczny jest autonomiczny. Wówczas wyznaczenie punków stacjonarnych układu polega na rozwiązaniu równania:

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

Przedstawiony model jest jednoznacznie zdefiniowany przez warunek początkowy. Jednakże w rozwiązaniach praktycznych dużo korzystniejszym rozwiązaniem jest stworzenie rozwiązania, które oprócz obserwacji umożliwia również kontrolę. Aby to osiągnąć uzupełnia się model o dodatkowy wektor $\mathbf{u}$ zawierający parametry modyfikujące trajektorie układu. Odpowiednie równanie trajektorii przybiera wówczas następującą postać:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{3.4}$$

W większości przypadków aplikacje symulacyjne nie wymagają rozwiązywania skomplikowanego nieliniowego równania. Toteż często stosowaną praktyką jest upraszczanie poprzez linearyzację układu. W przypadku układu autonomicznego zmienność zostaje zastąpiona stałymi elementami: macierzą A związaną ze stanem układu oraz B związaną ze sterowaniem. Dodatkowo należy przyjąć, że w niektórych systemach zmienne stanu mogą być niedostępne w sposób bezpośredni, dlatego należy zdefiniować dodatkowe równanie pozwalające wyprowadzić zmienne wyjściowe układu.

Ostatecznie równanie stanu dla systemu liniowego niezmienniczego w czasie (ang. Linear Time Invariant) wygląda w sposób następujący:

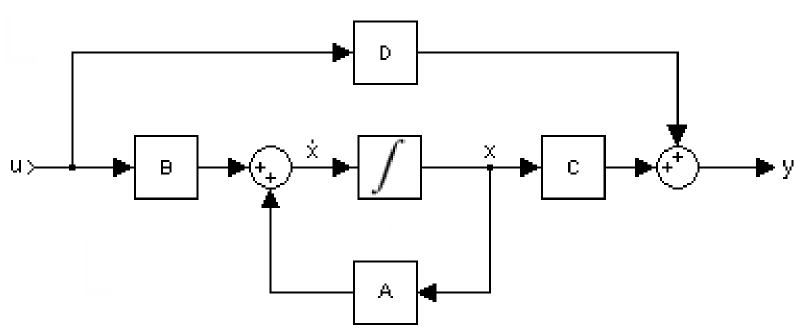
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{3.5}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{3.6}$$

gdzie:

- $x(t)$ - wektor stanu
- $u(t)$ - wektor sterowania
- $u(t)$ - wektor wyjściowy
- $A^{q \times n}$ - macierz stanu
- $B^{q \times m}$ - macierz sterowania
- $C^{p \times n}$ - macierz wyjścia
- $D^{p \times m}$ - macierz sterowania bezpośredniego

Parametry q i p są zwykle równe n, toteż macierz stanu jest najczęściej macierzą kwadratową. Macierz D pojawia się tylko w przypadku układów właściwych, czyli takich które posiadają transmitancję właściwą.

Model równań stanu dla układu ciągłego ilustruje schemat 3.1.



Rysunek 3.1: *Schemat równań stanu dla układu ciągłego [13]*

3.1.2 Algorytm Rungego-Kutty

Algorytm Rungego-Kutty jest to iteracyjna metoda rozwiązywania równań i układów równań różniczkowych zwyczajnych. Określenie to stosuje się również do całej rodziny jawnych i niejawnych metod z uwzględnieniem pewnych modyfikacji. Zwyczajowo jednak przyjmuje się konkretną implementację w postaci metody czwartego rzędu.

Zadaniem algorytmu jest wyznaczenie rozwiązania y na podstawie równania postaci $\dot{y} = f(x, y)$ oraz wartości początkowej $y(x_0) = y_0$. Ustalając krok całkowania h można wyznaczyć rozwiązanie w sposób iteracyjny:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta y_n \\ \Delta y_n &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Współczynniki $k_{1...4}$ wyznaczane są następująco:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Rezultatem działania metody jest zestaw kolejnych punków przybliżających rozwiązanie. W przypadku układu równań różniczkowych postępowanie jest analogiczne.

Rozwiązanie opracowane przez autora korzysta z modyfikacji bazowego algorytmu zwanej metodą Casha-Karpa, która pozwala na adaptacyjny dobór parametru kroku całkowania h.

3.1.3 SLERP

SLERP (ang. spherical linear interpolation) jest to interpolacja wprowadzona przez Kena Shoemake w celach animacji rotacji trójwymiarowych. Technika zapewnia gładki ruch ze stałą prędkością między punktami końcowymi.

