Table des matières

Introduction in English

Première partie

Pour l'agrégation

Chapitre 1

Construction des ensembles de nombres

Chapitre 2

Théorie des groupes

Chapitre 3

Anneaux

Chapitre 4

Corps

Chapitre 5

Topologie générale

Chapitre 6

Espaces vectoriels

Chapitre 7

Tribus, théorie de la mesure

Chapitre 8

Espaces affines

Chapitre 9

Espaces projectifs

Chapitre 10

Analyse réelle

10.1 Quelque rappels

Définition 10.1 (Intervalle)**.**
Une partie I de $\mathbb{R}$ est un ***intervalle*** *si pour tout $a, b \in I$ nous avons $t \in I$ dès que $a \leqslant t \leqslant b$.*

Un intervalle est ***ouvert*** *si il est de la forme $]a, b[$ avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Un intervalle est* ***fermé*** *si il est de la forme $[a, b]$ ou $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.*

Remarque 10.2.
L'ensemble $\mathbb{R}$ ne contient pas $-\infty$ et $-\infty$. L'intervalle $[-\infty, 5]$ par exeple, n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.

Exemple 10.3

(1) Les ensembles $]3, 7[$ et $]-\infty, \pi[$ sont des intervalles ouverts.
(2) Les ensembles $[10, 15]$ et $[-1, +\infty[$ sont des intervalles fermés.
(3) L'ensemble $]-4, -2[\cup]2, 9[$ n'est pas un intervalle (il y a un «trou» entre -2 et 2).
(4) L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle ; par convention, il est à la fois ouvert et fermé.

Un intervalle peut n'être ni ouvert ni fermé ; par exemple $]4, 8]$. Cet intervalle est «ouvert en 4 et fermé en 8» . $\triangle$

Définition 10.4 (Fonction, domaine, image, graphe)**.**
Soient X et Y deux ensembles. Une ***fonction*** *f définie sur X et à valeurs dans Y est une correspondence qui associe à chaque élément x dans X* **au plus** *un élément y dans Y. On écrit $y = f(x)$.*

— *La partie de X qui contient tous les x sur lesquels f peut opérer est dite* ***domaine*** *de f. Le domaine de f est indiqué par* Domaine f*.*
— *L'élément de $y \in Y$ associé par f à un élément $x \in$* Domaine f *(c'est à dire $f(x) = y$) est appellé* ***image*** *de x par f. L'****image*** *de la fonction f est la partie de Y qui contient les images de tous les éléments de* Domaine f*. L'image de f est indiquée par $\Im f$.*
— *Le* ***graphe*** *de f est l'ensemble de toutes les couples $(x, f(x))$ pour $x \in$* Domaine f*. Le graphe de f est une partie de l'ensemble noté $X \times Y$ et il est indiqué par* Graph f*. Dans ce cours $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, donc le graphe de f est contenu dans le plan cartésien.*

Définition 10.5 (Fonction croissante, décroissante et monotone)**.**
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

(1) Le fonction f est ***croissante*** *sur I si pour tout $x < y$ dans I nous avons $f(x) \leqslant f(y)$. Elle est* strictement *croissante si $f(x) < f(y)$ dès que $x < y$.*

(2) Le fonction f est ***décroissante*** *sur I si pour tout $x < y$ dans I nous avons $f(x) \geqslant f(y)$. Elle est* strictement *décroissante si $f(x) > f(y)$ dès que $x < y$.*

(3) La fonction f est dite ***monotone*** *sur I si elle est soit croissante soit décroissante sur I.*

Exemple 10.6
La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0, \infty[$. Elle n'est par contre ni croissante ni décroissante sur l'intervalle $[-4, 3]$. △

10.2 Continuité et dérivabilité

Dans cette section, nous désignerons par I un intervalle ouvert non vide contenu dans $\mathbb{R}$.

Définition 10.7 (Fonction continue)**.**
*Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **continue** au point $x_0 \in I$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
*La fonction est dite **continue** sur l'intervalle I si elle est continue en tous les points de I.*

Théorème 10.8 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Si f est continue sur un intervalle $I = [a, b]$ avec $f(a) \neq f(b)$ alors pour tout t entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = t$.

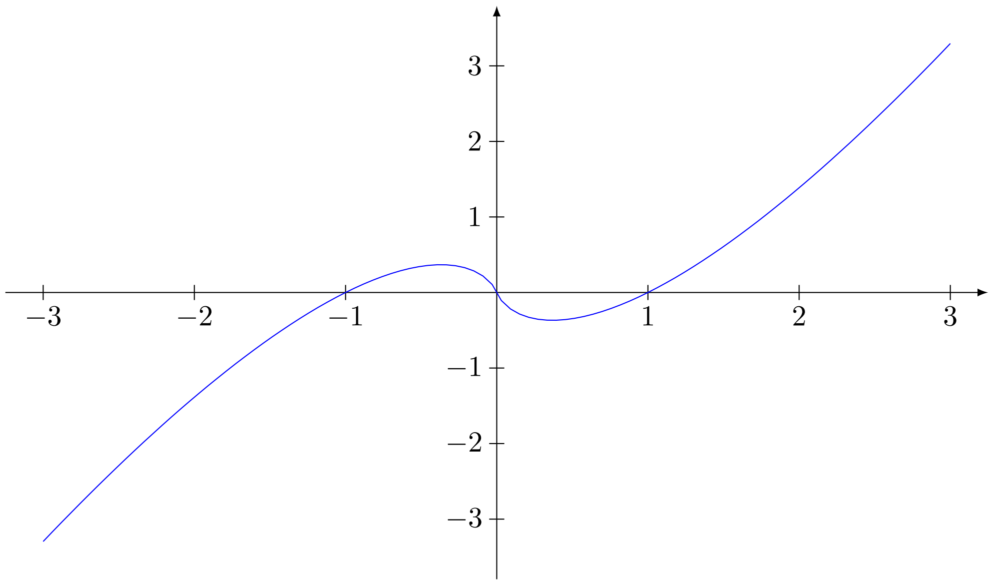
Nous considérons la question suivante : étant donné une fonction f définie sur $I \backslash \{x_0\}$, est-il possible de définir f en x_0 de telles façon à ce qu'elle soit continue ?

Exemple 10.9
La fonction
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \backslash \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{10.1}$$
n'est pas définie pour $x = 0$ et il n'y a pas moyen de définir $f(0)$ de telle sorte que f soit continue parce que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas. △

Définition 10.10 (Prolongement par continuité)**.**
Soit $f : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. La fonction
$$\begin{aligned} \tilde{f} &: I \to \mathbb{R} \\ \tilde{f}(x) &= \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ \ell & si\ x = x_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{10.2}$$
*est une fonction continue sur I et est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.*

Exemple 10.11
La fonction $f(x) = x \ln(|x|)$ n'est pas définie en $x = 0$. Cependant
$$\lim_{x \to 0} x \ln(|x|) = 0. \tag{10.3}$$
Nous pouvons donc définir la fonction
$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{10.4}$$
Contrairement à la fonction initiale f, cette fonction $\tilde{f}$ est définie et continue en 0.

Notez que sur le graphe de la fonction $\tilde{f}$, la courbe est bien régulière en $x = 0$.



△

Exemple 10.12
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\backslash\{-3,2\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)} \end{aligned} \tag{10.5}$$

admet pour limite $\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{4}{5}$. Son prolongement par continuité en $x=-3$ est donné par

$$\tilde f(x) = \frac{x-1}{x-2}. \tag{10.6}$$

Notons que les fonctions f et $\tilde f$ ne sont pas identiques : l'une est définie pour $x=-3$ et l'autre pas. Lorsqu'on fait le calcul

$$\frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}, \tag{10.7}$$

la simplification n'est pas du tout un acte anodin. Le dernier signe «=» est discutable parce que les deux dernières expressions ne sont pas égales pour tout x ; elles ne sont égales «que» pour les x pour lesquels les deux expressions existent. △

Exemple 10.13
La fonction

$$f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x} \tag{10.8}$$

n'est pas définie en $x=0$, mais en la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} \tag{10.9}$$

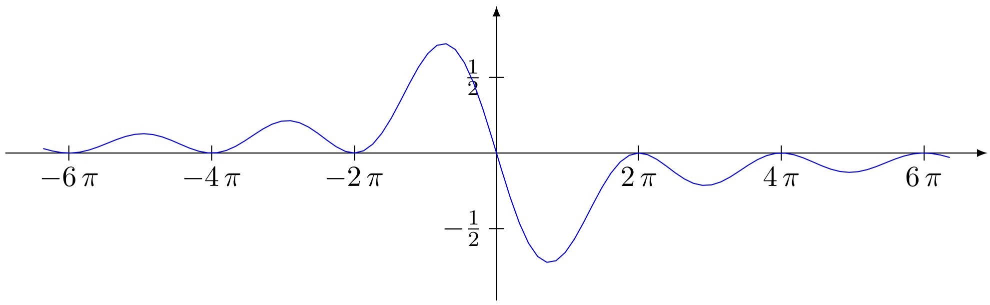
nous reconnaissons la limite définissant la dérivée du cosinus en 0, c'est à dire que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \sin(0) = 0. \tag{10.10}$$

Nous avons donc le prolongement par continuité

$$\tilde f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10.11}$$

Encore une fois, le graphe de la fonction $\tilde f$ ne présente aucune particularité autour de $x=0$.



△

Définition 10.14 (Fonction dérivable)**.**
*Nous disons qu'une fonction f est **dérivable** au point $x_0 \in I$ si la limite*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x_0+\epsilon)-f(x_0)}{\epsilon} \tag{10.12}$$

existe.

Si f est une fonction dérivable, rien n'empêche la fonction dérivée f' d'être elle-même dérivable. Dans ce cas nous notons f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de la fonction f'. Cette fonction f'' est la **dérivée seconde** de f. Elle peut encore être dérivable ; dans ce cas nous notons $f^{(3)}$ sa dérivée, et ainsi de suite. Nous définissons $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la dérivée n^{e} de f. Nous posons évidemment $f^{(0)} = f$.

Théorème 10.15.
Toute fonction f dérivable au point x_0 est continue au point x_0.

Remarque 10.16.
La réciproque du théorème précedent n'est pas vraie : il existent bien des fonctions qui sont continues à un point x_0 mais qui ne sont pas dérivables en x_0. La fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$, par exemple est continue sur tout $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

10.2.1 Quelques formules à connaître

À retenir 10.17

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x). \tag{10.13a}$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{10.13b}$$

$$(f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x). \tag{10.13c}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \tag{10.13d}$$

10.3 Application réciproque

10.3.1 Définitions

Définition 10.18 (injection, surjection, bijection)**.**
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans J.

*(1) La fonction f est **injective** si $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in I$, implique $x_1 = x_2$.*

*(2) La fonction f est **surjective** si tous les éléments de J sont atteins, c'est à dire si pour tout $y \in J$ il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$.*

(3) *La fonction f est une* ***bijection*** *entre I et J si elle est injective et surjective, c'est à dire si pour tout $y \in J$ il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.*

La surjection et l'injection sont des propriétés bien différentes qu'il convient de prouver séparément.

Exemple 10.19

(1) La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ parce qu'il n'existe aucun x tel que $x^2 = -1$.

(2) La fonction
$$\begin{aligned} f\colon [0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{10.14}$$
est une bijection. Notez que c'est la même fonction que celle de l'exemple précédent. Seul l'intervalle sur laquelle nous nous plaçons a changé.

(3) La fonction
$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \tag{10.15}$$
n'est pas une bijection parce qu'il existe plus de un x tel que $\sin(x) = 1$.

En conclusion : il est très important de préciser les domaines des fonctions considérées. △

Remarque 10.20.
Dire que la fonction $f\colon I \to J$ est bijective, c'est dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x peut être résolue de façon univoque pour tout $y \in J$.

Remarque 10.21.
Toute fonction strictement monotone sur un intervalle I est injective.

Proposition 10.22.
Une fonction monotone et surjective d'un intervalle I sur un autre intervalle J est continue sur I.

Définition 10.23.
*Soit une bijection $f\colon I \to J$. L'****application réciproque*** *de f est la fonction*
$$\begin{aligned} f^{-1}\colon J &\to I \\ y &\mapsto \text{le } x \in I \text{ tel que } f(x) = y. \end{aligned} \tag{10.16}$$

Exemple 10.24
La fonction
$$\begin{aligned} f\colon [2,3] &\to [4,9] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{10.17}$$
est une bijection. Sa réciproque est la fonction
$$\begin{aligned} f^{-1}\colon [4,9] &\to [2,3] \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned} \tag{10.18}$$
△

Exemple 10.25
Trouvons la fonction réciproque de la fonction affine $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$. Si $y \in \mathbb{R}$ le nombre $f^{-1}(y)$ est la valeur de x pour laquelle $f(x) = y$. Il s'agit donc de résoudre
$$3x - 2 = y \tag{10.19}$$

par rapport à x. La solution est $x = \frac{y+2}{3}$ et donc nous écrivons

$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}. \tag{10.20}$$

Notons que dans les calculs, il est plus simple d'écrire «y» que «x» la variable de la fonction réciproque. Il est néanmoins (très) recommandé de nommer «x» la variable dans la réponse finale. Dans notre cas nous concluons donc

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}. \tag{10.21}$$

△

10.3.2 Graphe de la fonction réciproque

Par définition le graphe de la fonction f est l'ensemble des points de la forme (x, y) vérifiant $y = f(x)$. Affin de déterminer le graphe de la bijection réciproque nous pouvons faire le raisonnement suivant.

Le point (x_0, y_0) est sur le graphe de f

$\Leftrightarrow$

La relation $f(x_0) = y_0$ est vérifiée

$\Leftrightarrow$

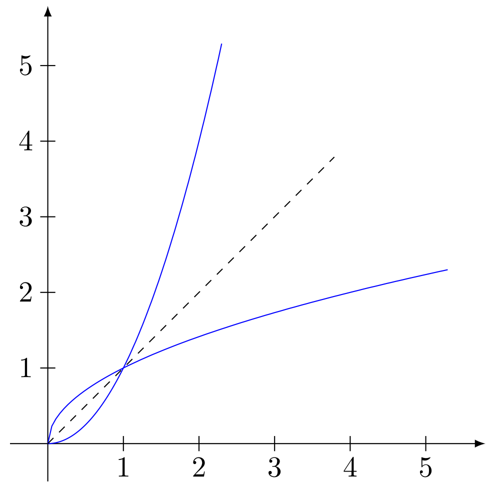
La relation $x_0 = f^{-1}(y_0)$ est vérifiée

$\Leftrightarrow$

Le point (y_0, x_0) est sur le graphe de f^{-1}.

À retenir 10.26
Dans un repère orthonormal, le graphe de le bijection réciproque est obtenu à parti du graphe de f en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Le dessin suivant montre le cas de la courbe de la fonction carré comparé à celle de la racine carré.



10.3.3 Théorème de la bijection

Proposition 10.27.
Soit une bijection $f\colon I \to J$ et $f^{-1}\colon J \to I$ sa réciproque. Alors pour tout $x_0 \in I$ nous avons

$$f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0 \tag{10.22}$$

et pour tout $y_0 \in J$ nous avons

$$f\big(f^{-1}(y_0)\big) = y_0. \tag{10.23}$$

Démonstration. Nous prouvons la relation (**??**) et nous laissons (**??**) comme exercice au lecteur.

Soit $x_0 \in I$, et posons $y_0 = f(x_0)$. La définition de l'application réciproque est que pour $y \in J$, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$. Donc $f^{-1}(y_0)$ est l'unique élément de I dont l'image est y_0. C'est donc x_0 et nous avons $f^{-1}(y_0) = x_0$, c'est à dire

$$f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0. \tag{10.24}$$

□

Théorème 10.28 (Théorème de la bijection)**.**
Soit I un intervalle et f une fonction continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Nous avons alors :

(1) $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;

(2) La fonction $f\colon I \to f(I)$ est bijective

(3) La fonction $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est strictement monotone de même sens que f ;

(4) La fonction $f\colon I \to f(I)$ est un homéomorphisme, c'est-à-dire que $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue.

Démonstration. Prouvons les choses point par point.

(1) Supposons pour fixer les idées que f est monotone croissante [1].
Soient $a < b$ dans $f(I)$. Par définition il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $a = f(x_1)$ et $b = f(x_2)$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ et vérifie $f(x_1) < f(x_2)$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires **??** nous dit que pour tout t dans $[f(x_2), f(x_2)]$, il existe un $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_0) = t$. Cela montre que toutes les valeurs intermédiaires entre a et b sont atteintes par f et donc que $f(I)$ est un intervalle.

(2) Nous prouvons maintenant que f est bijective en prouvant séparément qu'elle est surjective et injective.

<u>f **est surjective**</u> Une fonction est toujours surjective depuis un intervalle I vers l'ensemble $\Im f$.

<u>f **est injective**</u> Soit $x \neq y$ dans I ; pour fixer les idées nous supposons que $x < y$. La stricte monotonie de f implique que $f(x) < f(y)$ ou que $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$.

La fonction f est donc bijective.

(3) Comme d'accoutumée nous supposons que f est croissante. Soient $y_1 < y_2$ dans $f(I)$; nous devons prouver que $f^{-1}(y_1) \leqslant f^{-1}(y_2)$. Pour cela nous considérons les nombres $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Nous allons en prouver la contraposée en supposant que $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. En appliquant f (qui est croissante) à cette dernière inégalité il vient

$$f\big(f^{-1}(y_1)\big) \geqslant f\big(f^{-1}(y_2)\big), \tag{10.25}$$

ce qui signifie

$$y_1 \geqslant y_2 \tag{10.26}$$

par l'équation (**??**).

(4) La fonction $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est une fonction monotone et surjective, donc continue par la proposition **??**.

□

Proposition 10.29 ([?])**.**
Soit $f\colon I \to J = f(I)$ une fonction bijective, continue et dérivable [2]. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et sa dérivée est donnée par

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{10.27}$$

1. Traitez en tant qu'exercice le cas où f est décroissante.
2. Pour rappel, une fonction dérivable est toujours continue ; l'hypothèse de continuité n'est pas nécessaire

À retenir 10.30
Très souvent on préfére retenir la formule
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\left((f^{-1})(y_0)\right)} \tag{10.28}$$

Démonstration. Prouvons que f^{-1} est dérivable au point $b = f(a) \in J$. Étant donné que f est dérivable en a, nous avons
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{10.29}$$
Par ailleurs, étant donnée la continuité de f^{-1} donnée par la proposition **????**, nous avons
$$\lim_{\epsilon\to 0} f^{-1}(b+\epsilon) = f^{-1}(b) = a. \tag{10.30}$$
Nous pouvons donc remplacer dans (**??**) tous les x par $f^{-1}(b+\epsilon)$ et prendre la limite $\epsilon \to 0$ au lieu de $x \to a$:
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f\big(f^{-1}(b+\epsilon)\big) - f(a)}{f^{-1}(b+\epsilon) - a} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{b + \epsilon - f(a)}{f^{-1}(b+\epsilon) - f^{-1}(b)} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon}{f^{-1}(b+\epsilon) - f^{-1}(b)} \\ &= \frac{1}{\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f^{-1}(b+\epsilon)-f^{-1}(b)}{\epsilon}} \\ &= \frac{1}{(f^{-1})'(b)}. \end{aligned} \tag{10.31}$$
Nous avons utilisé le fait que $f(a) = b$ et $a = f^{-1}(b)$. □

Remarque 10.31.
Le formule (**??**) est très simple à retenir : il suffit d'écrire
$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \tag{10.32}$$
puis de dériver les deux côtés par rapport à x en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :
$$(f^{-1})'\big(f(x)\big)f'(x) = 1. \tag{10.33}$$

Exemple 10.32(Exponentielle et logarithme)
Nous savons que la fonction
$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to]0, \infty[\\ x &\mapsto e^x \end{aligned} \tag{10.34}$$
est croissante et dérivable. Elle est donc bijective, d'inverse continue et dérivable par le théorème **??** et la proposition **??**. Nous nommons **logarithme** la fonction inverse de l'exponentielle :
$$\ln\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}. \tag{10.35}$$
La proposition **??** nous enseigne que la fonction logarithme est croissante et que sa dérivée peut être calculée [3] : si $y = e^x$ alors
$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{y}. \tag{10.36}$$
Nous retrouvons ainsi la formule très connue comme quoi la dérivée du logarithme est l'inverse [4]. △

3. Nous savons que $\exp'(x) = \exp(x)$: la dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même.
4. Ou encore que le logarithme est une primitive de la fonction inverse.

10.4 Fonctions trigonométriques réciproques

10.4.1 Rappels de trigonométrie

Dans ce cours tous les angles sont exprimés en radiants. Si vous utilisez une calculatrice pendant votre travail (choix non reccomandé) il faudra vérifier attentivement que elle soit impostée sur RAD et non sur GRAD ou DEG.

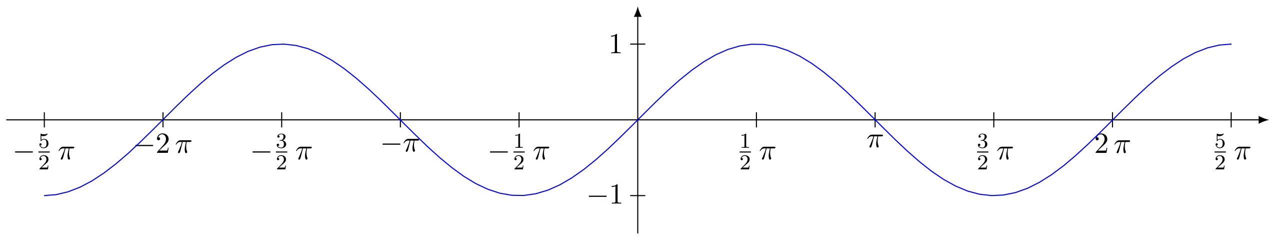
Définition 10.33.
La fonction ***tangente*** *réelle de variable réelle qui associe à* x *la valeur* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$*. Le domaine de la fonction tangente est* $\mathbb{R}\backslash\{k\pi,$ *pour* k *nombre entier*$\}$*, parce que* $\cos(k\pi) = 0$ *pour tout* k *entier. L'image de la fonction tangente est* $\mathbb{R}$*. La fonction tangente est périodique, de période* π *et son graphe est un réunion dénombrable de courbes disjointes, voir la figure* **??***.*

Voici un tableau qui rappelle les valeurs à retenir pour les fonctions sinus, cosinus et tangente.

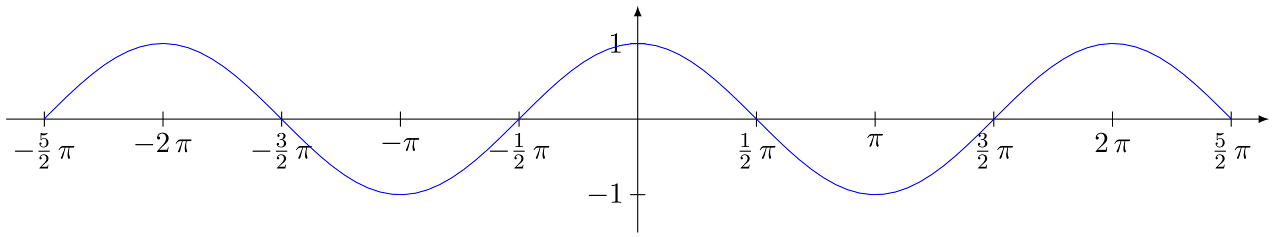
x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	N.D.

où «N.D.» signifie «non défini».

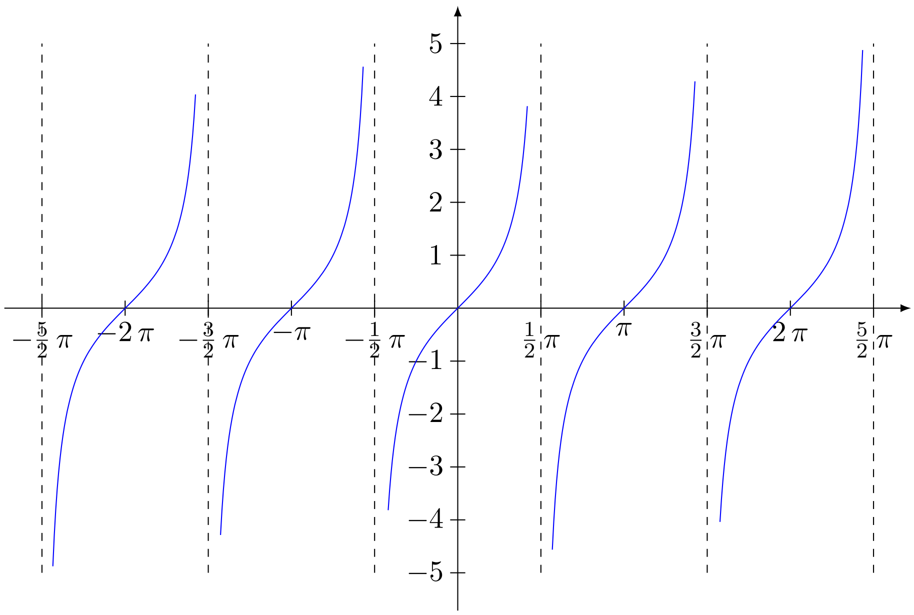
Rappelons le graphe de la fonction sinus :



celui de la fonction cosinus :



et celui de la fonction tangente :



Nous allons donner une preuve géométrique de la limite remarquable (vue en terminale)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1. \tag{10.37}$$

Cette preuve peut vous servir pour reviser la signification géométrique des fonction trigonométriques et leur propriétés de base. il est donc fortement conseillé de la parcourir même si elle n'est pas exigible en tant que question de théorie à l'examen.

Première étape : On montre que

Lemme 10.34.
Pour toute valeur de $x\in\mathbb{R}$ on a $|\sin(x)|\leqslant|x|$.

— Si $0\leqslant x\leqslant\pi/2$ alors le sinus de x est la longueur du cathète verticale du triangle rectangle de sommets $O=(0,0)$, $A=(\cos(x),\sin(x))$ et $B=(\cos(x),0)$. Le triangle de sommets A, B et $C=(1,0)$ est aussi rectangle et nous savons que chacun des cathètes ne peut pas être plus long que l'hypoténuse. Donc $\sin(x)$ est inférieur à la longueur du segment AC. À son tour le segment AC ne peut pas être plus long que l'arc de cercle $\widehat{A0C}$, car le chemin le plus court entre deux points du plan est toujours donné par un morceau de droite. La longueur de l'arc du cercle $\frown AC$ est *par définition* la mesure en radiants de l'angle $\widehat{AOC}$, qui est x et on a l'inégalité $\sin(x)\leqslant x$.
— Si $-\pi/2\leqslant x\leqslant 0$ le même raisonnement que au point précedent permet de conclure que $\sin(x)\leqslant|x|$.
— Nous savons par ailleurs que la fonction sinus prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$ et donc pour tout x tel que $|x|\geqslant\pi/2\equiv 1,57\ldots$ on a forcement $|\sin(x)|\leqslant|x|$.

Deuxième étape : On commence par observer que la fonction $g(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ est un rapport entre deux fonction impaires et est donc une fonction paire. Nous pouvons alors nous réduire à considèrer le cas où x est positif. La première étape de cette preuve nous dit que $g(x)\leqslant 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^{+,*}$.

Nous voulons étudier le comportement de g dans un voisinage de 0. Nous pouvons alors supposer que x soit inférieur à $\pi/2$. Soit $D=(1,\tan(x))$. On voit très bien dans le dessin que l'aire du triange de sommets O, D et C est supérieure à l'aire du secteur circulaire de sommets O, A et C. Ces deux aires peuvent être calculées très facilement et nous obtenons

$$\frac{\sin(x)}{2\cos(x)}\geqslant\frac{x}{2}.$$

À partir de cette dernière inégalité nous pouvons écrire

$$1 \geqslant \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \cos(x).$$

En prenant la limite lorsque x tend vers 0 dans les trois membres de l'inégalité la règle de l'étau nous permet d'obtenir la limite remarquable (**??**).

10.4.2 La fonction arc sinus

Nous voulons étudier la fonction

$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \tag{10.38}$$

et sa réciproque éventuelle.

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas bijective : elle prend une infinité de fois chaque valeur de $J = [-1,1]$. Pour définir une bijection réciproque de la fonction sinus en utilisant le théorème **??**, nous devons donc choisir un intervalle à partir duquel la fonction sinus est monotone. Nous choisissons l'intervalle

$$I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \tag{10.39}$$

La fonction

$$\begin{aligned} \sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \tag{10.40}$$

est une bijection croissante et continue. Nous avons donc le résultat suivant.

Théorème 10.35 (Définition et propriétés de arc sinus)**.**
Nous nommons ***arc sinus*** *la bijection inverse de la fonction* $\sin\colon I \to J$*. La fonction*

$$\begin{aligned} \arcsin\colon [-1,1] &\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned} \tag{10.41}$$

ainsi définie est

(1) continue et strictement croissante ;

(2) impaire : pour tout $x \in [-1,1]$ *nous avons* $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$*.*

Démonstration. Nous prouvons le fait que arcsin est impaire. Un élément de l'ensemble de définition de arcsin est de la forme $y = \sin(x)$ avec $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. La relation (**??**) s'écrit dans notre cas

$$x = \arcsin\big(\sin(x)\big). \tag{10.42}$$

Nous écrivons d'une part cette équation avec $-x$ au lieu de x :

$$-x = \arcsin\big(\sin(-x)\big) = \arcsin\big(-\sin(x)\big) = \arcsin(-y); \tag{10.43}$$

et d'autre part nous multiplions (**??**) par -1 :

$$-x = -\arcsin\big(\sin(x)\big) = -\arcsin(y). \tag{10.44}$$

En égalisant les valeurs (**??**) et (**??**) nous trouvons

$$\arcsin(-y) = -\arcsin(y), \tag{10.45}$$

ce qui signifie que arcsin est une fonction impaire. □

Notons que cette preuve repose sur le fait que tout élément de l'ensemble de définition de la fonction arc sinus peut être écrit sous la forme $\sin(x)$ pour un certain x.

Si $x_0 \in [-1,1]$ est donné, calculer $\arcsin(x_0)$ revient à trouver un angle θ_0 dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour lequel $\sin(\theta_0) = x_0$. Un tel angle sera forcément unique.

Remarque 10.36.
La définition de arc sinus découle du choix de l'intérvalle I, qui est une convention. Il aurait été possible de faire un choix différent : pourriez vous trouver la réciproque de la fonction sinus sur l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$? Le mieux est de l'écrire comme une translatée de arc sinus, en utilisant le fait que sinus est une fonction périodique.

Exemple 10.37
Pour calculer $\arcsin(1)$, il faut chercher un angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ ayant 1 pour sinus : résoudre $\sin(\theta) = 1$. La solution est $\theta = \frac{\pi}{2}$ et nous avons donc $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. △

À l'aide des valeurs remarquables de la fonction sinus nous obtenons le tableau suivant de valeurs remarquables pour l'arc sinus.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Les autres valeurs remarquables peuvent être déduites du fait que l'arc sinus est une fonction impaire.

En ce qui concerne la dérivabilité de la fonction arc sinus, en application de la proposition **??** elle est dérivable en tout $y = \sin(x)$ tel que $\sin'(x) \neq 0$, c'est à dire tel que $\cos(x) \neq 0$. Or $\cos(x) = 0$ pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à $y = \sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. La fonction arc sinus est donc dérivable sur $]-1, 1[$. Nous avons donc la propriété suivante pour la dérivabilité.

Proposition 10.38.
La fonction arc sinus est continue sur $[-1, 1]$ *et dérivable sur* $]-1, 1[$. *Pour tout* $y \in]-1, 1[$*, la dérivée est donnée par la formule* (**??**)*, qui dans ce cas s'écrit*

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos\big(\arcsin(y)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{10.46}$$

La dernière égalité viens du fait que si $x = \arcsin(y)$ alors $y = \sin(x)$ et $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-y^2}$.

Notons enfin que le graphe de la fonction arc sinus est donné à la figure **??**.

