Table of contents

Document de Révision : Cryptographie Quantique et Post-Quantique

---

Introduction générale

Contexte de la cryptographie quantique

Ce cours aborde les **défis posés par l'informatique quantique** à la cryptographie actuelle et les **solutions post-quantiques** développées pour y faire face, en particulier l'algorithme **CRYSTALS-Kyber**.

Problématique centrale :

L'avènement des ordinateurs quantiques menace de briser la sécurité des systèmes cryptographiques actuels, nécessitant une transition vers des algorithmes **résistants aux attaques quantiques**.

Ordinateur classique vs Ordinateur quantique

Ordinateurs classiques

Unité de base d'information : Bit

- Valeurs possibles : **0 ou 1**

- Nombre **fini** d'états
- États distingués par des états **électriques/magnétiques** dans le matériel
- Opérations effectuées via des **portes logiques**

Ordinateurs quantiques

Unité fondamentale d'information : Qubit

Un **qubit** est un petit système quantique avec des propriétés spéciales

Propriété 1 : Superposition

- Peut exister dans un **nombre infini d'états** (superposition de ses états de base)
- Lors de la **mesure** $\rightarrow$ le qubit **s'effondre** (décoherence)

Propriété 2 : Intrication (Entanglement)

Système de n qubits : n qubits intriqués avec 2^n états de base

Implications fondamentales :

- Le nombre d'états de base croît **exponentiellement** : 2^n
- Opère sur **tous les états de base simultanément** $\rightarrow$ **"parallélisme naturel"**

Différence principale

Point clé : La différence principale entre informatique classique et quantique réside dans la **représentation de l'information**

Informatique quantique :

- S'inspire du **comportement des particules quantiques**
- Nécessite un **ordinateur quantique** réel (pas de simulation classique efficace)

Défis de l'informatique quantique

Défi 1 : Effondrement (Collapsing)

Problème : Le qubit perd sa propriété de **superposition** lors de la mesure

Conséquence : Les mesures doivent être soigneusement planifiées dans les algorithmes

Défi 2 : Sensibilité environnementale

Problème : Grande **sensibilité** du système quantique à son environnement

Conséquence : Nécessite une **infrastructure** très particulière (températures extrêmes, isolation)

Défi 3 : Portes logiques

Distinction importante :

- **Portes quantiques logiques** (théoriques)
- **Portes quantiques physiques** (implémentation réelle)

Impact : Influence sur les **performances** des circuits quantiques

Défi 4 : Translation d'algorithmes

Exemple : AES (Advanced Encryption Standard)

La translation directe n'est **pas faisable**

Solution unique : Développer des **algorithmes appropriés** → nouveau paradigme

Conclusion : Beaucoup de questions non résolues dans le domaine

---

Dangers pour la cryptographie actuelle

Algorithmes asymétriques actuels

Sécurité basée sur des problèmes mathématiques difficiles pour ordinateurs classiques :

- **Factorisation** des grands nombres (RSA)
- **Logarithmes discrets**
- **Problème de Diffie-Hellman**

Menace quantique : Algorithme de Shor

Problème majeur : Ces problèmes sont résolus en **temps polynomial** par l'**algorithme de Shor** sur un ordinateur quantique

Systèmes affectés :

- Chiffrement/déchiffrement
- Signatures numériques
- Authentification
- Établissement de clés (key establishment)

Protocoles menacés :

- **HTTPS**
- **TLS**
- Et beaucoup d'autres

"Apocalypse quantique" : L'Internet tel que nous le connaissons aujourd'hui n'existerait plus

Impact sur AES

AES vs Algorithme de Grover :

L'algorithme de Grover menace AES mais de manière moins dramatique

Solution : Doubler la taille des clés suffit pour maintenir la sécurité

Nécessité de solutions post-quantiques

Conclusion : Besoin de **solutions post-quantiques** basées sur des problèmes mathématiques **plus difficiles**