SLERP bazuje na fakcie, że każdy punkt krzywej, po której porusza się obiekt jest kombinacją liniową punktów końcowych animacji: p_0 i p_1. Niech t będzie parametrem takim, że: $0 \leqslant t \leqslant 1$. Dodatkowo niech ω będzie kątem zakreślanym w trakcie przejścia, więc spełniającym równanie $cos(\omega) = p_0 \cdot p_1$. Wówczas formuła geometryczna interpolacji wygląda następująco:

$$SLERP(p_0, p_1, t) = \frac{sin((1-t)\omega)}{sin(\omega)}p_0 + \frac{sin(t\omega)}{sin(\omega)}p_1$$

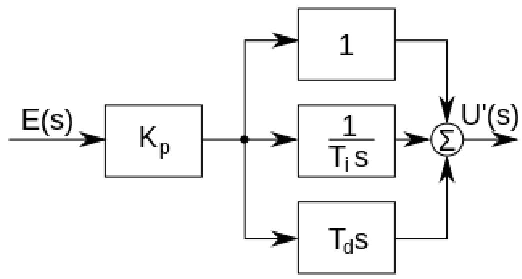
3.1.4 Regulator PID

Regulator PID (ang. proportional-integral-derivative controller) jest to element obwodu regulacji, którego głównym zadaniem jest generowanie odpowiedniego sygnału sterującego, zmuszającego układ do określonego zachowania. Narzędzie to jest bardzo często wykorzystywane w przemysłowych układach regulujących. Regulator ustawiony jest w pętli sprzężenia zwrotnego. W trakcie jednego cyklu wyznacza różnicę między wartością docelową i obecną (uchyb) oraz podaje na wejście regulowanego układu sygnał kompensujący uchyb.

Regulator PID składa się z trzech komponentów:

- człon proporcjonalny **P**, który reaguje na obecne wartości uchybu,
- człon całkujący **I**, który przechowuje informację na temat poprzednich wartości uchybu,
- człon różniczkujący **D**, który przewiduje następne wartości uchybu.

Schemat poglądowy regulatora PID zawarty został na ilustracji 3.2



Rysunek 3.2: *Schemat blokowy idelnego regulatora PID [14]*

Sygnał wyjściowy z regulatora jest sumą ważoną poszczególnych komponentów. Regulator wykonuje algorytm:

$$u(t) = K_p[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}] \tag{3.7}$$

gdzie:

- $u(t)$ - sygnał sterujący z regulatora
- $e(t)$ - uchyb regulacji
- K_p - wzmocnienie członu proporcjonalnego
- T_i - czas zdwojenia członu całkującego
- T_d - czas wyprzedzenia członu różniczkującego

Algorytm 3.7 można poddać dyskretyzacji z krokiem całkowania h. Poszczególne iteracje będą wówczas wyznaczane w następujący sposób:

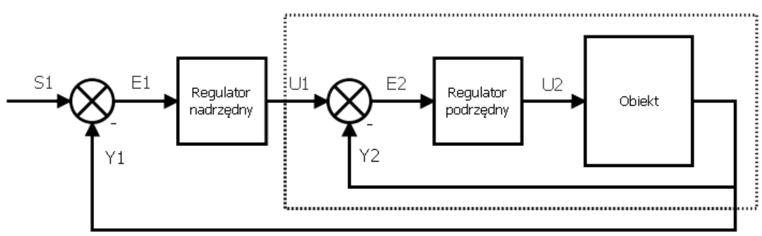
$$u(i) = K_p[e(i) + \frac{h}{T_i}\sum_{k=0}^{i} e(k) + T_d\frac{e(i) - e(i-1)}{h}] \tag{3.8}$$

Uzyskanie poprawnego działania regulatora PID wymaga dobrania odpowiednich wartości nastaw. Optymalizacji parametrów dokonuje się poprzez ręczne strojenie lub wyznaczenie algorytmiczne (np. metodą Zieglera-Nicholsa). Warto przy okazji zwrócić uwagę na to, że regulator PID nie gwarantuje optymalnego sterowania ani stabilności układu. W celu uzyskania powyższych cech należy rozważyć zastosowanie innego typu regulacji np. regulatora LQR.

3.1.5 Regulator podwójny PID

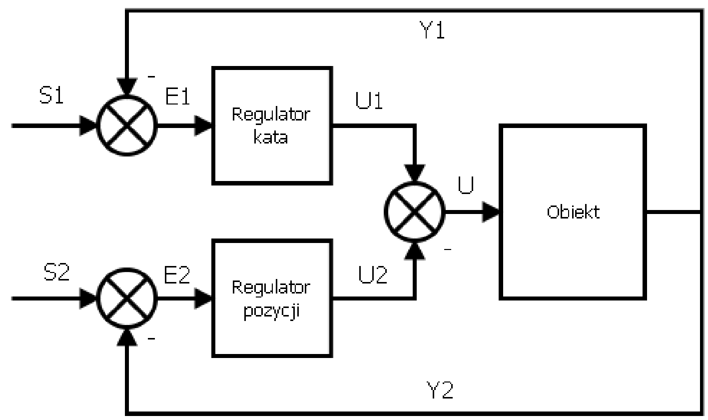
Utrzymanie układu wahadła odwróconego na wózku w niestabilnym punkcie równowagi wymaga uzupełnienia systemu o mechanizm kontroli. Regulator PID może pełnić funkcję narzędzia utrzymującego zerowe odchylenie wahadła względem osi pionowej. Niestety, w sytuacji, gdy celem układu jest dodatkowo stabilizacja położenia, nie wystarczy pojedynczy regulator PID. Rozwiązaniem tego problemu jest rozbudowa struktury na dwa komponenty odpowiedzialne za poszczególne wielkości regulowane. W literaturze pojawia się kilka zagadnień, z których najbardziej popularne to:

