

# Comparaison entre méthodes de simulation de fluides

Michel Jean Joseph Donnet

Invalid Date

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes de simulation de fluides</b>	<b>3</b>
2.1	Mécanique des fluides . . . . .	3
2.1.1	Variables . . . . .	3
2.1.2	Équations d'Euler . . . . .	3
2.1.3	Équations de Navier-Stokes . . . . .	4
2.2	Méthode SPH . . . . .	5
2.2.1	principes de base . . . . .	5
2.3	Méthode LBM . . . . .	7



# Chapitre 1

## Introduction

La terre est appelée “La planète bleue”. En effet, près de 70% de la surface de la terre est recouverte d’eau, donnant ainsi une couleur bleue à la terre, comme les astronautes ont pu constater lors de la mission Apollo de 1972. De plus, la terre possède l’eau dans tous ses états: solide, liquide et gazeux.

L’eau est quelque chose qui a beaucoup intéressé les scientifiques de toutes les époques. Nous pouvons notamment citer parmi eux le légendaire Archimède qui, au cours du 3ème siècle avant Jésus-Christ, utilisa le principe de la poussée d’Archimède afin de déterminer si une couronne était en or selon la légende.

Puis entre le 17ème et le 18ème siècle s’est démarqué le tristement célèbre Isaac Newton qui a donné la définition d’un fluide newtonien, qui est un fluide dont la viscosité reste constante indépendamment de la force s’exerçant sur celui-ci, donc un fluide ayant un comportement prévisible.

Grâce aux études d’Isaac Newton, le fiefé coquin Leonhard Euler d’origine bâloise établit au cours du 18ème siècle des équations modélisant l’écoulement d’un fluide parfait adiabatique, c’est à dire que la viscosité et les effets de la chaleur ne sont pas pris en compte.

Mais cela ne satisfait pas tous les scientifiques. En effet, au cours du 19ème siècle, frustrés par l’impossibilité de modéliser des fluides visqueux, le mathématicien Henri Navier et le physicien Georges Gabriel Stokes décidèrent d’ajouter la notion de viscosité aux équations d’Euler, étendant ainsi les équations sur les fluides newtonien. Leur travail fut reconnu et utilisé sous le nom d’équations de Navier-Stokes. Même de nos jours, personne n’a encore réussi à trouver une forme analytique à ces équations.

Cependant, la technologie a fait de nombreux progrès surtout vers la fin du 20ème siècle avec l’apparition de l’ordinateur, ce qui permit aux scientifiques de tenter de résoudre les équations de Navier-Stokes grâce à des approximations et des méthodes numériques. Plusieurs méthodes ont donc été créées, notamment la méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), la méthode Fluid-Implicit Particles (FLIP) et la méthode Lattice Boltzmann Method (LBM). Cependant, quelles sont les différences entre ces méthodes ? Y-a-t-il une méthode plus rapide qu’une autre ? Serait-il possible d’utiliser ces méthodes afin de faire du rendu en temps réel de haute qualité ?

# Chapitre 2

## Méthodes de simulation de fluides

### 2.1 Mécanique des fluides

Un fluide est composé de nombreuses particules. À la différence d'un solide, un fluide est complètement déformable.

Il existe différents types de fluides, notamment:

- les gaz: ce sont des fluides composés de particules isolées pouvant se mouvoir en toute liberté et pouvant entrer en collision.
- les liquides: ce sont des fluides composés de particules liées entre elles par des liaisons faibles, comme les liaisons hydrogène. Les particules ne peuvent donc pas se mouvoir en toute liberté, et lorsqu'une particule bouge, elle exerce une influence sur les autres particules liées à elle.

#### 2.1.1 Variables

- $\rho$  la masse volumique du fluide. C'est une fonction qui dépend de la position à l'intérieur du volume et du temps  $t$ .
- $V$  le vecteur vitesse du fluide. Il dépend également de la position à l'intérieur du volume et du temps  $t$ .
- $p$  la pression du fluide
- $f$  les forces externes s'appliquant sur le fluide (comme la force de gravité)
- $E$  l'énergie totale par unité de masse. On a  $E = e + \frac{1}{2}\|V\|^2$
- $e$  l'énergie interne par unité de masse
- $\Sigma$  la contrainte de viscosité du fluide
- $q$  le flux de chaleur causé par conduction thermique
- $q_R$  le flux de chaleur causé par rayonnement

#### 2.1.2 Équations d'Euler

Les équations d'Euler sont un ensemble d'équations décrivant l'écoulement d'un fluide non visqueux. Voici les 3 équations d'Euler:

##### 2.1.2.1 Équation de continuité

L'équation de continuité se formule de la façon suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla(\rho V) = 0 \quad (2.1)$$

avec:

