Table of contents

Série 1 : Arithmétique Modulaire

Notions Clés

Ensembles : $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$, $\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n | \text{pgcd}(a, n) = 1\}$

Congruence : $a \equiv b \mod n \iff n | (a - b)$

Inversibilité : a inversible mod $n \iff \text{pgcd}(a, n) = 1$

Théorèmes fondamentaux :

- **Bézout :** $ax + by = \text{pgcd}(a, b)$
- **Euler :** $a^{\Phi(n)} \equiv 1 \mod n$ (si $\text{pgcd}(a, n) = 1$)
- **Fermat :** $a^p \equiv a \mod p$ (p premier)

Ordre : $\text{ord}_n(a) =$ plus petit $x > 0$ tel que $a^x \equiv 1 \mod n$

Générateur : g génère $\mathbb{Z}_n^*$ si $\text{ord}_n(g) = \Phi(n)$

Structures : Groupe → Anneau → Corps (inversibilité croissante)

Calculs modulaires

Q : $((11 \mod 7) \cdot (17 \mod 7)) \mod 7$
R : $4 \cdot 3 = 12 \equiv 5 \mod 7$

Trouver l'ordre

Q : Ordre de 2 mod 7 ?
R : $2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8 \equiv 1 \rightarrow \mathrm{ord}_7(2) = 3$

Identifier un générateur

Q : 3 est-il générateur de $\mathbb{Z}_7^*$?
R : $3^1 = 3, 3^2 = 2, 3^3 = 6, 3^4 = 4, 3^5 = 5, 3^6 = 1 \rightarrow$ génère tous les éléments $\rightarrow$ **OUI**

Série 2 : Entropie

Notions Clés

Entropie : Mesure l'incertitude/information d'une variable aléatoire

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$$

Propriétés :

- $H(X)$ maximale quand toutes les probabilités sont égales
- $H(X) = 0$ si une seule valeur possible (probabilité = 1)
- Pour n valeurs équiprobables : $H(X) = \log_2(n)$

Entropie jointe : $H(X, Y) = -\sum_x \sum_y p(x, y) \log_2(p(x, y))$

Entropie conditionnelle : $H(X|Y) = -\sum_y \sum_x p(y)p(x|y) \log_2(p(x|y))$

En cryptographie : On veut $H(\text{Plaintext}|\text{Ciphertext}) \approx H(\text{Plaintext})$

Entropie minimale/maximale

Q : Variable 256 bits, entropies min/max ?
R :

- **Min :** $H = 0$ (une seule valeur possible, $p = 1$)
- **Max :** $H = 256$ (toutes valeurs équiprobables, $p = 2^{-256}$)

Entropie d'une concaténation

Q : $H(X) = 64$, on génère une valeur et la concatène à elle-même (512 bits). Entropie ?

R : $H = 64$ (pas de nouvelle information, juste duplication)

Entropie de mot de passe

Q : Mot de passe = date “MM/DD/YYYY” aléatoire (365 jours, années 0000-2025)
R : $365 \times 2026 = 739490$ possibilités $\rightarrow H = \log_2(739490) \approx 19.5$ bits

Générateur amélioré

Q : Générateur G : $P(0) = 0.5 + \delta$, $P(1) = 0.5 - \delta$. On crée A : prend 2 bits de G, garde 01→0 ou 10→1, rejette 00 et 11. Avantage ?
R :

- $P_A(0) = P_A(1) = 0.5$ (parfaitement aléatoire !)
- Coût : besoin de $\frac{2x}{0.5-2\delta^2}$ bits de G pour x bits de A

Série 3 : Chiffrements Historiques

Notions Clés

Chiffre de César :

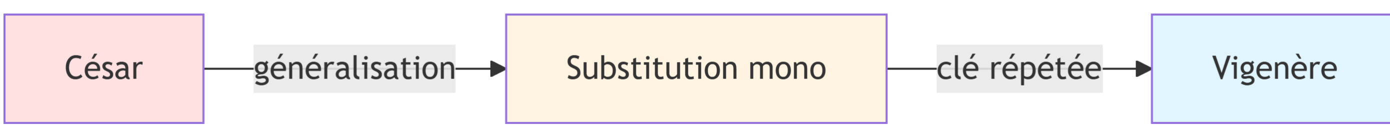
Rotation de k positions : $E_k(x) = (x + k) \mod 26$, $D_k(c) = (c - k) \mod 26$

Substitution monoalphabétique :

Clé = permutation de l’alphabet. Chaque lettre → lettre fixe.