- układ regulacji kaskadowej przedstawiony na rysunku 3.3. Jest to klasyczne podejście zbudowane na podstawie śzybkiej"pętli wewnętrznej i "wolnej"pętli zewnętrznej. Regulator nadrzędny odpowiada za sterowanie położeniem wózka. Wartość wyjściowa z regulatora staje się wartością zadaną dla wewnętrznego układu, który zajmuje się regulacją kąta odchylenia wahadła od pionu. Wyjście z regulatora wewnętrznego podawane jest ostatecznie do sterowanego układu. Koncepcja ta pozwala na utrzymanie stabilności wahadła z dodatkowym uwzględnieniem dostosowywania pozycji wózka.



Rysunek 3.3: *Schemat blokowy kaskadowego układu sterowania regulatorami PID[5]*

- Układ regulacji równoległej pokazany na ilustracji 3.4. Działanie tego układu jest zbliżone do wariantu kaskadowego. Cechą odrębną jest fakt, że sterowanie podawane na układ wyznaczane jest jako różnica sterowań poszczególnych podukładów sterujących. Rozwiązanie to generuje problem wzajemnego zakłócania regulatorów, toteż należy uwzględnić w modelu, że regulator odchylenia wahadła musi być śzybszyód regulatora położenia. Zabieg ten spowoduje, że tylko sterownik położenia potraktuje dodatkowe sterowanie jako zakłócenie.



Rysunek 3.4: *Schemat blokowy równoległego układu sterowania regulatorami PID[5]*

Definicja oznaczeń na schematach 3.3 i 3.4:

- S1, S2 - wartości zadanie
- E1, E2 - uchyby regulacji
- U1, U2 - wyjścia z regulatorów
- Y1, Y2 - wyjścia z układu sterowanego

3.2 Mechanika systemu

3.2.1 Model matematyczny ruchu

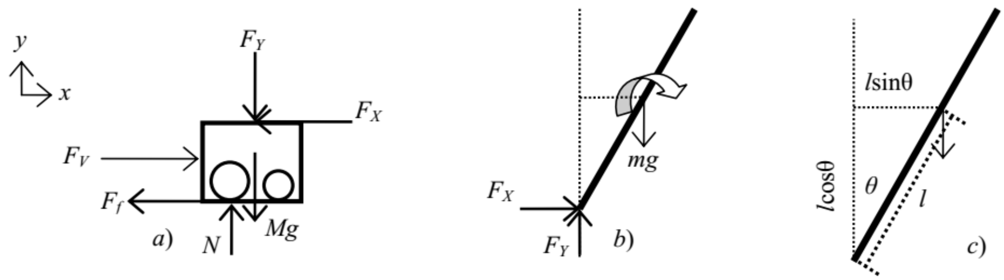
Schemat

Wykonanie poprawnej symulacji dowolnego zjawiska fizycznego wymaga na wstępie stworzenia odpowiedniego modelu matematycznego, który przybliży charakterystykę danego zjawiska. Niniejsza sekcja poświęcona jest omówieniu modelu ruchu wahadła odwróconego na wózku. Pełny model zrealizowany w projekcie zawiera w sobie dwa wspomniane układy, które są ze sobą połączone. Jednakże ich niezależność pozwala na swobodne rozpatrywanie pojedynczego układu. Wstępne informacje na temat zadania zostały przedstawione w sekcji 1.1.2. Dalsze rozważania będą dotyczyły analizy rozkładu sił w modelu oraz wyprowadzenia równań ruchu na podstawie pracy [4].

W przyjętym rozwiązaniu skupiono się na podstawowych siłach rządzących światem rzeczywistym. Ruch układu odbywa się w obecności siły grawitacji o przyspieszeniu ziemskim g. Na wózek działają dodatkowo siły: tarcia F_f i napędu pochodzącego od silnika F_v. Nacisk wózka Mg równoważony jest przez siłę sprężystości podłoża N. Ponadto należy rozważyć siły wzajemnego oddziaływania między wózkiem a wahadłem: F_x i F_y bazując na trzeciej zasadzie dynamiki Newtona:

W inercjalnym układzie odniesienia siły wzajemnego oddziaływania dwóch ciał mają takie same wartości, taki sam kierunek, przeciwne zwroty i różne punkty przyłożenia.

Pełny rozkład sił, wraz z wyznaczeniem odległości, przedstawiony został na schemacie 3.5.