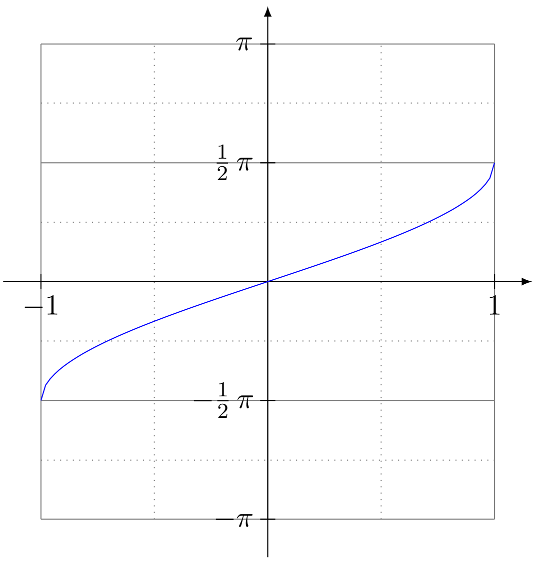


FIGURE 10.1 – Le graphe de la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$

10.4.3 La fonction arc cosinus

Nous voulons étudier la fonction

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned} \tag{10.47}$$

et son éventuelle réciproque. Encore une fois il n'est pas possible d'en prendre la réciproque globale parce que ce n'est pas une bijection. Nous choisissons de considérer l'intervalle $[0,\pi]$ sur lequel la fonction cosinus est continue et strictement monotone décroissante.

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 10.39.
La fonction

$$\begin{aligned} \cos\colon [0,\pi] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned} \tag{10.48}$$

est une bijection continue strictement décroissante. Sa bijection réciproque, nommée ***arc cosinus***

$$\begin{aligned} \arccos\colon [-1,1] &\to [0,\pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned} \tag{10.49}$$

est continue, strictement décroissante et dérivable. Pour tout $y\in\,]-1,1[$, sa dérivée est donnée par

$$\arccos'(y) = \frac{1}{-\sin\big(\arccos(y)\big)} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{10.50}$$

Remarque 10.40.
Certes la fonction cosinus est paire (vue sur $\mathbb{R}$), mais la fonction arc cosinus ne l'est pas car elle est une bijection entre $[-1,1]$ et $[0,\pi]$.

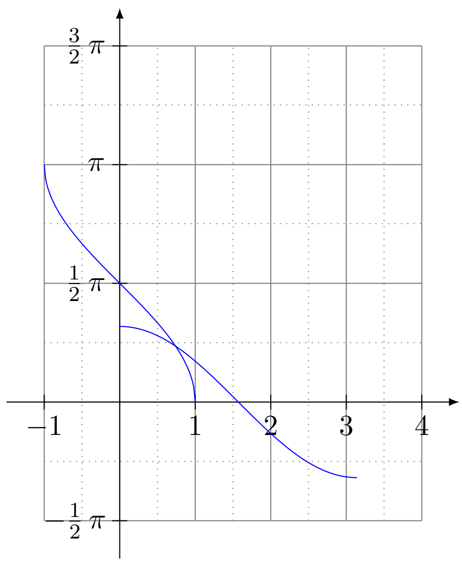
Pour $y_0\in[-1,1]$, trouver la valeur de $\arccos(y_0)$ revient à résoudre l'équation $\cos(x_0)=y_0$. Cela nous permet de construire une tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

Exemple 10.41
Cherchons $\arccos(\frac{1}{2})$. Il faut trouver un angle $\theta\in[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta)=\frac{1}{2}$. La solution est $\theta=\frac{\pi}{3}$. Donc $\arccos(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}$.

Il n'est cependant pas immédiat d'en déduire la valeur de $\arccos(-\frac{1}{2})$. En effet $\theta=\arccos(-\frac{1}{2})$ si et seulement si $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}$ avec $\theta\in[0,\pi]$. La solution est $\theta=\frac{2\pi}{3}$. △

En ce qui concerne la représentation graphique, il suffit de tracer la fonction cosinus entre 0 et π puis de prendre le symétrique par rapport à la droite $y=x$.



10.4.4 La fonction arc tangente

La fonction tangente est donnée par la formule

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{10.51}$$

et n'est pas définie sur les points de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Afin de définir une bijection réciproque nous considérons l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (qui est ouvert, contrairement aux intervalles choisis pour arc cosinus et arc sinus). Le résultat est le suivant.

Théorème 10.42.
La fonction

$$\begin{aligned} \tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) \end{aligned} \tag{10.52}$$

est une bijection strictement croissante.

La bijection réciproque

$$\begin{aligned} \arctan\colon \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned} \tag{10.53}$$

nommée ***arc tangente*** *est*

(1) impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) dérivable sur $\mathbb{R}$ *de dérivée*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2\big(\arctan(x)\big)} = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{10.54}$$

Note : la dernière ligne n'a rien de mystérieux : $\tan\big(\arctan(x)\big) = x$ et donc $\tan^2\big(\arctan(x)\big) = x^2$.

En ce qui concerne la dérivabilité nous savons que

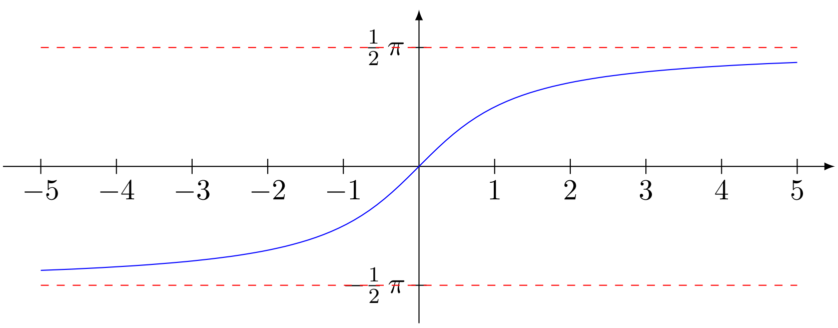
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x), \tag{10.55}$$

qui ne s'annule pour aucune valeur de x ; c'est pour cela que arctan est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

Le nombre $\arctan(x_0)$ se calcule en cherchant l'angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont la tangente vaut x_0. Nous obtenons le tableau de valeurs suivant :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

En ce qui concerne la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$, elle s'obtient «en retournant» la partie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ du graphique de la fonction tangente (voir les rappels **??**).



10.5 Trigonométrie hyperbolique

Définition 10.43.
*Les fonction **sinus hyperbolique** et **cosinus hyperbolique** sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{10.56a}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{10.56b}$$

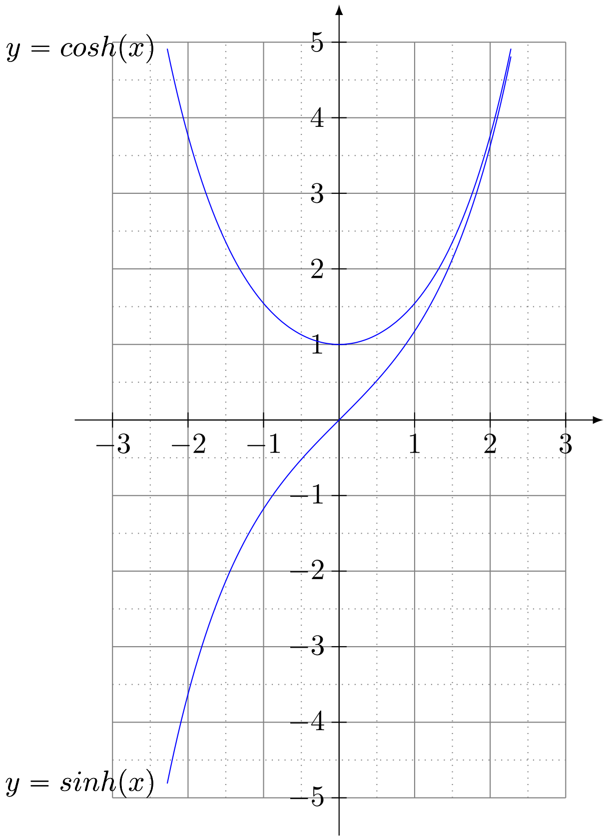
Leurs principales propriétés sont :

(1) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(2) $\cosh'(x) = \sinh(x)$

(3) $\sinh'(x) = \cosh$.

Les représentations graphiques sont ceci :



La **tangente hyperbolique** est donnée par le quotient

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \tag{10.57}$$

10.6 Développement limité autour de zéro

Dans cette sections nous supposons toujours que les fonctions sont définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, I, contenant 0.

Définition 10.44.
*Soit $f\colon I \to 0$ une fonction définie sur un ouvert I autour de zéro. Nous disons que f admet un **développement limité** autour de 0 à l'ordre n si il existe une fonction $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n\alpha(x) & (10.58a)\\ \lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0 & (10.58b)\end{cases}$$

où $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ est une polynôme de degré n. Le polynôme P_n est appelé la ***partie régulière*** *du développement.*

La fonction α est appelé le **reste** du développement et sera parfois noté α_f. Lorsque P est la partie régulière d'un développement limité de f nous notons parfois $f \sim P$.

Proposition 10.45 (Troncature)**.**
Si f admet un développement limité d'ordre n alors il admet également un développement limité d'ordre n' pour tout $n' < n$. Ce dernier s'obtient en tronquant le polynôme d'ordre n à l'ordre n'.

Proposition 10.46 (Unicité)**.**
Si f admet une développement limité alors ce dernier est unique : il existe un unique polynôme P_n d'ordre n et une unique fonction α vérifiant simultanément les deux conditions

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n\alpha(x), & (10.59a)\\ \lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0. & (10.59b)\end{cases}$$

Exemple 10.47
En ce qui concerne les séries géométriques de raison x nous savons les formules

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{10.60}$$

et

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x} \tag{10.61}$$

pour tout $x \in \,]-\infty, 1[$. Comparant les deux, il est naturel d'essayer de prendre $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ comme développement limité de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Pour voir si cela fonctionne, il faut vérifier si «le reste» est bien de la forme $x^n\alpha(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$.

Le reste en question est donné par

$$\frac{1}{1 - x} - 1 - x - x^2 - \ldots - x^n = \frac{1}{1 - x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1}}{1 - x} = x^n \frac{x}{1 - x}. \tag{10.62}$$

En posant $\alpha(x) = \frac{x}{1-x}$ nous avons donc bien

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n \frac{x}{1 - x} \tag{10.63}$$

et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Cela est le développement limité de f à l'ordre n autour de 0. △

La formule des accroissements finis est un cas particulier de développement fini. Supposons que f soit dérivable en 0. En effet nous pouvons facilement trouver la fonction α qui convient. Sachant que $f(0) + xf'(0)$ donne l'approximation affine de f autour de 0, nous cherchons α en écrivant

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\alpha(x). \tag{10.64}$$

Cela nous pousse à définir

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0). \tag{10.65}$$

Notons que cette fonction n'est pas définie en $x = 0$, mais cela n'a pas d'importance : seule la limite $\lim_{x\to 0} \alpha(x)$ nous intéresse. Par définition de la dérivée,

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = 0. \tag{10.66}$$

En conclusion si f est dérivable, son développement limité à l'ordre 1 est donné par

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\alpha(x) \tag{10.67}$$

où $\alpha(x)$ est donnée par la formule (**??**).

Plus généralement nous avons la proposition suivante qui donne le développement limité de toute fonction dérivable n fois.

Proposition 10.48 (Formule de Taylor-Young)**.**
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant 0. Alors il existe une fonction $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\alpha(x) \tag{10.68}$$

et

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0. \tag{10.69}$$

Cette proposition nous permet de trouver facilement des développements limités. Dans l'exemple **??** nous avons dû utiliser des astuces et des formules pour déterminer le développement limité de $\frac{1}{1-x}$. Au contraire la formule (**??**) nous permet de trouver le polynôme en calculant seulement de dérivées.

Exemple 10.49
Utilisation de la formule (**??**) pour déterminer le développement limité de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x}. \tag{10.70}$$

Il faut calculer les dérivées successives de f :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \tag{10.71a}$$
$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{10.71b}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \tag{10.71c}$$

Avec ces résultats, nous devinons que

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \tag{10.72}$$

Pour en être sûr nous le prouvons par récurrence. La dérivée de $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ est donnée par

$$\frac{n!(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}. \tag{10.73}$$

Évaluées en $x = 0$, les dérivées successives de f sont $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$,…,$f^{(n)}(0) = n!$. Utilisant la formule (**??**) nous avons

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n\alpha(x), \tag{10.74}$$

conformément à ce que nous avions déjà trouvé. △

Remarque 10.50.
Pour alléger la notation et ne pas écrire $\ldots + x^n\alpha(x)$ nous pouvons aussi écrire

$$f(x) \sim 1 + x + x^2 + \ldots + x^n, \tag{10.75}$$

mais il est interdit d'écrire

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \tag{10.76}$$

en mettant un signe d'égalité entre une fonction et son développement limité [5].

5. Il faut cependant être très prudents avec la notation abrégée. Elle pourrait nous faire oublier des informations importantes, voir les développements des fonction trigonométriques pour un exemple.

Notons cependant que la proposition **??** ne donne pas de moyen simple de trouver la fonction α. Si la fonction f est très régulière dans l'intervalle I on a le résultat suivant (qui n'est pas exigible à l'examen, mais qui ne fait pas de mal non plus).

Proposition 10.51 (Reste dans la forme de Lagrange)**.**
Si la fonction f est dérivable $n+1$ fois dans I alors il existe $\bar{x}$ dans l'intervalle d'extrêmes 0 *et x tel que*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\bar{x}) x^{n+1}. \tag{10.77}$$

Voici quelque développements limités à savoir. Ils sont calculables en utilisant la formule de Taylor-Young (proposition **??**).

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \alpha(x) \qquad \text{ordre } n \tag{10.78a}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1}\alpha(x) \qquad \text{ordre } 2p+1 \tag{10.78b}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{p+2}\alpha(x) \qquad \text{ordre } 2p+1 \tag{10.78c}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + x^n \alpha(x) \qquad \text{ordre } n \tag{10.78d}$$

$$(1+x)^l = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} x^k \qquad \text{exact si } l \text{ est entier.} \tag{10.78e}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + x^n \alpha(x) \qquad \text{ordre } n. \tag{10.78f}$$

Il est fortement suggéré au lecteur de vérifier ces développements par lui-même.

Remarque 10.52.
Quelque remarques.

(1) Les développements de sinus et de cosinus ont un terme sur deux qui est nul. C'est pour cela qu'en ayant une polynôme de degré $2p$, nous avons le développement d'ordre $2p+1$.

(2) En ce qui concerne le développement de $\ln(1+x)$, il faut noter que la somme va jusqu'à $k = n-1$ (et non $k = n$) parce que nous voulons aller jusqu'à x^n et que nous écrivons x^{k+1}.

(3) Si l est entier, le développement de $(1+x)^l$ est exact. Dans le développement de $(1+x)^\alpha$, nous reconnaissons la formule de $\binom{k}{\alpha}$, sauf que nous ne pouvons pas l'écrire avec cette notation lorsque α n'est pas entier.

(4) Le développement limité en 0 d'une fonction paire ne contient que les puissances de x d'exposant paire. Voir comme exemple le développement de la fonction cosinus.

10.7 Règles de calcul

Les règles suivantes permettent de calculer les développements limités des fonctions qu'on peut écrire comme combinaison des fonctions dans le tableau de la section précedente.

Remarque 10.53.
Il est toujours possible de calculer le développement limité d'une fonction par la formule de Taylor-Young. Les règles suivantes peuvent nous economiser de l'effort et du temps.

10.7.1 Linéarité des développements limités

L'opération qui consiste à prendre le développement limité d'une fonction est une opération linéaire : connaissant les développements limités de f et de g, il suffit de les sommer pour obtenir celui de $f+g$. De même, si λ est une constante, le développement limité de λf est le développement limité de f fois λ.

Proposition 10.54.
Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions acceptant des développements limités d'ordre n

$$f(x) = P(x) + x^n \alpha_f(x) \tag{10.79a}$$
$$g(x) = Q(x) + x^n \beta(x) \tag{10.79b}$$

avec $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = \lim_{x\to 0} \beta(x) = 0$, alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet le développement limité

$$(f+g)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + (\lambda\alpha + \mu\beta)(x). \tag{10.80}$$

Remarque 10.55.
La forme explicite du reste ne nous interesse pas. Dans la pratique on écrira toujours $(f+g)(x) = (P+Q)(x) + \alpha(x)$, où on appelle α une fonction apportune telle que $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$.

Démonstration. Vu les définitions (**??**) des polynômes P, Q et des restes α et β, l'égalité (**??**) est une conséquence de la linéarité de la dérivation et de la proposition **??**

De plus $P+Q$ est un polynôme de degré n dès que P et Q sont des polynômes de degré n, et

$$\lim_{x\to 0} (\lambda\alpha + \mu\beta)(x) = \lim_{x\to 0} \lambda\alpha(x) + \lim_{x\to 0} \mu\beta(x) = 0. \tag{10.81}$$

Par conséquent $\lambda\alpha + \mu\beta$ est la fonction de reste de $\lambda f + \mu g$. □

Exemple 10.56
Calculer le développement de la fonction

$$f(x) = 3\sqrt[3]{1+x} + e^{-2x}. \tag{10.82}$$

Le développement de $\sqrt[3]{1+x}$ est donné par la formule (**??**) avec $\alpha = \frac{1}{3}$. Nous avons donc dans un premier temps

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}x^3 + x^3\alpha(x) \tag{10.83a}$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + x^3\alpha(x). \tag{10.83b}$$

Nous avons alors

$$3\sqrt[3]{1+x} + e^{-2x} = 3\Big[1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + x^3\alpha(x)\Big] + 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^3\beta(x) \tag{10.84a}$$
$$= 4 - x + \frac{5}{3}x^2 - \frac{31}{27}x^3 + x^3\big(\alpha(x) + \beta(x)\big). \tag{10.84b}$$

△

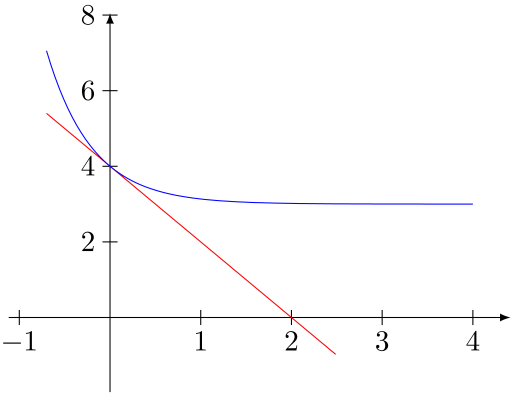
La condition $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$ signifie que l'approximation qui consiste à remplacer $f(x)$ par le polynôme n'est pas une trop mauvaise approximation lorsque x est petit. Cela ne signifie rien de plus. En particulier si x est grand, l'approximation polynômiale peut-être (et est souvent) très mauvaise.

À ce propos, notez qu'un polynôme tend toujours vers $\pm\infty$ lorsque x est grand. Une approximation polynômiale d'une fonction bornée est donc toujours (très) mauvaise pour les grandes valeurs de x.

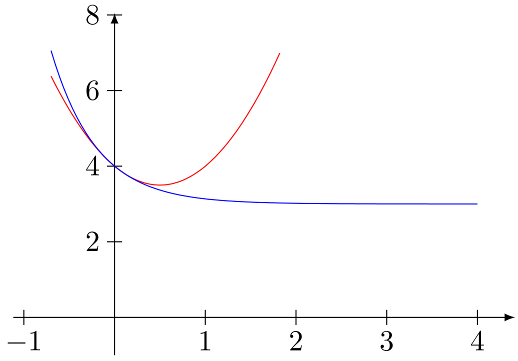
À titre d'exemple nous avons tracé sur la figure **??** la fonction

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x+1} + e^{-2x} \tag{10.85}$$

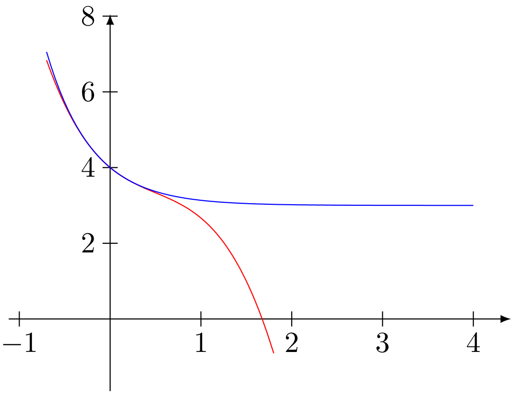
et ses développements limités d'ordre 1 à 3. Il est particulièrement visible que l'approximation est assez bonne pour la partie gauche du graphe sur laquelle la fonction est bien croissante, alors qu'elle est franchement mauvaise sur la droite où le graphe ressemble plutôt à une constante[6].



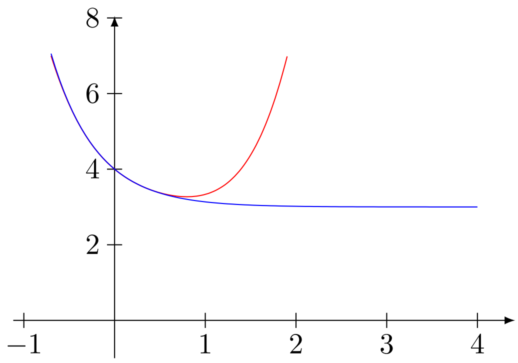
(a) Polyôme d'ordre 1



(b) Polyôme d'ordre 2



(c) Polyôme d'ordre 3



(d) Polyôme d'ordre 4

FIGURE 10.2 – Les développements limités d'ordre de plus en plus grand de la fonction de l'exemple **??**. La fonction est en bleu et les «approximations» sont en rouge.

10.7.2 Développement limité d'un quotient

Proposition 10.57.
Si P_f est le polynôme du développement limité de f à l'ordre n et P_g celui de g, alors nous obtenons le développement limité de f/g à l'ordre n en effectuant la division selon les puissances croissantes de P_f par P_g.

Attention : il s'agit bien de faire une division selon les puissances croissantes, et non une divisions euclidienne. La division euclidienne de A par B consiste à écrire $A = BQ + R$ avec le reste R de degré le plus *petit* possible. Ici nous voulons avoir un reste de degré le plus *grand* possible.

Exemple 10.58
Cherchons le développement limité à l'ordre 5 de $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Nous utilisons les formules (**??**) et (**??**) pour savoir les développements de sinus et cosinus[7] :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\alpha_1(x) \tag{10.86a}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\alpha_2(x). \tag{10.86b}$$

6. Pouvez-vous cependant dire que vaut $\lim_{x\to\infty} f(x)$?
7. Encore une fois, vous êtes très fortement encouragés à calculer vous-même ces développements à partir de la formule de Taylor-Young **??**.

Nous calculons alors la division des deux polynômes, en classant les puissances dans l'ordre croissant (c'est le sens inverse de ce qui est fait pour la divisions euclidienne !) :

$$
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rcccccccc}
 & x & - & \frac{1}{6}x^3 & + & \frac{1}{120}x^5 & & & \\
-\Big(& x & - & \frac{1}{2}x^3 & + & \frac{1}{24}x^5 \Big) & & & \\
\hline
 & & & \frac{1}{3}x^3 & - & \frac{1}{30}x^5 & & & \\
 & & -\Big(& \frac{1}{3}x^3 & - & \frac{1}{6}x^5 & + & \frac{1}{72}x^7 \Big) & \\
\hline
 & & & & & \frac{2}{15}x^5 & - & \frac{1}{72}x^7 & \\
 & & & & -\Big(& \frac{2}{15}x^5 & - & \frac{1}{15}x^7 & + \frac{1}{180}x^9 \Big) \\
\hline
 & & & & & & & \frac{29}{360}x^7 & - \frac{1}{180}x^9
\end{array}
&
\begin{array}{l}
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\
\hline
x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\
\\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

Nous avons continué la division jusqu'à obtenir un reste de degré plus grand que 5. Le développement à l'ordre 5 de la fonction tangente autour de zéro est alors

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5\alpha(x). \tag{10.87}$$

Notons que, vu que le reste ne nous intéresse pas vraiment, nous aurions pu ne pas calculer les coefficients des termes en x^7 et x^8. La dernière soustraction était également inutile. △

10.7.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 10.59.
Soient f et g des fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. Nous supposons que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Alors la composée $f\big(g(x)\big)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'obtient en substituant le développement de g à chaque «x» du développement de f, et en supprimant tous les termes de degré plus élevé que n.

Exemple 10.60
Pour trouver le développement de la fonction $f(x) = e^{-2x}$, il suffit d'écrire celui de e^t et de remplacer ensuite t par $-2x$. Le développement à l'ordre 3 de la fonction exponentielle est :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\alpha(t). \tag{10.88}$$

Le développement de $f(x) = e^{-2x}$ sera donc

$$f(x) = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{6} - 8x^3\alpha(-2x). \tag{10.89}$$

Donc le polynôme de degré 3 partie régulière de g est :

$$1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3, \tag{10.90}$$

et la fonction reste correspondante est :

$$\alpha_g(x) = -8\alpha(-2x). \tag{10.91}$$

△

Exemple 10.61
Nous savons les développements

$$f(x) = \ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \tag{10.92}$$

et

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{6}. \tag{10.93}$$

Nous obtenons le développement d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln\big(1+\sin(x)\big)$ en écrivant

$$\ln\big(1+\sin(x)\big) \sim \big(x - \frac{x^3}{6}\big) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3. \tag{10.94}$$

Il s'agit maintenant de trouver les termes qui sont de degré inférieur ou égale à 3.

D'abord

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} \sim x^2 \tag{10.95}$$

Nous avons alors aussi

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^6 \sim x^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \sim x^3. \tag{10.96}$$

En replaçant tout ça dans (**??**) nous trouvons

$$\ln\big(1+\sin(x)\big) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \tag{10.97}$$

△

10.8 Développement au voisinage de $x_0 \neq 0$

Il est intéressant de développer une fonction au voisinage de zéro lorsque nous nous intéressons à son comportement pour les x pas très grands. Il est toutefois souvent souhaitable de savoir le comportement d'une fonction au voisinage d'autres valeurs que zéro.

Pour développer la fonction f autour de x_0, nous considérons la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ que nous développons autour de zéro (pour h). L'objectif est de trouver une polynôme P et une fonction α tels que

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + (x-x_0)^n\alpha(x) & (10.98a)\\ \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0. & (10.98b)\end{cases}$$

En pratique, le développement limité à l'ordre n d'une fonction autour d'un point x_0 quelconque à l'intérieur de son domaine prend la forme suivante, qui généralise la formule de Taylor-Young vue dans la proposition **??**

Proposition 10.62 (Formule de Taylor-Young, cas général)**.**
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0. Alors il existe une fonction $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \\ &+ \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\alpha(x-x_0) \end{aligned} \tag{10.99}$$

et

$$\lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0. \tag{10.100}$$

Exemple 10.63

Développer la fonction cos autour de $x = \frac{\pi}{3}$. Nous développons autour de $h = 0$ la fonction $\cos(\frac{\pi}{3}+h)$:

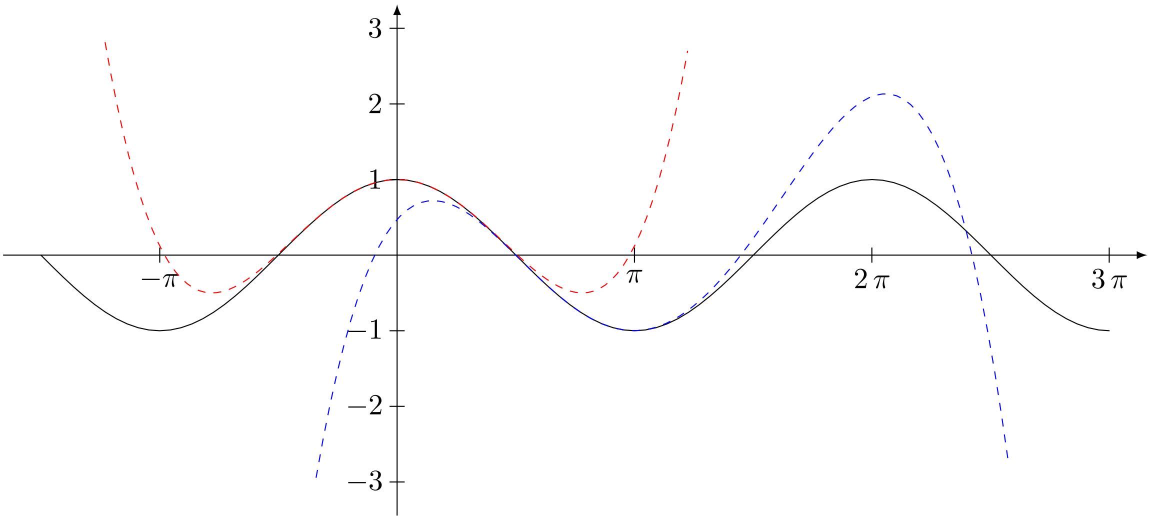
$$\cos\big(\frac{\pi}{3}+h\big) \sim \cos\big(\frac{\pi}{3}\big) + h\cos'(\frac{\pi}{3}) + \frac{h^2}{2}\cos''\big(\frac{\pi}{3}\big) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2. \tag{10.101}$$

Il est aussi possible d'écrire cela en notant $x = x_0 + h$, c'est à dire en remplaçant h par $x - \frac{\pi}{3}$:

$$\cos(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2. \tag{10.102}$$

△

Pour donner une idée nous avons dessiné sur le graphe suivant la fonction sinus et ses développements d'ordre 4 autour de zéro et autour de $3\pi/4$.



10.9 Application au calcul de limites

Lors d'un calcul de limite, développer une partie d'une expression peut être utile.

Exemple 10.64
À calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}. \tag{10.103}$$

Cela est une indétermination de type $\frac{0}{0}$. Le développement limité du numérateur nous donne une fonction $\alpha(x)$ telle que $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$ et

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\alpha(x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x). \tag{10.104}$$

Sur le membre de droite la limite est facile à calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \Big(1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x)\Big) = 1. \tag{10.105}$$

△

10.10 Développement au voisinage de l'infini

Il est souvent utile de connaître le comportement d'une fonction pour les grandes valeurs de x et de déterminer ses asymptotes éventuelles. La technique que nous allons utiliser consiste à poser $x = \frac{1}{h}$ et de développer la fonction "auxiliaire" $g(h) = f(1/h)$ autour de $h = 0$. La limite avec $h \to 0^+$ donnera le comportement pour $x \to \infty$ et la limite $h \to 0^-$ donnera le comportement pour $x \to -\infty$.

Dans le cas d'une développement autour de $\pm\infty$ nous ne parlons plus de développement *limité* mais de **développement asymptotique**.

Exemple 10.65
Calculer

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+4x^2}-2x. \tag{10.106}$$

Nous allons effectuer un développement asymptotique de la partie «difficile» de l'expression posant d'abord $x = 1/h$. Si $f(x) = e^{1/x}\sqrt{1-4x^2}$ alors

$$g(h) = \frac{1}{|h|}e^h\sqrt{h^2+4} = \frac{1}{h}\big(1+h+h\alpha(h)\big)\big(2+h\beta(h)\big). \tag{10.107}$$

La première parenthèse est le développement de e^h et la seconde celui de $\sqrt{h^2+4}$. Nous nous apprêtons à faire la limite $x\to\infty$ qui correspond à $h\to 0^+$, nous pouvons donc supposer que $h>0$ et omettre la valeur absolue. En effectuant le produit et en regroupant tous les termes contenant h^2, $\alpha(h)$ ou $\beta(h)$ dans un seul terme $h\gamma(h)$,

$$f(h) = \frac{1}{h}\big(2+2h+h\gamma(h)\big) = \frac{2}{h}+2+\gamma(h) = 2x+2+\gamma(1/x) \tag{10.108}$$

où γ est une fonction vérifiant $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la limite (**??**) :

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+x^2}-2x = \lim_{x\to\infty}\big(2x+2+\gamma(1/x)-2x\big) = 2. \tag{10.109}$$

△

10.11 Étude d'asymptote

Lorsqu'une fonction tend vers l'infini pour $x\to\infty$, une question qui peut venir est : à quelle vitesse tend-t-elle vers l'infini ?

Il est «visible» que la fonction logarithme ne tend pas très vite vers l'infini : certes

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x) = +\infty, \tag{10.110}$$

mais par exemple $\ln(100000)\simeq 11.5$ tandis que $e^{100000}\simeq 10^{43429}$. Sans contestations possibles, l'exponentielle croit plus vite que le logarithme.

Soient f et g deux fonctions dont la limite $x\to\infty$ est ∞. Si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{10.111}$$

nous disons que g tend vers ∞ plus vite que f ; si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty \tag{10.112}$$

nous disons que f tend vers ∞ plus vite que g, et si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = a\in\mathbb{R} \tag{10.113}$$

avec $a\neq 0$ alors nous disons que f tend vers l'infini à la même vitesse que $ag(x)$.

Exemple 10.66
La fonction $x\mapsto x^2$ tend vers l'infini plus vite que la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$. △

Dans cette section nous allons nous contenter de déterminer les fonctions qui tendent vers l'infini aussi vite qu'une droite oblique, que nous appellons asymptote et que nous voulons déterminer.

