a. preuve comportementale On *devine* qu'il est avisé de définir le thread i comme étant le dernier thread qui exécute l'instruction à la ligne 2. On sait donc que lorsque i exécute 2 on a $\forall j \neq i \ X(j) = 1 \rightarrow Y(j) = X((j-1)mod\ N) \rightarrow Y(i) = X((i-1)mod\ N)$. Le thread i doit bien lire la valeur 1 car le thread $(i-1)mod\ N$ à bien écrit $X((i-1)mod\ N) = 1$ avant que $X(i)$ exécute la ligne 2.

b. Invariant On a N threads qui exécutent le programme ci-dessous. A voir: lorsque les threads ont tous exécutés le programme, il existe un thread i tel que $Y(i) = 1$

```
Thread i
1. X(i)=1
2. Y(i)=X((i-1)mod N)
3. end
```

Pour la méthode des invariants les lignes sont numérotées. L'état du système est donné par les tuples de la forme

$$\{pc_1, \dots, pc_N, X(1), \dots, X(N), Y(1), \dots, Y(N)\}$$

Les pc_i sont les pointeurs de programmes = la prochaine ligne à exécuter par le thread i, les $X(i)$ les variables partagées et les $Y(i)$ les variables locales. On doit montrer

$$\Big(\forall i \ pc_i = end\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\exists j \ t.q. \ Y(j) = 1\Big) \tag{1}$$

On montre que (1) est un invariant, i.e. est toujours vraie. La formule est vraie initialement car $pc_i = 1$ donc le membre de gauche est faux et $0 \Rightarrow x$ est toujours vraie quel que soit x.

Pour la récurrence, le seul état qui doit être vérfié est l'état où $\forall i \ pc_i = end$ puisque dans ce cas on à $1 \rightarrow x$ et on doit vérifier que $x = 1$. Cet état est le successeur d'un état de la forme $(pc_1 = pc_2 = \ldots = \widehat{pc_i} = pc_{i+1} = \ldots = pc_N = \mathbf{end}) \ and \ pc_i = 2$, où $\widehat{pc_i}$ indique qu'il est le seul de la liste à manquer. Complètement cet état est de la forme

$$\begin{aligned}\big\{&pc_1 = end, pc_2 = end, \dots, pc_i = 2, pc_{i+1} = end, \dots, pc_N = end,\\ &X(1) = 1, \dots, X(N) = 1\\ &Y(1) = ?, \dots, Y(N) = ?\big\}\end{aligned}$$

Comme $pc_i = 2$ la prochaine instruction exécutée par le thread i est $Y(i) = X((i-1)modN) = 1$ comme on voit sur l'état.

Pour être complet on devrait montrer que

$$\forall i\big(pc_i = end \Rightarrow X(1) = 1\big)$$

est un **invariant**, c'est ce qu'on applique pour conclure que $X((i-1)modN) = 1$. Cette preuve est la mème qui la précédente.