Rysunek 3.5: *Schemat rozkładu sił dla: a) wózka, b) wahadła, c) odległości między komponentami [4]*

Idealny model wahadła zakłada, że składa się ono z obiektu masowego zawieszonego na nierozciągliwej cienkiej nici o długości l. Wobec tego można przyjąć, że ogół sił pochodzących od wahadła skupiony jest w obrębie jego środka masy. Uwzględniając fakt, że punkt zaczepienia wahadła znajduje się na środku wózka, którego pozycja określona jest współrzędną x, lokację środka masy można wyznaczyć jako:

$$\begin{aligned} x_g &= x + lsin(\theta) \\ y_g &= lcos(\theta) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Siła napędowa pochodząca od silnika powoduje, że układ zyskuje zdolność do wymuszonego poruszania się po powierzchni. Siła ta regulowana jest poprzez napięcie przyłożone do silnika. Wzór na wyznaczenie tej siły wygląda następująco:

$$F_v = \gamma_v V \tag{3.10}$$

gdzie γ_f jest stałym współczynnikiem konwersji napięcia na siłę.

Siła tarcia związana jest z oddziaływaniem między wózkiem a podłożem. W analizowanym modelu wykorzystano zjawisko tarcia kinetycznego zależnego od prędkości ruchu, które można wyznaczyć jako:

$$F_f = \gamma_f \frac{dx}{dt} \tag{3.11}$$

gdzie γ_f jest stałym współczynnikiem tarcia wózka.

Ruch postępowy

Analiza ruchu postępowego została podzielona na dwa podproblemy związane z osiami głównymi układu oraz rozpatrzona oddzielnie dla wózka i wahadła. Umożliwia to przejrzyste zbadanie oddziaływań i łatwe wyprowadzenie równań ruchu. W przypadku wahadła można określić ruch w pionie i w poziomie, dla wózka tylko poziomy.

Zachowanie układu zostało scharakteryzowane w oparciu o drugie prawo dynamiki Newtona, które mówi:

> W układzie inercjalnym, suma sił F działających na ciało jest równa masie ciała m pomnożonej przez jego przyspieszenie a:

$$F = ma \tag{3.12}$$

Korzystając z przytoczonego twierdzenia 3.12 zależność dla wózka w poziomie wygląda następująco:

$$F_v - F_x - F_f = M\frac{d^2x}{dt^2} \tag{3.13}$$

Po uwzględnieniu charakterystyki siły tarcia i napędu 3.11:

$$\gamma_v V - F_x - \gamma_f\frac{dx}{dt} = M\frac{d^2x}{dt^2} \tag{3.14}$$

Analogicznie dla wahadła ruch w poziomie można określić równaniem:

$$F_x = m\frac{d^2x_g}{dt^2} \tag{3.15}$$

Dalsze rozważania wymagają wyznaczenia pierwszej i drugiej pochodnej czasowej po poziomej trajektorii środka masy wahadła.

Dla pierwszej pochodnej należy skorzystać z 3.9:

$$\frac{dx_g}{dt} = \frac{d(x + lsin(\theta))}{dt} = \frac{dx}{dt} + lcos(\theta)\frac{d\theta}{dt} \tag{3.16}$$

Wyznaczenie drugiej pochodnej można uzyskać poprzez różniczkowanie równania 3.16:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_g}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt} + lcos(\theta)\frac{d\theta}{dt})\\ &= \frac{d^2x}{dt^2} + l(\frac{dcos(\theta)}{dt}\frac{d\theta}{dt} + cos(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2})\\ &= \frac{d^2x}{dt^2} - lsin(\theta)(\frac{d\theta}{dt})^2 + lcos(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2}\end{aligned} \tag{3.17}$$

Wykorzystując wyznaczone pochodne oraz równanie 3.15 można wyznaczyć poziomą siłę reakcji miedzy wózkiem a wahadłem:

$$F_x = m(\frac{d^2x}{dt^2} - lsin(\theta)(\frac{d\theta}{dt})^2 + lcos(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2}) \tag{3.18}$$

Po wstawieniu uzyskanych wyprowadzeń do równania ruchu wózka w poziomie 3.14 i dokonaniu uporządkowania zmiennych ostateczna postać równania wygląda następująco:

$$(M + m)\frac{d^2}{dt^2} + \gamma_f\frac{dx}{dt} = \gamma_v V + mlsin(\theta)(\frac{d\theta}{dt})^2 - mlcos(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3.19}$$

W przypadku ruchu w pionie należy rozważyć wyłącznie ruch wahadła. Bazując na twierdzeniu 3.12 równanie ruchu można podać w postaci:

$$F_y - mg = m\frac{d^2y_g}{dt^2} \tag{3.20}$$

Podobnie jak dla ruchu w poziomie niezbędne będzie wyznaczenie pochodnych czasowych trajektorii środka masy.