Exemple 10.67
Déterminer les asymptotes obliques (s'ils existent) de la fonction

$$f(x) = e^{1/x}\sqrt{1+4x^2}. \tag{10.114}$$

Tout d'abord nous remarquons que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Nous sommes donc en présence d'une branche du graphe qui tend vers l'infini. Ensuite,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+4} = 2. \tag{10.115}$$

Donc le graphe de f tend vers l'infini à la même vitesse que le graphe de la fonction $y = 2x$. Nous aurons donc une asymptote oblique de coefficient directeur 2. De façon imagée, nous pouvons penser que le graphe de f et celui de $y = 2x$ sont presque parallèles si x est assez grand. Afin de déterminer l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, il nous reste à voir quelle est la «distance» entre le graphe de f et celui de $y = 2x$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+4x^2} - 2x. \tag{10.116}$$

Cette limite a été calculée dans l'exemple **??** et vaut 2.

Nous concluons que le graphe de la fonction f admet l'asymptote

$$y = 2x + 2. \tag{10.117}$$

△

Chapitre 11

Retour sur les groupes

Chapitre 12

Arc paramétré

Chapitre 13

Intégration

13.1 L'aire en dessous d'une courbe

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Nous voudrions pouvoir calculer l'aire au-dessous du graphe de la fonction f. Nous notons $S_f(x)$ l'aire là-dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x, c'est à dire l'aire bleue de la figure **??**.

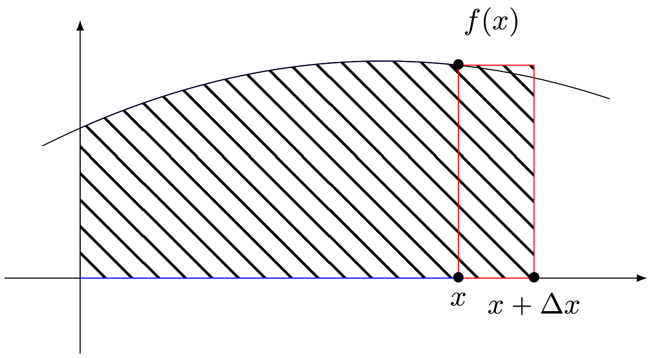


FIGURE 13.1 – L'aire en dessous d'une courbe. Le rectangle rouge d'aire $f(x)\Delta x$ approxime de combien la surface augmente lorsqu'on passe de x à $x + \Delta x$.

Si la fonction f est continue et que Δx est assez petit, la fonction ne varie pas beaucoup entre x et $x + \Delta x$. L'augmentation de surface entre x et $x + \Delta x$ peut donc être approximée par le rectangle de surface $f(x)\Delta x$. Ce que nous avons donc, c'est que quand Δx est très petit,

$$S_f(x + \Delta x) - S_f(x) = f(x)\Delta x, \tag{13.1}$$

ou encore

$$f(x) = \frac{S_f(x + \Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \tag{13.2}$$

Nous formalisons la notion de «lorsque Δx est très petit» par une limite :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S_f(x + \Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \tag{13.3}$$

Donc, la fonction f est la dérivée de la fonction qui représente l'aire là-dessous de f. Calculer des surfaces revient donc au travail inverse de calculer des dérivées.

13.2 Primitive et intégrale

Définition 13.1 (Primitive)**.**
Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Une ***primitive*** *de f sur I est une fonction définie sur I dont la dérivée est f.*

Les deux propriétés fondamentales sont les suivantes.

Proposition 13.2.
À propos de primitives.

(1) *Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive (sur cet intervalle).*

(2) *Deux primitives d'une même fonction sur le même intervalle ne diffèrent que d'une constante.*

Démonstration. La première partie est relativement compliquée et nous ne la traitons pas ici. En ce qui concerne la seconde partie, supposons que F_1 et F_2 soient deux primitives de la fonction f sur l'intervalle I. Alors $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$. La fonction $F_1 - F_2$ est donc une fonction dont la dérivée est nulle ; elle est donc constante. Nous avons donc $F_1 - F_2 = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. □

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et y admettant des primitives, nous notons

$$\int f(x)dx \tag{13.4}$$

l'ensemble des primitives de f sur I :

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C \text{ tel que } C \in \mathbb{R}\} \tag{13.5}$$

où F est une quelconque primitive de f.

Exemple 13.3
Une primitive bien connue de $f\colon x \mapsto x^2$ est la fonction $F\colon x \to \frac{x^3}{3}$. Nous écrivons donc

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C. \tag{13.6}$$

△

Définition 13.4 (Intégrale)**.**
*Soit une fonction f continue sur un intervalle I et $a \neq b$ deux nombres dans I. Si F est une primitive de f sur I nous définissons l'**intégrale** de a à b de la fonction f comme étant le nombre $F(b) - F(a)$.*

En termes de notations, nous posons

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a). \tag{13.7}$$

Remarque 13.5.
La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive qu'on choisi pour le calculer, car si F_1 et F_2 sont deux primitives de f alors $F_1 = F_2 + C$ et $F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + C) - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$.

Remarque 13.6.
Si l'intervalle d'intégration est réduit à un seul point alors la valeur de l'intégrale est zéro, car $\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0$.

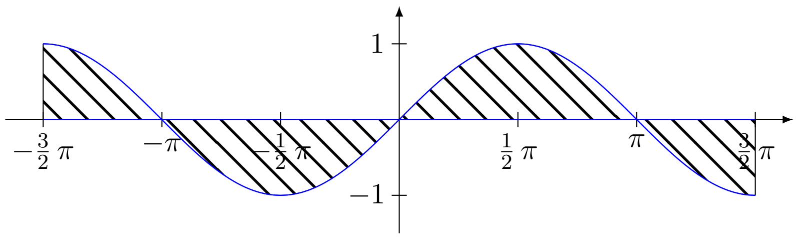
Remarque 13.7.
Conformément à ce que nous montre la figure **??**, si une fonction continue est positive sur l'intervalle $[a, b]$, alors le nombre $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la portion de plan comprise entre les droites verticales $x = a$, $x = b$, la courbe représentant la fonction f et l'axe des abscisses.

Si la fonction est négative : l'aire est comptée négativement.

Exemple 13.8
Comme nous le voyons sur le dessin suivant,

$$\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \sin(x)\, dx = 0 \tag{13.8}$$

parce que les deux parties bleues s'annulent avec les deux parties rouges (qui sont comptées comme des aires négatives).



△

Remarque 13.9.
Toute intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine est nulle.

Proposition 13.10 (Intégrale et primitive)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et un élément $a \in I$. Soit la fonction

$$\begin{aligned} F\colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt. \end{aligned} \tag{13.9}$$

Alors F est l'unique primitive de f s'annulant en $x = a$.

13.3 Propriétés des intégrales

Proposition 13.11 (Relations de Chasles)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Si $a, b, c \in I$ nous avons

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \tag{13.10}$$

Sur la figure **??**, la surface de a à c est évidemment égale à la somme des surfaces de a à b et de b à c.

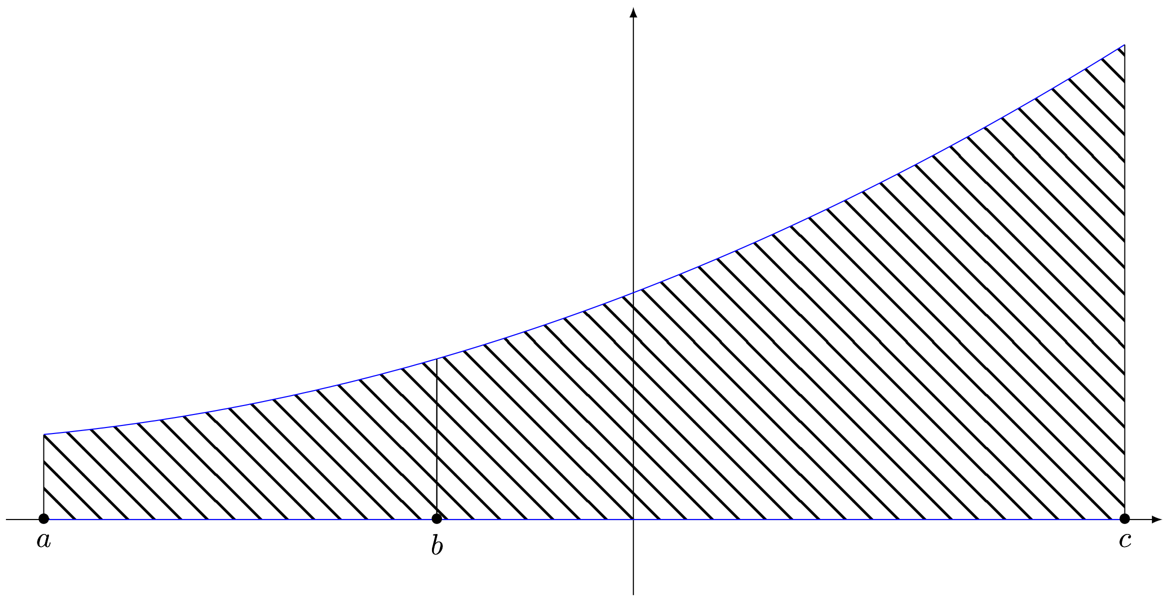


FIGURE 13.2 – Illustration pour les relations de Chasles.

Corollaire 13.12.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{13.11}$$

Proposition 13.13 (Linéarité de l'intégrale)**.**
Si f et g sont deux fonction continues sur $I \subset \mathbb{R}$, a, $b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \tag{13.12}$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx. \tag{13.13}$$

Proposition 13.14 (L'intégrale est monotone)**.**
Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx. \tag{13.14}$$

Corollaire 13.15 (Positivité)**.**
Si $a < b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0. \tag{13.15}$$

Ce résultat n'est qu'une application de la proposition **??** car il consiste à prendre comme fonction g la fonction nulle.

13.4 Techniques d'intégration

Par la définition **??** la calcul d'une intégrale consiste essentiellement à trouver une primitive de la fonction à intégrer. Il est donc indispensable de bien connaître les dérivées des fonctions usuelles.

Voici un tableau des primitives à connaître.

Fonction $f(x)$	Primitive $\int f(x)\,dx$	Ensemble de définition de f	Remarques
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	dépend de α [1]	$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\big(\lvert x\rvert\big) + C$	$x \neq 0$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$]-1, 1[$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	$]-1, 1[$	
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\mathbb{R}$	
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$	in intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ k\pi$	

Notez que au signe près, les fonctions arcsin et arccos ont la même dérivée.

Si la fonction à intégrer est une combinaison linéaire de fonctions usuelles alors sa primitive peut être calculée en utilisant la proposition **??**. Dans les sections suivantes on abordera deux autres cas où la fonction à intégrer peut s'écrire en termes de fonctions dont on connaît une primitive.

13.4.1 Intégration par parties

Proposition 13.16.
Si u et v sont deux fonctions dérivables de dérivées continues sur l'intervalle $[a, b]$ alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \tag{13.16}$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser à l'envers la formule de dérivation d'un produit :

$$uv' = (uv)' - u'v. \tag{13.17}$$

Les fonctions à gauche et à droite étant égales, elles ont même intégrale sur $[a, b]$ et par linéarité, voir proposition **??**, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x) - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \tag{13.18}$$

La fonction uv est évidemment une primitive de $(uv)'$, de telle sorte que l'on puisse un peu simplifier cette expression :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \tag{13.19}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple 13.17
Un cas typique d'utilisation de l'intégrale par parties est le suivant. Soit à calculer

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx. \tag{13.20}$$

Nous devons écrire $x\cos(x)$ comme un produit $u(x)v'(x)$. Il y a (au moins) deux moyens de le faire :

$$\begin{cases} u = x & (13.21a) \\ v' = \cos(x). & (13.21b) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u = \cos(x) & (13.22a) \\ v' = x. & (13.22b) \end{cases}$$

Nous allons choisir le premier[2]. Nous avons donc

$$\begin{aligned} u &= x, \quad v' = \cos(x) \\ u' &= 1 \qquad v = \sin(x). \end{aligned} \tag{13.23}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx = \Big[x\sin(x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times \sin(x)dx = \pi\sin(\pi) - \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = -2. \tag{13.24}$$

△

Le plus souvent, pour alléger les notations, il est plus pratique d'utiliser l'intégration par parties pour déterminer une primitive. Nous utilisons pour cela la formule (sans doute plus simple à retenir)

$$\int uv' = uv - \int u'v. \tag{13.25}$$

Exemple 13.18
Nous reprenons l'exemple **??** en déterminant cette fois une primitive de $x\cos(x)$:

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{13.26}$$

Nous retrouvons le résultat numérique de l'exemple précédent en ajoutant les extrêmes d'intégration

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx = \big[x\sin(x) + \cos(x)\big]_0^{\pi} = -2. \tag{13.27}$$

△

2. Mais nous conseillons vivement au lecteur d'essayer le deuxième pour se rendre compte qu'il ne fonctionne pas.

Remarque 13.19.
Lorsqu'on calcule des intégrales, il est bon de passer par la primitive (c'est à dire en suivant l'exemple **??** et non **??**) parce qu'il est alors facile de vérifier le résultat en calculant la dérivée de la primitive trouvée.

Par exemple pour vérifier si (**??**) est correct, il suffit de dériver $x\sin(x)+\cos(x)$:

$$\big(x\sin(x)+\cos(x)\big)'=\sin(x)+x\cos(x)-\sin(x)=x\cos(x). \tag{13.28}$$

La fonction $x\sin(x)+\cos(x)$ est donc bien une primitive de $x\cos(x)$.

Voici un exemple d'utilisation ingénieuse de l'intégration par parties.

Exemple 13.20
Trouver la primitive de la fonction $x\mapsto\ln(x)$. Pour calculer

$$\int\ln(x)dx \tag{13.29}$$

nous écrivons $\ln(x)=1\times\ln(x)$ et nous posons $u'=1$ et $v=\ln(x)$, c'est à dire

$$\begin{aligned} u'&=1 & v&=\ln(x)\\ u&=x & v'&=\frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{13.30}$$

La formule d'intégration par parties donne donc

$$\int\ln(x)=x\ln(x)-\int x\times\frac{1}{x}=x\ln(x)-\int 1=x\ln(x)-x+C,\qquad C\in\mathbb{R}. \tag{13.31}$$

Il est facile de vérifier par un petit calcul que

$$\big(x\ln(x)-x\big)'=\ln(x). \tag{13.32}$$

△

13.4.2 Changement de variables – pour trouver des primitives

De la même manière que l'utilisation «à l'envers» de la formule de dérivation du produit avait donné la méthode d'intégration par parties, nous allons voir que que l'utilisation «à l'envers» de la formule de dérivation d'une fonction composée donne lieu à la méthode d'intégration par changement de variables.

Proposition 13.21.
Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction $u\colon I\to J$ qui est dérivable de dérivée continue. Soit $f\colon J\to\mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F. Alors la fonction

$$x\mapsto F\big(u(x)\big) \tag{13.33}$$

est une primitive de

$$f\big(u(x)\big)u'(x). \tag{13.34}$$

Démonstration. Cela est une utilisation immédiate de la formule de dérivée des fonctions composées. □

Exemple 13.22
Soit à calculer

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx. \tag{13.35}$$

La fonction $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ est le produit de x et de $\sqrt{1-x^2}$. On remarque que la dérivée de $1-x^2$ est $-2x$: nous avons alors, à un facteur -2 près, une expression de la forme (**??**) où la racine carré joue le rôle de f, $f(t) = \sqrt{t}$, et $1-x^2$ le rôle de u. Une primitive de la fonction $f(t) = \sqrt{t}$ est $F(t) = 2t^{3/2}/3$.

Donc la fonction $\frac{2u(x)^{3/2}}{3} = \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}$ est primitive de $-2x\sqrt{1-x^2} = -2g(x)$. Autrement dit,

$$\int -2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{2(1-x^2)^{3/2}}{3} + C, \tag{13.36}$$

et en divisant par -2 nous trouvons la primitive demandée :

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} + C. \tag{13.37}$$

$\triangle$

L'exemple suivant donne une façon plus économe de retenir la méthode du changement de variables.

Exemple 13.23

Soit à calculer

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx. \tag{13.38}$$

Vu qu'il y a beaucoup de fonctions trigonométriques dans la fonction à intégrer, nous allons poser $u(x) = \sin(x)$, et remplacer élément par élément tout ce qui contient du «x» dans l'intégrale demandée par la quantité correspondante en termes de u.

La difficulté est de savoir ce que nous allons faire du «dx» dans l'intégrale. Ce dx marque une variation (infinitésimale) de x. La formule des accroissements finis dit que si x augmente de la valeur dx, alors $u(x)$ augmente de $u'(x)dx$, c'est à dire que

$$du = \cos(x)dx. \tag{13.39}$$

Nous avons donc les substitutions suivantes à faire :

$$\sin(x) = u \tag{13.40a}$$
$$du = \cos(x)dx \tag{13.40b}$$
$$dx = \frac{du}{\cos(x)}. \tag{13.40c}$$

La chose «magique» est que le $\cos(x)$ se trouvant dans la fonction se simplifie avec le cosinus qui arrive lorsqu'on remplace dx par $\frac{du}{\cos(x)}$. Les substitutions faites nous restons avec

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx = \int e^u du = e^u + C, \qquad \text{où } u = \sin(x). \tag{13.41}$$

Attention : la réponse doit être impérativement donnée en termes de x et non de u.

Nous écrivons donc

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)} = e^{\sin(x)} + C. \tag{13.42}$$

$\triangle$

13.4.3 Changement de variables – pour calculer des intégrales

La définition **??** fixe la relation entre la recherche des primitives de f et la calcul de l'intégrale de f sur l'intervalle d'extrêmes a et b. On a vu dans la section précédente comment utiliser le changement de variable pour trouver une primitive de f. Il faut maintenant comprendre comment appliquer ce qu'on a vu dans le calcul d'une intégrale.

En effet nous avons le choix entre

— trouver une primitive de f comme dans la section précédente et appliquer ensuite la formule dans **??** ;
— écrire une intégrale pour la nouvelle variable $u = u(x)$ sur l'intervalle entre $u(a)$ et $u(b)$.
Nous allons voir ce deux méthodes dans des exemples.

Exemple 13.24
Soit à calculer

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx. \tag{13.43}$$

Les primitives $\int x\sqrt{1-x^2}dx$ ont été trouvé dans l'exemple **??**. Une primitive est

$$F(x) = \int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}. \tag{13.44}$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale de $x\sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[1/3, 1/2]$ par la définition

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{16\sqrt{2}}{81}. \tag{13.45}$$

$\triangle$

Remarque 13.25.
Pour que le calcul d'intégrale donne quelque chose de sensé il faut absolument que la primitive soit écrite en tant que fonction de x et non comme fonction de u. La méthode que nous allons voir dans l'exemple suivant réduit grandement la probabilité d'oublier ce détail, d'où le fait qu"elle soit de loin la plus utilisée.

Exemple 13.26
Calculons à nouveau

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx. \tag{13.46}$$

Cette fois nous allons toucher à l'intervalle d'intégration en même temps que faire le changement de variables. Nous savons déjà les substitutions

$$\begin{cases} u = 1 - x^2 & (13.47a) \\ du = -2xdx & (13.47b) \\ dx = \dfrac{du}{-2x}. & (13.47c) \end{cases}$$

En ce qui concerne les extrêmes d'intégration, si $x = 1/3$ alors $u = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ et si $x = \frac{1}{2}$ alors $u = \frac{3}{4}$. Nous avons donc encore les substitutions suivantes :

$$\begin{cases} x = 1/3 \to u = 8/9 & (13.48a) \\ x = 1/2 \to u = 3/4 & (13.48b) \end{cases}$$

Le calcul est alors

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{8/9}^{3/4} \sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{8/9}^{3/4} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{16\sqrt{2}}{81}. \tag{13.49}$$

Attention : la dernière égalité n'est pas immédiate ; elle demande quelque calculs et une bonne utilisation des règles de puissances. $\triangle$ La deuxième méthode est plus utilisée et, avec un peu d'exercice, plus rapide à mettre en place que la première.

Jusqu'à présent nous avons utilisé des changement de variables dans lesquels nous exprimions u en termes de x. Comme le montre l'exemple suivant, il est parfois fructueux d'utiliser le changement de variable dans le sens inverse : avec x exprimé en termes d'un paramètre.

Exemple 13.27
À calculer :

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx. \tag{13.50}$$

Nous posons $x = \sin(\theta)$ parce que nous savons que $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$; nous espérons que le changement de variables simplifie l'expression[3]. Les substitutions à faire dans l'intégrale sont :

$$\begin{cases} x = \sin(\theta) & (13.51a)\\ dx = \cos(\theta)d\theta, & (13.51b) \end{cases}$$

et en ce qui concerne les bornes, si $x = 1/2$ alors $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$, c'est à dire $\theta = \frac{\pi}{6}$. Si $x = \sqrt{3}/2$ alors $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donc

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1-\sin^2(\theta)}\cos(\theta)dt. \tag{13.52}$$

Nous avons $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$ et vu que $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ nous avons toujours $\cos(\theta) > 0$, ce qui donne $\sqrt{\cos^2(\theta)} = \cos(\theta)$. Nous devons donc calculer

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta)d\theta. \tag{13.53}$$

Pour celle-là, il faut utiliser une formule de trigonométrie[4] :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}. \tag{13.54}$$

Donc

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta)d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta, \tag{13.55}$$

Pour calculer proprement la dernière intégrale nous effectuons un autre changement de variable (facile) en posant $t = 2\theta$, $dt = 2d\theta$, $t(\pi/6) = \pi/3$ et $t(\pi/3) = 2\pi/3$, nous avons alors

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta)d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\cos(t)}{4}dt = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}, \tag{13.56}$$

parce que $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Au final,

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{12}. \tag{13.57}$$

△

13.4.4 Intégrations des fractions rationnelles réduites

Définition 13.28.
Une ***fraction rationnelle*** *est un quotient de deux polynômes à coefficients réels ou complexes.*

3. Lorsqu'on fait un changement de variables, il s'agit toujours d'*espérer* que l'expression se simplifie. Il n'y a pas moyen de savoir a priori si tel changement de variable va être utile. Il faut essayer.

4. En fait, il y a moyen de terminer le calcul en intégrant deux fois par parties, mais c'est plus compliqué.

Par exemple

$$\frac{x^5 + 7x^4 - \frac{x^3}{2} + x}{x^2 - 1} \tag{13.58}$$

est une fraction rationnelle.

Il sera expliqué dans le cours d'algèbre que toute fraction rationnelle peut être écrite sous forme d'une somme d'éléments simples, c'est à dire de fractions rationnelles d'un des deux types suivants :

$$\frac{\alpha}{(x-a)^m}, \qquad \alpha, a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \tag{13.59a}$$

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + ax + b)^m}; \qquad \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}, a^2 - 4b < 0. \tag{13.59b}$$

Nous allons nous contenter de donner un exemple de chaque type.

(1) En ce qui concerne le cas (**??**) avec $m = 1$, nous avons par exemple

$$\int \frac{1}{x-3} dx = \ln\big(|x-3|\big) + C. \tag{13.60}$$

Si vous voulez en être tout à fait sûr, effectuez d'abord le changement de variables $u = x - 3$ qui donne $dx = du$.

(2) En ce qui concerne le cas (**??**) avec $m \neq 1$, nous avons par exemple

$$\int \frac{1}{(x-1)^4} dx = -\frac{1}{3(x-1)^3} + C. \tag{13.61}$$

Encore une fois, pour s'en convaincre, utiliser le changement de variables $u = x - 1$, $dx = du$:

$$\int \frac{1}{(x-1)^4} dx = \int \frac{1}{u^4} du = \int u^{-4} du = -\frac{u^{-3}}{3} + C = -\frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)^3} + C. \tag{13.62}$$

(3) En ce qui concerne le cas (**??**) avec $\alpha \neq 0$, nous avons par exemple

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C. \tag{13.63}$$

Pour ce faire, il faut faire le changement de variables $u = x^2 + 4$, $du = 2xdx$, $dx = \frac{du}{2x}$ qui donne

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln(|u|) + C = \frac{1}{2} \ln(|x^2+4|) + C. \tag{13.64}$$

Dans ce cas nous pouvons oublier d'écrire la valeur absolue dans le logarithme parce que de toutes façons, $x^2 + 4$ est toujours positif.

(4) En ce qui concerne le cas (**??**) avec $\alpha = 0$, nous avons par exemple

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(\frac{x}{2})^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan(\frac{x}{2}) + C. \tag{13.65}$$

où nous avons utilisé la primitive $\int \frac{dx}{x^2+1} dx = \arctan(x)$ du tableau de la page **??**. Pour vous en convaincre vous pouvez faire la dernière étape avec le changement de variables $u = x/2$, $dx = 2du$.

13.4.5 Quelques formules à connaître

À retenir 13.29

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx. \tag{13.66a}$$

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx. \tag{13.66b}$$

$$\int f'(u(x)) u'(x)\, dx = \int f(t)\, dt, \qquad \text{avec } t = u(x). \tag{13.66c}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log|f(x)| + C, \qquad \text{c'est un cas particulier de la formule précédente.} \tag{13.66d}$$

Chapitre 14

Analyse vectorielle

Chapitre 15

Suite de l'analyse

Chapitre 16

Espaces de Hilbert

Chapitre 17

Analyse fonctionnelle

Chapitre 18

Analyse complexe

Chapitre 19

Séries de Fourier

Chapitre 20

Distributions

Chapitre 21

Équations différentielles

21.1 Équations différentielles du premier ordre

Définition 21.1 (Équation différentielle du premier ordre).
*Une **équation différentielle du premier ordre** est une équation qui, sur un intervalle donné, I, décrit la relation entre une variable réelle, notée x ou t dans I, une fonction $y : I \to \mathbb{R}$, et la dérivée première de y qui on note y'.*

Souvent on écrit «$y'(x)$ = une formule contenante x et $y(x)$», c'est à dire

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{pour } x \in I, \tag{21.1}$$

où f est une fonction de deux variables réelles.

Remarque 21.2.
La théorie des fonctions de deux variables ne sera pas abordée dans ce cours, nous allons nous contenter de prendre f dans (**??**) comme une simple notation.

On peut presque toujours omettre d'écrire la dépendance de y en x et écrire simplement (**??**) sous la forme $y' = f(x, y)$.

Définition 21.3 (Solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre).
*Une **solution particulière** de l'équation (**??**) sur l'intervalle I est une fonction $z : I \to \mathbb{R}$ telle que :*

(1) z est dérivable sur I ;

(2) $z'(x) = f(x, z(x))$, pour tout $x \in I$.

Définition 21.4 (Solution générale d'une équation différentielle du premier ordre).
*Résoudre une équation différentielle veut dire trouver l'ensemble qui contient toutes ses solutions particulières. Cet ensemble s'appelle **solution générale** de l'équation.*

Exemple 21.5

(1) Résoudre une équation du type $y'(x) = f(x)$<++> revient à trouver l'ensemble des primitives de la fonction f, qui est donc la solution générale de cette équation. Il y a donc une infinité de solutions particulières, déterminées par une constante additive.
Si $f(x) = \sin(x)$ alors la solution générale sera $\mathcal{Y} = \{-\cos(x) + C \,:\, C \in \mathbb{R}\}$.

(2) L'équation

$$y' = y, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{21.2}$$

a peut-être été abordée dans votre cours de terminale lors de la définition de la fonction exponentielle. Sa solution générale est $\mathcal{Y} = \{Ce^x \,:\, C \in \mathbb{R}\}$. Ici aussi il y a une infinité de solutions particulières.

△

Remarque 21.6.
La solution générale d'une équation différentielle du premier ordre est une famille à un paramètre de fonctions.

Définition 21.7 (Équation differentielle du second ordre)**.**
Une ***équation différentielle du second ordre*** *est une équation qui, sur un intervalle donne, I, décrit la relation entre une variable réelle, notée x ou t dans I, une fonction $y : I \to \mathbb{R}$, et les dérivées première et seconde de y qui on note y' et y'' respectivement.*

On utilise la forme générale

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \textit{pour } x \in I. \tag{21.3}$$

où f est une fonction de trois variables réelles.

On peut définir de manière analogue les équations différentielles d'ordre supérieur. Les définitions de solution particulière et de solution générale se généralisent aux équations différentielles d'ordre supérieur à un.

Définition 21.8 (Trajectoire)**.**
La trajectoire tracée par une solution particulière y de l'équation (**??**) *est le graphe de y en tant que fonction de x.*

Exemple 21.9
Nous allons regarder de plus près l'équation (**??**), $y' = y$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soient y_1 et y_2 deux solutions distinctes de cette équation. S'il existe un point $\bar{x}$ tel que $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$ alors forcement $y_1(\bar{x})/y_2(\bar{x}) = 1$. Or, la solution générale de l'équation est $\mathcal{Y} = \{Ce^x : C \in \mathbb{R}\}$, donc $y_i(x) = C_i e^x$, $i = 1, 2$, où les C_i sont des constantes. Le rapport $y_1(\bar{x})/y_2(\bar{x})$ vaut C_1/C_2 et par conséquent $C_1 = C_2$. Ce résultat contredit l'hypothèse que les deux solutions soient distinctes. On a donc montré que *deux trajectoires distinctes de cette équations ne se croisent jamais.*

La figure **??** représente quelques trajectoires de l'équation. Si on les avait tracées toutes elles recouvriraient tout le plan x-y. Cela veut dire que *par tout point (x, y) passe une et une seule trajectoire de l'équation* (**??**).

△

Définition 21.10 (Condition initiale)**.**
Une ***condition initiale*** *pour l'équation* (**??**) *sur l'intervalle I est un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times \mathbb{R}$.*

On dit que la solution particulière z de (**??**) *satisfait la condition initiale $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times \mathbb{R}$ si $z(\bar{x}) = \bar{y}$.*

Définition 21.11 (Problème de Cauchy)**.**
L'association d'une équation différentielle et d'une condition initiale est appelée ***problème de Cauchy***

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in I, \\ y(\bar{x}) = \bar{y}. \end{cases} \tag{21.4}$$

Remarque 21.12.
Sous des conditions assez générales qui serons toujours vérifiées dans ce cours, tout problème de Cauchy admet une et une seule solution.

Pour passer de la solution générale d'une équation différentielle de premier ordre à une solution particulière il faut choisir une valeur du paramètre. Comme il y a un seul paramètre une seule condition

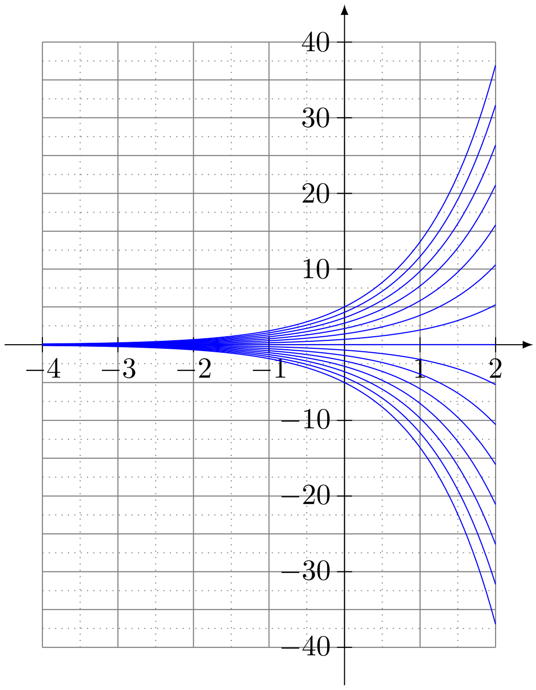


FIGURE 21.1 – Quelque trajectoires de l'équation $y' = y$.

(la trajectoire de la solution doit passer par un point fixe du plan) peut suffire. Pour une équation différentielle de second ordre comme (**??**), nous aurons besoin de plus de conditions. Sans rentrer dans les détails, nous allons constater ce fait dans l'exemple suivant.

Exemple 21.13
La solution générale de l'équation

$$y'' = -y, \tag{21.5}$$

est $\mathcal{Y} = \{C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\}$. Remarquez que l'équation est du second ordre et que sa solution générale est une famille d'équations à deux paramètres réels. Ce sera toujours les cas pour les équations abordées dans la section **??**. Pour déterminer une solution particulière de (**??**) il faut fixer les valeurs des deux paramètres et donc, en général, il sera nécessaire de donner deux conditions. △

Remarque 21.14.
Une condition comme $y(0) = 4$ nous dit que la constante $C_1 = 4$ mais elle ne nous permet pas de trouver C_2. Il y a donc une infinité de solutions de (**??**) qui satisfont à la condition $y(0) = 4$.

On peut fixer les deux condition de deux manières différentes.

(1) Problème de Cauchy : on fixe une terne de valeurs réels $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'$ et on cherche la solution telle que $y(\bar{x}) = \bar{y}$, $y'(\bar{x}) = \bar{y}'$.