Chiffre de Vigenère :

Substitution polyalphabétique : $C_i = (M_i + K_{i \mod |K|}) \mod 26$



Cassage :

- **César :** Force brute (25 clés max) ou analyse fréquentielle
- **Mono :** Analyse fréquentielle + structure du langage
- **Vigenère :** Indice de coïncidence + analyse fréquentielle

Chiffrement César

Q : Chiffrer "HELLO" avec $k = 5$
R : H→M, E→J, L→Q, L→Q, O→T → **"MJQQT"**

Chiffrement Vigenère

Q : Chiffrer "BONJOUR" avec clé "BAC"
R :

- B+B=C, O+A=O, N+C=P, J+B=K, O+A=O, U+C=W, R+B=S
- **"COPKOWS"**

Cassage Vigenère - Longueur de clé

Méthode : Indice de coïncidence
Pour longueur L, décaler le texte de L positions et compter les lettres identiques :

$$\mathrm{IC}(L) = \frac{\sum_{i=1}^{N-L} [a_i == b_i]}{N - L}$$

Le maximum d'IC indique la longueur de clé (ou un multiple).

Cassage Vigenère - Trouver la clé

Méthode : Analyse fréquentielle par sous-texte

1. Diviser le texte en k sous-textes (positions $1, k+1, 2k+1, ...$)
2. Pour chaque sous-texte, calculer distance avec fréquences de la langue :

$$\mathrm{Dist}_x = \sqrt{\sum_{i=0}^{25} (F_i - M_{(i+x) \mod 26})^2}$$

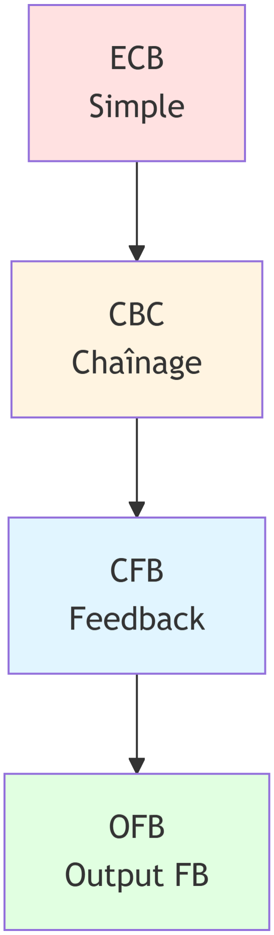
3. Le x minimisant la distance est la lettre de clé correspondante

---

Série 4 : Chiffrements par Blocs

Notions Clés

Modes de chiffrement :



ECB (Electronic CodeBook) :

$$C_i = E_K(P_i)$$

Blocs identiques → chiffrés identiques (faible sécurité)

CBC (Cipher Block Chaining) :

$$C_i = E_K(P_i \oplus C_{i-1}), \quad C_0 = IV$$

CFB (Cipher FeedBack) :

$$C_i = E_K(C_{i-1}) \oplus P_i, \quad C_0 = IV$$

OFB (Output FeedBack) :

$$O_i = E_K(O_{i-1}), \quad C_i = O_i \oplus P_i, \quad O_0 = IV$$

Fonction de chiffrement : Doit être **inversible** (bijective)

Chiffrement linéaire - Danger

Q : Chiffrement linéaire $E_L(k, m_1 \oplus m_2) = E_L(k, m_1) \oplus E_L(k, m_2)$. Avec 128 textes chiffrés choisis, montrer qu'on peut déchiffrer sans clé.
R :

1. Choisir $c_1, ..., c_{128}$ où c_i a seulement le bit i à 1
2. Tout chiffré c s'écrit comme XOR de certains c_i
3. $c = c_{i_1} \oplus ... \oplus c_{i_n} = E_L(k, m_{i_1} \oplus ... \oplus m_{i_n})$
4. Donc $m = m_{i_1} \oplus ... \oplus m_{i_n}$ (connu !)
5. **Conclusion :** Chiffrement linéaire = très dangereux

Fonctions inversibles

Q : $E_i = (B_i \cdot K_i) \mod 16$ est-elle utilisable ?
R : NON. Si $K_i = 2$, alors $B_i = 1$ et $B_i = 9$ donnent tous deux $E_i = 2 \mod 16$. Non-bijective !