Pierwsza pochodna przybiera postać:

$$\frac{dy_g}{dt} = \frac{d(lcos(\theta))}{dt} = -lsin(\theta)\frac{d\theta}{dt} \tag{3.21}$$

Druga pochodna:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_g}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(-lsin(\theta)\frac{d\theta}{dt})\\ &= -l(\frac{dsin(\theta)}{dt}\frac{d\theta}{dt} + sin(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2})\\ &= -lcos(\theta)(\frac{d\theta}{dt})^2 - lsin(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2}\end{aligned} \tag{3.22}$$

Łącząc wyznaczone pochodne z równaniem 3.20 można wyprowadzić wzór na pionową siłę reakcji między wózkiem a wahadłem:

$$F_y = mg + -mlcos(\theta)(\frac{d\theta}{dt})^2 - mlsin(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3.23}$$

Wzór ten będzie niezbędny do dalszych rozważań poświęconych ruchowi obrotowemu.

Ruch obrotowy

Ruch obrotowy układu przejawia się w dynamice wahadła, które obraca się względem zadanego punktu zaczepienia. Analiza tego ruchu została przeprowadzona w oparciu o drugą zasadę dynamiki ruchu obrotowego:

> Jeśli na ciało, o momencie bezwładności względem osi obrotu I, działają zewnętrzne siły o wypadkowym momencie siły M, to w rezultacie tego oddziaływania ciało będzie obracać się z przyspieszeniem kątowym ϵ takim, że:

$$M = I\epsilon \tag{3.24}$$

Moment siły i przyspieszenie kątowe są pseudowektorami o zgodnych kierunkach i zwrotach. Poszczególne siły $\mathbf{F}$ o wektorach pozycji $\mathbf{r}$ generują momenty sił zdefiniowane jako:

$$\overline{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r} \tag{3.25}$$

Sumując wszystkie momenty sił działające na środek masy wahadła można uzyskać wzór:

$$F_y lsin(\theta) - F_x lcos(\theta) = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3.26}$$

Korzystając z wyznaczonych wcześniej sił reakcji 3.18 i 3.23 wzór przyjmie postać:

$$\begin{aligned}(mg + -mlcos(\theta)(\frac{d\theta}{dt})^2 - mlsin(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2})lsin(\theta)\\ - m(\frac{d^2x}{dt^2} - lsin(\theta)(\frac{d\theta}{dt})^2 + lcos(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2})lcos(\theta) = I\frac{d^2\theta}{dt^2}\end{aligned} \tag{3.27}$$

Po wymnożeniu i pogrupowaniu poszczególnych elementów wzór wygląda następująco:

$$mglsin(\theta) - ml^2(sin^2(\theta) + cos^2(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2} - mlcos(\theta)\frac{d^2x}{dt^2} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3.28}$$

Korzystając z trywialnej równości trygonometrycznej

$$sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1 \tag{3.29}$$

oraz dokonując kolejnego pogrupowania, ostateczną postać równania ruchu obrotowego wahadła można wyrazić jako:

$$(I + ml^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = mglsin(\theta) - mlcos(\theta)\frac{d^2x}{dt^2} \tag{3.30}$$

Podsumowując powyższe rozważania, równania ruchu układu wahadła odwróconego na wózku to:

$$\begin{aligned}(M + m)\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_f\frac{dx}{dt} = \gamma_v V + mlsin(\theta)(\frac{d\theta}{dt})^2 - mlcos(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2}\\ (I + ml^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = mglsin(\theta) - mlcos(\theta)\frac{d^2x}{dt^2}\end{aligned} \tag{3.31}$$

3.2.2 Linearyzacja modelu

Założenia

Opracowany w poprzedniej sekcji model ruchu jest modelem nieliniowym. W celu uzyskania rozwiązania wygodniejszego obliczeniowo, bez istotnych strat na dokładności, i pozwalającego na zastosowanie rozwiązań z zakresu teorii sterowania przeprowadzona została linearyzacja modelu.

Charakterystyka realizowanego problemu pozwoliła na przyjęcie założenia, że kąt odchylenia wahadła od osi pionowej jest stosunkowo niewielki. Uzasadnieniem tego stwierdzenia jest fakt, iż docelowy system będzie wyposażony w narzędzie stabilizujące wychylenie, wobec czego w stanie ustalonym kąt ten będzie bliski zeru. Powyższe założenie umożliwia dokonania kilku istotnych uproszczeń w modelu:

$$\begin{aligned}sin(\theta) &\approx \theta\\ cos(\theta) &\approx 1\\ (\frac{d\theta}{dt})^2 &\approx 0\end{aligned} \tag{3.32}$$

Jeśli dodatkowo przyjmiemy środek masy wahadła za środek ciężkości, wtedy moment bezwładności $I = 0$.