Exemple 21.15
Les conditions $y(0) = 4$, $y'(0) = 15$ permettent de trouver la solution $z(x) = 4\cos(x) + 15\sin(x)$. △

(2) Problème aux bords : on fixe deux point dans le plan x-y, $A = (\bar{x}, \bar{y})$ et $B = (\tilde{x}, \tilde{y})$, et on cherche la solution dont la trajectoire passe par A et B, c'est à dire, on impose $y(\bar{x}) = \bar{y}$, $y(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

Exemple 21.16
Les conditions $y(0) = 4$, $y(\pi/2) = 15$ permettent de trouver la solution $z(x) = 4\cos(x) + 15\sin(x)$. △

21.2 Équations différentielles du premier ordre à variables séparables

Pour certaines équations différentielles la recherche d'une solution particulière se réduit à une recherche de primitive moyennant un changement de variables.

Définition 21.17 (Équation différentielle du premier ordre à variables separables)**.**
Une ***équation différentielle du premier ordre à variables séparables*** *est une équation qui, pour tout les x dans un intervalle donné, I, peut se mettre sous la forme*

$$f(y)y' = g(x), \tag{21.6}$$

où f et g sont deux fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous pouvons intégrer les deux cotes de l'égalité par rapport à x et obtenir

$$\int f(y(x))y'(x)\,dx = G(x) + C,$$

où G est une primitive de g et C une constante réelle. Il est facile à ce point d'effectuer une changement de variable dans le membre de gauche de l'équation en posant (sans surprise) $y = y(x)$ et donc $y'(x)\,dx = dy$.

$$\int f(y(x))y'(x)\,dx = \int f(y)\,dy = F(y(x)) + C,$$

où F est une primitive de f et C une constante réelle. En somme nous avons

$$F(y(x)) = G(x) + C,$$

et, si F admet une fonction réciproque, alors

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C). \tag{21.7}$$

Remarque 21.18.
L'expression de F^{-1} peut être difficile à calculer. Il sera alors préférable de garder y dans la forme implicite.

Exemple 21.19
L'équation

$$3y^2y' = x, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{21.8}$$

est une équation à variables séparables. Pour reprendre les notations du début du chapitre, ici $f(y) = 3y^2$ et $g(x) = x$. En intégrant de deux cotes on trouve

$$y^3 = \frac{x^2}{2} + C.$$

La fonction $F(y) = y^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc nous pouvons écrire la solution générale de l'équation (**??**) dans la forme

$$\mathcal{Y} = \left\{ \left(\frac{x^2}{2} + C \right)^{1/3} \text{ tel que } C \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

Exemple 21.20
En intégrant de deux cotes l'équation à variables séparables

$$2yy' = x, \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{21.9}$$

on trouve

$$y^2 = \frac{x^2}{2} + C.$$

La fonction $F(y) = y^2$ est *n'est pas inversible* sur tout $\mathbb{R}$, et on sait que $\sqrt{y^2} = |y|$. Au moment de rendre y explicite on doit choisir entre

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)^{1/2} \qquad \text{ou} \qquad y = -\left(\frac{x^2}{2} + C\right)^{1/2}.$$

Ce choix se fait suivant la condition initiale, si elle est donnée. S'il n'y a pas de condition initiale nous pouvons écrire que la solution générale est l'ensemble

$$\mathcal{Y} = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tels que } y^2 = \frac{x^2}{2} + C \text{ et } C \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

Exemple 21.21
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} e^y y' = \frac{1}{x+3}, & x \in]-\infty, -3[, \\ y(-4) = 0. \end{cases} \tag{21.10}$$

En intégrant des deux cotes nous trouvons

$$e^y = \ln(|x+3|) + C.$$

Nous pouvons alors imposer la condition initiale et obtenir $e^0 = \ln(|-4+3|) + C$, c'est à dire $C = 1 - \ln(1) = 1$.

Remarque 21.22.
L'énoncé du problème de Cauchy dit que x peut varier dans $]-\infty, -3[$, mais nous voyons maintenant que la solution n'est pas définie sur toute la demi-droite, parce que e^y est toujours positif et $\ln(|x+3|)+1$ est positif seulement pour $x < -(1/e+3) \approx -3,3679$.

Donc la solution du problème de Cauchy est $y(x) = \ln(|x+3|) + 1$ pour tout $x \in]-\infty, -(1/e+3)[$.
△

Exemple 21.23
Attention, cet exemple est le plus important de la section !
On considère l'équation à variables séparables

$$y' = \sin(x)y, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{21.11}$$

Dans ce cas, pour pouvoir écrire l'équation dans la forme (**??**) il faut pouvoir multiplier les deux côtés par $1/y$. Il faut donc éliminer tout de suite le cas où $y = 0$.

Si $y = 0$ alors $y' = 0$ et on a une solution constante (on dit souvent : une solution stationnaire) de l'équation. Par ailleurs les trajectoires des solutions ne peuvent pas se croiser ; donc si y_G est une solution non nulle de l'équation (**??**) alors $y_G(x) \neq 0$ pour tout x [1]. Il n'y a donc aucun danger à diviser par y dans la recherche d'une solution non identiquement nulle.

Supposons maintenant que $y \neq 0$ et écrivons $y'/y = \sin(x)$. En intégrant des deux cotes on trouve

$$\ln(|y|) = -\cos(x) + C,$$

d'où

$$|y| = e^{-\cos(x)+C} = e^C e^{-\cos(x)}.$$

1. Ça vaut la peine de prendre un peu de temps pour bien comprendre cela.

Si on avait impose une condition initiale alors on pourrait déterminer une solution particulière de l'équation en choisissant une valeur de la constante C. Nous pouvons observer cependant que la fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+,\star}$ et par conséquent il n'y a pas de perte de généralité en disant que la solution générale de l'équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{ y \,:\, |y| = Ke^{-\cos(x)}, \text{ pour } K \in \mathbb{R}^{+,\star} \right\} \cup \{y \equiv 0\}.$$

Il n'empêche qu'il serait plus élégant d'écrire la solution générale de l'équation sous une forme plus explicite, sans valeur absolue. Nous pouvons le faire en nous nous rappelant que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

Il suffit alors d'autoriser K dans $\mathbb{R}^\star$ pour éliminer la valeur absolue.

Pour écrire la solution générale de façon encore plus compacte nous observons que si $K = 0$ alors $y \equiv 0$, c'est à dire, on retrouve la solution constante nulle.

Finalement, la solution générale de cette équation sera toujours écrite sous la forme suivante

$$\mathcal{Y} = \left\{ y = Ke^{-\cos(x)}, \text{ pour } K \in \mathbb{R} \right\}. \tag{21.12}$$

△

21.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 21.24 (Équation différentielle linéaire du premier ordre)**.**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle .

*Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** est une équation différentielle de la forme*

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad \textit{pour } x \in I, \tag{21.13}$$

où a, b, c sont des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$ pour tout $x \in I$.

On dit que a, b, c sont les coefficients de l'équation (**??**)*.*

Remarque 21.25.
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *linéaire* si pour tout x_1, x_2 dans $\mathbb{R}$ et pour tout couple de constantes λ et μ on a

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2). \tag{21.14}$$

Ces équations différentielles sont dites linéaires parce que la partie de l'équation qui contient y (le membre de gauche) satisfait la propriété (**??**) par rapport à y. En effet par les propriétés de la dérivée nous avons que

$$a(x)(\lambda y_1 + \mu y_2)' + b(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(a(x)y_1' + b(x)y_1) + \mu(a(x)y_2' + b(x)y_2).$$

Définition 21.26.
L'équation (**??**) *est dite **homogène** quand c est la fonction nulle. Si* (**??**) *n'est pas homogène on dit que l'équation*

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{21.15}$$

*est son **équation homogène associée**.*

Toute équation linéaire du premier ordre homogène est une équation du premier ordre à variables séparables, comme on en a vu dans la section précédente et en particulier dans l'exemple **??**. Nous n'allons pas répéter les détails du procédé pour trouver sa solution générale, qui aura la forme suivante

À retenir 21.27

$$\mathcal{Y}_h = \left\{ K e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \ : \ K \in \mathbb{R} \right\}. \tag{21.16}$$

Proposition 21.28. *(1) Soit y_p une solution particulière de l'équation (??) et y_h une solution particulière de l'équation homogène associé (??). Alors la fonction somme $z = y_p + y_h$ est encore une solution particulière de l'équation (??).*

(2) Soient y_1 et y_2 deux solutions particulières de (??). Alors la fonction différence $w = y_1 - y_2$ est un solution particulière de (??).

Démonstration. (1)

$$a(x)\,(y_p + y_h)' + b(x)\,(y_p + y_h) - c(x) = \big(a(x)y_p' + b(x)y_p - c(x)\big) + \big(a(x)y_h' + b(x)y_h\big) = 0. \tag{21.17}$$

(2)

$$a(x)\,(y_1 - y_2)' + b(x)\,(y_1 - y_2) = \big(a(x)y_1' + b(x)y_1 - c(x)\big) - \big(a(x)y_2' + b(x)y_2 - c(x)\big) = 0. \tag{21.18}$$

□

Cette proposition permet de démontrer le théorème suivant, qui est le plus important de cette section.

Théorème 21.29.
Soit y_p une solution particulière de l'équation (??) et $\mathcal{Y}_h$ la solution générale de l'équation (??), alors la solution générale de l'équation (??) est l'ensemble

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_h + y_p = \{ z = y_h + y_p \ : \ y = h \in \mathcal{Y}_h \}. \tag{21.19}$$

À retenir 21.30
La résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre comporte trois étapes :

(1) résolution de l'équation homogène associée ;
(2) recherche d'une solution particulière de l'équation non homogène ;
(3) somme de la solution générale de l'équation homogène et de la solution particulière trouvée au point précédent.

La partie qui nous manque encore est de savoir comment trouver une solution particulière de l'équation non homogène (??). Si la fonction c dans (??) est une constante ou un polynôme simple, ou une exponentielle alors on peut essayer de deviner. Cette méthode cependant n'est pas la plus sûre pour des débutants.

Exemple 21.31
On considère l'équation

$$y' - 5y = 10, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{21.20}$$

Comme tous les coefficients de l'équation sont constants on peut essayer de trouver une solution constante.

Toutes les fonctions constantes on dérivée nulle, par conséquent, si une solution constante existe elle doit satisfaire $-5y = 10$, ce qui veut dire que la solution constante est $y(x) \equiv -2$. △

Exemple 21.32
On considère l'équation

$$xy' + y = x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}^{+,\star}. \tag{21.21}$$

Comme le membre de droite de l'équation est un polynôme de degré un on cherche une solution de la forme $y(x) = Ax + B$ avec A et B dans $\mathbb{R}$.

Par substitution on obtient $Ax + (Ax + B) = x + 1$, c'est à dire que une solution particulière de l'équation est $y(x) = x/2 + 1$. △

Exemple 21.33
L'équation

$$xy' - y = x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}^{+,\star}. \tag{21.22}$$

ressemble beaucoup à celle de l'exemple précédent, cependant il n'existe pas un polynôme de degré un qui en soit solution.

Dans un cas comme celui-ci, il faut rapidement abandonner la divination et replier sur la méthode, plus technique mais plus sûre, dite *variation de la constante* △

21.3.1 Méthode de variation de la constante

— Soit $\mathcal{Y}_h$ la solution générale de l'équation homogène associé à (**??**). Il s'agit d'une famille à un paramètre de fonctions. La première étape de cette méthode consiste à construire un candidat solution particulière y_p en remplaçant le paramètre dans $\mathcal{Y}_h$ par une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à déterminer.

Exemple 21.34
L'équation homogène associée à $y' - y = \cos(x)$ est $y' - y = 0$, dont la solution générale est $\mathcal{Y}_h = \{Ce^x \ : \ C \in \mathbb{R}\}$. Le candidat solution sera alors $y_p = C(x)e^x$, avec C fonction à déterminer. △

— La deuxième étape de cette méthode consiste à injecter y_p dans l'équation. Cela permet de trouver une équation différentielle à variables séparables pour C, en principe plus facile à résoudre que l'équation de départ.

Exemple 21.35
On continue avec l'exemple précédent. On a $y_p' = C'(x)e^x + C(x)e^x$, d'où

$$(C'(x)e^x + C(x)e^x) - C(x)e^x = \cos(x),$$

c'est à dire

$$C'(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

△

— La troisième étape de la méthode consiste à trouver une solution particulière de l'équation différentielle pour C et, par conséquent déterminer une y_p.

Exemple 21.36
La solution générale de

$$C'(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

est $\mathcal{C} = \left\{e^{-1}\frac{(\sin(x)-\cos(x))}{2} + K \ : \ K \in \mathbb{R}\right\}$. Il nous suffit une solution particulière, nous pouvons donc choisir $K = 0$ et alors la solution particulière de (**??**) sera $y_p(x) = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}$. △

Remarque 21.37.
Le plus souvent en intégrant l'équation pour C on en trouvera la solution générale. Dans ce cas on peut

remplacer C par cette solution générale et obtenir d'un seul coup la solution générale de l'équation (**??**) , c'est à dire sans faire la somme entre la solution générale de l'homogène associée et la solution particulière.

Exemple 21.38
Dans l'exemple qu'on vient de voir la solution générale de (**??**) est

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_h + y_p = \left\{ Ce^x + \frac{(\sin(x) - \cos(x))}{2} \ : \ C \in \mathbb{R} \right\}. \tag{21.23}$$

On obtient le même résultat est écrivant $\mathcal{Y} = \left\{ e^{-x} \left(e^{-1} \frac{(\sin(x) - \cos(x))}{2} + K \right) \ : \ K \in \mathbb{R} \right\}$. Notez qu'on a changé le nom du paramètre de C à K seulement pour souligner qu'on obtient de même résultat par deux chemins différents, sinon les deux expression sont équivalentes ! $\triangle$

21.4 Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition 21.39 (Équation différentielle linéaire du second ordre)**.**
*Une **équation différentielle linéaire du second ordre** est une équation différentielle de la forme*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x), \quad \textit{pour } x \in I, \tag{21.24}$$

où a, b, c et d sont des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$ pour tout $x \in I$.
On dit que a, b, c et d sont les coefficients de l'équation (**??**).

Dans ce cours nous allons étudier exclusivement le cas où a, b et c sont des fonctions constantes.

Définition 21.40 (Équation différentielle linéaire du second ordre homogène)**.**
*Une **équation différentielle linéaire du second ordre homogène** est une équation différentielle de la forme* (**??**)*, telle que le coefficient d est nul.*

À toute équation de la forme (**??**) on peut associer une équation homogène exactement comme on a fait dans la section précedente pour les équations linéaires du premier ordre.

21.4.1 Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre homogènes à coefficients constants

Remarque 21.41.
L'application qui à la fonction y fait correspondre $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$ est linéaire, au sens de la remarque **??**.

Cela nous dit en particulier, que si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène alors toute leur combinaison de la forme $z = \lambda y_1 + \mu y_2$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$, est encore une solution.

Jusqu'ici nous avons toujours travaillé avec des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans cette section nous nous authorisons à passer par des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais cela sera uniquement une étape dans nos calculs. Au final toutes les solutions que nous allons considérer sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La solution générale **à valeurs dens les complexes** d'une équation de ce type a la forme

$$\mathcal{Y}_h^{\mathbb{C}} = \{ C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \ x \in I \}, \tag{21.25}$$

où r_1 et r_2 sont aussi des nombres complexes. Remarquez que la solution générale est une famille à deux paramètres. Il faut aussi observer que en tout cas l'intervalle I dans lequel varie x est un intervalle dans $\mathbb{R}$, parce que I est une des données du problème.

À partir de cette information nous pouvons, pour toute équation donnée, chercher la solution générale **complexe** par substitution. Il suffit de remplacer y dans l'équation par e^{rx} et chercher les valeurs de r qui nous conviennent.

Si notre équation de départ est

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{pour } x \in I, \tag{21.26}$$

alors la substitution nous donne

$$e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0.$$

Il est connu que la fonction exponentielle ne prend pas la valeur 0, par consequent ce qui s'annulle est le polinôme de degré deux $ar^2 + br + c$. Il est donc très facile de trouver les valeurs de r qu'on pourra utiliser comme r_1 et r_2 dans la solution générale **complexe**.

Si $b^2 - 4ac > 0$ **:** le polinôme admet deux solutions réelles et distinctes, r_1 et r_2 ;

Si $b^2 - 4ac < 0$ **:** le polinôme admet deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$;

Si $b^2 - 4ac = 0$ **:** le polinôme admet une solution réelle double $r = r_1 = r_2$.

Il faut maintenant écrire la solution générale **réelle** de l'équation, qui est celle que nous intéresse vraiment. La façon de l'obtenir est différente dans les trois cas.

Si $b^2 - 4ac > 0$ **:** la solution générale réelle a la même forme que la solution complexe, (**??**), il suffit de prendre les paramètres C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}$ plutôt que dans $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{Y}_h = \left\{C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in I\right\}, \tag{21.27}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$ **:** le polinôme admet deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$; Il faut alors utiliser les formules suivantes

$$\begin{aligned} e^{\alpha+i\beta} &= e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ e^{\alpha-i\beta} &= e^{\alpha}(\cos(\beta) - i\sin(\beta)). \end{aligned} \tag{21.28}$$

La somme $e^{r_1 x} + e^{r_2 x}$, où x est dans $I \in \mathbb{R}$, vaut

$$e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) = 2e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

et la différence $e^{r_1 x} - e^{r_2 x}$ vaut

$$e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) - e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) = 2e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Par ces deux calculs élémentaires nous avons trouvé deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de zéros en commun. Elles sont les génératrices de la famille des solutions réelles de l'équation différentielle (la solution générale)

$$\mathcal{Y}_h = \left\{e^{\alpha x}\left(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\right) \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in I\right\}, \tag{21.29}$$

Si $b^2 - 4ac = 0$ **:** le polinôme admet une solution réelle double $r = r_1 = r_2$. Dans ce cas la solution générale de l'équation est la famille

$$\mathcal{Y}_h = \left\{(C_1 + C_2 x)e^{rx} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in I\right\}. \tag{21.30}$$

Pour justifier cette formule nous observons d'abord que toute fonction $x \mapsto Ce^{rx}$, pour $C \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle (par construction). Ensuite nous utilisons la méthode de variation de la constante. On trouve rapidement que si une fonction de la forme $x \mapsto C(x)e^{rx}$ est une solution alors $C(x)$ est un polynôme de degré au plus 1, c'est à dire $C(x) = C_1 + C_2 x$ avec C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}$.

21.4.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coéfficients constants, non homogènes

Nous ne présentons pas une méthode générale pour la résolution de ces équations. Comme dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre non homogènes, la solution générale de (**??**) est donnée par la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée. La recherche d'une solution particulière est facilité par le fait que les coefficients de (**??**) sont supposés constants, c'est à dire que a, b et c sont des fonctions constantes. Il faut essayer de déviner la forme d'une solution particulière à partir de la forme du second membre de l'équation, la fonction d. Si d est un polynôme il faut essayer avec un polynôme du même degré, si d est un'exponentielle, par exemple $d(x) = e^{5x}$, on pourra essayer avec un multiple de la même fonction exponentielle, dans l'exemple $f(x) = ke^{5x}$, avec k à determiner. Si d est une combinaison linéaire de sinus et cosinus, comme par exemple $12\cos(x) + 2\sin(x)$, on peut essayer avec $k_1\cos(x) + k_2\sin(x)$.

Exemple 21.42
On considère l'équation différentielle

$$y'' + 12y' + 36y = -192e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{21.31}$$

Son équation homogène associée est

$$y'' + 12y' + 36y = 0, \tag{21.32}$$

dont le polynôme characteristique est $r^2 + 12r + 36$. Ce polynôme admet une racine double, qui est -6, par conséquent la solution générale de (**??**) est

$$\mathcal{Y}_h = \left\{(C_1 + C_2x)e^{-6x} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Le membre de droite de (**??**) est une fonction exponentielle, nous allons donc chercher une solution particulière de (**??**) de la forme $f(x) = ke^{2x}$. Par substitution nous trouvons

$$ke^{2x}(4 + 12 \times 2 + 36) = -192e^{2x},$$

ce qui veut dire que k doit être -3.

La solution générale de l'équation (**??**) est donc

$$\mathcal{Y} = \left\{(C_1 + C_2x)e^{-6x} - 3e^{2x} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

△

Exemple 21.43
Nous allons résoudre l'équation

$$y'' + 12y' + 36y = 12\cos(x) + 2\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{21.33}$$

Cette équation a comme homogène associée l'équation (**??**), comme dans l'exemple précedent. Il nous suffit donc de trouver une solution particulière de (**??**).

Nous pouvons essayer avec $f(x) = k_1\cos(x) + k_2\sin(x)$. Par substitution on trouve

$$\begin{aligned} &-(k_1\cos(x) + k_2\sin(x)) + 12\left(-k_1\sin(x) + k_2\cos(x)\right) + 36\left(k_1\cos(x) + k_2\sin(x)\right) \\ &\qquad = 12\cos(x) + 2\sin(x) \end{aligned}$$

Cette équation doit être satisfaite pour tout valeur de x, en particulier pour $x = 0$ et $x = \pi/2$. Cela revient à considère séparemment les coefficients des fonctions sinus et cosinus. Il faut alors que k_1 et k_2 soient solutions du système

$$\begin{cases} -k_1 + 12k_2 + 36k_1 &= 12, \\ -k_2 - 12k_1 + 36k_2 &= 2. \end{cases}$$

On trouve $k_1 = 396/1369$ et $k_2 = 214/1369$, et la solution générale de notre équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{ (C_1 + C_2 x)e^{-6x} + \frac{396}{1369}\cos(x) + \frac{214}{1369}\sin(x) \; : \; C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

Exemple 21.44
Nous allons résoudre l'équation

$$y'' + 12y' + 36y = 10x^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{21.34}$$

Cette équation a comme homogène associée l'équation (**??**), comme dans l'exemple précedent. Il nous suffit donc de trouver une solution particulière de (**??**).

Nous pouvons essayer avec $f(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$. Par substitution on trouve

$$(2k_1) + 12\left(2k_1 x + k_2\right) + 36\left(k_1 x^2 + k_2 x + k_3\right) = 10x^2 + 3.$$

Pour trouver les bonnes valeurs des coefficients nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} 36k_1 & = 10, \\ 24k_1 + 36k_2 & = 0, \\ 2k_1 + 12k_2 + 36k_3 & = 3, \end{cases}$$

ce qui donne $k_1 = 5/18$, $k_2 = -5/27$ et $k_3 = 7/54$. La solution générale de notre équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{ (C_1 + C_2 x)e^{-6x} + \frac{5}{18}x^2 - \frac{5}{27}x + \frac{7}{54} \; : \; C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

Chapitre 22

Analyse numérique

Chapitre 23

Variables aléatoires et théorie des probabilités

Chapitre 24

Statistiques

Chapitre 25

Chaînes de Markov à temps discret

Chapitre 26

Martingales

Chapitre 27

Processus de Poisson

Chapitre 28

Utilisation dans les autres sciences

Chapitre 29

Exemples avec Sage

Chapitre 30

Développements possibles

Deuxième partie

Outils mathématiques

Chapitre 31

Vecteurs, matrices et déterminants

Chapitre 32

Dérivées de fonctions de une variable

Chapitre 33

Fonctions de plusieurs variables

Chapitre 34

Champs de vecteurs

Chapitre 35

Coordonnées curvilignes orthogonales

Chapitre 36

Intégrales multiples et de surface

Chapitre 37

Les théorèmes intégraux de l'analyse vectorielle

Chapitre 38

Autres

Chapitre 39

Exercices

Part III

More advanced stuff and research

Chapter 40

Some old results

Chapter 41

Categories

Chapter 42

Topology

Chapter 43

General differential geometry

Chapter 44

Lie groups and subgroups

Chapter 45

Lie algebras

Chapter 46

A lot of algebra

Chapter 47

Fibre bundle

Chapter 48

Examples of groups and representations

Chapter 49

Lie groups of transformations

Chapter 50

Classical mechanics

Chapter 51

Hilbert spaces

Chapter 52

Analysis

Chapter 53

Chain complexes

Chapter 54

Homogeneous and symmetric spaces

Chapter 55

Heat kernel expansions

Chapter 56

From Clifford algebras to Dirac operator

Chapter 57

Relativistic fields and group theory

Chapter 58

Relativistic fields and fibre bundle formalism

Chapter 59

Conformal fiels theory

Chapter 60

Banach and C^*-algebras

Chapter 61

Compact quantum groups

Chapter 62

von Neumann algebras

Chapter 63

Dirichlet forms

Chapter 64

K-theory

Chapter 65

BF theory

Chapter 66

BTZ black hole from identifications

Chapter 67

BTZ black holes in anti de Sitter spaces

Chapter 68

General non commutative geometry

Chapter 69

Deformations: formal aspects

Chapter 70

Deformations: non-formal aspects

Chapter 71

WKB quantization

Chapter 72

Deformation of anti de Sitter spaces

Chapter 73

Two notes for further developments

Chapter 74

Gravitation and noncommutative geometry

Chapter 75

Levy Processes and such

Chapter 76

Complements

Quatrième partie

Matlab

Cinquième partie

Exercices

Chapitre 77

Exercices de calcul différentiel et intégral 1 (Bruxelles)

Chapitre 78

Exercices de calcul différentiel et intégral 2 (Bruxelles)

Chapitre 79

Exercices pour analyse CTU

79.1 TD 1 : Fonctions monotones, bijections

Exercice 1

(1) Donner le tableau de variations de la fonction exponentielle.

(2) Expliciter les renseignements fournis par ce tableau de variations.

(3) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle.

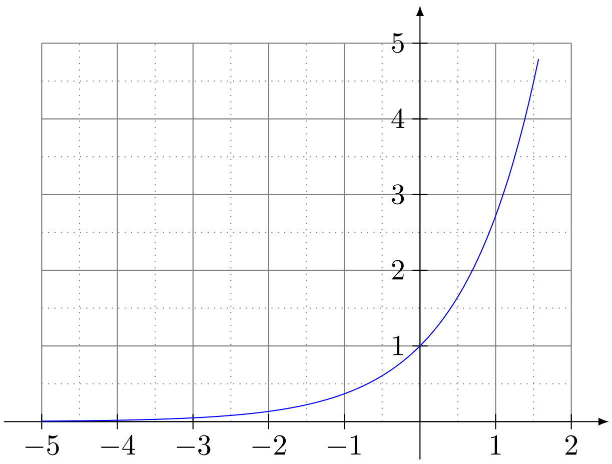
Correction de l'exercice ??

Le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		$+\infty$
			$+\infty$
e^x		$\nearrow$	
	0		

Le tableau indique les limites $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$. De plus la flèche indique que la fonction est strictement monotone croissante.

Le graphe de la fonction exponentielle (qui doit être absolument connu) est comme ceci :



Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 4-x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

(1) La fonction f est-elle monotone sur $\mathbb{R}$?

(2) Tracer la représentation graphique de f.

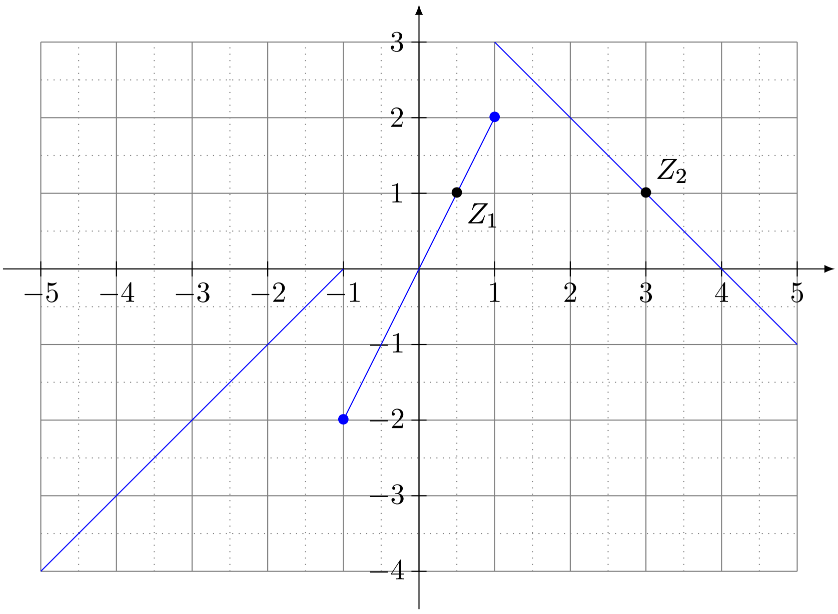
(3) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(4) Déterminer les antécédents éventuels de 1 par la fonction f.

Correction de l'exercice ??

La fonction n'est pas monotone parce qu'elle est tantôt croissante (les parties $x+1$ et $2x$), tantôt décroissante (la partie $4-x$).

Le graphe de la fonction f est en trois parties :



Les points bleus représentent des points sur le graphe de la fonction. Le graphe se poursuit à l'infini tant à gauche qu'à droite.

Il est visible qu'elle n'est pas continue en $x=-1$ et $x=1$. La justification précise est que

$$\lim_{x\to -1} f(x) \tag{79.1}$$

n'existe pas parce que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} x+1 = 0$ alors que $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} 2x = -2$.

La fonction f admet deux antécédents de -1 : $x=\frac{1}{2}$ et $x=3$. Ils sont visibles sur le graphe aux points Z_1 et Z_2. Formellement, il s'agit de résoudre l'équation

$$f(x) = 1. \tag{79.2}$$

Exercice 3

On pourra répondre en proposant une représentation graphique possible des fonctions.

(1) On sait que la fonction f_1 est strictement croissante sur chacun des intervalles $[a,b]$ et $]b,c]$. Peut-on affirmer qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $[a,c]$?

(2) Déterminer une fonction f_2 et un intervalle I tels que la fonction f_2 ne soit pas bijective de I dans $f_2(I)$.

(3) Déterminer une fonction f_3 et un intervalle J tels que la fonction f_3 soit bijective de J dans $f_3(J)$, mais non monotone.

Correction de l'exercice ??

(1) Non : la fonction peut «faire un saut» et redescendre juste en b. Par exemple la fonction

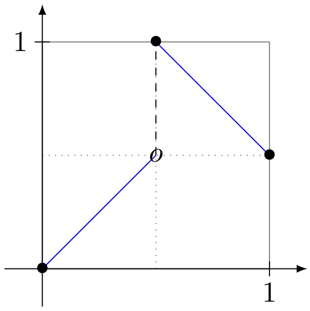
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 5 \\ x-8 & \text{si } x > 5 \end{cases} \tag{79.3}$$

est croissante sur $[-1,5]$ et sur $]5,10]$ mais $f(4)=4$ alors que $f(6)=-2$.

Il est recommandé de faire un dessin de la fonction (**??**).

(2) Une fonction f est toujours surjective vers l'intervalle $f(I)$. Nous devons donc chercher une fonction qui ne soit pas injective. La fonction sinus en est le parfait exemple. Nous pouvons donc proposer $f_2(x) = \sin(x)$ et $I = \mathbb{R}$.

(3) Voici le graphique d'une fonction bijective de $[0, 1]$ vers lui-même :



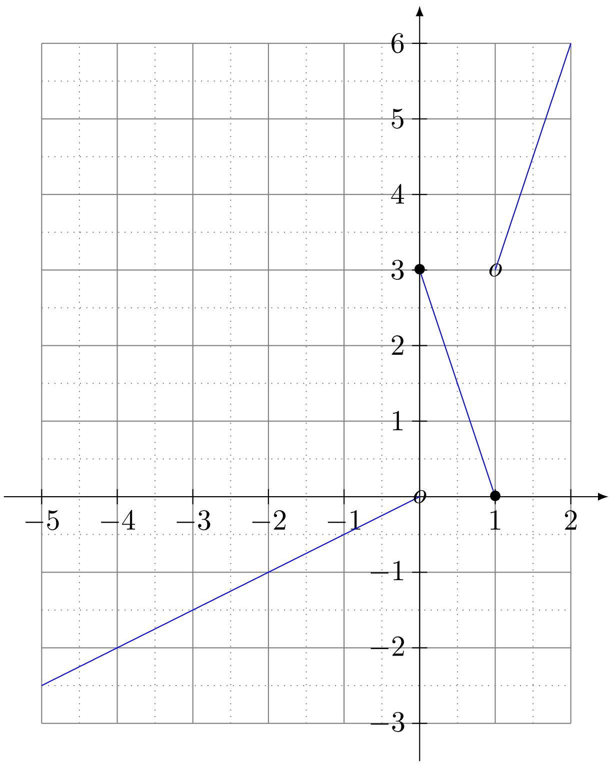
Le point blanc indique un point qui n'est pas sur le graphe. Ici $f(1/2) = 1$ et non $f(1/2) = 1/2$. Soyez capable d'en donner une expression analytique.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 3(1-x) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

(1) Tracer la représentation graphique de f et donner son tableau de variations.