Notations mathématiques

Ensembles de base

1. Entiers modulo q :

$$\mathbb{Z}_q = \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$$

L'ensemble des entiers modulo q

2. Polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}_q$:

Pour q premier : $\mathbb{Z}_q[X]$ est l'ensemble des polynômes avec coefficients dans $\mathbb{Z}_q$

Note importante : Le degré n'est **pas borné**

3. Anneau de polynômes (Polynomial ring) :

Pour un entier positif n :

$$R_q = \mathbb{Z}_q[X]/(X^n + 1)$$

C'est l'anneau des polynômes modulo $(X^n + 1)$

4. Module :

Pour un entier positif k :

$$R_q^k$$

Un module de rang k sur R_q

Normes et "petits" polynômes

5. Norme infinie :

On peut définir la notion de **"taille"** ou **norme infinie** sur tous ces ensembles

6. "Petits" polynômes :

Polynômes avec des coefficients de petite magnitude (proches de 0)

Ces polynômes jouent un rôle crucial dans la sécurité de Kyber

---

Learning Without Errors (LWE)

Configuration du problème

Situation :

Alice possède un **vecteur secret** s (d'entiers)

Information publique :

Ensemble d'équations avec **coefficients entiers** auxquelles s est solution

Problème LWE (sans erreurs)

Objectif : Trouver s à partir de ces équations

Méthode : Utiliser l'**élimination de Gauss**

Conclusion : Facile à résoudre $\rightarrow$ Ne fournit **aucune sécurité**

Learning With Errors (LWE)

Ajout d'erreurs aléatoires

Pour rendre le problème plus difficile :

Ajouter une **erreur aléatoire** (proche de zéro) au **membre de droite** des équations

Problème LWE (avec erreurs)

Objectif : Trouver s à partir des équations **avec erreurs ajoutées**

Difficulté :

Un système **surdéterminé** d'équations rempli d'erreurs n'a presque certainement **pas de solution** (au sens traditionnel)

Conclusion : Maintenant s est vraiment un **secret**

Note pratique : Généralement, les opérations sont effectuées **modulo un grand nombre**

Module Learning With Errors (MLWE)

Problème MLWE

Caractéristiques :

- Extension de LWE aux **modules** sur les anneaux de polynômes
- Travaille avec R_q^k au lieu de vecteurs d'entiers

Propriété fondamentale :

Aucun algorithme efficace n'est connu pour résoudre MLWE

Type de problème :

MLWE est un **problème de recherche** (search problem) : trouver s

---

Decision Module Learning With Errors (D-MLWE)

Problème D-MLWE

Mêmes paramètres que MLWE mais :

Une instance de D-MLWE est donnée par une paire (A, t)

Question à résoudre :

Déterminer si (A, t) est :

- Une instance **valide** de MLWE (où t dépend d'un secret s)
- Ou simplement une paire **aléatoire**

Propriétés de D-MLWE

Difficulté :

Si D-MLWE est difficile $\rightarrow$ (A, t) ne donne **aucune information** sur s

Aucun algorithme efficace connu pour D-MLWE

Type de problème :

D-MLWE est un **problème de décision** (decision problem)

Comparaison MLWE vs D-MLWE

Aspect	MLWE	D-MLWE
Type	Problème de recherche	Problème de décision
Objectif	Trouver s	Distinguer instance valide d'aléatoire
Utilisation	Construction de clés	Preuves de sécurité

Réseaux euclidiens (Lattices)

Définition d'un réseau

Réseau (Lattice) :

Ensemble de toutes les **combinaisons linéaires entières** de n vecteurs **linéairement indépendants** dans $\mathbb{R}^n$ (la base)

Notation mathématique :

Si $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ est la base, le réseau est :

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i b_i \mid z_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Problèmes classiques sur les réseaux

Closest Vector Problem (CVP) :

Étant donné un point x dans $\mathbb{R}^n$, trouver le vecteur du réseau **le plus proche** de x