Konwersja równań

Uwzględniając powyższe rozważania, równania ruchu 3.31 można zapisać na nowo:

$$\begin{aligned}(M+m)\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_f\frac{dx}{dt} &= \gamma_v V - ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ l\frac{d^2\theta}{dt^2} &= g\theta - \frac{d^2x}{dt^2}\end{aligned} \tag{3.33}$$

Po uporządkowaniu zmiennych równania przyjmują postać:

$$\begin{aligned}(M+m)\frac{d^2x}{dt^2} + ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma_f\frac{dx}{dt} &= \gamma_v V \\ l\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} &= g\theta\end{aligned} \tag{3.34}$$

Aby móc przeprowadzić dalsze rozważania niezbędne będzie wykonanie rozdzielenia równań w taki sposób, aby każde z nich zawierało relację między drugą pochodną po odpowiedniej zmiennej a pierwszymi pochodnymi i samymi zmiennymi. Dokonać tego można poprzez podstawienie jednego równania do drugiego i wyznaczenie odpowiednich zależności.

$$\begin{aligned}(M+m)\frac{d^2x}{dt^2} + ml\left(\frac{g\theta}{l} - \frac{1}{l}\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \gamma_f\frac{dx}{dt} &= \gamma_v V \\ M\frac{d^2x}{dt^2} + mg\theta + \gamma_f\frac{dx}{dt} &= \gamma_v V \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{mg\theta}{M} - \frac{\gamma_f}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{\gamma_v V}{M}\end{aligned} \tag{3.35}$$

Podstawiając wynik 3.35 do 3.34 uzyskuje się:

$$\begin{aligned}l\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{mg\theta}{M} - \frac{\gamma_f}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{\gamma_v V}{M} &= g\theta \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{(M+m)g\theta}{Ml} + \frac{\gamma_f}{Ml}\frac{dx}{dt} - \frac{\gamma_v V}{Ml}\end{aligned} \tag{3.36}$$

Ostatecznie równania ruchu w postaci rozdzielonej prezentują się następująco:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{mg\theta}{M} - \frac{\gamma_f}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{\gamma_v V}{M} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{(M+m)g\theta}{Ml} + \frac{\gamma_f}{Ml}\frac{dx}{dt} - \frac{\gamma_v V}{Ml}\end{aligned} \tag{3.37}$$

Wyprowadzone w ten sposób równania pozwolą w łatwy sposób uzyskać zapis w formie równań stanu.

Równanie stanu

Wprowadzenie zagadnienia równań stanu zostało przedstawione w sekcji 3.1.1. Dla problemu liniowego równanie stanu można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}\end{aligned} \tag{3.38}$$

W przypadku układu wahadła odwróconego na wózku wektor stanu można skonstruować w następującej postaci:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Ze względu na fakt, że sterowanie układem odbywa się wyłącznie przy pomocy regulacji napięcia na silniku, wektor sterowania będzie jednoelementowy:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

W realizowanym problemie nie występuje macierz sterowania bezpośredniego D, natomiast ze względu na jawność wszystkich parametrów stanu, macierz C jest macierzą jednostkową. Dlatego w dalszych rozważaniach będą uwzględniane wyłącznie macierze: stanu A i sterowania B.

Dysponując równaniami 3.37 można w łatwy sposób ustalić postać macierzy dla równania stanu.

Macierz stanu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{\gamma_f}{M} & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & \frac{\gamma_f}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Macierz sterowania (zredukowana do wektora):

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma_v}{M} \\ -\frac{\gamma_v}{Ml} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Zbierając razem wszystkie wyznaczone elementy, finalna postać równania stanu określona jest w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\theta \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{mg}{M} & -\dfrac{\gamma_f}{M} & 0 \\ 0 & \dfrac{(M+m)g}{Ml} & \dfrac{\gamma_f}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\gamma_v}{M} \\ -\dfrac{\gamma_v}{Ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Otrzymana charakterystyka dynamiki może być w łatwy sposób rozwiązywana za pomocą algorytmu Rungego-Kutty przedstawionego w sekcji 3.1.2. Dodatkowo forma ta pozwala na określenie podstawowych cech układu dynamicznego jakimi są obserwowalność i kontrolowalność.

Obserwowalność pozwala określić na ile dobrze informacja o stanie wewnętrznym układu jest osiągalna z poziomu jego wyjścia. Sprawdzenie tego parametru wymaga wyznaczenia macierzy obserwowalności i ustalenia jej rzędu. Warunek na obserwowalność dla układu o n parametrach stanu wygląda następująco:

$$Rank(A^T|C^T) = n \tag{3.44}$$

gdzie

$$X|Y := [X, XY, X^2Y, ..., X^{n-1}Y] \tag{3.45}$$

Sprawdzenie warunku obserwowalności dla rozwiązywanego zadania pokazuje, iż układ dynamiczny spełnia kryterium obserwowalności.

Kontrolowalność służy określeniu możliwości sterowania układem. Model jest kontrolowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny stan końcowy jest osiągalny z dowolnego stanu początkowego w skończonym czasie. Warunek pozwalający na sprawdzenie cechy dla układu o n parametrach stanu wygląda następująco:

$$Rank(A|B) = n \tag{3.46}$$

Sprawdzenie kryterium ustaliło, że zbudowany układ wykazuje cechy kontrolowalności.