(2) On note y un nombre réel, déterminer les antécédents éventuels de y par la fonction f.

Correction de l'exercice ??



Le tableau de variations est ceci :

x	$-\infty$		0^-	0		1	1^+		∞
									$+\infty$
								$\nearrow$	
				3			3		
$f(x)$					$\searrow$				
			0			0			
		$\nearrow$							
	$-\infty$								

les colonnes 0^- et 1^+ ne correspondent pas à des valeurs effectivement atteintes par la fonction, mais seulement les limites.

En ce qui concerne les antécédents, nous avons de la chance : la fonction est injective. Aucun nombre ne possède plusieurs antécédents. Il est donc possible d'écrire la fonction réciproque f^{-1} de la façon suivante :

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 2y & \text{si } y \in \left]-\infty, 0\right[\\ 1 - \frac{y}{3} & \text{si } y \in [0, 3] \\ +\frac{y}{3} & \text{si } y \in \left]3, \infty\right[. \end{cases} \tag{79.4}$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.

(1) Étudier les variations de f.

(2) Justifier que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle que l'on précisera.

(3) Soit g la bijection réciproque de f. Préciser l'ensemble de définition de g et calculer $g'(3)$.

Correction de l'exercice ??

(1) La fonction dérivée de f est $f'(x) = 3x^2 + 1$. Il s'agit d'une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc strictement monotone croissante.

(2) Par le point précédent nous savons que f est strictement monotone sur son ensemble de définition, qui est $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image. Pour trouver l'image de f nous nous rappelons que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et que f est continue (toute fonction polynomiale est continue). Le théorème **??** nous dit alors que l'image de f est $\mathbb{R}$ tout entier.

(3) Il n'est pas aisé d'écrire g, la bijection réciproque de f, sous une forme analytique explicite. par conséquent nous sommes obligés à répondre aux questions de ce point en utilisant les informations que nous avons sur f. D'abord, l'ensemble de définition de g est l'image de f, qui est $\mathbb{R}$. Ensuite, la dérivée de g en $x = 3$ peut être calculée à partir de la formule (**??**)

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{3(g(3))^2 + 1}.$$

La valeur de $g(3)$ est la solution de $f(x) = 3$, c'est à dire $x^3 + x + 1 = 3$, on peut écrire $x(x^2 + 1) = 2$ et remarquer que $x = 1$ est une solution de cette équation. C'est d'ailleurs la seule solution, car f est une bijection. On a donc $g'(3) = 1/4$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -x^3 + \frac{1}{x} + 2$.

(1) Étudier les variations de f.

(2) Justifier que f est une bijection de $\mathbb{R}^{*,+}$ dans un intervalle que l'on précisera.

(3) Soit g la bijection réciproque de f. Préciser l'ensemble de définition de g et calculer $g'(2)$.

Correction de l'exercice ??

(1) La fonction f est dérivable (et à plus forte raison continue) sur tout son domaine. La dérivée de f est la fonction $f'(x) = -3x^2 - \frac{1}{x^2}$. Il s'agit d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*,-}$. La fonction f est donc décroissante sur les intervalles $\mathbb{R}^{*,-}$ et $\mathbb{R}^{*,+}$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty, & \lim_{x\to 0^-} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= +\infty, & \lim_{x\to+\infty} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

(2) Par le point précédent, f est une fonction continue et monotone décroissante sur $\mathbb{R}^{*,+}$. Cela implique que f est une bijection de $\mathbb{R}^{*,+}$ vers $f\left(\mathbb{R}^{*,+}\right) = \mathbb{R}$.

(3) L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$. Nous pouvons calculer la valeur de $g'(2)$ à l'aide de la formule $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Le seul point délicat consiste à trouver $g(2)$ qui, par définition, est la solution dans $\mathbb{R}^{*,+}$ de l'équation

$$2 = -x^3 + \frac{1}{x} + 2.$$

On a alors que $x = g(2)$ si et seulement si $x^4 = 1$ et $x > 0$, ce qui veut dire que $x = 1$. La réponse à la question sera donc $g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4}$.

Remarque 79.1.
Par le même raisonnement que au point (2) on montre que f est une bijection de $\mathbb{R}^{*,-}$ vers $f(\mathbb{R}^{*,-}) = \mathbb{R}$. Cependant, l'énoncé du problème est formulé d'une façon a nous suggérer que la fonction g est la bijection réciproque de f à valeurs dans $\mathbb{R}^{*,+}$ et non celle à valeurs dans $\mathbb{R}^{*,-}$.

79.2 TD 2 : Dérivation, fonction composées

Exercice 7
Soient $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$.

(1) Trouvez les domaines de définition de f et de g.
(2) Écrivez les expressions explicites et trouvez les domaines de définition des fonctions composées $h_1(x) = f \circ g(x)$ et $h_2(x) = g \circ f(x)$.
(3) Trouvez l'expression des fonctions dérivées de h_1 et h_2, h_1' et h_2'.

Correction de l'exercice ??

(1) On a $\text{Domaine}_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x - 1 \geqslant 0\} = [1, +\infty[$ et $\text{Domaine}_g = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x > 0, \text{ et } \ln(x) \neq 0\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
(2) Les expressions explicites de h_1 et h_2 sont

$$h_1(x) = f \circ g(x) = \sqrt{\frac{1}{\ln(x)} - 1},$$

et

$$h_2(x) = g \circ f(x) = \frac{1}{\ln\left(\sqrt{x-1}\right)}.$$

Leurs ensembles de définition sont

$$\begin{aligned}\text{Domaine}_{h_1} &= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \ln(x) \neq 0 \text{ et } \frac{1}{\ln(x)} - 1 \geqslant 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } 0 < \ln(x) \leqslant 1\} =]1, e].\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{Domaine}_{h_2} &= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sqrt{x-1} > 0, \text{ et } \ln(\sqrt{x-1}) \neq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x > 1 \text{ et } x - 1 \neq 1\} =]1, 2[\cup]2, +\infty[.\end{aligned}$$

(3) Pour trouver l'expression des fonctions dérivées de h_1 et h_2, il faut utiliser les formules dans l'encadré **??**.

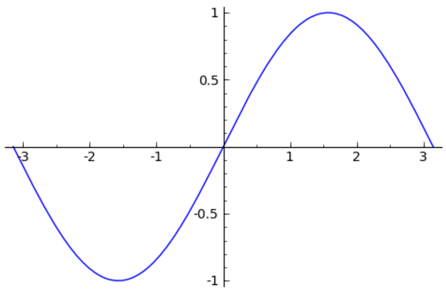
$$h_1'(x) = -\frac{1}{2x\ln^2(x)\sqrt{\frac{1}{\ln(x)} - 1}},$$

$$h_2'(x) = -\frac{1}{2(x-1)\ln^2(\sqrt{x-1})}.$$

Exercice 8
La figure **??** répresente le graphe de la fonction $f(x) = \sin(x)$, pour $x \in [-\pi, \pi]$.

(1) Est-ce que la fonction $f_1(x) = \sin(x^2)$ est paire ? Impaire ? Périodique ? Si elle est périodique trouver sa période. Justifier au mieux vos réponses.
(2) Esquisser le graphe des fonctions suivantes

FIGURE 79.1 – Le graphe de la fonction sinus

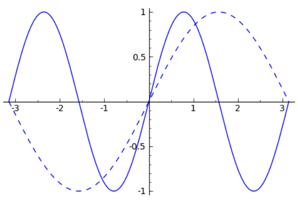


- $f_1(x) = \sin(2x)$;
- $f_2(x) = 2\sin(x)$;
- $f_3(x) = \sin^2(x)$;
- $f_4(x) = \sin(x-1)$;
- $f_5(x) = \sin(x) - 1$.

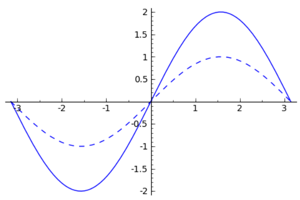
Correction de l'exercice ??

(1) La fonction $\sin(x^2)$ est paire, parce que $(-x)^2 = x^2$ et donc $\sin((-x)^2) = \sin(x^2)$.
Une fonction paire non nulle ne peut pas être impaire.
La fonction $\sin(x^2)$ n'est pas périodique : si elle l'était il y aurait $T > 0$ tel que $\sin((x+T)^2) = \sin(x^2)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Cela veut dire que, pour tout x, $(x+T)^2 - x^2$ est un multiple entier de 2π, parce que la fonction sinus est périodique de période 2π. Mais alors $T = -x + \sqrt{2k\pi + x^2}$, ce qui est impossible parce que la période d'une fonction périodique ne peut pas dépendre de x.

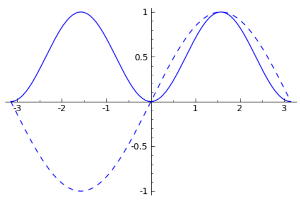
(2)



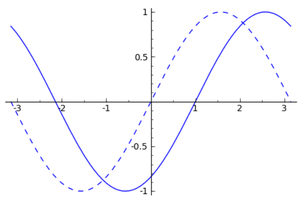
(a) $f_1(x) = \sin(2x)$



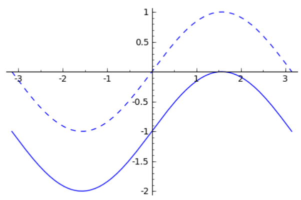
(b) $f_2(x) = 2\sin(x)$



(c) $f_3(x) = \sin^2(x)$



(d) $f_4(x) = \sin(x-1)$



(e) $f_5(x) = \sin(x) - 1$

FIGURE 79.2 – Les graphes des fonctions $f_1, \dots, f_5$

Exercice 9
La figure **??** répresente le graphe de la fonction $f(x) = \cos(x)$, pour $x \in [-\pi, \pi]$.

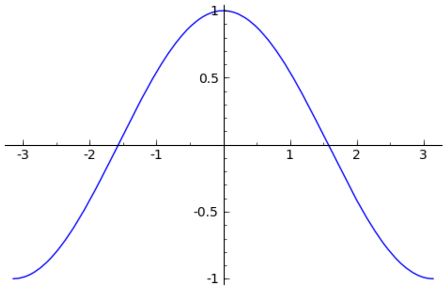
(1) Est-ce que la fonction $f(x) = \cos(x) + x^2$ est paire ? Impaire ? Périodique ? Si elle est périodique, trouver sa période. Justifier au mieux vos réponses.

(2) Esquissez le graphe des fonctions suivantes pour $x \in [-\pi, \pi]$.

- $f_1(x) = \cos(2x)$;
- $f_2(x) = \frac{\cos(x)}{4}$;
- $f_3(x) = \cos(x) - 2$;
- $f_4(x) = |\cos(x)|$.

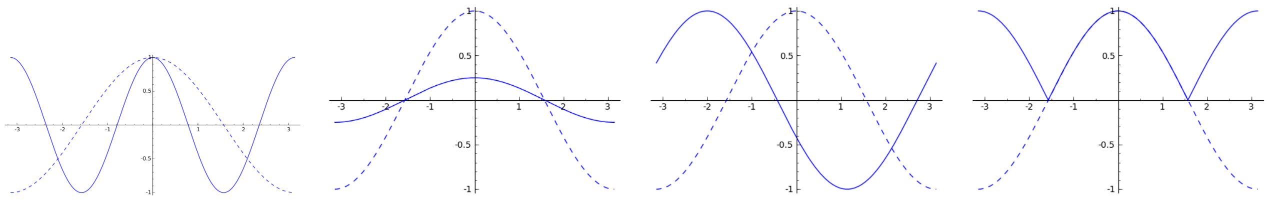
Correction de l'exercice ??

FIGURE 79.3 – Le graphe de la fonction cosinus



(1) La fonction $\cos(x)+x^2$ est paire car elle est la somme de deux fonction paires. La seule fonction qui est paire et impaire au même temps est la fonction nulle, donc $\cos(x)+x^2$ n'est pas impaire. Cette fonction n'est pas périodique non plus : si elle l'était il y aurait $T > 0$ tel que $\cos(x+T)+(x+T)^2 = \cos(x)+x^2$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Cela voudrait dire que $\cos(T)+T^2 = 1$ (on prend $x = 0$), $\cos(2T)+4T^2 = \cos(T)+T^2$ (on prend $x = T$), et plus en générale, pour tout k entier positif $\cos(kT)+k^2T^2 = 1$. Cela n'est pas possible car $1-\cos(kT)$ est borné par 2 alors que k^2T^2 peut devenir aussi grand qu'on veut quitte à prendre k assez grand.

(2)



(a) $f_1(x) = \cos(2x)$ (b) $f_2(x) = \frac{\cos(x)}{4}$ (c) $f_3(x) = \cos(x) - 2$ (d) $f_4(x) = |\cos(x)|$

FIGURE 79.4 – Les graphes des fonctions $f_1, \ldots, f_4$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + \dfrac{58}{6}$.

(1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle.

(2) Donner un encadrement de cette solution par deux entiers consécutifs.

Correction de l'exercice ??

(1) Pour répondre à cette question on commence par calculer la fonction dérivée de f, qui est $f'(x) = 2x^2 - x - 6$. L'étude du signe de f' ne présente aucune difficulté : c'est une fonction négative entre $x = -3/2$ et $x = 2$ et positive ailleurs. Du coup, la fonction f est strictement monotone sur les trois intervalles $I_1 =]-\infty, -3/2[$, $I_2 =]-3/2, 2[$ et $I_3 =]2, +\infty[$, croissante sur I_1 et I_3 et décroissante sur I_2. Il est facile de vérifier que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $f(-3/2) = 15,291\bar{6}$ et $f(2) = 1$. Puisque f est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que la valeur 0 sera atteinte une seule fois, pour un x qui est dans l'intervalle I_1.

(2) Il faut calculer $f(-3)$ et $f(-4)$ et remarquer que $f(-3)$ est positive et $f(-4)$ négative. La valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$ est donc comprise entre -4 et -3.

Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

(2) Montrer que f peut-être prolongée par continuité en 0.

Correction de l'exercice ??

(1) L'ensemble de définition de f est $\text{Domaine}_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x \neq 0 \text{ et } 1 + x > 0\} =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

(2) Il faut calculer la limite de f lorsque $x \to 0$. Pour le faire nous avons besoin du théorème de de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

La fonction qui prolonge f en $x = 0$ est

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq 0; \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

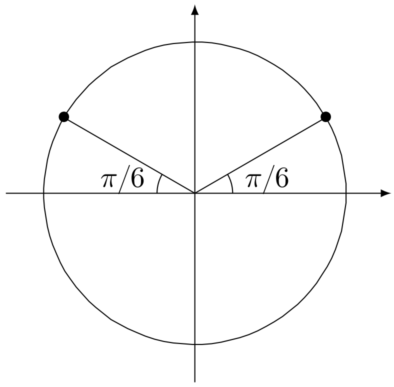
79.3 TD 3 : Rappels de trigonométrie

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : **a/** $\sin(x) = \frac{1}{2}$ **b/** $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice ??

Les valeurs usuelles et les graphes sont dans la section de rappels ??.



Pour résoudre $\sin(x) = \frac{1}{2}$, la première chose est de se souvenir que $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$. Il faut ensuite trouver les autres angles du cercle trigonométrique donnant le même sinus. Un dessin peut vraiment aider.

Nous avons donc les solutions $x = \pi/6$ et $x = 5\pi/6$ dans le cercle trigonométrique (c'est à dire entre 0 et 2π). L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ s'obtient en ajoutant les solutions obtenues par la périodicité de la fonction sinus :

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\right\}. \quad (79.5)$$

En ce qui concerne l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, nous voyons dans les tables de valeurs usuelles que $\cos(\pi/3) = 1/2$. Donc $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$. Les solutions entre 0 et 2π sont donc $x = 2\pi/3$ et $x = 4\pi/3$. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont au final

$$x \in \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\right\}. \quad (79.6)$$

Exercice 13

(1) (a) Exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
  (b) Exprimer $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
  (c) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

(2) (a) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
  (b) Déterminer un réel A et un réel φ tels que :
    i. $\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \cos(x + \varphi)$;
    ii. $\cos(x) + \sin(x) = A\cos(x + \varphi)$.

Correction de l'exercice ??

(1) (a) C'est un cas particulier d'utilisation des formules, qui devraient être bien connues, pour les valeurs de cosinus et de sinus d'une somme ou d'une différence d'angles.

À retenir 79.2

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta); \tag{79.7}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta). \tag{79.8}$$

Nous obtenons

À retenir 79.3

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x); \tag{79.9}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x). \tag{79.10}$$

(b) On sait que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, par conséquent, les formules du point précédent nous donnent

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \frac{2\cos^2(x)\tan(x)}{\cos^2(x)\big(1 - \tan^2(x)\big)} = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

(c) L'angle $\dfrac{\pi}{8}$ est la moitié de l'angle $\dfrac{\pi}{4}$, dont on connaît les valeurs de sinus et cosinus : $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Pour trouver $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ nous écrivons alors un système de deux équations

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right), \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right). \end{cases}$$

Ensuite on utilise la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui nous donne, dans la première équation $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^{1/2}$ et ensuite $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^{1/2}$. Il est possible (mais demande un peu plus de travail) de ne pas utiliser du tout la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ car le système nous donne déjà suffisamment d'information.

(2) (a) Ici aussi, il suffit d'écrire les angles $\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{7\pi}{12}$ et $\dfrac{5\pi}{12}$ comme sommes ou différences d'angles dont on connaît les valeurs de cos, sin et tan. Les formules vues dans les premiers points de cet exercice nous permettrons de conclure. Une possibilité est la suivante $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}$.

(b) i. Dans la première équation il faut juste chercher un angle φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La réponse est donc $\varphi = \frac{\pi}{6}$

ii. Dans cette deuxième équation il faut que $\cos(\varphi) = -\sin(\varphi) = \frac{1}{A}$. On trouve alors $A = \sqrt{2}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

79.4 TD 4 : Fonction trigonométriques réciproques

Exercice 14

(1) Résoudre les équations : **a/** $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{4}$ **b/** $\arcsin(x) = \dfrac{3\pi}{4}$

(2) $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Que vaut $\arcsin(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$? Peut-on comparer $\arcsin(\sin(x))$ et x ?

(3) Résoudre les équations : **a/** $\arccos(x) = \frac{\pi}{4}$ **b/** $\arccos(x) = \frac{3\pi}{4}$

(4) $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Que vaut $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$? Peut-on comparer $\arccos(\cos(x))$ et x ?

Correction de l'exercice ??

(1) La fonction arcsin est une bijection définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ qui prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Il existe donc une seule solution de la première équation, qui est $x = \sqrt{2}/2$. La deuxième équation, par contre, n'a pas de solution.

(2) On peut toujours comparer $\arcsin(\sin(x))$ et x, mais la relation $\arcsin(\sin(x)) = x$ sera satisfaite uniquement si x appartient à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dans les autres cas, on saura seulement que soit $x = \arcsin(\sin(x)) + 2K\pi$ ou $x = -\arcsin(\sin(x)) + (2K+1)\pi$, avec $K \in \mathbb{Z}$.

(3) La fonction arccos est une bijection définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, \pi]$. Il existe donc une seule solution de la première équation, qui est $x = \sqrt{2}/2$ et une seule solution de la deuxième, qui est $x = -\sqrt{2}/2$.

(4) On peut toujours comparer $\arccos(\cos(x))$ et x, mais la relation $\arccos(\cos(x)) = x$ sera satisfaite uniquement si x appartient à l'intervalle $[0, \pi]$. Dans les autres cas, on saura seulement que soit $x = \arccos(\cos(x)) + 2K\pi$ ou $x = -\arccos(\cos(x)) + 2K\pi$, pour un $K \in \mathbb{Z}$ à déterminer.

Exercice 15

(1) La fonction arcsin est-elle paire ou impaire ?

(2) La fonction arccos est-elle paire ou impaire ? Exprimer $\arccos(-x)$ en fonction de $\arccos(x)$.

(3) Montrer que pour tout réel x de [-1 ; 1] : $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Correction de l'exercice ??

(1) La fonction arcsin est impaire. Pour le voir il suffit d'utiliser la relation $\arcsin(\sin(x)) = x$, qui est satisfaite pour tout x dans l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a donc que pour tout y dans le domaine de arcsin, il existe un x dans $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $y = \sin(x)$. On a alors $\arcsin(-y) = \arcsin(-\sin(x)) = \arcsin(\sin(-x)) = -x = -\arcsin(y)$, ce qui revient à dire que arcsin est impaire.

(2) La fonction arccos prend se valeurs sur un intervalle qui n'est pas symétrique par rapport à 0, par conséquent, cos n'est ni paire ni impaire. On peut tout de même essayer d'exprimer $\arccos(-y)$ en fonction de $\arccos(y)$, en se disant que si y est dans le domaine de arccos alors il existe un x entre 0 et π tel que $y = \cos(x)$. Alors $\arccos(-y) = \arccos(-\cos(x)) = \arccos(\cos(\pi - x)) = \pi - \arccos(y)$. Dans cette dernière suite d'égalités on a utilisé la formule pour le cosinus d'une différence d'angles.

(3) Pour tous les x dans l'intervalle $[-1, 1]$ on a que par définition $\cos(\arccos(x)) = x$ et que

$$\cos\left(-\arcsin(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\arcsin(x))\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\arcsin(x))\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\arcsin(x)) = x.$$

Donc $\arccos(x) = -\arcsin(x) + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 16

On considère les fonctions f_1 et f_2 définies par

$$\begin{aligned} f_1 &\colon x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ f_2 &\colon x \mapsto \arcsin(x). \end{aligned} \tag{79.11}$$

(1) Déterminer les ensembles de définitions de ces deux fonctions et calculer leurs dérivées.
(2) En déduire une relation entre f_1 et f_2.

Correction de l'exercice ??

(1) L'ensemble de définition de f_2 a été donné dans le cours, il s'agit de l'intervalle $[-1, 1]$. Pour la fonction f_1 on commence par dire que la racine carrée est définie si $1 - x^2 \geqslant 0$ et que à son tour la fraction rationnelle est définie uniquement si $\sqrt{1 - x^2} \neq 0$. la fonction arctan par contre est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. En somme nous avons que $\text{Domaine}_{f_2} =]-1, 1[$.
La dérivée de f_2 a été donné dans le cours, il s'agit de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Pour calculer la dérivée de f_1 il faut appliquer à plusieurs reprises la formule de dérivation des fonctions composées

$$\begin{aligned} f_1'(x) =& \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \\ =& \frac{1-x^2}{(1-x^2)+x^2} \cdot \frac{\frac{(1-x^2)+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Les deux fonctions ont donc la même dérivée. Il faut aussi remarquer que les ensembles de définitions de dérivées sont égaux.

(2) On peut en conclure que la fonction différence entre f_1 et f_2, définie sur la partie commune du domaine $]-1, 1[$, est une constante (c'est à dire, une fonction qui a dérivée nulle). Laquelle ? Il suffit de calculer $f_1(x) - f_2(x)$ pour une valeur de x : si on prend par exemple $x = 0$ on a $f_1(0) - f_2(0) = 0$. Cela nous dit que f_1 et f_2 sont égales sur l'intervalle $]-1, 1[$. On ne peut pas les comparer aux points $x = \pm 1$, car f_1 n'est pas définie à ces points.

Exercice 17
On considère maintenant la fonction

$$g(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{79.12}$$

Simplifier l'expression de g.
Conseil : utiliser les résultats de l'exercice **??**.

Correction de l'exercice ??

L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$ tout entier. Cela arrive parce que $1 + x^2 > 0$ pour tout x, $\sqrt{1+x^2} > 1$ pour tout x et

$$\left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| \leqslant 1, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Cette dernière inégalité est facile à démontrer si on utilise le fait que $|x| = \sqrt{(x)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La dérivée de g est

$$\begin{aligned} g'(x) =& \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \\ =& \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{(1+x^2)-x^2}} \cdot \frac{\frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Les fonctions g et arctan ont donc la même dérivée et le même ensemble de définition. On peut en conclure que la fonction différence entre g et arctan est une constante. On trouve $g(0) - \arctan(0) = 0$. Les deux fonctions sont donc égales.

Exercice 18
On considère la fonction f définie par $f(x) = \tan(2 \arctan(x))$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

(2) Montrer que pour tout x de l'ensemble de définition, $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Correction de l'exercice ??

(1) On sait que $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et par conséquent $2\arctan(x) \in]-\pi, \pi[$. Or, la fonction tan n'est pas définie en $\pm\frac{\pi}{2}$, donc il faut éviter les valeurs de x pour lesquels $2\arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$, c'est à dire qu'il faut imposer la condition $x \neq \pm 1$. Le domaine de la fonction f est donc $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$.

(2) Pour plus de lisibilité on appelle $g(x)$ la fonction $\frac{2x}{1-x^2}$.
La façon classique de résoudre ce type d'exercice comporte deux pas :
— remarquer que $g(0) = 0$ et $f(0) = 0$ c'est à dire que les graphes des fonctions f et g se croisent en correspondance à $x = 0$;
— calculer les dérivées de f et de g, montrer qu'elles sont égales et conclure que la fonction différence $f - g$ est constante (et donc il s'agit de la fonction nulle, par le point précédent).
Dans cet exercice en particulier, cette méthode n'est pas très performante, parce que l'expression de la dérivée de f est compliquée.
Nous allons donc utiliser la définition de la fonction tangente, les formules pour calculer sinus et cosinus de $2x$ et la définition de arctan.

$$\begin{aligned}
f(x) = \tan(2\arctan(x)) &= \frac{\sin(2\arctan(x))}{\cos(2\arctan(x))} \\
&= \frac{2\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x)) - \sin^2(\arctan(x))} \\
&= \frac{2\frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}}{1 - \frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{2\tan(\arctan(x))}{1-\tan^2(\arctan(x))} \\
&= \frac{2x}{1-x^2} = g(x),
\end{aligned}$$

pour tout x dans l'ensemble de définition de f.

79.5 TD 5 : Trigonométrie hyperbolique

Exercice 19

Remarque 79.4.
Les points 4, 5 et 6 de cet exercice sont donnés en devoir.

On appelle *sinus hyperbolique* (sinh) et *cosinus hyperbolique* (cosh) les fonction définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{79.13}$$

(1) Trouver les domaines de définition de sinh et cosh, étudier leur parité.

(2) Ces fonctions sont continues et dérivables sur tout leur domaine. Trouver $\sinh'(x)$ et $\cosh'(x)$.

(3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Que peut-on en déduire sur l'image de cosh ?

(4) Démontrer les formules suivantes :
  (a) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$;
  (b) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

(5) Donner des expressions de $\cosh(2x)$ et $\sinh(2x)$ en fonction de $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$.

(6) Simplifier l'expression $f(x) = \cosh\left(\ln(x + \sqrt{x^2-1})\right)$ en utilisant la définition (**??**).

Correction de l'exercice ??

(1) Les fonctions sinh et cosh sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction sinh est impaire, car

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\sinh(x).$$

En procédant de la même manière on trouve que cosh est paire.

(2)

$$\sinh'(x) = \frac{e^{x} - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$
$$\cosh'(x) = \frac{e^{x} + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh(x).$$

(3) On calcule directement en utilisant les formules (**??**). Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)\right] = 1.$$

par la définition on savait déjà que la fonction cosh est strictement positive, cette nouvelle relation nous dit que $\cosh(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(4) Nous allons simplement utiliser les définitions de sinh et cosh.

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2};\\
\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) &= \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\\
&= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{4}\\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}.
\end{aligned}$$

L'autre égalité peut se montrer de façon analogue.

(5) Par le point précédent, en prenant $y = x$: $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$ et $\sinh(2x) = 2\cosh(x)\sinh(x)$.

(6)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cosh\left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\right)\\
&= \frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})} + e^{-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}\right) = x
\end{aligned}$$

79.6 TD 6 : Calcul intégral, introduction

Exercice 20

Calculer l'aire de la surface limitée par les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ et la parabole d'équation $y = x^2 - x + 1$. Faire un dessin.

Correction de l'exercice ??

La fonction $f(x) = x^2 - x + 1$ ne prends que de valeurs positives quand x est dans l'intervalle $[0, 2]$. En effet, la dérivée $f'(x) = 2x - 1$ ne vaut zéro que en $x = 1/2$, est négative sur $[0, 1/2[$ et positive sur $]1/2, 2]$. Cela veut dire que $f(1/2) = 1/4 - 1/2 + 1 = 3/4$ est le minimum de f sur $[0, 2]$.

La valeur de l'aire à calculer est donc l'intégrale de f sur l'intervalle $[0, 2]$

$$\int_0^2 x^2 - x + 1\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 2 = \frac{8}{3}.$$

Exercice 21

(1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2$.
   (a) Déterminer la primitive F_1 de f qui s'annule en 2.
   (b) Tracer les représentations graphiques de f et de F_1.

(2) (a) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) Déterminer la primitive sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan qui s'annule en $\frac{\pi}{3}$.

Correction de l'exercice ??

(1) L'ensemble des primitives de f est

$$\int x + 2\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pour répondre à la question il faut trouver une valeur de C telle que si $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$ alors $F_1(2) = 0$, c'est à dire que C est la solution de $6 + C = 0$. On a alors $C = -6$ et $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$.

> **À retenir 79.5**
> Dans cette deuxième partie de l'exercice nous sommes obligés à préciser dans quel intervalle sera définie la primitive que nous intéresse. Cela est du au fait que l'ensemble de définition de la fonction tan consiste en une réunion d'intervalles disjoints. **Cela ne veut pas dire qu'on calcul l'intégrale de** tan **sur l'intervalle** $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ **! !**

(2) L'ensemble des primitives que nous intéresse est donc

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\ln\left(|\cos(x)|\right) + C = \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) + C,$$

pour $C \in \mathbb{R}$, et x dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
Le choix de l'intervalle nous à permis d'omettre la valeur absolue, car la fonction cos est toujours positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
Pour déterminer la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{3}$ il faut résoudre l'équation $\ln\left(\frac{1}{\cos(\pi/3)}\right) + C = 0$.
On trouve $C = \ln(2)$ et donc la primitive cherchée est $F(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) + \ln(2) = \ln\left(\frac{2}{\cos(x)}\right)$.

Exercice 22
L'exemple **??** nous a montré que le logarithme était une primitive de la fonction inverse

$$\begin{aligned} i\colon]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{79.14}$$

Trouver une primitive de la fonction

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{79.15}$$

En d'autres termes, nous demandons une primitive de la fonction inverse sur les négatifs.

Correction de l'exercice ??
Le fait que $x \mapsto \ln(x)$ soit une primitive de $\frac{1}{x}$ se traduit par le fait que

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt. \tag{79.16}$$

La primitive de la fonction $x \mapsto 1\frac{1}{x}$ pour les x négatifs sera la fonction de x donnée par

$$\int_{-1}^{x} \frac{1}{t} dt = \int_{1}^{-x} \frac{1}{-u}(-du) = \int_{1}^{-x} \frac{1}{u} du = \ln(-x). \tag{79.17}$$

Dans ce calcul x est une constante négative.

Donc pour les x négatifs, la primitive choisie de $\frac{1}{x}$ est la fonction $x \mapsto \ln(-x)$.

Pour toutes les valeurs de x nous avons que la primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(|x|)$.

Exercice 23

Calculer les intégrales suivantes

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^5 + 3x^2 + 3\, dx\,;$

(2) $\displaystyle\int_1^2 x^{1/3} + 4x^{1/2}\, dx\,;$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^0 \cos(x)\, dx\,;$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^1 e^x\, dx\,;$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$

Correction de l'exercice ??

Il suffit d'appliquer la formule (**??**) et d'utiliser la linéarité de l'intégrale et le tableau des primitives des fonctions fondamentales.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^5 + 3x^2 + 3\, dx = \left[\frac{1}{6}x^6 + x^3 + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{6} + 4 = \frac{25}{6}\,;$

(2) $\displaystyle\int_1^2 x^{1/3} + 4x^{1/2}\, dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 4\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{3}{2}2^{\frac{1}{3}} + \frac{16}{3}2^{\frac{1}{2}} - \frac{41}{12}\,;$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^0 \cos(x)\, dx = [\sin(x)]_{-\pi}^0 = 0\,;$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^1 e^x\, dx = [e^x]_{-2}^1 = e - e^{-2}\,;$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 x^{-1/2}\, dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2.$

Exercice 24

Calculer l'aire de la region du plan comprise entre les graphes de $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = -x^2 + x$.