Shortest Vector Problem (SVP) :

Trouver un vecteur **non nul** dans le réseau avec **norme euclidienne minimale**

SVP est un **cas particulier** de CVP pour $x = 0$

Complexité des problèmes de réseaux

Propriétés importantes :

- La plupart des problèmes de réseaux sont **NP-difficiles**
- Ils sont **difficiles en moyenne** (average-case hard)

Différence avec d'autres problèmes NP :

Beaucoup de problèmes NP sont faciles "en moyenne" mais difficiles seulement dans le pire cas. Les problèmes de réseaux sont difficiles **même en moyenne**.

Lien avec MLWE et D-MLWE

Reformulation :

MLWE et D-MLWE peuvent être **reformulés comme problèmes de réseaux**

Difficulté moyenne :

La difficulté moyenne est **au moins celle** de la difficulté quantique du pire cas de certains problèmes de réseaux

Intérêt pratique :

Ceci est très intéressant pour **évaluer la difficulté** de MLWE et D-MLWE car :

- Les problèmes de réseaux sont bien étudiés
- Leur difficulté est bien comprise
- Même avec un ordinateur quantique, ils restent difficiles

CRYSTALS-Kyber : Vue d'ensemble

Qu'est-ce que Kyber-KEM ?

Kyber-KEM est un **KEM** (Key Encapsulation Mechanism) **IND-CCA2-secure**

Caractéristiques principales :

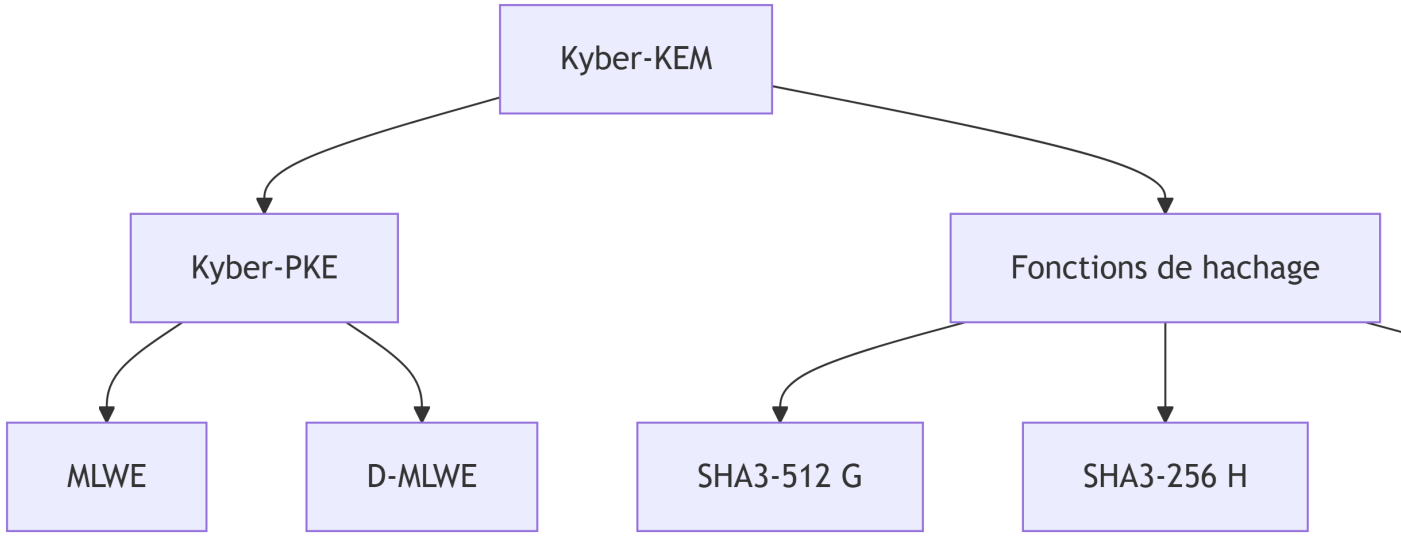
- **Système cryptographique asymétrique**
- Sécurité basée sur la difficulté des problèmes **MLWE** et **D-MLWE**
- Travaille avec :
  - Anneau de polynômes R_q