- $\frac{\partial}{\partial t}\rho$  nous donne la variation de la masse par unité de volume en fonction du temps
- $\nabla(\rho V)$  est le flux de masse. Il nous indique comment la masse se déplace et se redistribue dans le volume

Dans cette équation, nous pouvons voir que la variation de la masse doit être égale au flux de masse du fluide. Cela signifie que la masse du fluide suit le principe de conservation de la matière

### 2.1.2.2 Équation de la quantité de mouvement

Voici l'équation de la quantité de mouvement:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \nabla \cdot (\rho V V^T) = -\nabla p + \rho \cdot f \quad (2.2)$$

avec:

- $\rho \cdot f$  nous donne l'ensemble des forces externes s'appliquant par unité de volume
- $\nabla \cdot (\rho V V^T)$  représente le changement de vitesse dû au mouvement du fluide
- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho V)$  est la variation temporelle de la quantité de mouvement

Dans cette équation, nous avons d'une part la variation temporelle de la quantité de mouvement plus la répartition de la quantité de mouvement dans le fluide, et de l'autre part la force résultant des variations de la pression plus les autres forces externes. On peut donc reconnaître la 2ème loi de Newton disant que la quantité de mouvement est égal à la somme des forces.

### 2.1.2.3 Équation de l'énergie

Soit un liquide adiabatique, c'est à dire pour lequel la chaleur n'est pas prise en compte.

Voici l'équation de l'énergie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho E + \nabla \cdot (\rho E V) = -\nabla \cdot (p V) + \rho g V \quad (2.3)$$

avec:

- $\frac{\partial}{\partial t}\rho E$  est la variation temporelle de l'énergie par unité de volume.
- $\nabla \cdot (\rho E V)$  nous donne le flux d'énergie à travers le fluide, donc comment l'énergie est transportée dans le fluide
- $-\nabla \cdot (p V)$  est le travail de la pression sur le fluide
- $\rho f V$  est le travail des forces extérieures sur le fluide

Dans cette équation, il y a d'une part la somme entre la variation et le flux d'énergie, et d'autre part la somme du travail des forces s'exerçant sur le fluide. Cela découle du principe de conservation d'énergie: la somme du travail des forces est égale à l'énergie du fluide...

## 2.1.3 Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont basées sur les équations d'Euler. Elles y ajoutent la notion de viscosité, qui représente les forces de friction interne au fluide. Elles permettent donc de modéliser des fluides réels visqueux à la différence des équations d'Euler qui modélisent les fluides parfaits.

Voici les équations de Navier-Stokes:

### 2.1.3.1 Équation de continuité

Celle-ci ne diffère pas de l'équation de continuité d'Euler 2.1. Ceci semble normal, car la masse du fluide, même dans un fluide visqueux, ne peut toujours pas être créée ni détruite, et suit toujours le principe de conservation de la matière.

### 2.1.3.2 Équation de la quantité de mouvement

Voici l'équation de la quantité de mouvement de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \nabla \cdot (\rho V V^T) = -\nabla p + \nabla \Sigma + \rho \cdot f \quad (2.4)$$

- $\nabla \Sigma$  est la force exercée par la viscosité du fluide

Dans cette équation, la force exercée par la viscosité a été ajoutée à la somme des forces de l'équation 2.2 d'Euler. Ainsi, l'équation 2.4 suit toujours la 2ème loi de Newton

### 2.1.3.3 Équation de l'énergie

Voici l'équation de l'énergie de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E + \nabla \cdot (\rho EV) = -\nabla \cdot (pV) + \nabla \cdot \Sigma V + \rho fV + \nabla \cdot q + \nabla \cdot q_R \quad (2.5)$$

- $\nabla \cdot \Sigma V$  est le travail de la viscosité du fluide
- $\nabla \cdot q + \nabla \cdot q_R$  est le travail de la chaleur sur le fluide

L'équation de l'énergie de Navier-Stokes 2.5 ajoute à l'équation d'Euler 2.3 le travail de la viscosité et de la chaleur sur le fluide. Ainsi, les fluides non adiabatiques sont également pris en compte par cette équation.

Dans la plupart des cas, l'équation de l'énergie n'est pas prise en compte lors de la simulation de fluides notamment à cause de la complexité du calcul.

## 2.2 Méthode SPH

La méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) a été inventée en 1977 par Bob Gingold et Joe Monaghan GINGOLD et MONAGHAN [3] et indépendamment par Leon Lucy LUCY [6] afin de simuler des phénomènes astrophysiques, tel que la formation et l'évolution d'une étoile ou d'une galaxie. Il s'agissait tout d'abord d'une approche probabiliste. Les équations de la mécanique des fluides pouvaient effectivement servir à décrire ce genre de phénomènes astrophysiques car il s'agit de gaz ou d'une multitude de corps évoluant d'une manière similaire à un liquide ou un gaz.