Correction de l'exercice ??

Les courbes réprésentatives de f et g sont deux paraboles, respectivement, une convexe et l'autre concave. Comme nous sommes intéressés par une region bornée du plan entre le deux courbes, nous cherchons les x tels que $g(x) > f(x)$. La différence $g(x) - f(x) = -2x^2 + 3x$ est nulle pour $x = 0$ et $x = 3/2$ et positive pour tout x entre les deux. La region dont il faut calculer l'aire est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, 3/2], y \in [f(x), g(x)]\}$.

L'intégrale à calculer sera $\displaystyle\int_0^{3/2} g(x) - f(x)\, dx = \int_0^{3/2} -2x^2 + 3x\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^{3/2} = \frac{9}{8}.$

79.7 TD 7 : Recherche de primitives

Exercice 25

Déterminer les ensembles de primitives suivants :

(1) $\displaystyle F_1(x) = \int x(x^2 + 3)\, \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle F_2(x) = \int x\sqrt{1 + x^2}\, \mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle F_3(x) = \int \frac{x^2}{1 + x^3}\, \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle F_4(x) = \int xe^x\, \mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle F_5(x) = \int \arcsin(x)\, \mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle F_6(x) = \int x^2e^x\, \mathrm{d}x$

(7) $F_7(x) = \int \ln(x)\,\mathrm{d}x$

(8) $F_8(x) = \int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$

(9) $F_9(x) = \int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

(10) $F_{10}(x) = \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$

(11) $F_{11}(x) = \int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

(12) $F_{12}(x) = \int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

(13) $F_{13}(x) = \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

(14) $F_{14}(x) = \int \frac{8x}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

(15) $F_{15}(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln(x)}}\,\mathrm{d}x$ (poser $t = 1-\ln(x)$).

Correction de l'exercice ??

(1) Par parties : $F_1(x) = \int x(x^2+3)\,dx = x\left(\frac{x^3}{3}+3x\right) - \int \frac{x^3}{3}+3x\,dx = \frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+C$. À l'aide du changement de variable $u = x^2+3$: on a $du = 2xdx$ et donc $F_1(x) = \int x(x^2+3)\,dx = \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{u^2}{4}+C = \frac{1}{4}\left(x^4+6x^2+9\right)+C = \frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+C$. Bien entendu, la constante C a absorbé le $\frac{9}{4}$ dans le dernier passage.

(2) À l'aide du changement de variable $u = x^2+1$: on a $du = 2xdx$ et donc $F_2(x) = \int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}u^{3/2}+C = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$.

(3) À l'aide du changement de variable $u = x^3+1$: on a $du = 3x^2dx$ et donc $F_3(x) = \int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln(|u|)+C = \frac{1}{3}\ln(|x^3+1|)+C$.

(4) Par parties : $F_4(x) = \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x+C$.

(5) Il faudra utiliser ici l'intégration par parties (comme dans **??**) et ensuite un changement de variable. On commence par calculer $F_5(x) = \int 1\times\arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Ensuite on pose $u = 1-x^2$ et on obtient $F_5(x) = x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}+C$.

(6) Il faudra utiliser ici l'intégration par parties deux fois de suite. $F_6(x) = \int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$.

(7) Cette primitive a été calculée dans l'exemple **??**.

(8) Par parties : $F_8(x) = \int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

(9) Par parties : $F_9(x) = \int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x)+\sin(x)+C$.

(10) Le calcul se fait, comme dans l'exemple **??**, en s'appuyant sur des formules de trigonométrie. Première possibilité : $F_{10}(x) = \int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4}+C$.

Deuxième possibilité (avec une intégration par parties d'abord) : on écrit $F_{10}(x) = \int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x) + \int \cos^2(x)\,dx$ et ensuite on remarque que en intégrant une deuxième fois par parties on n'avance pas du tout. On utilise alors la formule $1 = \cos^2(x)+\sin^2(x)$ et on a $F_{10}(x) = -\cos(x)\sin(x) + \int 1-\sin^2(x)\,dx$. On a alors que $\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\cos(x)\sin(x)+x\right)+C$. Le résultat est le même qu'on a obtenu ci-dessus, parce que $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

(11) Par parties on a
$$F_{11}(x) = \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx,$$
d'où on déduit que $F_{11}(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C$.

(12) À l'aide du changement de variable $u = x^2$: on a $du = 2xdx$ et donc $F_{12}(x) = \displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\arctan(u) + C = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$.

(13) On observe que $F_{13}(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx$. Le changement de variable $t = x+2$ nous donne $F_{13}(x) = \displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t) + C = \arctan(x+2) + C$.

(14) Pour calculer cette primitive on voudrait écrire convenablement le polynôme au dénominateur de $\displaystyle\frac{8x}{x^2+4x+5}$. On peut d'abord essayer d'en chercher les racines, mais une fois vu qu'elle ne sont pas réelles nous devons abandonner l'espoir de décomposer la fonction rationnelle. Ici nous pouvons observer que le numérateur est de degré 1 et le dénominateur de degré 2. Il faut donc chercher à trouver une fonction à intégrer (par changement de variable) de la forme u'/u. La dérivée de x^2+4x+5 et $2x+4$ donc $F_{14}(x) = 4\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{4}{x^2+4x+5}\,dx = 4\ln\left(|x^2+4x+5|\right) - 16\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$. L'intégrale qui reste n'est pas encore banale. L'astuce standard dans ce cas consiste à écrire x^2+4x+5 dans la forme 1 + (un carré) et ensuite utiliser un changement de variable pour se ramener à la dérivée de la fonction arctan. En somme $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,dx$ et nous pouvons le calculer facilement à l'aide du changement de variable $u = x+2$: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(u) + C = \arctan(x+2) + C$. Finalement, $F_{14}(x) = 4\ln\left(|x^2+4x+5|\right) - 16\arctan(x+2) + C$.

(15) Le changement de variable conseillé nous donne $F_{15}(x) = \displaystyle\int \frac{1}{e^{1-t}\sqrt{t}}(-e^{1-t})dt = -\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = -2\sqrt{t} + C = -2\sqrt{1-\ln(x)} + C$.

79.8 TD 8 : Intégrale définie

Exercice 26
Calculer les intégrales suivantes

(1) $I_1 = \displaystyle\int_1^{\pi} \frac{4x^3}{x^4+5}\,dx$;

(2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(4x+1)^4}\,dx$;

(3) $I_3 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} \frac{1}{x^2+5}\,dx$;

(4) $I_4 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$. Prendre $u = \sin(x)$;

(5) $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$. Prendre $u = e^x$;

(6) $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$. Prendre $x = \tan u$;

(7) $I_7 = \displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a \in [0\,;+\infty[$. Prendre $x = a\sin(u)$.

(8) $I_8 = \displaystyle\int_{-\pi}^{0} e^x\sin(x)\,dx$;

(9) $I_9 = \displaystyle\int_1^2 x^2\ln(2x)\,dx$.

(10) $I_{10} = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^5+x^3}\,dx$.

(11) $I_{11} = \displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2}dx$. Conseil : écrire la fraction sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$.

(12) $I_{12} = \displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)dx$.

(13) $I_{13} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$.

(14) $I_{14} = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-2x}}{(1 + 2e^{-x})^2} dx$.

(15) $I_{15} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$. Conseil : poser $t = x^2 + 1$.

Correction de l'exercice ??

(1) $I_1 = \displaystyle\int_1^\pi \frac{4x^3}{x^4 + 5}\, dx = \left[\ln(x^4 + 5)\right]_1^\pi = \ln\left(\frac{\pi^4 + 5}{6}\right)$.

(2) On utilise le changement de variable $u = 4x + 1$. On a alors $du = 4dx$, les bornes du domaine d'intégration deviennent $u(0) = 1$ et $u(1) = 5$ et notre intégrale s'écrit de la forme suivante

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(4x + 1)^4}\, dx = \int_1^5 \frac{1}{4u^4}\, du = \left[-\frac{1}{12u^3}\right]_1^5 = -\frac{1}{12 \times 125} + \frac{1}{12} = \frac{31}{375}.$$

(3) Ici on vise à écrire la fonction à intégrer comme $\frac{1}{u^2+1}$, pour avoir $\arctan(u)+C$ comme primitive. Pour ainsi faire, nous devons utiliser le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{5}}$. On a alors $du = \frac{1}{\sqrt{5}}dx$, les bornes du domaine d'intégration deviennent $u(0) = 0$ et $u(\sqrt{5}) = 1$

$$I_3 = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{1}{x^2 + 5}\, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{5(u^2 + 1)}\, du = \frac{1}{\sqrt{5}}[\arctan(u)]_0^1 = \frac{\pi}{4\sqrt{5}}.$$

(2) On utilise le changement de variable $u = \sin(x)$, qui comporte $du = \cos(x)\, dx$, $u(-\pi/2) = -1$ et $u(0) = 0$. Nous avons alors que $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^0 u^2\, du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{3}$.

(5) Le bon changement de variable nous est donné par l'énoncé. On a $du = e^x dx$, les bornes d'intégration deviennent $u(0) = e^0 = 1$ et $u(1) = e$ et notre intégrale sera

$$I_5 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 4}\, dx = \int_1^e \frac{1}{u^2 + 4}\, du.$$

Il faut maintenant travailler comme dans le point précédent de cet exercice. Soit $t = \frac{u}{2}$ alors

$$I_5 = \int_{1/2}^{e/2} \frac{2}{4(t^2 + 1)}\, dt = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{e}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

(6) Le bon changement de variable nous est donné par l'énoncé. On a $(1 + \tan^2(u))du = dx$, les bornes d'intégration deviennent $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \pi/4$ et notre intégrale sera

$$I_6 = \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \tan^2(u)}{(1 + \tan^2(u))^{\frac{3}{2}}}\, du = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1 + \tan^2(u))^{\frac{1}{2}}}\, du.$$

On observe alors que

$$\frac{1}{(1 + \tan^2(u))^{\frac{1}{2}}} = \cos(u),$$

et donc

$$I_6 = \int_0^{\pi/4} \cos(u)\, du = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3) On utilise le changement de variable $x = a\sin(u)$, qui comporte $dx = a\cos(u)\, du$ et, en utilisant la fonction $u(x) = \arcsin(x/a)$, $u(a) = \pi/2$ et $u(0) = 0$. On obtient

$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2(u)}a\cos(u)\, du = a^2 \int_0^{\pi/2} |\cos(u)|\cos(u)\, du.$$

Cette dernière intégrale est égale à $a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\,du$, car toutes les valeurs prises par la fonction cosinus lorsque x varie entre 0 et $\pi/2$ sont positives. En intégrant par parties on trouve que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\,du = \int_0^{\pi/2} \sin^2(u)\,du,$$

d'où on peut écrire

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\,du = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(u)+\cos^2(u)}{2}\,du = \frac{\pi}{4}.$$

La velauer de l'intégrale I_7 est $a^2\frac{\pi}{4}$.

(8) On intègre par parties

$$\begin{aligned} I_8 = \int_{-\pi}^0 e^x \sin(x)\,dx &= [e^x \sin(x)]_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 e^x \cos(x)\,dx \\ &= 0 - [e^x \cos(x)]_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 e^x \sin(x)\,dx = -1 - e^{-\pi} - I_8 \end{aligned}$$

On conclut que $I_8 = \frac{-1-e^{-\pi}}{2}$.

(9) On intègre par parties

$$\begin{aligned} I_9 &= \int_1^2 x^2 \ln(2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(2x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3}\,dx \\ &= \left[\frac{8}{3}\ln(4) - \frac{1}{3}\ln(2)\right] - \left[\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\right] = \ln\left(\frac{4^{8/3}}{2^{1/3}}\right) - \frac{7}{9} = \ln(32) - \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

(10) Il faut réduire la fraction rationnelle en élément simples à intégrer. Pour le faire on commence par regarder le dénominateur et remarquer qu'il peut s'écrire comme $x^3(x^2+1)$. Notre objectif sera alors d'écrire $\frac{x^4+1}{x^5+x^3}$ comme une somme entre deux fractions rationnelles de dénominateur respectif x^3 et x^2+1. Comme le polynôme au numérateur a degré 4 il faut prévoir un polynôme de degré 2 au numérateur de x^3 et un polynôme de degré 1 au numérateur de x^2+1. On a alors

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^3} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Cela va nous donner un système de 5 équations pour les 5 inconnues A, B, C, D, E. On trouve que $A=-1$, $B=0$, $C=1$, $D=2$, $E=0$.

$$I_{10} = \int_1^2 \frac{x^4+1}{x^5+x^3}\,dx = \int_1^2 \frac{-x^2+1}{x^3} + \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_1^2 \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{2x}{x^2+1}\,dx.$$

Par un calcul désormais immédiat on trouve $I_{10} = \ln(5/4) + 3/8$.

(4) $I_{11} = \displaystyle\int_{-3}^0 \frac{1}{x^2-3x+2}dx$. Il est facile de vérifier que $\frac{1}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$. En écrivant la fonction à intégrer comme la somme de deux termes nous avons alors

$$I_{11} = -\int_{-3}^0 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_{-3}^0 \frac{1}{x-2}\,dx = [-\ln(|x-1|) + \ln(|x-2|)]_{-3}^0 = \ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

(5) Par parties : $I_{12} = \displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)dx = \left[x\ln^2(x)\right]_1^2 - \int_1^2 2\ln(x)dx = \left[x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x\right]_1^2 = 2\left(\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1\right)$.

(13) On va essayer le changement de variable $u = e^x + 1$. On a alors $du = e^x\,dx$ et on pourra écrire $e^x = u - 1$. Les bornes d'intégration deviennent $u(0) = 2$ et $u(1) = e + 1$.

$$I_{13} = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx = \int_2^{e+1} \frac{u-2}{u(u-1)}\,du.$$

La fonction de u à intégrer peut s'écrire comme la somme de deux fractions rationnelles plus simples de dénominateur respectif u et $u - 1$: pour le faire nous devons trouver A et B dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\frac{u-2}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$$

On obtient $A = 2$ et $B = -1$, donc notre intégrale devient

$$I_{13} = \int_2^{e+1} \frac{2}{u} - \frac{1}{u-1}\,du = \ln\left(\frac{(e+1)^2}{4e}\right).$$

(14) Nous utilisons le changement de variable $u = 1+2e^{-x}$. On a alors $du = -2e^{-x}dx$ et $\frac{1}{1-u}du = dx$.

$$\begin{aligned} I_{14} &= \int_1^2 \frac{e^{-2x}}{(1+2e^{-x})^2}\,dx = \int_{1+2/e}^{1+2/e^2} \left(\frac{u-1}{2}\right)^2 \frac{1}{u^2(1-u)}\,dx = -\int_{1+2/e}^{1+2/e^2} \frac{u-1}{4u^2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left[\ln(x) + \frac{1}{x}\right]_{1+2/e^2}^{1+2/e} = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{e+2}{e^2+2}\right) + \frac{e}{e+2} - \frac{e^2}{e^2+2}\right]. \end{aligned}$$

(15) Le bon changement de variable nous est donné par l'énoncé. On a $dt = 2xdx$, les bornes d'intégration deviennent $t(0) = 1$ et $t(1) = 2$ et notre intégrale sera

$$I_{15} = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int_1^2 \frac{t-1}{2t}dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\ln(t)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \ln(2)\right).$$

79.9 TD 9 : Équations différentielles : généralités

Exercice 27

Vérifier que $y(x) = -\sqrt{x^2+1}$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$2yy' - 2x = 0, \tag{79.18}$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = -1$.

Correction de l'exercice ??

Il nous faut montrer d'abord que la fonction y satisfait l'équation et ensuite que elle vérifie la condition initiale.

On calcule à part la fonction dérivée y'

$$y'(x) = -\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = -\left((x^2+1)^{1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}2x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

et on substitue y' et y dans le membre de gauche de l'équation par leurs expressions analytiques. On obtient

$$2\left(-\sqrt{x^2+1}\right)\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - 2x = 2x - 2x = 0,$$

ce qui veut dire que y satisfait l'équation différentielle.

Ensuite nous devons calculer $y(0)$ et montrer qu'il vaut -1 : on a $y(0) = -\sqrt{0^2+1} = -\sqrt{1} = -1$.

Exercice 28

(1) Déterminer une fonction polynomiale qui soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' - 4y = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3. \tag{79.19}$$

(2) On considère l'équation différentielle

$$y' - 2y = \sin(x). \tag{79.20}$$

Trouver une solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation sous la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$, où a et b sont des constantes réelles.

Correction de l'exercice ??

(1) La solution cherchée est une fonction polynomiale de degré au plus 3. Il s'agit donc d'une fonction de la forme $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d réels à déterminer. Nous calculons la dérivée de cette fonction, $y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, et ensuite nous faisons la substitution dans l'équation

$$\big(3ax^2 + 2bx + c\big) - 4\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3.$$

Cette équation ne peut être vérifiée que si les coefficients des termes du même degré sont égaux. Pour trouver les bonnes valeurs de a, b, c, d dans $\mathbb{R}$ il suffit donc d'écrire un système comme le suivant

$$\begin{cases} -4a = 4, & \text{ici on impose que les coefficient des termes de degré 3 soient égaux ;}\\ 3a - 4b = -15, & \text{ici on impose que les coefficient des termes de degré 2 soient égaux ;}\\ 2b - 4c = 2, & \text{ici on impose que les coefficient des termes de degré 1 soient égaux ;}\\ c - 4d = -3, & \text{ici on impose que les coefficient des termes de degré 0 soient égaux.} \end{cases}$$

On a alors $a = -1$, $b = 3$, $c = 1$ et $d = 1$. La solution polynomiale de l'équation différentielle est $y(x) = -x^3 + 3x^2 + x + 1$.

(2) Ici aussi il faut procéder par substitution. La dérivée de $y(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ est $y'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$, donc on obtient

$$-a\sin(x) + b\cos(x) - 2\,(a\cos(x) + b\sin(x)) = \sin(x)$$

Cette équation doit être satisfaite pour tout valeur de x. En particulier, si x vaut 0 alors tous les termes avec $\sin(x)$ sont nuls et si x vaut $\pi/2$ alors tous les termes avec $\cos(x)$ sont nuls. Cela permet d'écrire un système de deux équations pour déterminer les deux inconnues a et b :

$$\begin{cases} b - 2a = 0 & \text{ici on prend } x = 0\,;\\ -a - 2b = 1 & \text{ici on prend } x = \pi/2. \end{cases}$$

Exercice 29

On considère, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y' = y + x. \tag{79.21}$$

(1) Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation (**??**). Montrer que la fonction différence $y_h = y_1 - y_2$ est une solution de

$$y' = y. \tag{79.22}$$

(2) Trouver une solution de (**??**) de la forme $ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

(3) Comment trouve-t-on la solution générale de (**??**) ?

Correction de l'exercice ??

(1) Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation (**??**). La fonction différence $y_h = y_1 - y_2$ est dérivable et sa dérivée est donné par $y_h' = y_1' - y_2'$, ce qui implique que

$$y_h' = y_1' - y_2' = (y_1 + x) - (y_2 + x) = y_1 - y_2 = y_h.$$

(2) On remplace y dans l'équation (**??**) par une fonction de la forme $y_p = ax + b$, où a et b sont des nombres réels, et on obtient des conditions sur a et b

$$y_p' = y_p + x \Rightarrow a = (a+1)x + b, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On a alors que $a = b$ et $b = -1$, donc $y_p(x) = -x - 1$.

(3) La solution générale de l'équation (**??**), $\mathcal{Y}$, est donnée par la somme de y_p et de la solution générale de l'équation $y' = y$. Cette dernière équation a comme solution générale $\mathcal{Y}_h = \{Ce^x : C \in \mathbb{R}\}$, donc on a $\mathcal{Y} = \{Ce^x - x - 1 : C \in \mathbb{R}\}$.

79.10 TD 10 : Équations différentielles : résolution

Exercice 30
Équations différentielles à variables séparables

(1) Déterminer la solution f de l'équation différentielle $(E_1) : (1+y)y' = 4x^3$, qui vérifie la condition initiale $f(5) = 14$.

(2) Déterminer la solution g de l'équation différentielle $(E_2) : y' = xy^2$ qui vérifie la condition initiale $g(1) = -\frac{1}{2}$.

(3) On considère l'équation différentielle $(E_3) : y^2y' = x^2$.
   (a) Déterminer la forme générale des solutions.
   (b) Déterminer les solutions φ_1, φ_2 et φ_3 qui vérifient respectivement : $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 1$ et $\varphi_3(0) = -1$.

Correction de l'exercice ??

(1) On commence par trouver la solution générale de (E_1). Comme l'équation est à variables séparables nous allons intégrer de deux côtés par rapport à la variable x.

$$\int (1 + y(x))y'(x)\, dx = \int 4x^3\, dx.$$

Nous faisons le changement de variable $y = y(x)$ dans le membre de gauche pour obtenir une expression facile à intégrer

$$\int (1 + y)\, dy = \int 4x^3\, dx.$$

et finalement nous avons

$$y + \frac{y^2}{2} = x^4 + C.$$

Il n'est pas possible de trouver une forme explicite pour y sans prendre en compte la condition initiale, car la fonction $y \mapsto \frac{y^2}{2} + y$ n'admet pas de réciproque. Il vaut mieux, dans ce cas, dire que la solution générale de l'équation est l'ensemble de toutes les fonctions y qui satisfont $y + \frac{y^2}{2} = x^4 + C$ pour un quelque C dans $\mathbb{R}$.
Pour déterminer la solution particulière f nous devons remplacer x par 5 et y par 14 dans $y + \frac{y^2}{2} = x^4 + C$. Cela nous permet de fixer une valeur de C : $14 + \frac{(14)^2}{2} = (5)^4 + C$ implique $C = -513$.
La forme explicite de f est donnée par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{-2 + 2\sqrt{1 + 2(x^4 - 513)}}{2},$$

où le fait de connaître la valeur de f en $x = 5$ nous a permis de choisir entre $\dfrac{-2 + 2\sqrt{1 + 2(x^4 - 513)}}{2}$ et $\dfrac{-2 - 2\sqrt{1 + 2(x^4 - 513)}}{2}$.

(2) On commence par traiter le cas où $y = 0$: on aurait alors que $y' = 0$ et la seule solution possible de l'équation différentielle serait la fonction qui vaut toujours zéro. Cette fonction ne satisfait pas la condition initiale et par conséquent nous pouvons supposer que $g(x) \neq 0$ pour tout x. Cela nous permet de diviser par y^2 les deux membres de l'équation différentielle et de séparer ainsi les variables
$$\frac{y'}{y^2} = x.$$
En intégrant des deux côtés nous obtenons la solution générale $\frac{1}{y} = -\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$ avec $C \in \mathbb{R}$, qu'on peut expliciter par $y = \frac{-2}{x^2+C}$. La valeur de C qui correspond à g est facile à trouver : $-\frac{1}{2} = \frac{-2}{1+C}$ implique $C = 3$, c'est à dire $g(x) = \frac{-2}{x^2+3}$.

(3) (a) En intégrant des deux côtés de l'équation nous obtenons $\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$, donc la forme explicite de la la solution générale de cette équation est $y = \left(x^3 + C\right)^{1/3}$.

(b) La solution particulière qui satisfait la condition $\phi_1(0) = 0$ est $\phi_1(x) = x$ car la constante C doit être nulle et $\left(x^3\right)^{1/3} = x$. La solution particulière qui satisfait la condition $\phi_2(0) = 1$ est $\phi_2(x) = \left(x^3 + 1\right)^{1/3}$, celle qui satisfait la condition $\phi_3(0) = -1$ est $\phi_3(x) = \left(x^3 - 1\right)^{1/3}$.

Exercice 31

Équations différentielles linéaires du premier ordre sans second membre

(1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - xy = 0$ et déterminer la solution φ de cette équation qui vérifie $\varphi(1) = 2$.

(2) Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $xy' - y = 0$ et déterminer la solution φ de cette équation qui vérifie $\varphi(1) = 2$.

(3) Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $y' - \left(\frac{2}{x^2}\right) y = 0$.

Correction de l'exercice ??

Dans cet exercice nous allons utiliser la formule (**??**). Si vous oubliez la formule vous pouvez vous en sortir sans problèmes en utilisant la méthode de résolution pour les équations à variables séparables, dont les équations linéaires du premier ordre sans second membre sont un cas particulier.

(1) Dans ce cas, $a(x) = 1$ et $b(x) = -x$ donc la formule nous donne
$$\mathcal{Y} = \left\{Ke^{\int x\,dx} = Ke^{x^2/2}, \qquad K \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$
Pour déterminer la solution φ nous utilisons la condition donnée dans l'énoncé, ce qui nous donne $K = 2e^{-1/2}$.

(2) Ici $a(x) = x$ et $b(x) = -1$ donc la formule nous donne
$$\mathcal{Y} = \left\{Ke^{\int \frac{1}{x}\,dx} = Ke^{\ln(x)} = Kx, \qquad K \in \mathbb{R},\ x \in]0\,;\,+\infty[\right\}.$$
Pour déterminer la solution φ nous utilisons la condition donnée dans l'énoncé, ce qui nous donne $K = 2$. Il faut observer que dans la formule nous avons pu intégrer $1/x$ sans crainte et ensuite omettre la valeur absolue parce que l'énoncé nous dit que l'intervalle sur lequel nos solutions sont définies est $]0\,;\,+\infty[$.

(3) Par la formule de résolution présentée dans le cours la solution générale de cette équation est
$$\mathcal{Y} = \left\{Ke^{\int \frac{2}{x^2}\,dx} = Ke^{-2/x}, \qquad K \in \mathbb{R},\ x \in]0\,;\,+\infty[\right\}.$$

Exercice 32

(1) On cherche à résoudre sur $I =]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{3}{x}y = x$.

(a) Résoudre l'équation homogène (H) associée à (E) sur I.

(b) Utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E).

(c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I.

(d) Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 2 en 1.

(2) Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $xy' + 2y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Correction de l'exercice ??

La différence entre les deux points de cet exercice est que dans l'énoncé du premier on a détaillé chaque passage de la résolution, alors que l'énoncé du deuxième est plus synthétique. En pratique, comme on verra, on demande essentiellement la même chose.

(1) (a) L'équation homogène (H) associée à (E) sur I est

$$y' - \frac{3}{x}y = 0.$$

Sa solution générale est donnée par la formule (**??**)

$$\mathcal{Y}_h = \left\{Ke^{\int \frac{3}{x}\,dx} = Kx^3 \;:\; K \in \mathbb{R},\; x \in I\right\}.$$

(b) La méthode de variation de la constante consiste à remplacer la constante K dans $\mathcal{Y}_h$ par une fonction $x \mapsto K(x)$ à déterminer et ensuite injecter la fonction “candidate” solution $y_p = K(x)x^3$ dans (E) à la place de l'inconnue y. Nous avons donc

$$K'(x)x^3 + 3K(x)x^2 - \frac{3}{x}(K(x)x^3) = x,$$

c'est à dire

$$K'(x)x^3 = x, \text{ ou encore } K'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

L'ensemble des primitives de $1/x^2$ est $\mathcal{P} = -1/x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$ donc une solution particulière y_p est $-x^2$ (il suffit de prendre $C = 0$).

(c) L'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I est la somme entre la solution générale $\mathcal{Y}_h$ et y_p.

$$\mathcal{Y} = \left\{-x^2 + Kx^3 \;:\; C \in \mathbb{R},\; x \in I\right\}. \tag{79.23}$$

Remarque 79.6.
On peut aussi écrire $\mathcal{Y}$ comme le produit entre l'ensemble des primitives de K' et la fonction x^3, on écrirait alors $\mathcal{Y} = \left\{\left(-\dfrac{1}{x} + C\right)x^3 \;:\; C \in \mathbb{R},\; x \in I\right\}$.

(d) On doit simplement trouver la bonne valeur de K dans (**??**). Si $x = 1$ on a $y = -1^2 + K \cdot 1^3 = -1 + K$ Donc $y(1) = 2$ si et seulement si $K = 3$.

(2) Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $xy' + 2y = \frac{x}{x^2+1}$. Ici aussi nous devons trouver d'abord la solution générale de l'équation homogène associé $xy' + 2y = 0$, qui est, par la formule (**??**)

$$\mathcal{Y}_h = \left\{Ke^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = \frac{K}{x^2} \;:\; K \in \mathbb{R},\; x \in I\right\}.$$

Ensuite nous appliquons la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de l'équation de départ. Il faut injecter dans l'équation la “candidate” solution $\dfrac{K(x)}{x^2}$, ce qui donne

$$x\left(\frac{K'(x)}{x^2} - 2\frac{K(x)}{x^3}\right) + 2\frac{K}{x^2} = \frac{x}{x^2+1},$$

$$K'(x) = \frac{x^2}{x^2+1},$$

Pour trouver les primitives de K' nous pouvons utiliser le fait que $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$, et obtenir $K(x) = x - \arctan(x) + C$ pour $C \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation est donc

$$\mathcal{Y} = \left\{ \frac{x - \arctan(x) + C}{x^2} + \ : \ C \in \mathbb{R},\ x \in I \right\}.$$

Exercice 33

Équations différentielles linéaires du second ordre sans second membre

(1) (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(H_1) : y'' - 5y' + 6y = 0$.

(b) Déterminer la solution particulière φ_1 qui vérifie $\varphi_1(0) = -2$ et $\varphi_1'(0) = -2$.

(2) (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(H_2) : y'' + 2y' + 2y = 0$.

(b) Déterminer la solution particulière φ_2 qui vérifie $\varphi_2(0) = -2$ et $\varphi_2'(0) = -2$.

(3) (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(H_3) : y'' - 4y' + 4y = 0$.

(b) Déterminer la solution particulière φ_3 qui vérifie $\varphi_3(0) = -2$ et $\varphi_3'(0) = -2$.

Correction de l'exercice ??

(1) (a) Le polynôme caractéristique de l'équation (H_1) est $r^2 - 5r + 6$, dont les racines sont 2 et 3. Nous sommes donc dans le cas où les deux racines sont réelles et distinctes. La solution générale de cette équation est donc, en appliquant la formule (**??**)

$$\mathcal{Y}_h = \left\{ C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) L'ensemble des deux conditions nous permet d'écrire un système de des équations pour déterminer les deux inconnues C_1 et C_2.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -2 & \text{qui correspond à la condition } \varphi_1(0) = -2, \\ 2C_1 + 3C_2 = -2 & \text{qui correspond à la condition } \varphi_1'(0) = -2. \end{cases}$$

On a donc $C_1 = -4$ et $C_2 = 2$.
La solution particulière φ_1 est donc $\varphi_1(x) = -4e^{2x} + 2e^{3x}$.

(2) (a) Le polynôme caractéristique de l'équation (H_2) est $r^2 + 2r + 2$, qui admet deux racines complexes conjuguées : $-1 + i$ et $-1 - i$. La solution générale réelle de l'équation est déterminée à partir de la formule (**??**)

$$\mathcal{Y}_h = \left\{ e^{-x} \left(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \right) \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}. \tag{79.24}$$

(b) Comme on a fait pour l'équation (H_1), il faut utiliser les deux condition pour écrire un système de deux équations dans les inconnues C_1 et C_2.

$$\begin{cases} C_1 = -2 & \text{qui correspond à la condition } \varphi_2(0) = -2, \\ -C_1 + C_2 = -2 & \text{qui correspond à la condition } \varphi_2'(0) = -2. \end{cases}$$

On a donc $C_1 = -2$ et $C_2 = -4$.
La solution particulière φ_2 est donc $\varphi_2(x) = -2e^{-x} \left(\cos(x) + \sin(x) \right)$.

(3) (a) Le polynôme caractéristique de l'équation (H_3) est $r^2 - 4r + 4$, qui a une racine double $r = 2$. La solution générale réelle de l'équation est déterminée à partir de la formule (**??**)

$$\mathcal{Y}_h = \left\{ (C_1 + C_2 x) e^{2x} \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in I \right\}.$$

(b) En travaillant comme dans les deux cas précédents nous obtenons $C_1 = -2$ et $C_2 = 2$. La solution particulière φ_3 est donc $\varphi_3(x) = 2(-1 + x)e^{2x}$.

Exercice 34

Équations différentielles linéaires du second ordre avec second membre

Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles suivantes, puis donner la solution avec la condition initiale $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

(1) $y'' + 2y' + 2y = 6e^{-x}$

(2) (a) $y'' - 2y' + 5y = \cos x$

(b) $y'' - 2y' + 5y = x$

(c) $y'' - 2y' + 5y = x + \cos x$

Correction de l'exercice ??