  - Module R_q^k
  - Polynômes “petits”

- Cryptosystème **basé sur les réseaux** (lattice-based)

Composantes de Kyber

Structure en couches :



Kyber-PKE (Public Key Encryption)

Espace de texte clair

Plaintext space :

$$\{0,1\}^n \subset R_q$$

Les messages sont des **polynômes** dans R_q représentant des bits

Propriété importante

Le déchiffrement peut échouer (avec une **petite probabilité**)

Raison : Les erreurs ajoutées peuvent parfois être trop grandes

Gestion pratique :

Cette probabilité d'échec est rendue **négligeable** par le choix approprié des paramètres

Schéma général

Kyber-PKE est le cœur cryptographique utilisé par Kyber-KEM

Il fournit les opérations de base :

- **Génération de clés** (KeyGen)
- **Chiffrement** (Encrypt)
- **Déchiffrement** (Decrypt)

Kyber-KEM : Mécanisme complet

Fonctions de hachage utilisées

Trois fonctions de hachage cryptographiques :

- **G** : SHA3-512
- **H** : SHA3-256
- **J** : SHAKE256

Ces fonctions assurent différentes propriétés de sécurité et permettent de dériver des clés

Structure de Kyber-KEM

Opérations principales :

1. KeyGen (Génération de clés) :

Génère une paire de clés publique/privée

2. Encapsulation :

- Entrée : Clé publique
- Sortie :
  - Texte chiffré (ciphertext)
  - Clé partagée (shared secret)

3. Decapsulation :

- Entrée : Clé privée + texte chiffré
- Sortie : Clé partagée

Propriétés de sécurité

Plaintext awareness IND-CCA

La **conscience du texte clair** (plaintext awareness) implique la sécurité **IND-CCA** (Indistinguishability under Chosen Ciphertext Attack)

La décapsulation peut échouer même si honnête (petite probabilité)

Gestion :

Les paramètres sont choisis pour rendre cette probabilité **négligeable**

Fonction	Algorithme	Usage

Paramètres de Kyber

Fonctions de hachage

Récapitulatif des fonctions :

Fonction	Algorithme	Usage
G	SHA3-512	Dérivation de clés longues
H	SHA3-256	Hachage standard
J	SHAKE256	Fonction XOF (extensible)

Tailles de paramètres

Kyber propose plusieurs niveaux de sécurité :

Les paramètres varient selon le niveau souhaité, notamment :

- k : rang du module (typiquement 2, 3 ou 4)
- n : degré des polynômes
- q : modulo pour les coefficients

Compromis : Plus k est grand, plus la sécurité est élevée mais plus les clés et calculs sont grands

---

Sécurité de Kyber-KEM

Base de la sécurité

Sécurité IND-CCA sous l'hypothèse :

D-MLWE est **intraitable** (computationally hard)

Choix des distributions :

Les distributions d'erreurs sont choisies pour être **"aussi difficiles que"** certains problèmes de réseaux

Propriétés des réseaux

Réseaux euclidiens sont :

- **NP-difficiles**
- **Difficiles en moyenne** (average-case hard)

Ceci fournit une **base solide** pour la sécurité à long terme

Attaques d'implémentation

Préoccupations pratiques :

Attaques par canaux auxiliaires (side-channel attacks) :

- Analyse de la consommation électrique
- Analyse temporelle
- Analyse électromagnétique

Attaques par injection de fautes (fault attacks) :

- Perturbation délibérée du calcul
- Observation du comportement erroné

Défis :

- Difficile à prévoir toutes les attaques
- Nouvelles techniques d'attaque en développement
- **Soyez prudent** car les algorithmes sont nouveaux

Considérations pratiques

Points importants :