La méthode SPH s'est ensuite développée dans le domaine de la mécanique des fluides où elle a servi notamment à modéliser non seulement des fluides compressibles et incompressibles, mais également des phénomènes thermiques et magnétiques.

Puis vers 1990, la méthode SPH a été étendue à la mécanique des structures afin de simuler par exemple des impacts à forte vitesse ou des déchirures de matériaux grâce notamment au travail de Libersky et Petschek (citation ici).

De nos jours, la méthode SPH est encore utilisée dans la mécanique des fluides, mais également pour simuler des impacts haute vitesse, des fragmentations ou encore des explosions, si bien que le terme Hydrodynamics n'est plus adapté. Cependant, pour des raisons historiques, on conserve le terme Hydrodynamics.

### 2.2.1 principes de base

La méthode SPH représente le fluide comme un ensemble de particules interagissant entre elles. Elle simule le comportement de chaque particule, donc il s'agit d'une méthode lagrangienne.

De plus, la méthode SPH est une méthode sans maillage, ce qui signifie en d'autres termes qu'elle ne nécessite pas de maillage fixe. Cela implique que la méthode SPH peut être utilisée avec une taille de domaine adaptative, et est donc particulièrement adaptée pour des problèmes complexes car on ne fera que la quantité de calcul nécessaire. Par exemple, si on pense à simuler un verre d'eau se renversant sur une table, la méthode SPH sera particulièrement adaptée car elle ne calculera que les endroits où le fluide est présent et pas toute la table comme le ferait une méthode avec maillage fixe qui devrait définir un domaine de calcul fixe et s'y tenir.

Elle ne tente pas de résoudre les équations du fluide dans une grille fixe.... (reformuler ?)

Comme la méthode SPH est une méthode sans maillage, elle utilise une technique d'interpolation afin de déterminer le résultat des équations aux dérivées partielles.

### 2.2.1.1 Interpolation

L'interpolation utilisée dans la méthode SPH est basée sur le principe que la distribution de Dirac  $\delta(r)$ , appelée par abus de langage fonction Dirac et définie dans l'équation 2.7, peut être considérée comme l'élément neutre de la convolution, comme nous montre l'équation 2.6. Étant une distribution de probabilité, la fonction Dirac respecte la propriété d'une distribution, donc on a la propriété 2.8.

$$\begin{aligned} f * \delta(x) &= \int_y f(y) \delta(y - x) \\ &= f(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.7)$$

et:

$$\int \delta(x) dx = 1 \quad (2.8)$$

On définit donc une fonction noyau  $W$  qui est une approximation de la fonction Dirac et qui respecte les propriétés 2.9 et 2.10.

$$\int_r W(r, h) dr = 1 \quad (2.9)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(r, h) = \delta(r) \quad (2.10)$$

L'équation 2.6 devient alors l'équation 2.11.

$$\begin{aligned} f * W(x) &= \int_y f(y) W(y - x) \\ &\approx f(x) \end{aligned} \quad (2.11)$$

La méthode SPH simule le fluide comme un ensemble de particules. Ces particules possèdent leurs caractéristiques propres tel que leur masse, leur position, leur vitesse. Une particule interagit avec les particules l'avoisinant à travers un noyau de lissage  $W$ . Cependant, une particule ne peut pas interagir avec toutes les particules... Par exemple, on ne veut pas qu'une particule à une extrémité du fluide interagisse avec une particule à l'autre extrémité du fluide. Ainsi, une distance  $h$  est fixée afin que les particules qui se trouvent à une distance supérieur à  $h$  ne possèdent pas d'influence sur la particule. Ainsi, on peut définir une équation 2.12 qui décrit comment une propriété physique  $A_S$  à un point donné du fluide est calculée grâce aux propriétés physiques  $A_i$  des particules avoisinant le point donné, pondéré par le noyau de lissage  $W$  donnant l'influence des particules avoisinantes, comme nous pouvons le voir sur la figure 2.1.

$$A_S(r) = \sum_i m_i \frac{A_i}{\rho_i} W(r - r_i, h) \quad (2.12)$$

avec:

- $m_i$  la masse de la particule  $i$
- $A_i$  une propriété de la particule  $i$
- $\rho_i$  la densité de la particule  $i$
- $W$  le noyau utilisé pour l'interpolation
- $h$  le rayon d'influence du noyau d'interpolation. Ainsi, on a  $W = 0$  si  $|r - r_i| > h$ .