3.2.3 Stabilizacja układu

Jednym z kluczowych zadań jakie zostały wyznaczone do zrealizowania w projekcie jest stabilizacja odchylenia wahadła od osi pionowej. Problem ten rozwiązywany jest poprzez sterowanie napięciem na silniku napędzającym wózek. W celu ocenienia poziomu trudności zagadnienia wykonano wstępnie kilka wariantów sterowania niezależnego od uchybu. Były to:

- Brak sterowania - do oceny zachowania zbudowanego modelu.
- Sterowanie losowe - generowanie losowych wartości napięcia.
- Sterowanie sinusoidalne - podawanie na wejście układu napięcia o charakterystyce wykresu funkcji sinus zależnego od czasu.

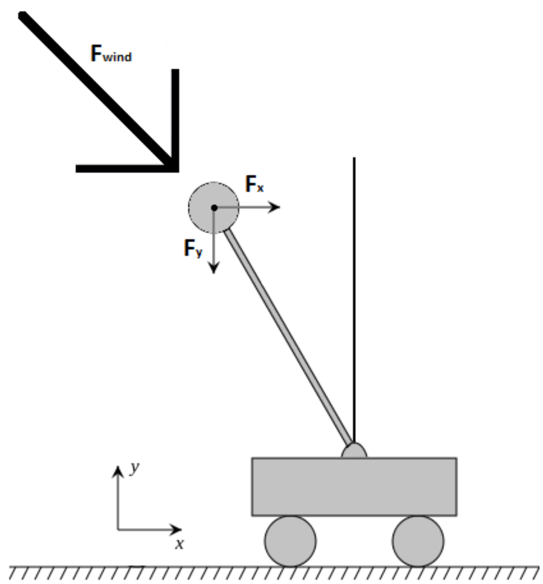
Docelową strategią kontroli nad układem było wprowadzenie regulatora PID. Opis narzędzia został podany w sekcji 3.1.4. Porównanie rozwiązań zostanie omówione w rozdziale poświęconym testom.

Wynikiem zastosowania odpowiedniej regulacji powinna być stabilizacja układu w obrębie zerowego odchylenia wahadła od osi pionowej układu. Dodatkowo warto zauważyć, że omawiany problem wymaga zastosowania podwójnego kompletu sterowników, ze względu na trójwymiarowy charakter finalnego modelu. Jednakże podobne jak w przypadku samego układu, oba kontrolery będą działały niezależnie.

3.2.4 Wprowadzenie zakłóceń do modelu

Przygotowana praca obejmuje dodatkowe zagadnienie jakim są zakłócenia pochodzące od siły wiatru. Wiatr zdefiniowany został jako trójwymiarowy wektor kierunkowy oraz wartość określająca jego moc. W projekcie przyjęto, że siła wiatru oddziałuje jedynie na wahadło. Założenie to bierze swoją genezę z chęci wprowadzenia zaburzenia kąta odchylenia wahadła od osi pionowej i przeprowadzenia testów stabilizacji powstałych zakłóceń. Kierunek siły wiatru zrzutowany został na dwie płaszczyzny związane z wzajemnie prostopadłymi układami dwuwymiarowymi. Wyznaczone w ten sposób siły przyłożone zostały w obydwu układach do środka masy wahadła, a następnie rozłożone na dwie składowe związane z osiami głównymi poszczególnych układów.

Powstały w ten sposób dwuwymiarowy rozkład sił przedstawiony został na schemacie 3.6.



Rysunek 3.6: *Układ wahadła odwróconego na wózku w obecności siły wiatru*

Uzyskane siły F_x i F_y uwzględnione zostały jako dodatkowe oddziaływania względem modelu podstawowego. Aby wyznaczyć ich wpływ na dynamikę układu przeprowadzono rozważania analogiczne do tych, przedstawionych w sekcji 3.2.1. W rezultacie ustalono poprawkę, która będzie doliczana wyłącznie wtedy, gdy do układu wprowadzone zostanie zakłócenie:

Element równania stanu	Zakłócenie
Prędkość liniowa $\frac{dx}{dt}$	0
Prędkość kątowa $\frac{d\theta}{dt}$	0
Przyspieszenie liniowe $\frac{d^2x}{dt^2}$	$\frac{F_x - F_y\theta}{M}$
Przyspieszenie kątowe $\frac{d^2\theta}{dt^2}$	$\frac{(F_y\theta - F_x)(M+m)}{Mm}$

Omówiony model zakłóceń dotyczy pojedynczej pętli obliczeń, w której kierunek i moc wiatru są ustalone. Obsługa całego przebiegu symulacji wymaga rozważenia pełnej charakterystyki siły wiatru, w szczególności zmienności jej kierunku. W projekcie przyjęto, że wektor kierunku wiatru generowany będzie losowo z podprzestrzeni spełniającej nierówność: $|z| < 0.5$, natomiast moc wiatru i tempo jego zmiany będą dowolnie sterowalnymi parametrami. Dodatkowo opracowano kilka metod zmiany kierunku wiatru:

- Skoki losowe - przez zadany czas wiatr wieje z określonego kierunku, następnie generowany jest nowy losowy kierunek.
- Skoki naprzemienne - przez zadany czas wiatr wieje z określonego kierunku, następnie generowany jest nowy kierunek w taki sposób, by wektor kierunkowy należał do półprzestrzeni przeciwnej do tej, w której znajduje się obecnie wybrany kierunek.
- Gładkie przejścia - generowane są dwa kierunki podobnie jak w skokach naprzemiennych, które oznaczane są jako kierunek początkowy i końcowy. W trakcie przebiegu symulacji kierunek wiatru wyznaczany jest jako interpolacja wspomnianych dwóch wektorów. W celu uzyskania gładkiej zmiany kierunku wykorzystano interpolację SLERP omówioną w sekcji 3.1.3.