1. La sécurité théorique est bien fondée
2. L'implémentation pratique nécessite des **contre-mesures**
3. Évaluation continue de la sécurité nécessaire

Crypto-agilité (Crypto-agility)

Définition

Crypto-agilité :

Capacité de **basculer entre différentes primitives cryptographiques** facilement

Objectifs d'un système crypto-agile

Permettre :

- **Adaptations rapides** de nouveaux algorithmes sans perturber l'infrastructure
- Sécurité en cas de primitives **cassées/vulnérables**
- Transition en douceur vers de nouvelles solutions

Importance pour la transition post-quantique

Pourquoi est-ce crucial ?

Se préparer à l'avènement d'un ordinateur quantique consistera en une **migration massive** (probablement la **plus grande de l'histoire**)

Recommandations NIST

Conseil du NIST :

Ne pas abandonner les algorithmes classiques

Pourquoi ?

1. **Transition plus douce** + optimisations actuelles conservées
2. **Nouvelles mathématiques** : sécurité empirique, pas encore complètement testée
3. **Incertitude temporelle** : on ne sait pas quand un ordinateur quantique sera réalisé

Approche hybride

Solution recommandée :

Combiner algorithmes classiques et post-quantiques :

- Sécurité garantie si **au moins un** des deux est sûr
- Transition progressive possible
- Flexibilité selon les applications

Conclusion sur la crypto-agilité

Considérer des systèmes crypto-agiles est très important pour :

- Permettre une **transition en douceur** vers le post-quantique
- Concevoir des systèmes **flexibles** proposant :
  - Différentes primitives
  - Différents niveaux de sécurité
  - Adaptation selon l'application

Exemple jouet de Kyber-KEM

Avertissement

Important :

Les paramètres sont **minuscules** et pour **illustration uniquement**

Ils ne sont **PAS cryptographiquement sûrs**

Objectif : Comprendre les calculs derrière Kyber-KEM sans se perdre dans les grands nombres

Étape 0 : Anneau jouet et représentation

Définition de l'anneau jouet :

Petit anneau de polynômes avec paramètres réduits pour faciliter les calculs à la main

Exemple :

- n très petit (par ex. $n = 4$)
- q petit (par ex. $q = 17$)
- $R_q = \mathbb{Z}_q[X]/(X^n + 1)$

Étape 1 : Génération de clés (Récepteur)

Le récepteur génère :

- **Clé secrète** : vecteur/polynôme secret s avec petits coefficients
- **Clé publique** : paire (A, t) où :
  - A est une matrice/vecteur aléatoire publique
  - $t = As + e$ où e est une petite erreur

La sécurité repose sur la difficulté de retrouver s à partir de (A, t)

Étape 2 : Encapsulation de clé (Émetteur) - Partie 1

L'émetteur :

1. Choisit un message aléatoire m (qui deviendra la clé partagée)
2. Choisit un vecteur aléatoire court r et des erreurs e_1, e_2

Étape 2 : Encapsulation de clé (Émetteur) - Partie 2

L'émetteur calcule :

- $u = A^T r + e_1$: première partie du chiffré
- $v = t^T r + e_2 + \mathbf{encode}(m)$: seconde partie du chiffré

Sortie :

- **Ciphertext** : (u, v)
- **Clé partagée** : dérivée de m via fonction de hachage

Étape 3 : Décapsulation de clé (Récepteur)

Le récepteur :

1. Calcule $v - s^T u$
2. Remarque que :

$$v - s^T u = t^T r + e_2 + \text{encode}(m) - s^T(A^T r + e_1)$$

$$= (As + e)^T r + e_2 + \text{encode}(m) - s^T A^T r - s^T e_1$$

$$= \text{encode}(m) + (\text{petites erreurs})$$

3. **Décode** pour retrouver m (si les erreurs sont assez petites)
4. Dérive la **clé partagée** de m