Chiffrement ECB

Q : $K = (AB)_{16}$, $m = (A741BA)_{16}$, $E_K(B) = B \oplus K$, chiffrer
R :

- $C_1 = A7 \oplus AB = 0C$
- $C_2 = 41 \oplus AB = EA$
- $C_3 = BA \oplus AB = 11$
- **Résultat :** $(0CEA11)_{16}$

Chiffrement CBC

Q : $K = (AB)_{16}$, $IV = (AD)_{16}$, $m = (A741BA)_{16}$, $E_K(B) = B \oplus K$
R :

- $C_1 = (A7 \oplus AD) \oplus AB = 0A \oplus AB = A1$
- $C_2 = (41 \oplus A1) \oplus AB = E0 \oplus AB = 4B$
- $C_3 = (BA \oplus 4B) \oplus AB = F1 \oplus AB = 5A$
- **Résultat :** $(A14B5A)_{16}$

Série 5 : RSA, Rabin, ElGamal

Notions Clés

RSA :

- **Clés :** $n = pq$, e avec $\text{pgcd}(e, \Phi(n)) = 1$, $d = e^{-1} \mod \Phi(n)$
- **Chiffrement :** $c = m^e \mod n$
- **Déchiffrement :** $m = c^d \mod n$

Exponentiation rapide : Calculer a^{42} : écrire $42 = 32 + 8 + 2$ puis $a^{42} = a^{32} \cdot a^8 \cdot a^2$

Rabin :

- **Clés :** $n = pq$ avec $p \equiv q \equiv 3 \mod 4$
- **Chiffrement :** $c = m^2 \mod n$
- **Déchiffrement :** 4 solutions possibles via système de congruences

ElGamal :

- **Clés :** Premier p, générateur α, clé privée a, clé publique $\alpha^a \mod p$
- **Chiffrement :** $(\lambda, \sigma) = (\alpha^k, m \cdot (\alpha^a)^k) \mod p$
- **Déchiffrement :** $m = \lambda^{-a} \cdot \sigma \mod p$

Générer clés RSA

Q : $p = 11$, $q = 17$, créer paire de clés RSA
R :

1. $n = 11 \times 17 = 187$
2. $\Phi(n) = 10 \times 16 = 160$
3. Choisir $e = 7$ (premier avec 160)
4. Trouver d : $7d \equiv 1 \mod 160 \to d = 23$
5. **Clé publique :** $(187, 7)$, **Clé privée :** $(187, 23)$

Chiffrement RSA rapide

Q : Chiffrer $m = 28$ avec $(n = 247, e = 41)$
R : Exponentiation rapide $28^{41} \mod 247$:

- $28^1 = 28$, $28^2 = 43$, $28^4 = 120$, $28^8 = 74$, $28^{16} = 42$, $28^{32} = 35$
- $41 = 32 + 8 + 1$ donc $28^{41} = 35 \cdot 74 \cdot 28 = 149 \mod 247$

Casser RSA (petits nombres)

Q : $(n = 247, e = 41)$, trouver clé privée

R :

1. Factoriser : $247 = 13 \times 19$
2. $\Phi(n) = 12 \times 18 = 216$
3. Euclide étendu pour $d = e^{-1} \mod 216 \to d = 137$
4. Vérifier : $41 \times 137 = 5617 = 26 \times 216 + 1 \equiv 1 \mod 216$

Rabin

Q : $n = 253$, chiffrer $m = 134$
R : $c = 134^2 = 17956 \equiv 246 \mod 253$
Pour déchiffrer (factoriser $n = 11 \times 23$) :

- $m_p = 246^3 \mod 11 = 9$
- $m_q = 246^6 \mod 23 = 4$
- 4 solutions dont $m_4 = 134$