3.2.5 Wprowadzenie trajektorii ruchu

3.2.6 Regulacja ruchu względem zadanej trajektorii

Rozdział 4

Testy i porównanie przyjętych rozwiązań

4.1 Stabilizacja układu

Brak jakiegokolwiek narzędzia sterującego powoduje, że symulacja układu ogranicza się do wizualizacji zachowania wahadła i wózka w zależności od wychylenia wahadła. Nawet niewielkie zaburzenia kąta powodują, że wahadło opuszcza niestabilny punkt równowagi o opada na wózek. W tym czasie wózek

4.2 Ruch po trajektorii

4.3 Wpływ parametrów układu na jego zachowanie

4.4 Testowanie przypadków szczególnych

Rozdział 5

Architektura systemu

5.1 Ogólny opis rozwiązania

5.2 Wykorzystane narzędzia

5.2.1 Windows Presentation Foundation

5.2.2 HelixToolkit

5.2.3 OxyPlot

5.2.4 Pozostałe

5.3 Wzorce projektowe

5.4 Komponenty aplikacji

5.4.1 Modele

5.4.2 Kontrolery

5.5 Zarządzanie aplikacją

Rozdział 6

Instrukcja użytkownika

6.1 Panel kontrolny

6.1.1 Moduły

6.1.2 Opcje

6.1.3 Sterowanie parametrami

6.2 Wizualizacja

6.2.1 Scena

6.2.2 Wykresy

6.2.3 Podgląd stanu

Rozdział 7

Podsumowanie pracy

7.1 Ocena rozwiązania

7.1.1 Stopień realizacji projektu

7.1.2 Poprawność rozwiązania

7.2 Krytyczna refleksja

7.3 Możliwości rozszerzania projektu

Bibliografia

[1] Marciniak K., *Dynamic systems*, w: *Modelling in state space*, Warszawa, 2003.

[2] Marciniak K., *Control systems*, w: *Modelling in state space*, Warszawa, 2003.

[3] Marciniak K., *Design of Closed loop control*, w: *Modelling in state space*, Warszawa, 2003.

[4] Robles R., Shardt Y., *Linear motion inverted pendulum, derivation of the state-space model*
http://www.jtjt.pl/www/pages/odwrocone-wahadlo/LMIP.pdf

[5] Tyma J., *Odwrócone wahadło*
http://www.jtjt.pl/odwrocone-wahadlo

[6] *Słownik Języka Polskiego*
http://sjp.pwn.pl

[7] *Symulacja komputerowa*,
https://pl.wikipedia.org/wiki/Symulacja_komputerowa

[8] Neumann E., *Runge-Kutta Algorithm*, 2016,
http://www.myphysicslab.com/explain/runge-kutta-en.html

[9] Hawkins E., Vidale P. *Two tropical Atlantic hurricanes in a high-resolution atmospheric simulation with the HadGEM3 global climate model at a resolution of N512*, 27.07.2012,
http://www.nature.com/nclimate/journal/v2/n8/fig_tab/nclimate1639_F1.html

[10] 3DVision Technologies *The Importance of Material Properties in Analysis with SolidWorks Simulation*, 18.05.2012
http://blogs.solidworks.com/solidworksblog/2012/05/material-properties-in-analysis.html

[11] *Wireless Inverted Pendulum Cart*,
http://www.mne.k-state.edu/static/nlc/tiki-index.php?page=S_H_WirelessInvertedPendulumCart

[12] *Project: Gait Pattern Generation*,
http://www.wrighteagle.org/en/research/projgait.php

[13] *State space model integral*, 2011
https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:State_space_model_integral.PNG

[14] *Schemat blokowy idealnego regulatora PID*, 2010
https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Schemat_blokowy_regulatora_pid_idealnego.svg

[15] Kajita S., *The 3D Linear Inverted Pendulum Mode: A simple modeling for a biped walking pattern generation*, 2001

[16] Prasad L., *Optimal Control of Non linear Inverted Pendulum Dynamical System with Disturbance Input using PID Controller & LQR*, 2011

Warszawa, dnia 3 grudnia 2016

Oświadczenie

Oświadczam, że pracę magisterską pod tytułem: „Opracowanie symulatora transportera wahadła odwróconego na wózku”, której promotorem jest prof. dr hab. Krzysztof Marciniak, wykonałem samodzielnie, co poświadczam własnoręcznym podpisem.

....