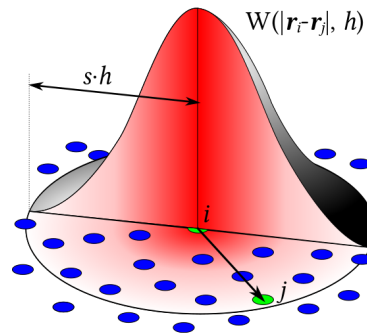


Figure 2.1: créée par JLCERCOS [4]

La méthode SPH donne donc les propriétés physiques d'un point donné par une combinaison des propriétés des particules voisines. Dans notre cas, la méthode SPH résout l'équation de la conservation de la masse 2.1 et l'équation de la conservation de la quantité de mouvement 2.4, mais pas l'équation de la conservation de l'énergie 2.5, car la température n'est pas prise en compte.

Pour plus de précisions, consultez le travail de thèse de Fabien Caleyron CALEYRON [2], mais également le travail de master de Marcus Vesterlund VESTERLUND [9] et le travail de thèse de Alban Vergnaud VERGNAUD [8]. Cette partie a été écrite principalement avec les informations données par VESTERLUND [9] et VERGNAUD [8].

### 2.2.1.2 Avantages

Les principaux avantages de la méthode SPH sont que celle-ci est une méthode

- sans maillage: en effet, cela permet à la méthode SPH de simuler des problèmes avec une dynamique de frontière complexe tel que des fluides à surface libre ou des fluides avec beaucoup de déplacement de frontières. De plus, l'avantage de la méthode sans maillage est sa facilité d'implémentation et surtout de parallélisation. En effet, il est plus facile de séparer le calcul entre plusieurs unités de calcul, car on regarde en chaque point du fluide quels sont ses caractéristiques locales.
- Comme nous l'avons mentionné plus haut, la méthode SPH peut également être utilisée d'une manière plus générale comme pour la simulation d'impact à haute vitesse sur un matériaux ou encore pour la simulation d'explosions ou de fragmentations.
- qui permet une bonne conservation de la masse... (À développer ???)

### 2.2.1.3 Désavantages

Cependant, la méthode SPH possède également des inconvénients. En effet, cette méthode n'est pas bien définie aux frontières, ce qui rend la méthode difficile à calculer, comme le faisait remarquer SHADLOO, OGER et LE TOUZÉ [7]. Mais des travaux ont été faits afin de palier à ce problème, tel que ADAMI, HU et ADAMS [1] et KOSTORZ [5].

(À compléter !!!)

## 2.3 Méthode LBM

La méthode Lattice Boltzman est une méthodes



# Bibliographie

- [1] S. ADAMI, X. Y. HU et N. A. ADAMS. “A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics”. In : *Journal of Computational Physics* 231.21 (2012), p. 7057-7075. DOI : [10.1016/j.jcp.2012.05.005](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.05.005).
- [2] Fabien CALEYRON. “Simulation numérique par la méthode SPH de fuites de fluide consécutives à la déchirure d’un réservoir sous impact”. Français. NNT : 2011ISAL0103. tel-00711040. Autre. INSA de Lyon, 2011. URL : <https://theses.hal.science/tel-00711040>.
- [3] R.A. GINGOLD et J.J. MONAGHAN. “Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 181 (1977), p. 375-389.
- [4] JLCERCOS. *Figure*. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=70225405>. Travail personnel, CC BY-SA 4.0. 2018.
- [5] KOSTORZ. “A semi-analytical boundary integral method for radial functions with application to Smoothed Particle Hydrodynamics”. In : *Journal of Computational Physics* 417 (2020). DOI : [10.1016/j.jcp.2020.109565](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109565).
- [6] L.B. LUCY. “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis”. In : *Astronomical Journal* 82 (1977), p. 1013-1024.
- [7] M. S. SHADLOO, G. OGER et D. LE TOUZÉ. “Smoothed particle hydrodynamics method for fluid flows, towards industrial applications: Motivations, current state, and challenges”. In : *Computers and Fluids* 136 (2016), p. 11-34. DOI : [10.1016/j.compfluid.2016.05.029](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2016.05.029).
- [8] Alban VERGNAUD. “Améliorations de la précision et de la modélisation de la tension de surface au sein de la méthode SPH, et simulations de cas d’amerrissage d’urgence d’hélicoptères”. Français. fNNT: 2020ECDN0033ff. fftel-03185147f. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. École centrale de Nantes, 2020.
- [9] Marcus VESTERLUND. “Simulation and Rendering of a Viscous Fluid using Smoothed Particle Hydrodynamics”. Mém. de mast. Unknown, déc. 2004.