Série 6 : Fonctions de Hachage et MAC

Notions Clés

Propriétés cryptographiques :

1. **Résistance à la préimage :** Difficile de trouver x tel que $h(x) = y$
2. **Résistance à la seconde préimage :** Difficile de trouver $x' \neq x$ avec $h(x') = h(x)$
3. **Résistance aux collisions :** Difficile de trouver $x \neq x'$ avec $h(x) = h(x')$

Collision implique seconde préimage (mais pas préimage)

MAC (Message Authentication Code) :

Garantit intégrité ET authenticité. Construit souvent avec CBC : $MAC = E_K(...E_K(E_K(m_1) \oplus m_2)... \oplus m_n)$

Mauvaise fonction de hachage

Q : $h_1(x) = x \mod n$ est-elle sûre ?
R : NON pour les 3 propriétés :

- Préimage : $x = y$ donne $h_1(x) = y$
- Seconde préimage : $x' = x + n$ donne collision
- Collision : idem seconde préimage

MAC avec CBC vulnérable

Q : $t_1 = E_K(m_1)$, $t_{i+1} = E_K(m_{i+1} \oplus t_i)$. Avec $(m_1||m_2, t_1||t_2)$, falsifier ?
R : Message falsifié : $m' = (m_2 \oplus t_1)||(t_2 \oplus m_1)$
MAC falsifié : $t' = t_2||t_1$ (calculable sans clé !)

