Projektowanie środowiska wirtualnego

Laboratorium 1/2
Jednowymiarowy liniowy model masy

Cel projektu:

Symulacja poruszającego się w przestrzeni układu złożonego ze sprężyny i masy, obserwacja trajektorii symulowanej masy, wektora stanu i przestrzeni stanu.

Założenia:

Przyjmijmy, że symulowany układ sprężyna-masa jest układem **liniowym** o parametrach **skupionych**, tzn. zależność między działającą na masę m siłą F a przemieszczeniem x jest liniowa oraz sprężyna i masa są elementami idealnymi, tzn. sprężyna nie charakteryzuje się bezwładnością, a masa nie wykazuje odkształceń sprężystych. Dodatkowo załóżmy, że układ jest **stacjonarny**, tzn. parametry m (masa) i c (sprężystość) nie zmieniają się w czasie.

Umieśćmy układ w ośrodku lepkim (układ z tłumieniem), w polu wytwarzającym siłę h. Sterowanie ruchem jest również realizowane poprzez przemieszczenia wolnego końca sprężyny.

Opis modelu:

Ruch masy można opisać za pomocą równania różniczkowego drugiego rzędu (równania Newtona):

$$m \cdot x_{tt} = F \qquad (1)$$

gdzie

$$F = f + g + h \qquad (2)$$

i

$$f = c \cdot (w - x)$$

to siła **sprężystości** pochodząca od sprężyny (m – masa ciężarka, $c>0$ – współczynnik sprężystości, x – położenie masy zaczepionej na jednym końcu sprężyny, w – funkcja według której przemieszcza się położenie równowagi masy),

$$g = -k \cdot x_t$$

to siła **tłumienia** (k – współczynnik tłumienia / lepkości ośrodka), a

$$h = h(t)$$

jest siłą pochodzącą od zewnętrznego pola, działającą bezpośrednio na masę.

Rozwiązanie układu:

Stosując podstawienie

$$v = x_t$$

w (1) otrzymamy układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu, postaci:

$x_t = v$

$v_t = (c\cdot (w - x) - k\cdot x_t + h(t)) / m$

Aproksymując pochodne ilorazami różnicowymi:

$$x_t = \frac{x(t+\Delta) - x(t-\Delta)}{2\Delta}$$

$$x_{tt} = \frac{x(t+\Delta) - 2x(t) + x(t-\Delta)}{\Delta^2}$$

można obliczyć wartość $x(t+\Delta)$ jako funkcję danych współczynników oraz poprzednich położeń $x(t - \Delta)$ i $x(t)$ masy m.

Wykonanie:

Wykonana aplikacja, oprócz wizualizacji ruchu opisanego układu sprężyna-masa, powinna również prezentować wykresy poszczególnych sił działających na ciężarek ($f(t)$, $g(t)$ i $h(t)$) oraz wykres przemieszczenia wolnego końca sprężyny (w(t)) jako funkcji czasu t. Należy również umieścić wykresy położenia $x(t)$, prędkości $x_t(t)$ i przyspieszenia $x_{tt}(t)$ ciężarka m oraz trajektorię stanu ($x(t)$, $x_t(t)$) przy aktualnym stanie parametrów.

Użytkownik powinien mieć możliwość wprowadzenia i zmiany parametrów ruchu, takich jak położenie początkowe $x(0)$, prędkość początkowa $v(0)$ i krok całkowania Δ oraz masy m i współczynników lepkości k i sprężystości c.

Jako przykładowe funkcje przesunięcia $w(t)$ oraz siły $h(t)$ można wybrać funkcje:

- Stałe

  $f_1 = A$ (*const*)

- skokowe

  $$f_2 = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t \geq 0 \end{cases}$$

  $f_3 = \mathrm{sgn}\,(A\cdot\sin(\omega t+\varphi))$

- sinusoidalne

  $f_4 = A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$

z wartościami amplitudy A, częstotliwości ω oraz przesunięcia fazowego φ, ustalanymi również przez użytkownika. Należy umożliwić obserwację różnych kombinacji funkcji w i h.

Zadania

1. **Rola parametrów układu**

Niech $w(t) = 0$ i układ będzie w stanie równowagi dla $t < 0$. W chwili $t = 0$ odchyl masę m do położenia $x(0) = 1$ ($v(0) = 0$) i obserwuj ruch układu, aż do ponownego osiągnięcia stanu równowagi.

- Zmieniając parametry m, c i k, ustal ich wpływ na ruch ciężarka

- Sprawdź wpływ kroku całkowania Δ na dokładność obliczeń. Wyświetl różnicę $x_s(\mathrm{t})–x_e(t)$, gdzie $x_s(t)$ jest funkcją położenia masy otrzymaną w wyniku symulacji, a $x_e(t)$ – dokładnym rozwiązaniem równania różniczkowego (1).

2. **Tłumienie krytyczne**

Dla położeń początkowych $x(0) = 1$, $v(0) = 0$ oraz $m = c = 1$ znajdź doświadczalnie wartość krytyczną tłumienia k_{kr}, zdefiniowaną poprzez warunek: dla wszystkich wartości $k < k_{kr}$ układ oscyluje wokół położenia równowagi. Porównaj uzyskaną wartość z wartością krytyczną uzyskaną z dokładnych obliczeń.

3. **Funkcja przemieszczenia**

Dla położeń początkowych $x(0) = 0$, $v(0) = 0$, $m = c = 1$ oraz różnych wartości k zastosuj skokową funkcję przemieszczenia $w(t) = f_2$. Znajdź tłumienie k, dla którego czas osiągnięcia stanu równowagi jest minimalny. Porównaj tę wartość z tłumieniem krytycznym z poprzedniego zadania.

4. **Przemieszczenie wielokrotne**

Dla położeń początkowych $x(0) = 1$, $v(0) = 0$, $m = c = 1$ obserwuj ruch masy spowodowany przemieszczeniem $w(t) = f_3$ ($A = 1$, $\varphi = 0$). Dla różnych wartości tłumienia k znajdź czas T, dla którego spełniony jest warunek $|w(t) – x(t)| < 0.1$ dla $t > T$. Wyświetl na jednym wykresie funkcje $x(t)$, $w(t)$ i $w(t) – x(t)$.

5. **Rezonans**

Dla położeń początkowych $x(0) = 1$, $v(0) = 0$, $m = c = 1$ obserwuj ruch masy spowodowany przemieszczeniem $w(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t+\varphi_0)$ dla $A_0=1$ i $\varphi_0=0$. Po pewnym czasie przemieszczenie $x(t)$ powinno mieć charakter sinusoidalny, tzn. $x(t) = A \cdot \sin(\omega t+\varphi)$. Dla różnych wartości tłumienia (k = 1, 0.5, 0.1 i 0.01) narysuj funkcje $A(\omega)$ i $\varphi(\omega)$. Częstotliwość rezonansowa ω_r jest zdefiniowana przez maksymalną wartość $A(\omega)$. Narysuj $A(\omega_r)$ jako funkcję tłumienia k.

6. **Optymalizacja czasu z ograniczeniem przyspieszenia**

Znajdź funkcję przemieszczenia $w(t)$, które przenosi masę z położenia początkowego $x(0) = 0$, $v(0) = 0$ do położenia końcowego $x(T) = 1$, $v(T) = 0$ w najkrótszym czasie. Przyspieszenie masy nie może przekraczać wartości 1, tzn. $|x_{tt}(t)| \leq 1$.