(1) On connaît la solution générale de l'équation homogène associé à $y'' + 2y' + 2y = 6e^{-x}$ pour l'avoir trouvée dans l'exercice **??**. ici notre préoccupation principale sera donc de trouver une solution particulière de l'équation non homogène. Comme le terme de droite de l'équation est une exponentielle nous allons chercher une solution de la forme $y_p(x) = Ce^{-x}$. On obtient

$$Ce^{-x} - 2Ce^{-x} + 2Ce^{-x} = 6e^{-x},$$

ce qui implique que $C = 6$. La solution particulière y_p est donc $y_p = 6e^{-x}$. La solution générale de l'équation en examen est alors la somme entre la solution générale de l'équation homogène associée, (**??**), et y_p :

$$\mathcal{Y} = \left\{e^{-x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + 6\right) \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

les contions initiales fixées nous permettent d'écrire le système de deux équation en deux inconnues C_1 et C_2

$$\begin{cases} C_1 + 6 = 0, & \text{qui correspond à la condition } y(0) = 0, \\ -(C_1 + 6) + 2C_2 = 0 & \text{qui correspond à la condition } y'(0) = 0. \end{cases}$$

On trouve alors $C_1 = -6$ et $C_2 = 0$, et $y(x) = 6e^{-x}\left(1 - \cos(2x)\right)$.

(2) (a) Le polynôme caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2y' + 5y = 0$ est $r^2 - 2r + 5$, dont les racines sont les nombres complexes conjugués $1 + i2$ et $1 - i2$. La solution générale de l'équation homogène est donc $\mathcal{Y}_h = \{e^x\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right) \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\}$.

On cherche une solution particulière y_p de l'équation non homogène $y'' - 2y' + 5y = \cos(x)$. Comme le membre de droite est la fonction cosinus, $y_p(x)$ sera de la forme $A\cos(x)+B\sin(x)$. En injectant y_p dans l'équation nous obtenons

$$-\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) - 2\left(B\cos(x) - A\sin(x)\right) + 5\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) = \cos(x),$$

qui correspond au système de deux équations pour les deux inconnues A et B

$$\begin{cases} -A - 2B + 5A = 1, & \text{ces sont les coefficients de cosinus,} \\ -B + 2A + 5B = 0, & \text{ces sont les coefficients de sinus.} \end{cases}$$

On a alors $A = 1/5$ et $B = -1/10$, et $y_p = \dfrac{1}{5}\cos(x) - \dfrac{1}{10}\sin(x)$.

La solution générale de l'équation $y'' - 2y' + 5y = \cos(x)$ est la somme de $\mathcal{Y}_h$ et y_p, c'est à dire

$$\mathcal{Y} = \left\{e^x\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right) + \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x) \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Les conditions initiales fixées nous donnent le système suivant pour trouver les valeurs de C_1 et C_2 correspondants à la solution particulière demandée :

$$\begin{cases} C_1 + \frac{1}{5} = 0, & \text{qui correspond à la condition } y(0) = 0, \\ C_1 + 2C_2 - \frac{1}{10} = 0 & \text{qui correspond à la condition } y'(0) = 0. \end{cases}$$

Donc $C_1 = -1/5$ et $C_2 = 3/20$ et $y(x) = e^x \left(-\frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{3}{20}\sin(2x)\right) + \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x)$.

(b) On a établi plus tôt dans l'exercice que la solution générale de l'équation homogène est donc $\mathcal{Y}_h = \{e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) \,:\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$.
On cherche une solution particulière y_p de l'équation non homogène $y'' - 2y' + 5y = x$. Comme le membre de droite est un polynône de degré un, $y_p(x)$ sera de la forme $Ax + B$. En injectant y_p dans l'équation nous obtenons

$$-2A + 5(Ax + B) = x,$$

qui correspond au système de deux équations pour les deux inconnues A et B

$$5A = 1, \text{ et, } -2A + 5B = 0,$$

On a alors $A = 1/5$ et $B = 2/25$, et $y_p = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{2}{25}$.
La solution générale de l'équation $y'' - 2y' + 5y = x$ est la somme de $\mathcal{Y}_h$ et y_p, c'est à dire

$$\mathcal{Y} = \left\{e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) + \frac{1}{5}x + \frac{2}{25} \;:\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Les conditions initiales fixées nous donnent le système suivant pour trouver les valeurs de C_1 et C_2 correspondants à la solution particulière demandée :

$$\begin{cases} C_1 + \frac{2}{25} = 0, & \text{qui correspond à la condition } y(0) = 0, \\ C_1 + 2C_2 + \frac{1}{5} = 0 & \text{qui correspond à la condition } y'(0) = 0. \end{cases}$$

Donc $C_1 = -2/25$ et $C_2 = -3/50$ et $y(x) = e^x \left(-\frac{2}{25}\cos(2x) - \frac{3}{50}\sin(2x)\right) + \frac{1}{5}x + \frac{2}{25}$.

(c) Pour obtenir une solution particulière de cette équation il suffit de sommer les solutions particulières trouvées pour les équations des points (Z.a) et (2.b) de cet exercice (on exploite ici le fait que l'équation soit linéaire). La solution générale de cette équation est donc

$$\mathcal{Y} = \left\{e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) + \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x) + \frac{1}{5}x + \frac{2}{25} \;:\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Les conditions initiales fixées nous donnent le système suivant pour trouver les valeurs de C_1 et C_2 correspondants à la solution particulière demandée :

$$\begin{cases} C_1 + \frac{7}{25} = 0, & \text{qui correspond à la condition } y(0) = 0, \\ C_1 + 2C_2 + \frac{1}{10} = 0 & \text{qui correspond à la condition } y'(0) = 0. \end{cases}$$

Donc $C_1 = -7/25$ et $C_2 = 9/100$ et

$$y(x) = e^x \left(-\frac{7}{25}\cos(2x) + \frac{9}{100}\sin(2x)\right) + \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x) + \frac{1}{5}x + \frac{2}{25}.$$

79.11 TD 11 : Développements limités

Exercice 35

(1) (a) Déterminer un développement limité de e^{3x} à l'ordre 2 en 0.

(b) En déduire : $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x}$.

(2) (a) Déterminer un développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0.

(b) Déterminer : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Correction de l'exercice ??

(1) (a) Nous allons utiliser la formule de Taylor-Young (**??**). Soit $f(x) = e^{3x}$, alors le développement cherché est

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + x^2\alpha(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + x^2\alpha(x).$$

Remarque 79.7.
Un développement similaire a été fait dans le cours dans l'exemple **??** en utilisant la règle de développement d'une fonction composée.

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x + \frac{9}{2}x^2 + x^2\alpha(x)}{x} = 3.$$

(2) (a) Ce développement limité est dans le tableau des développements limités à connaître. Pour le calculer on peut utiliser encore une fois la formule de Taylor-Young (**??**). Soit $f(x) = \ln(1+x)$, on a

$$\begin{aligned} f(x) =& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + x^4\alpha(x) = \\ &= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\alpha(x). \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\alpha(x)}{x} = 1.$$

Exercice 36

(1) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

(2) (a) Déterminer, par la règle de développement des produits de fonctions, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction g définie par $g(x) = \cos(x)\sin(x)$.

(b) En déduire $g'(0)$, $g''(0)$ et $g^{(3)}(0)$. (Comparer le développement obtenu au point précédent avec la formule de Taylor-Young).

Correction de l'exercice ??

(1) Il suffit de sommer terme à terme les développements connus de cosinus et de sinus. On obtient

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\alpha(x).$$

(2) (a) On fait le produits des développements limités à l'ordre 3 des fonctions sinus et cosinus

$$g(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + x^3\alpha(x) = x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3!} + x^3\alpha(x) = x - \frac{2x^3}{3} + x^3\alpha(x).$$

(b) Par comparaison avec la formule de Taylor-Young nous avons que $g'(0) = 1$, $g''(0) = 0$ et $g^{(3)}(0) = -4$.

Exercice 37

(1) Déterminer le développement limité de : $x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 en 1.

(2) Déterminer le développement limité de : $x \mapsto \sin x$ à l'ordre 4 en $\dfrac{\pi}{2}$.

(3) Déterminer le développement limité de : $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3 en 0.

Correction de l'exercice ??

(1) Nous pouvons soit utiliser la formule générale de Taylor-Young, (**??**), soit se ramener à un développement limité au voisinage de zéro par une translation, ce qui veut dire, développer au voisinage de zéro la fonction $g(x) = e^{1+x}$. Les deux méthodes sont absolument équivalentes.

Nous allons essayer la première, car il y a des exemples de la deuxième méthode dans le chapitre sur les développements limités. Remarquez que $(e^x)^{(m)} = e^x$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, donc on pourra mettre à facteur e, qui est la valeur de la dérivée de l'exponentielle calculée en $x = 1$. Il faut d'abord appliquer la formule et ensuite faire tous les calculs nécessaires à simplifier au maximum l'expression obtenue

$$\begin{aligned}
e^x =& e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!}\right) + (x-1)^4\alpha(x-1) \\
=& e\left(1 + (x-1) + \frac{x^2+2x+1}{2} + \frac{x^3-3x^2+3x-1}{6} + \frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{24}\right) \\
& + (x-1)^4\alpha(x-1) \\
=& e\left(\frac{12-4+1}{24} + \frac{3x-x}{6} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24}\right) + (x-1)^4\alpha(x-1) \\
=& e\left(\frac{3}{8} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24}\right) + (x-1)^4\alpha(x-1).
\end{aligned}$$

(2) Le développement à trouver est égale au développement autour de zéro de la fonction $x \mapsto \sin(x + \pi/2)$. On sait que $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)\sin(\pi/2) + \cos(\pi/2)\sin(x) = \cos(x)$, et le développement de la fonction cosinus est connu (voir le tableau des développements dans le cours).

(3) Il faudra utiliser ici la règle pour trouver le développement d'un rapport entre fonctions. Nous pouvons commencer par calculer les développements à l'ordre 3 en 0 des fonction $\ln(1+x)$ et $\sqrt{1+x}$. Ces deux développements sont dans la liste des développements à connïtre, mais on les rappelle ici pour plus de lisibilité :

$$\begin{aligned}
\ln(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots; \\
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \ldots.
\end{aligned}$$

Nous allons donc procéder à une division pour déterminer le développement du rapport $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$.

$$\begin{array}{rccccccccc|l}
 & x & - & \frac{x^2}{2} & + & \frac{x^3}{3} & - & \frac{x^4}{4} & & & 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \\
\cline{11-11}
-\Big(& x & + & \frac{x^2}{2} & - & \frac{x^3}{8} & + & \frac{x^4}{16} & \Big) & & x - x^2 + \frac{23x^3}{24} \\
\cline{2-8}
 & & - & x^2 & + & \frac{11x^3}{24} & - & \frac{5x^4}{16} & & & \\
 & -\Big(- & & x^2 & - & \frac{x^3}{2} & + & \frac{x^4}{8} & \Big) & & \\
\cline{4-10}
 & & & & & \frac{23x^3}{24} & - & \frac{7x^4}{16} & & & \\
 & & & & -\Big(& \frac{23x^3}{24} & + & \frac{x^4}{48} & \Big) & & \\
\cline{6-10}
 & & & & & & - & \frac{11x^4}{24} & & &
\end{array}$$

Le développement cherché est donc $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} = x - x^2 + \frac{23x^3}{24} + x^3\alpha(x)$.

Exercice 38

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-x}$.

(1) Donner l'ensemble de définition de f.

(2) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f.

(3) En déduire les valeurs de $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

(4) On note (C) la courbe représentative de f. Déterminer l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

Correction de l'exercice ??

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-x}$.

(1) $\text{Domaine}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

(2) Le développement de la fonction cosinus est connu

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

Pour trouver le développement au voisinage de 0 de la fonction f nous utilisons la règle pour calculer le développement d'un rapport

$$\begin{array}{rccccccc|l}
 & 1 & & & - & \frac{x^2}{2} & & + \ \frac{x^4}{24} & \quad 1-x \\ \cline{9-9}
-\big(& 1 & - & x & \big) & & & & 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} \\ \cline{2-6}
 & & + & x & - & \frac{x^2}{2} & & & \\
 & -\big(& + & x & - & x^2 & \big) & & \\ \cline{2-7}
 & & & & + & \frac{x^2}{2} & & + \ \frac{x^4}{24} & \\
 & & & & -\big(& \frac{x^2}{2} & - \ \frac{x^3}{2} \ \big) & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & + \ \frac{x^3}{2} & + \ \frac{x^4}{24} & \\
 & & & & & -\big(& + \ \frac{x^3}{2} & - \ \frac{x^4}{2} & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & + \ \frac{13x^4}{24} &
\end{array}$$

Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f est $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + x^3\alpha(x)$.

Remarque 79.8.

Il était possible aussi de calculer ce développement comme le produit entre le développement de cos et de $\dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de 0.

(3) Par la formule de Taylor-Young on a que $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$ et $f^{(3)}(0) = 3$.

(4) L'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 est $y = 1 + x$. L'équation de la tangente est toujours l'approximation d'ordre 1 de la fonction f au voisinage de 0.

Exercice 39

Calculer les limites suivantes à l'aide des développements limités

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x}\right)$; (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\right)$; (3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin(3x)}{1-2\cos(x)}\right)$.

Correction de l'exercice ??

(1) On calcule d'abord

$$\ln(x+1) - \sin(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - x + \frac{x^3}{6} + x^4\alpha(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2\alpha(x),$$

ce qui nous dit que au voisinage de zéro la fonction $\dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$ a le même comportement que $-x/2$. La valeur de la limite est donc zéro.

(2) L'expression $(x+1)^{1/x}$ est **par définition dans ce cours** équivalente à $e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}$, ce qui veut dire que son développement limité sera obtenu par la règle de développement d'une fonction composée.

On calcule d'abord

$$\frac{1}{x}\ln(x+1) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots$$

On a alors que $e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)} \approx e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots} \approx e^{1-\frac{x}{2}}$ lorsque x est proche ce 0.

Remarque 79.9.
Le développement de l'exponentielle autour de 1 à été calculé dans l'exercice **??**, il donc est possible d'utiliser le résultat pour terminer le calcul de cette limite, mais pour des raisons pédagogiques nous allons continuer le calcul.

$$e^{1-\frac{x}{2}} = e + \frac{ex}{2} + \ldots$$

Nous avons alors que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{ex}{2}}{x}\right) = \frac{e}{2}.$$

(3) Le développement limité de $\sin(3x)$ lorsque x est dans un voisinage de $\pi/3$ est le développement limité au voisinage de 0 de la fonction $g(x) = \sin(3x - \pi)$

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \ldots = \sin(-\pi) + 3\cos(-\pi)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \ldots = -3\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \ldots.$$

Le développement de cos au voisinage de $\pi/3$ a été calculé dans l'exemple **??**, nous avons donc

$$\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \ldots.$$

La limite a calculer devient alors

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin(3x)}{1 - 2\cos(x)}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3}.$$

79.12 Interrogations des années précédentes

Exercice 40
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x - 10$.

(1) Que vaut $f(2)$?
(2) Étudier les variations de f.
(3) Justifier que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle que l'on précisera.
(4) Soit g la bijection réciproque de f. Préciser l'ensemble de définition de g et calculer $g'(8)$.

Correction de l'exercice ??
<+CorranalyseCTU-0010+>
Exercice 41

(1) (**Question de cours**) Donner le domaine de définition, la dérivée et l'aspect de la représentation graphique de la fonction arcsin.

(2) Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = \cos(\arcsin(x))$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f_1.

(b) Calculer $f_1'(x)$ pour $-1 < x < 1$. Montrer que $f_1'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) Soit f_2 la fonction définie par $f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f_2.

(b) Calculer $f_2'(x)$ pour $-1 < x < 1$. Montrer que $f_1'(x) = f_2'(x)$.

(4) Donner une expression simplifiée de $f_1(x)$ valable pour $x \in]-1, 1[$.

Correction de l'exercice ??

<+CorranalyseCTU-0011+>

Exercice 42

(1) (**Question de cours**) Donner le domaine de définition, la dérivée et l'aspect de la représentation graphique de la fonction arcsin.

(2) On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

(b) Calculer $f'(x)$ pour $0 < x < 1$. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ 1[$, $f(x) = 2\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice ??

<+CorranalyseCTU-0012+>

Exercice 43

(1) Compléter le tableau suivant.

Primitive $\int f(x)\,dx$	Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$\ldots$	e^x	$\ldots$
$\ldots$	$\frac{1}{x}$	$\ldots$
$\ldots$	$\cos(x)$	$\ldots$
$\ldots$	x^α	$\ldots$

(79.25)

(2) Calculer les intégrales suivantes

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^3 + x^{1/3}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_\pi^{3\pi/2} 5\sin(x)\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_1^2 e^x + \frac{1}{x}\,dx$.

(3) Calculer l'intégrale suivante par la méthode du changement de variable

$$\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+17}\,dx.$$

Correction de l'exercice ??

<+CorranalyseCTU-0013+>

Exercice 44

(1) Compléter le tableau suivant.

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
\text{Primitive } \int f(x)\,dx & \text{Function } f(x) & \text{Dérivée } f'(x) \\
\hline
\ldots & x^3 & \ldots \\
\hline
\ldots & x^{1/5} & \ldots \\
\hline
\ldots & \cos(x) & \ldots \\
\hline
\ldots & \frac{1}{1+x^2} & \ldots \\
\hline
\end{array} \tag{79.26}$$

(2) Calculer les intégrales suivantes

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\cos(x)}\sin(x)\,dx$. Conseil : utiliser un changement de variable.

(3) Calculer, par parties, les primitives suivantes

(a) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$;

(b) $\displaystyle\int x\sin(x)\,dx$.

Correction de l'exercice ??

<+CorranalyseCTU-0014+>

Exercice 45

Dans tout le problème on se place dans l'intervalle $I =]0,+\infty[$.

On considère l'équation différentielle suivante

$$xy' + y = x^2. \tag{79.27}$$

(1) De quel type est l'équation (**??**) ?

(2) Vérifier que $y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{x}$ est l'unique solution de (**??**) qui satisfait la condition initiale $y(1) = \frac{4}{3}$.

(3) Vérifier que $y(x) = \frac{1}{3}x^2$ est l'unique solution de (**??**) qui satisfait la condition initiale $y(1) = \frac{1}{3}$.

(4) Quel rapport y a-t-il entre l'équation (**??**) et l'équation différentielle

$$xy' + y = 0 \quad ? \tag{79.28}$$

(5) Trouver l'unique solution de (**??**) qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$.

Correction de l'exercice ??
<+CorranalyseCTU-0015+>
Exercice 46
On considère l'équation différentielle suivante

$$y' + \sin(x)y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{79.29}$$

(1) De quel type est l'équation (**??**) ?
(2) Déterminer la solution générale de (**??**).
(3) Quel rapport y a-t-il entre l'équation (**??**) et l'équation différentielle

$$y' + \sin(x)y = \frac{e^{\cos(x)}}{1+x^2} \quad ? \tag{79.30}$$

(4) Déterminer la solution générale de (**??**) en utilisant la méthode de variation de la constante.

Correction de l'exercice ??
<+CorranalyseCTU-0016+>
Exercice 47

(1) On considère l'équation différentielle suivante

$$2y'' + 2y' + 5y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{79.31}$$

  (a) De quel type est l'équation (**??**) ?
  (b) Déterminer la solution générale de (**??**).
  (c) Déterminer la solution de (**??**) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

(2) On considère maintenant l'équation différentielle :

$$2y'' + 2y' + 5y = 25x - 5, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{79.32}$$

  (a) Quel est le type de cette équation différentielle (**??**) ? Quel lien y a-t-il entre l'équation (**??**) et l'équation (**??**) ?
  (b) Déterminer une solution particulière f de (**??**) sous la forme $f(x) = \alpha x + \beta$.
  (c) Déterminer la solution générale de (**??**).

Correction de l'exercice ??
<+CorranalyseCTU-0017+>
Exercice 48

(1) On considère l'équation différentielle suivante

$$xy' + y = 0, \qquad x \in]0, +\infty[. \tag{79.33}$$

  (a) De quel type est l'équation (**??**) ?
  (b) Déterminer la solution générale de (**??**).

(2) On considère maintenant l'équation différentielle :

$$xy' + y = \cos(x), \qquad x \in]0, +\infty[. \tag{79.34}$$

(a) Quel rapport y a-t-il entre l'équation (**??**) et l'équation (**??**) ?

(b) Déterminer la solution générale de (**??**) en utilisant la méthode de variation de la constante.

Correction de l'exercice ??

<+CorranalyseCTU-0018+>

Exercice 49

(1) **Question de cours :** Écrire la formule de Taylor-Young pour le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 d'une fonction g qu'on suppose continue et au moins 3 fois dérivable.

(2) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \cos(x)$ et de $x \mapsto \sin(x)$.

(3) En déduire développement limité à l'ordre 3 de $f(x) = \cos(x)\sin(x)$ au voisinage de 0.

Correction de l'exercice ??

<+CorranalyseCTU-0019+>

79.13 Autres exercices

Exercice 50

Calculer par parties les intégrales suivantes.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx$;

(2) $\displaystyle\int_1^2 x^2 e^x\,dx$;

(3) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,dx$;

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^0 e^x\sin(x)\,dx$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx$;

(6) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(2x)\,dx$.

Correction de l'exercice ??

<+Corrmazhe-0012+>

Exercice 51

Remarque 79.10.

Cet exercice est donné en devoir.

Calculer les intégrales suivantes.

(1) $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{1}{x^2-3x+2}dx$. Conseil : écrire la fraction sous la forme $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$.

(2) $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)dx$.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$.

(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-2x}}{(1+2e^{-x})^2}dx$.

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$. Conseil : poser $t = x^2+1$.

Correction de l'exercice ??

<+Corrmazhe-0013+>

Exercice 52

Calculer les intégrales suivantes.

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \arctan(x)dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\left(\cos^{10}(x)+\frac{\sin^4(x)-e^{x^2}+1}{\sqrt{|x|}}\right)dx$.

Correction de l'exercice ??

<+Corrmazhe-0014+>

Exercice 53 (6 points)

Déterminer dans chaque cas le domaine de définition, la périodicité et/ou les symétries éventuelles et les limites aux extrêmes du domaine. Calculer ensuite la dérivée de la fonction, la où elle est définie.

(1) $f_1(x) = x^3 - 1$;
(2) $f_2(x) = e^{\cos(x)}$;
(3) $f_3(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

Correction de l'exercice ??

<+Corrmazhe-0015+>

Exercice 54

Montrer que la fonction tan est une bijection croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. On note arctan (prononcer «arc tangente») sa bijection réciproque. Montrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\big(\arctan(x)\big)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{79.35}$$

Correction de l'exercice ??

<+Corrmazhe-0016+>

Exercice 55

Notion d'équation différentielle

(1) Déterminer une fonction polynôme qui soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - 4y = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3$.
(2) Déterminer une équation différentielle du premier ordre telle que la fonction φ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(x) = x\ln(x)$ soit une solution.
(3) On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = \sin x$. Trouver une solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation sous la forme $a\cos x + b\sin x$, où a et b sont des constantes réelles.

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-31+>

Exercice 56

Équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre

(1) On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' + x^2y = x^2$.
  (a) Résoudre l'équation homogène (H) associée à (E).
  (b) Trouver une solution évidente de (E).
  (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
  (d) Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 4 en 0.
(2) Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $2xy' + y = \dfrac{1}{1+x}$.

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-34+>

Exercice 57

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^3} \qquad \int \frac{du}{\sqrt{1+u}} \qquad \int \frac{t}{1+t^2}\,dt \qquad \int \frac{dt}{1+t^2} \qquad \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad \int \frac{t+1}{4+t^2}\,dt$$

$$\int \arctan 2x\,dx \qquad \int x\ln(x+1)\,dx \qquad \int xe^{2x}\,dx \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}\,dx \quad (\text{poser } t = 1 - \ln x)$$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-47+>

Exercice 58

(1) Déterminer le développement limité de : $x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 en 1.

(2) Déterminer le développement limité de : $x \mapsto \sin x$ à l'ordre 4 en $\dfrac{\pi}{2}$.

(3) Déterminer, de deux façons différentes, le développement limité de : $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ à l'ordre 4 en 0.

(4) Déterminer le développement limité de : $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3 en 0.

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-50+>

Exercice 59

Calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^1 (4x+2)(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x \qquad J_2 = \int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\,\mathrm{d}x \qquad J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-16+>

Exercice 60

(1) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

(2) Déterminer la primitive sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan qui s'annule en $\dfrac{\pi}{3}$.

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-17+>

Exercice 61

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x-1|$.

(1) Justifier que la fonction f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer la primitive F_1 de f qui s'annule en 2.

(3) Tracer les représentations graphiques de f et de F_1.

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-18+>

Exercice 62

Déterminer les ensembles de primitives suivants :

$$F_1(x) = \int x(x^2+3)\,\mathrm{d}x \qquad F_2(x) = \int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad F_3(x) = \int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-20+>

Exercice 63

Déterminer les ensembles de primitives suivants :

$$G_1(x) = \int \ln(x)\,\mathrm{d}x \qquad G_2(x) = \int \arctan(x)\,\mathrm{d}x \qquad G_3(x) = \int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$G_4(x) = \int xe^x\,\mathrm{d}x \qquad G_5(x) = \int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x \qquad G_6(x) = \int x^2e^x\,\mathrm{d}x$$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-21+>

Exercice 64

Déterminer les ensembles de primitives suivants :

$$F_1(x) = \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x \qquad F_2(x) = \int (x^2+x+1)e^x, \mathrm{d}x \qquad F_3(x) = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad F_4(x) = \int \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$F_5(x) = \int x\sin(x)\,\mathrm{d}x \quad F_6(x) = \int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \quad F_7(x) = \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \quad F_8(x) = \int \frac{8x}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$$

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-28+>
Exercice 65

(1) (a) Rappeler les formules de trigonométrie que vous connaissez.
(b) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\tan\frac{5\pi}{12}$.
(c) Déterminer un réel A et un réel φ tels que :
a/ $\cos x - \sqrt{3}\sin x = A\cos(x+\varphi)$ **b/** $\cos x + \sin x = A\cos(x+\varphi)$
(2) (a) Exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
(b) Exprimer $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
(c) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-4+>
Exercice 66

(1) La fonction arcsin est-elle paire ou impaire ?
(2) La fonction arccos est-elle paire ou impaire ? Exprimer $\arccos(-x)$ en fonction de $\arccos(x)$.
(3) Montrer que pour tout réel x de [-1 ; 1] : $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-7+>
Exercice 67
Simplifier les écritures suivantes en précisant à chaque fois le domaine de validité de la formule.
a/ $\sin(\arcsin x)$ **b/** $\cos(\arccos x)$ **c/** $\sin(\arccos x)$

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-8+>
Exercice 68
On considère les fonctions f et g définies respectivement par $f(x) = \arccos(\cos x)$ et $g(x) = \arcsin(\sin x)$.

(1) Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g.
(2) Représenter graphiquement les fonctions f et g.

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-9+>
Exercice 69

(1) Démontrer les formules suivantes :
(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
(b) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$
(c) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
(2) Donner des expressions de $\cosh(2x)$ et $\sinh(2x)$ en fonction de $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$.

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-13+>

79.14 Exercices en réserve

Exercice 70

Soit f la fonction $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$.

(1) Préciser l'ensemble de définition, les variations et les limites aux bords du domaine de f.

(2) Montrer que pour tout x dans l'ensemble de définition de f on a

$$f'(x) = -\frac{1}{3}\left(f^2(x) + f(x) - 2\right). \tag{79.36}$$

(3) Montrer que f réalise une bijection de son domaine vers un intervalle que l'on précisera.

(4) Soit g la bijection réciproque de f. Quel est l'intervalle de définition de g ?

(5) Rappeler la formule qui donne la dérivée de la fonction réciproque.

(6) Utiliser l'équation (**??**) pour montrer que la dérivée de g est $g'(y) = -\frac{3}{y^2+y-2}$.

(7) Déterminer l'expression explicite de g.

Correction de l'exercice ??

(1) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$, les limites aux bords du domaine sont

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-2)}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^x}{(e^x+1)^2},$$

qui est une fonction strictment positive. La fonction f est continue et f' est strictement positive, f est donc strictement croissante entre les valeurs -2 et 1.

(2) Nous pouvons calculer explicitement

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\left(f^2(x) + f(x) - 2\right) &= -\frac{1}{3}\frac{(e^x-2)^2 + (e^x-2)(e^x+1) - 2(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{-9e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^x}{(e^x+1)^2}. \end{aligned}$$

Cette expression est identique à l'expression de f' trouvée au point précédent.

(3) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante entre les valeurs -2 et 1. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-2,1[$.

(4) L'intervalle de définition de g est $]-2,1[$.

(5) La formule qui donne la dérivée de la fonction réciproque est

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

(6) Nous avons

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{-3}{(f^2(g(y)) + f(g(y)) - 2)} = \frac{-3}{y^2 + y - 2}.$$

(7) Pour trouver l'expression explicite de g nous trouvons d'abord l'ensemble des primitives de g'

$$\int g'(y)\,dy = \int \frac{-3}{y^2+y-2}\,dy = \int \frac{-3}{(y+2)(y-1)}\,dy$$

On a

$$\frac{-3}{(y+2)(y-1)} = \frac{1}{(y+2)} - \frac{1}{(y-1)},$$

et donc

$$\int g'(y)\,dy = \int \frac{1}{(y+2)}\,dy - \int \frac{1}{(y-1)}\,dy = \ln(|y+2|) - \ln(|y-1|) + C.$$

Il faut trouver maintenant la valeur de la constante C qui correspond à g (car g est une primitive particulière de g'). Il suffit de calculer la valeur de f à un point, par exemple $f(0) = -1/2$. Ensuite forcement $g(-1/2) = 0$, donc

$$\ln(|-1/2+2|) - \ln(|-1/2-1|) + C = 0$$

et on trouve $C = \ln(1) = 0$. La fonction g est $g(y) = \ln(|y+2|) - \ln(|y-1|)$.

Exercice 71

(1) Montrer que pour tout $y \in [-1,1]$ nous avons

$$\cos(\arcsin(y)) = \sin(\arccos(y)). \tag{79.37}$$

(2) Soit la fonction f définie par

$$f(y) = \arctan(y) + \arctan\left(\frac{1}{y}\right). \tag{79.38}$$

   (a) Trouver l'ensemble de définition de f.
   (b) Montrer que la dérivée de f est nulle pour tout y dans le domaine de f.
   (c) En déduire que pour tout $y < 0$,

$$\arctan(y) + \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\pi}{2}. \tag{79.39}$$

   (d) Est-il vrai que la fonction f est constante ? Expliquer votre réponse.

Correction de l'exercice ??

(1) Pour tout $y \in [-1,1]$ nous avons

$$[\cos(\arcsin(y))]^2 = 1 - [\sin(\arcsin(y))]^2 = 1 - y^2,$$

et analoguement

$$[\sin(\arccos(y))]^2 = 1 - [\cos(\arccos(y))]^2 = 1 - y^2.$$

Les deux expression sont donc équivalentes.

(2) (a) L'ensemble de définition arctan est $\mathbb{R}$, mais l'ensemble de définition $1/x$ est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Par consequent l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   (b) Nous pouvons calculer la dérivée de f, on a

$$f'(y) = \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2}\frac{-1}{y^2} = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2} = 0,$$

   pour tout y dans le domaine de f.

   (c) On peut calculer $f(-1)$, en sachant que sa valeur est la valeur de f pour tout $y < 0$,

$$\arctan(-1) + \arctan(\frac{1}{-1}) = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}. \tag{79.40}$$

   (d) La fonction f n'est pas constante sur son domaine, car elle prend des valeurs différents dans les intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$. Pour $y > 0$ on a en effet $f(y) = f(1) = \pi/2$.

Exercice 72

(1) Montrer que la fonction sinh admet une fonction réciproque.
(2) Montrer que $f(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ est la fonction réciproque de sinh.
(3) Calculer $f'(y)$ d'abord en utilisant son expression analytique et ensuite en utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée et les propriétés des fonctions sinh et cosh vues dans l'exercice 19

Correction de l'exercice ??