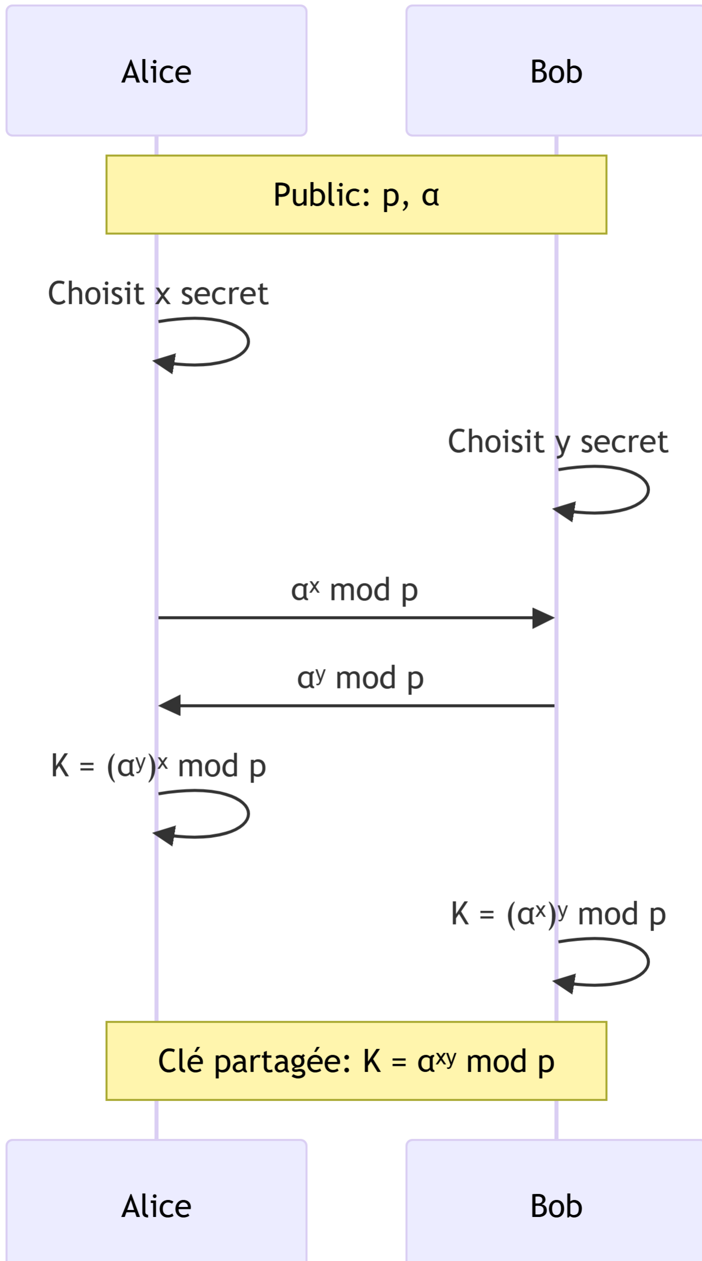
MAC = dernier bloc CBC

Q : Si $MAC = c_n$ (dernier bloc CBC), peut-on modifier le message ?
R : OUI ! On peut modifier tous les blocs $c_1, ..., c_{n-1}$ sans changer $c_n = MAC$. Le déchiffrement donnera un message différent avec MAC valide !
Solution : Utiliser deux clés différentes (une pour chiffrement, une pour MAC)

Série 7 : Authentification et Établissement de Clés

Notions Clés

Diffie-Hellman :



Attaque Man-In-The-Middle sur DH : Intercepter et remplacer les échanges

Propriétés de sécurité :

- **Authentification implicite :** Seuls A et B peuvent avoir la clé
- **Confirmation de clé :** A et B prouvent qu'ils ont la clé

- **Authentification explicite :** Implicite + Confirmation
- **Perfect Forward Secrecy :** Compromission de clés long-terme ne révèle pas sessions passées
- **Future Secrecy :** Compromission ne révèle pas futures sessions (attaquant passif)

Protocole d'authentification faible

Q : A envoie r_1 à B, B répond $(r_2, K_B^{priv}(r_1))$, A vérifie et envoie $K_A^{priv}(r_2)$. Comment C peut usurper A ?
R :

1. C envoie r_1 à B
2. B répond $(r_2, K_B^{priv}(r_1))$
3. C lance protocole avec A, envoie r_2 comme challenge
4. A répond $(r_3, K_A^{priv}(r_2))$
5. C envoie $K_A^{priv}(r_2)$ à B $\rightarrow$ **B authentifie C comme A !**

Diffie-Hellman complet

Q : $p = 17$, $\alpha = 3$, Alice $x = 7$, Bob $y = 11$. Calculer clé partagée.
R :

- Alice calcule et envoie : $3^7 \mod 17 = 11$
- Bob calcule et envoie : $3^{11} \mod 17 = 7$
- Alice calcule : $K = 7^7 \mod 17 = 12$
- Bob calcule : $K = 11^{11} \mod 17 = 12$
- **Clé partagée :** $K = 12$

Man-In-The-Middle sur DH

Q : Charlie (MitM) avec $x' = 3$, $y' = 5$. Comment intercepter ?
R :
Avec Alice :

- Intercepte $\alpha^x = 11$, répond $\alpha^{y'} = 3^5 = 5$
- $K_{AC} = 5^7 = 10 \mod 17$

Avec Bob :

- Intercepte $\alpha^y = 7$, répond $\alpha^{x'} = 3^3 = 10$
- $K_{BC} = 10^{11} = 3 \mod 17$

Charlie a 2 clés et contrôle totalement la communication !

Analyse de protocole

Q : A et B partagent S, échangent r_a et r_b, puis $K = E_S(r_a \oplus r_b)$. Analyser les propriétés.
R :

- **Authentification implicite** (seuls A et B connaissent S)
- **Confirmation de clé** (pas de preuve de possession)
- **Authentification explicite** (pas de confirmation)
- **Perfect Forward Secrecy** (attaquant avec S décrypte tout)
- **Future Secrecy** (attaquant passif avec S calcule futures clés)

Aide-Mémoire Express

Arithmétique : $a^{\Phi(n)} \equiv 1 \mod n$ | Générateur si $\text{ord}(g) = \Phi(n)$

Entropie : $H = \log_2(n)$ si équiprobable | Max quand uniforme

César : $E(x) = (x + k) \mod 26$ | Cassage : 26 essais

Vigenère : IC pour longueur, fréquences pour clé

Blocs : ECB simple, CBC chaîné, CFB/OFB feedback | Fonction doit être bijective

RSA : $c = m^e$, $m = c^d$ | $ed \equiv 1 \mod \Phi(n)$

Hash : Préimage < Seconde préimage < Collision

DH : $K = \alpha^{xy} \mod p$ | Vulnérable au MitM