(1) La fonction sinh est dérivable (donc continue) et sa dérivée est cosh, qui est une fonction strictement positive. Donc sinh admet une fonction réciproque par le théorème de la bijection.
(2) Pour montrer que $f(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ est la fonction réciproque de sinh nous considérons les fonctions composées $y \mapsto \sinh(f(y))$ et $x \mapsto f(\sinh(x))$. La fonction f est la réciproque de sinh si et seulement si ces deux fonctions sont respectivement l'indentité de y et de x.

$$\sinh(f(y)) = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2+1} - \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}}\right) = \frac{2y^2 + 2y\sqrt{y^2+1}}{2(y + \sqrt{y^2+1})} = y;$$

$$\begin{aligned} f(\sinh(x)) &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\right) = \ln\left(\frac{2e^x}{2}\right) = x. \end{aligned}$$

(3) Calculons $f'(y)$ en utilisant son expression analytique

$$f'(y) = \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right) = \frac{y + \sqrt{y^2+1}}{(y + \sqrt{y^2+1})\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

La formule de dérivation d'une fonction composée nous dit que

$$f'(y) = \frac{1}{\cosh(f(y))}$$

ensuite on sait que f est la fonction réciproque de sinh et les propriétés des fonctions sinh et cosh vues dans l'exercice 19 nous disent que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. On a donc

$$\cosh(f(y)) = \sqrt{1 + \sinh^2(f(y))} = \sqrt{1 + y^2}.$$

Exercice 73

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire. Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou aucun des deux. Justifier chaque affirmation par une petite démonstration ou un contre-exemple.

$$f_1(x) = f(-x), \tag{79.41a}$$
$$f_2(x) = f(x) - 1, \tag{79.41b}$$
$$f_3(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0, \\ f(-x) & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases} \tag{79.41c}$$
$$f_5(x) = \sqrt{(f(x))^2}, \tag{79.41d}$$
$$f_6(x) = |f(x)| + f(x), \tag{79.41e}$$
$$f_7(x) = xf(x), \tag{79.41f}$$
$$f_8(x) = g(f(x)), \text{ où } g \text{ est une fonction impaire.} \tag{79.41g}$$

(2) Refaire la première partie de cet exercice en supposant maintenant que f est impaire.

Correction de l'exercice ??

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire.

Function	Symétrie	Preuve ou exemple
$f_1(x) = f(-x)$	paire	$f_1(-x) = f(-(-x)) = f(-x) = f_1(x)$
$f_2(x) = f(x) - 1$	paire	$f_2(-x) = f(-x) - 1 = f(x) - 1 = f_2(x)$
$f_3(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0, \\ f(-x) & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$	paire	En effet $f_3(x) = f(\lvert x\rvert)$, donc $f_3(-x) = f(\lvert -x\rvert) = f(\lvert x\rvert) = f_3(x)$
$f_5(x) = \sqrt{(f(x))^2}$	paire	En effet $f_5(x) = \lvert f(x)\rvert$, donc $f_5(-x) = \lvert f(-x)\rvert = \lvert f(x)\rvert = f_5(x)$
$f_6(x) = \lvert f(x)\rvert + f(x)$	paire	f_6 est la somme de deux fonction paires
$f_7(x) = xf(x)$	impaire	f_7 est le produit d'une fonction paire et une impaire $f_7(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -f_7(x)$
$f_8(x) = g(f(x))$, avec g impaire	paire	$f_8(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = f_8(x)$

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

Function	Symétrie	Preuve ou exemple
$f_1(x) = f(-x)$	impaire	$f_1(-x) = f(-(-x)) = -f(-x) = -f_1(x)$
$f_2(x) = f(x) - 1$	ni paire, ni impaire	$f_2(-x) = f(-x) - 1 = -f(x) - 1$ f_2 est paire si et seulement si $f(x) = 0$, pour tout x
$f_3(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0, \\ f(-x) & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$	paire	En effet $f_3(x) = f(\lvert x\rvert)$, donc $f_3(-x) = f(\lvert -x\rvert) = f(\lvert x\rvert) = f_3(x)$
$f_5(x) = \sqrt{(f(x))^2}$	paire	En effet $f_5(x) = \lvert f(x)\rvert$, donc $f_5(-x) = \lvert f(-x)\rvert = \lvert -f(x)\rvert = f_5(x)$
$f_6(x) = \lvert f(x)\rvert + f(x)$	ni paire, ni impaire	$f_6(-x) = \lvert f(x)\rvert - f(x) \neq f_6(x)$ et $-f_6(x)$ f_6 est paire si et seulement si $f(x) = 0$, pour tout x
$f_7(x) = xf(x)$	paire	f_7 est le produit de deux fonctions impaires $f_7(-x) = -xf(-x) = xf(x) = f_7(x)$
$f_8(x) = g(f(x))$, avec g impaire	impaire	$f_8(-x) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -f_8(x)$

Exercice 74
Calculer les intégrales et les primitives suivantes

(1) $\displaystyle\int x^{-4} + x^{1/5}\,dx$;

(2) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$;

(3) $\displaystyle\int x\sin^2(x)\,dx$;

(4) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan(x)\,dx$;

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4e^x + e^{-x}}\,dx$. Utiliser le changement de variable $t = e^x$;

(6) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}}\,dx$. Utiliser le changement de variable $t = \arcsin(x)$.

Correction de l'exercice ??

(1) $\displaystyle\int x^{-4} + x^{1/5}\,dx = -\frac{x^{-3}}{3} + \frac{5}{6}x^{6/5} + C$;

(2) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x \times \frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - x + C$;

(3)

$$\begin{aligned}\int x\sin^2(x)\,dx &= \int x\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{4} - \int \frac{x}{2}\cos(2x)\,dx\\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin(2x) + \int \frac{\sin(2x)}{4}\,dx\\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin(2x) - \frac{\cos(2x)}{8} + C\,;\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan(x)\,dx = 0$ car tan est une fonction impaire et $[-\pi/4, \pi/4]$ est symétrique par rapport à l'origine. Si on veut vérifier ce résultat il suffit d'écrire $\tan(x)$ comme $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et utiliser la formule pour les primitives des fonctions du type U'/U. On aura alors que les primitives de tan sont $-\ln(|\cos(x)|) + C$.

(5) On veut utiliser le changement de variable $t = e^x$. On a donc $dt = e^x dx$, ce qu'on peut écrire aussi comme $\frac{1}{t}dt = dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{4e^x + e^{-x}}\,dx &= \int_{e^0=1}^{e^1=e} \frac{1}{4t+\frac{1}{t}}\frac{1}{t}\,dt\\ &= \int_1^e \frac{1}{4t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\left[\arctan(2t)\right]_{t=1}^{t=e}\\ &= \frac{1}{2}\left(\arctan(2e) - \arctan(2)\right).\end{aligned}$$

(6) On veut utiliser le changement de variable $t = \arcsin(x)$, donc $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. On peut écrire l'intégrale comme il suit

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}}\,dx &= \int_0^{1/2}\sqrt{\arcsin(x)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \int_{\arcsin(0)=0}^{\arcsin(1/2)=\pi/6}\sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^{\pi/6} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{3/2}.\end{aligned}$$

Exercice 75

Correction de l'exercice ??
<+Corrsession1-0003+>
Exercice 76

Correction de l'exercice ??
<+Corrsession1-0004+>
Exercice 77
Déterminer la solution générale $\mathcal{Y}$ de l'équation différentielle

$$9y'' + y = 4x + 1,$$

ainsi que la solution particulière y_p qui vérifie $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Correction de l'exercice ??
Nous trouvons facilement par substitution que une solution particulière de l'équation différentielle est $\bar{y}(x) = 4x + 1$.

Pour trouver la solution générale de l'équation homogène associée, $\mathcal{Y}_h$, nous écrivons d'abord le polynôme caractéristique de l'équation, qui est

$$9r^2 + 1,$$

et nous cherchons les racines de $9r^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$. On a $r_{1,2} = \pm\frac{i}{3}$, donc la solution générale est

$$\mathcal{Y}_h = \left\{A\cos\left(\frac{x}{3}\right) + B\sin\left(\frac{x}{3}\right),\ A,\ B \in \mathbb{R}\right\}.$$

La solution générale $\mathcal{Y}$ de l'équation différentielle d'origine est alors

$$\mathcal{Y} = \left\{A\cos\left(\frac{x}{3}\right) + B\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \bar{y}(x),\ A,\ B \in \mathbb{R}\right\}.$$

La solution particulière y_p qui vérifie $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ correspond aux valeurs des coefficients $A = 1$ et $B = -9$, en fait

$$\begin{aligned} A\cos(0) + &B\sin(0) + \bar{y}(0) = A + 1 \\ &\text{donc la condition } y(0) = 2 \text{ devient } A + 1 = 2 \\ -\frac{A}{3}\sin(0) + &\frac{B}{3}\cos(0) + \bar{y}'(0) = \frac{B}{3} + 4 \\ &\text{donc la condition } y'(0) = 1 \text{ devient } \frac{B}{3} + 4 = 1. \end{aligned}$$

L'unique solution du système

$$\begin{cases} A + 1 = 2, \\ \frac{B}{3} + 4 = 1, \end{cases}$$

est $A = 1$, $B = -9$.

Exercice 78

Soit f la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2x + 2xy^2, \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(1) Pourriez-vous écrire une équation différentielle du deuxième ordre dont f est la solution ?

(2) Déterminer un développement limité de f à l'ordre 2 en 0 en utilisant l'équation différentielle et la formule de Taylor-Young. *Remarque : il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation différentielle pour répondre à cette question.*

Correction de l'exercice ??

(1) Une équation différentielle du deuxième ordre dont f est la solution est obtenue en dérivant les deux côtés de l'équation par rapport à x

$$y'' = -2 + 2y^2 + 4xyy'.$$

(2) Par la formule de Taylor-Young le développement limité de f à l'ordre 2 en 0 a la forme

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2}f''(0) + x^2\varepsilon(x),$$

oú ε est une fonction dont la limite pour x qui tends vers 0 est nulle.

En utilisant le calcul fait au point précèdent et la condition initiale donnée nous avons

$$f(x) = \frac{1}{2} + 0 + \left(-2 + \frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Exercice 79

Trouver l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2x + 2xy^2, \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice ??

L'équation n'est pas linéaire mais à variables séparables. Si $y(x)$ est égale à ± 1 pour un $x\ in\mathbb{R}$ alors $y' = 0$ et la solution est constante. Ce cas ne nous intéresse pas car ces solutions ne satisfont pas la condition initiale imposée. Supposons donc que y soit diffèrent de ± 1. Nous pouvons procéder comme il suit : d'abord

$$y' = 2x(-1+y^2) \Rightarrow \frac{y'}{(-1+y^2)} = 2x,$$

ensuite, nous cherchons les primitives (par rapport à x) des deux cotes de l'équation

$$\begin{aligned}
&\int \frac{y'}{(-1+y^2)}\,dx = \int 2x\,dx, \\
&\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\,dy = x^2 + C, \qquad \text{pour } C \in \mathbb{R} \\
&\frac{1}{2}\int \frac{1}{(y-1)} - \frac{1}{(y+1)}\,dy = x^2 + C, \\
&\ln\left(\sqrt{\frac{|y-1|}{|y+1|}}\right) = x^2 + C, \\
&\frac{y-1}{y+1} = Ke^{2x^2}, \qquad \text{pour } K \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.
\end{aligned}$$

À partir d'ici on peut trouver une expression analytique explicite pour la solution générale de l'équation différentielle

$$\mathcal{Y} = \left\{ y(x) = \frac{1+Ke^{2x^2}}{1-Ke^{2x^2}}, \qquad K \in \mathbb{R} \right\} \cup \{y(x) = -1\}.$$

La valeur de K qui correspond à la condition initiale est trouvée par substitution et vaut $K = -1/3$.

Exercice 80

(1) Calculer à l'aide de la formule de Taylor-Young, le développement limité à l'ordre 7 de la fonction $f(x) = \cos(2x)$ au voisinage de zéro.

(2) Calculer par une méthode de votre choix le développement limité à l'ordre 7 des fonctions $g(x) = \cos^2(x)$ et $h(x) = \sin^2(x)$ au voisinage de zéro.

(3) Calculer, à l'aide des développements limités, la valeur de la limite

$$\lim x \to 0 \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)}.$$

Correction de l'exercice ??

(1) La fonction $f(x) = \cos(2x)$ est paire, donc son développement limité au voisinage de zéro ne contient que les termes d'ordre paire

$$f(x) = f(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{x^6}{6!} f^{(6)}(0) + x^7\varepsilon(x).$$

Les dérivées de f sont faciles à calculer : $f^{(n)}(x) = 2^n \cos^{(n)}(2x)$. Par conséquent

$$f(x) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + x^7\varepsilon(x).$$

(2) La fonction $g(x) = \cos^2(x)$ est égale à $\frac{1+\cos(2x)}{2}$, donc nous avons

$$g(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + x^7\varepsilon(x).$$

Analogue ment, $h(x) = \sin^2(x)$ est égale à $1 - \cos(x)$, donc

$$h(x) = 1 - \cos(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + x^7\varepsilon(x).$$

(3)

$$\lim x \to 0 \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)} = \lim x \to 0 \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 81
Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(\sqrt{1-x^2})$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de f, $\mathcal{D}_f$, et étudier la parité de f.

(2) Calculer $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$.

(3) Calculer $f'(x)$ pour $0 < x < 1$; on montrera que dans ce cas, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(4) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x \in]0,1[$. Cette expression est-elle encore valable pour $x = 0$ et pour $x = 1$?

Exercice 82
Calculer les intégrales et les primitives suivantes

(1) $\displaystyle\int x(x^{-1/2} + x^{1/5})\, dx$;

(2) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x} dx$;

(3) $\displaystyle\int \arcsin(x)\, dx$;

(4) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(x)+1}{\sin(x)+x}\, dx$;

(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(4+\ln(x))}{x}\, dx$. Utiliser le changement de variable $t = 4 + \ln(x)$;

(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\, dx$. Utiliser le changement de variable $t = x^2 + 1$.

Exercice 83
On considère l'équation différentielle linéaire

$$y' + 2y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 1. \tag{79.42}$$

(1) Déterminer une fonction polynomiale qui est solution de l'équation différentielle (**??**).

(2) Déterminer la solution générale $\mathcal{Y}$ de l'équation (**??**).

Exercice 84
Soit f la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} xy' - (1+x)y = 0, & \text{pour tout } x \in (0, +\infty), \\ y(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est aussi une solution de l'équation de deuxième ordre

$$xy'' - (2+x)y = 0, \qquad \text{pour tout } x \in (0, +\infty),$$

(2) Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x+1)$. Déterminer un développement limité de g à l'ordre 2 en 0 en utilisant l'équation différentielle et la formule de Taylor-Young. *Remarque : il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation différentielle pour répondre à cette question.*

Exercice 85
Déterminer la solution générale $\mathcal{Y}$ de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 17y = 4x + 1,$$

ainsi que la solution particulière y_p qui vérifie $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Exercice 86

Trouver l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} xy' - (1+x)y = 0, & \text{pour tout } x \in (0, +\infty), \\ y(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Exercice 87

(1) Résoudre sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ l'équation différentielle

$$(x-1)y' + y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{79.43}$$

(2) Déterminer l'unique solution φ de (**??**) telle que $\varphi(0) = 1/\sqrt{2}$.

Exercice 88

(1) Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{3e^x}{x^2}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est une solution de l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = 0. \tag{79.44}$$

(2) On veut résoudre l'équation différentielle (**??**). Pour ce faire il faut effectuer le changement de variable $z = x^2y$.

Exercice 89

Nous considérons l'équation différentielle

$$y'' - 3y' - 10y = 2x. \tag{79.45}$$

(1) Déterminer la solution générale $\mathcal{Y}_H$ de l'équation homogène associée à (**??**).
(2) Trouver une solution particulière, y_P, de la forme $ax + b$, de l'équation (**??**).
(3) En déduire la solution générale de l'équation (**??**).
(4) Existe-t-il une solution y de (**??**) pour laquelle nous avons $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$?
(5) Déterminer l'unique solution de (**??**) qui satisfait les conditions $y(0) = 10$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 90

(1) Rappeler le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction cosinus.
(2) Calculer le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{1+ax^2}{1+bx^2},$$

où a et b sont des réels (leur valeurs exacte n'a pas d'importance pour l'instant).

(3) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - f(x)}{x^5} = 0.$$

Exercice 91

(1) Donner un exemple de fonction bijective de I dans J pour :
   (a) $I = [0, 1]$, $J = [1, 2]$
   (b) $I =]0, 1[$, $J = \mathbb{R}$
   (c) $I = \mathbb{R}^+$, $J = [0, 1[$.
(2) Donner un exemple d'intervalles I et J pour que f soit bijective de I dans J lorsque :

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \ln(x^2)$

Correction de l'exercice ??

<+CorranalyseCTU-0023+>

Exercice 92

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

(2) Montrer que la fonction f est dérivable sur les intervalles $]-1\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ 1[$, et déterminer l'expression de $f'(x)$.

(3) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ 1[$, $f(x) = 2\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$.

(4) Tracer la courbe représentative de f.

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-11+>

Exercice 93

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

(1) Calcculer I_0, I_1, I_2.

(2) Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

(3) En déduire I_{2p} et I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-29+>

Exercice 94

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

Soit $a > 0$, on pose : $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x$

(1) Déterminer $I_0(a)$.

(2) Montrer que $I_0(a)$ admet une limite lorsque $a \to +\infty$.

On notera cette limite $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(x)\,\mathrm{d}x$.

(3) Déterminer une relation de récurrence entre $I_n(a)$ et $I_{n+1}(a)$.

(4) Montrer que pour tout n, $I_n(a)$ admet une limite lorsque a tend vers $+\infty$.

On notera cette limite $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(5) Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n\,!$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-30+>

Exercice 95

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = \arctan(x) - \arctan(3x)$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition, les variations et les limites aux bords du domaine de la fonction f.

(2) En utilisant le point précédent, montrer que f est une bijection de $I = \left]-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ vers un intervalle que l'on précisera.

(3) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = -\arctan\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)$.

(4) Trouver une expression de la fonction réciproque de f sur I à partir de l'expression donné dans le point précedent.

(5) La fonction f réalise aussi une bijection de $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ vers $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$. Est-il possible d'utiliser entre ces deux intervalles la fonction réciproque trouvée au point précedent ? Motiver votre réponse.

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-46+>

Exercice 96

Déterminer le prolongement par continuité de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{79.46}$$

en $x = 0$.

Indice : suivre l'exemple **??**.

Correction de l'exercice ??

<+CorranalyseCTU-0008+>

Exercice 97

Nous considérons les fonctions suivante.

(1) $f_1(x) = \ln(x)$;
(2) $f_2(x) = \ln(x^2)$;
(3) $f_3(x) = \ln(|x|)$;
(4) $f_4(x) = |\ln(x)|$;
(5) $f_5(x) = \ln(x+1)$;
(6) $f_6(x) = \ln(x) + 1$;
(7) $f_7(x) = \sqrt{\ln(x)}$.

(1) Déterminez leur domaines de définition.

(2) Indiquez le graphe correspondant à chacune des fonctions (figure **??**). Justifiez vos réponses

Correction de l'exercice ??

<+CorranalyseCTU-0009+>

Exercice 98

Soit $f(x) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$. Déterminer l'ensemble de définition, le domaine de dérivabilité, et l'expression de $f'(x)$.

Exercice 99

Simplifier les expressions suivantes :

(1) $f(x) = \cosh\Big(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big)$

(2) $f(x) = \sinh\Big(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big)$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-14+>

Exercice 100

Pour s'exercer à manipuler les fonctions trigonométrique inverses

(1) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\cos\big(\arctan(y)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \tag{79.47}$$

et

$$\sin\big(\arctan(y)\big) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}. \tag{79.48}$$

(2) Montrer que pour tout $y > 0$,

$$\arctan(y) + \arctan(\frac{1}{y}) = \frac{\pi}{2}. \tag{79.49}$$

(3) En déduire que pour tout $y < 0$,

$$\arctan(y) + \arctan(\frac{1}{y}) = -\frac{\pi}{2}. \tag{79.50}$$

Correction de l'exercice ??

<+CorranalyseCTU-0005+>

Exercice 101

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_1^4 x\ln x\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^{\pi} x\sin 3x\,\mathrm{d}x$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{3}} \frac{1}{9x^2+6x+2}\,\mathrm{d}x \quad (\text{poser } t = 3x+1) \qquad I_5 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x \quad (\text{poser } t = \cos x)$$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-48+>

Exercice 102

On considère la fonction f de la variable réelle x, définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

(2) Étudier la parité de f.

(3) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{3})$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(4) Justifier que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$, puis calculer l'expression de $f'(x)$.

(5) En déduire l'expression de $f(x)$.

(6) Établir le tableau de variations de f.

(7) Tracer la courbe représentative de f.

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-45+>

Exercice 103

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^1 (x^3-7x+15)\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^4} \qquad I_4 = \int_2^8 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad I_6 = \int_{-8}^{-2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad I_7 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-15+>

Exercice 104

(1) Calculer le développement limité en 0 et à l'ordre 2 des fonctions $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \ln(1-2x)$.

(2) En déduire le développement limité en 0 et à l'ordre 2 de f définie par $f(x) = \ln(1-2x) - \sin(2x)$.

(3) En déduire les valeurs $f'(0)$ et $f''(0)$.

(4) On note (C_f) la courbe représentative de f.

  (a) Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

(b) Préciser la position relative de (C_f) par rapport à sa tangente.

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-53+>
Exercice 105
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(1) $y'' + 2y' + y = xe^x$

(2) $y'' + y' - 2y = xe^x$

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-38+>
Exercice 106

(1) Résoudre sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ l'équation différentielle (E_1) : $(x-1)y' + y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle (E_2) : $xy' - 2y = x^4$.

(3) (a) Résoudre l'équation différentielle (E_3) : $yy' + 2x = 0$.

(b) Déterminer la solution φ de (E_3) telle que $\varphi(0) = -2$.

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-35+>
Exercice 107

(1) (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$

(b) Déterminer la solution φ de cette équation telle que $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(0) = 2$.

(2) Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle : $x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = 0$
On pourra poser $z = x^2y$.

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-39+>
Exercice 108
La fonction f est la solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 2xy^3$ qui prend la valeur $\dfrac{1}{2}$ en 0.
Déterminer un développement limité de f à l'ordre 2 en 0.

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-41+>
Exercice 109

(1) Résoudre sur $]-1\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle (E_1) : $(x+1)y' - (2x+3)y = e^{2x}$

(2) Résoudre sur $]-1\,;\,+1[$ l'équation différentielle (E_2) : $y' - y\cos(x) = \dfrac{e^{\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_3) : $y'' - 6y' + 13y = 0$.

(b) Déterminer la solution φ de (E_3) qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 1$.

(4) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_4) : $y'' - 4y' + 13y = 10\cos(2x) + 25\sin(2x)$.

Correction de l'exercice ??
<+CorrautoanalyseCTU-49+>
Exercice 110
Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-2}^{2} \frac{e^t}{e^t+3}\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}) \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad I_4 = \int_{-2}^{2} \sinh x\,\mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_2^4 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \qquad I_7 = \int_0^2 \frac{t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t \qquad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-27+>

Exercice 111

Completer le tableau suivant.

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
\text{Primitive } \int f(x)\,dx & \text{Function } f(x) & \text{Dérivée } f'(x) \\
\hline
\sin(x)+C & \ldots & \ldots \\
\hline
\ldots & \sin(3x) & \ldots \\
\hline
\ldots & \ldots & -\frac{1}{x^2} \\
\hline
\ldots & \ln(x) & \ldots \\
\hline
\ldots & \ldots & (\alpha+1)x^\alpha \\
\hline
\frac{e^{5x}}{5}+C & \ldots & \ldots \\
\hline
\ldots & \tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} & \ldots \\
\hline
\ldots & \arcsin(x) & \ldots \\
\hline
\end{array} \tag{79.51}$$

Correction de l'exercice ??

<+Corrmazhe-0009+>

Exercice 112

Calculer les intégrales et les primitives suivantes

(1) $K_1 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi} \frac{1}{x^{1/4}} + \cos(3x)\,\mathrm{d}x\,;$

(2) $K_2 = \displaystyle\int x^3(\ln(x)-1)\,\mathrm{d}x\,;$

(3) $K_3 = \displaystyle\int \frac{x^2+15}{x(x+1)(x+5)}\,\mathrm{d}x\,;$

(4) $K_4 = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\arctan\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,;$

(5) $K_5 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1+\cos(x)+\cos^2(x)\,\mathrm{d}x\,;$

(6) $K_6 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)+\sin^3(x)\,\mathrm{d}x.$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-19+>

Exercice 113

Calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+5} \qquad J_2 = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{3x+5} \qquad J_3 = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^2}$$
$$J_4 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(4x+1)^4} \qquad J_5 = \int_0^2 \frac{x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x \qquad J_6 = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5}$$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-22+>

Exercice 114

Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,\mathrm{d}x \quad (\text{prendre } t = e^x) \qquad I_2 = \int_1^2 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad (\text{prendre } t = x^2)$$
$$I_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{prendre } x = \tan t) \quad I_4 = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a \in [0\,;\,+\infty[,\ \text{poser } x = a\sin t)$$

Correction de l'exercice ??

<+CorrautoanalyseCTU-23+>

Exercice 115

Indiquez le graphe correspondant à chacune des fonctions suivantes (figure **??**). Justifiez vos réponses

(1) $\cos(x)$;
(2) $\cos(x+\pi/2)$;
(3) $\cos(e^x)$;
(4) $\cos(x)+1$;
(5) $\cos(4x)$;
(6) $|\cos(x)|$;
(7) $\sqrt{\cos(x)}$.

Correction de l'exercice ??

<+CorrstarterST-0007+>

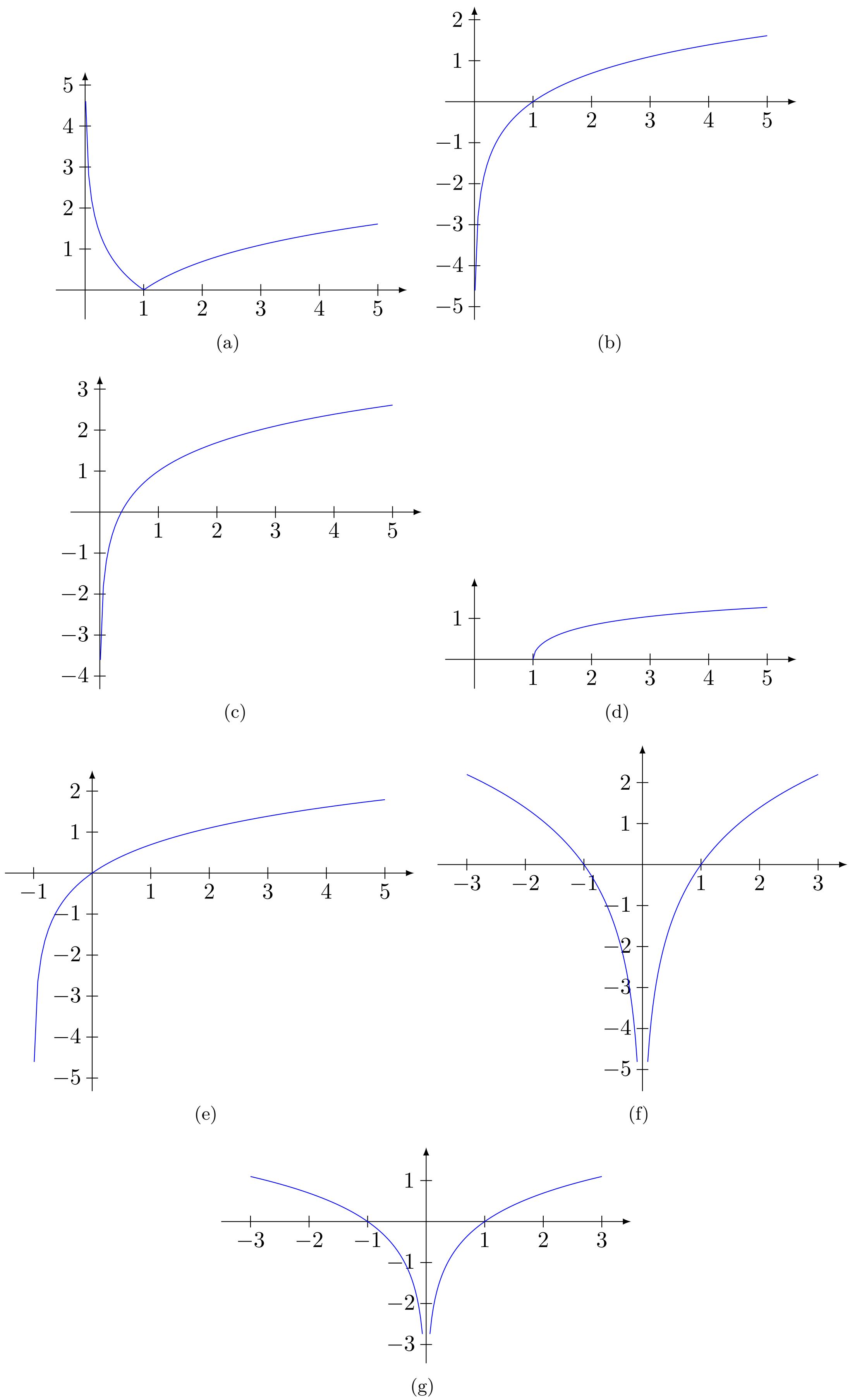


FIGURE 79.5 – Les graphes à considérer

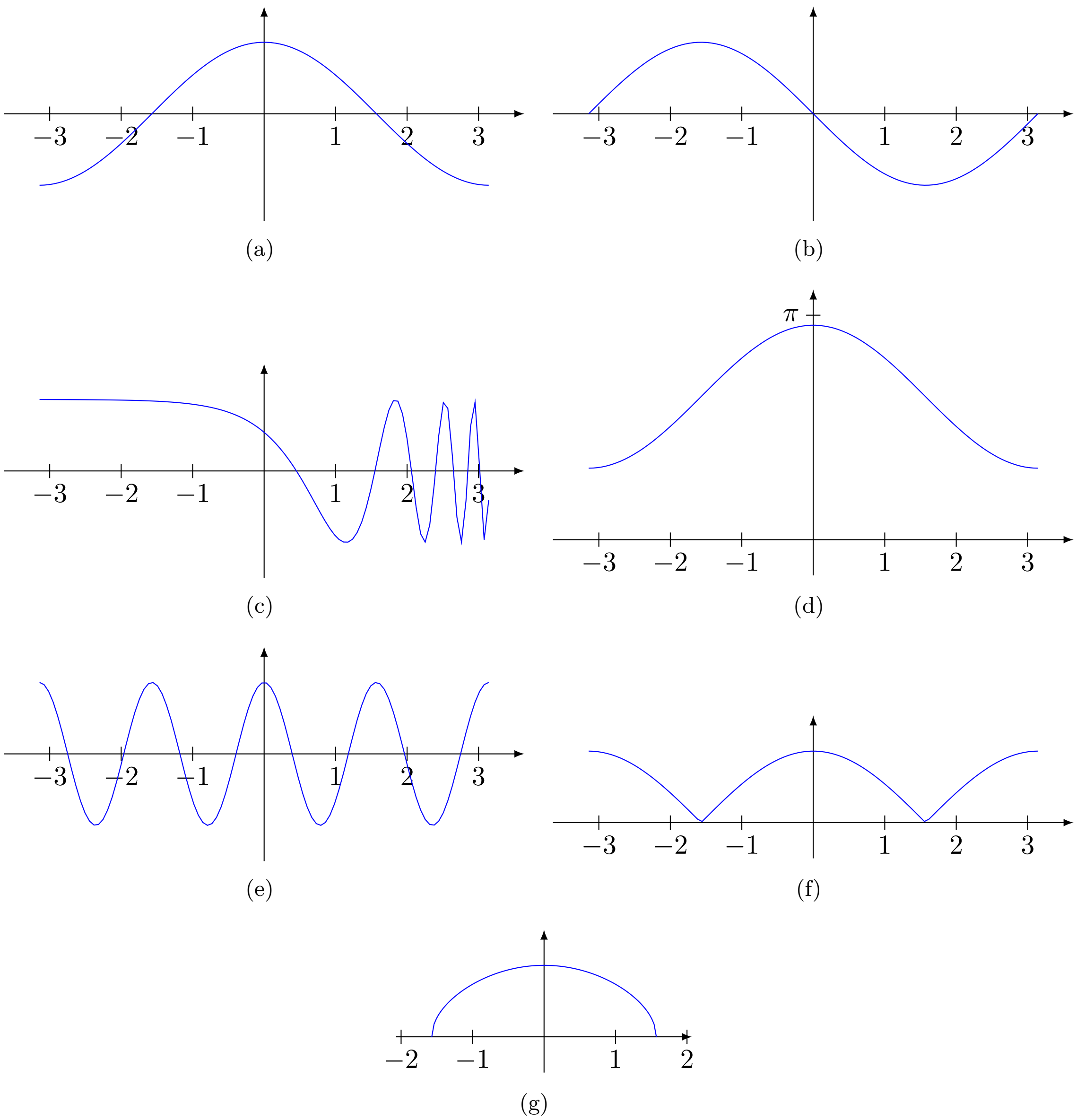


FIGURE 79.6 – Les graphes à considérer de la question **??**.