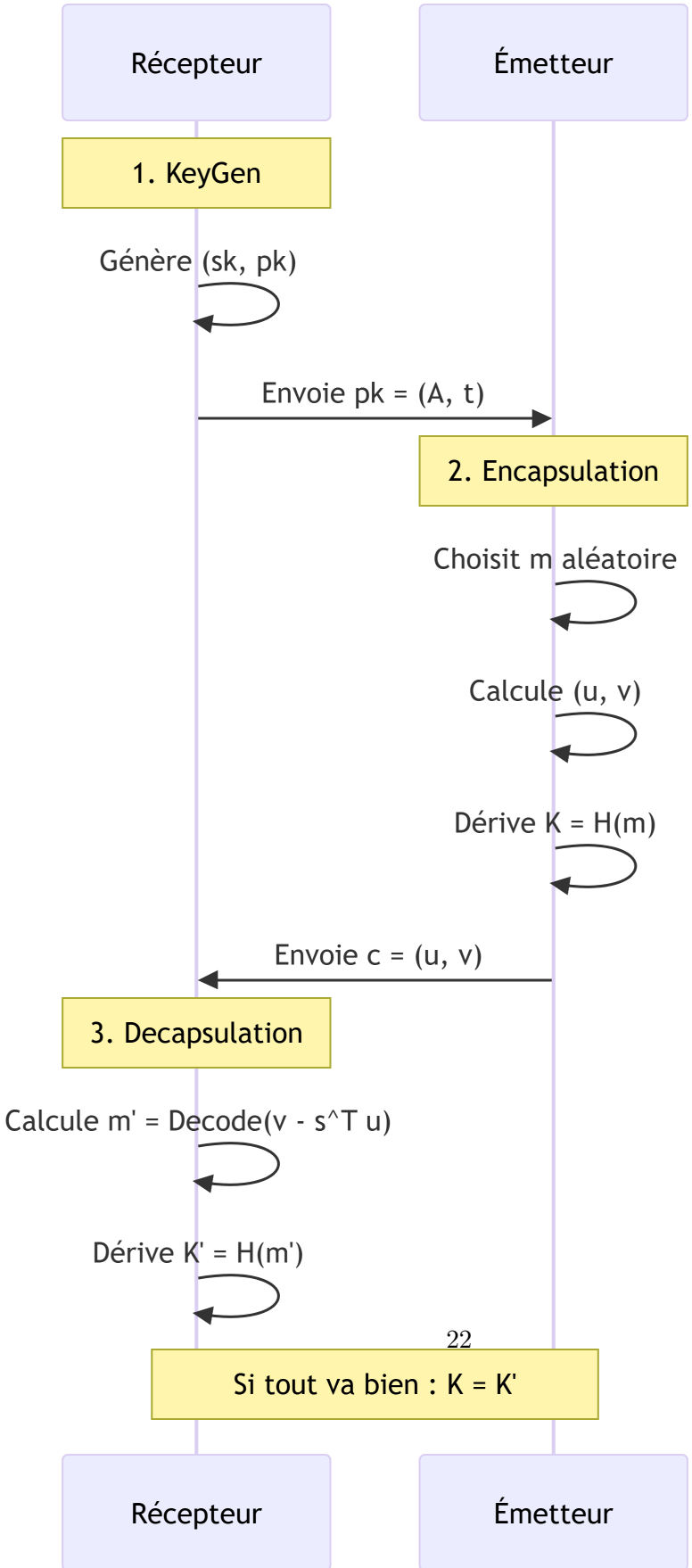
Relation avec le vrai Kyber-KEM

Dans le vrai Kyber :

- Les polynômes vivent dans un anneau **beaucoup plus grand**
- Il y a des **vecteurs de polynômes** (module de rang $k = 2, 3$ ou 4)
- Des **termes de bruit** petits sont ajoutés
- La structure globale suit le **même schéma** :
  - Clé publique de style **module-LWE** : (A, t)
  - Étape d'**encapsulation** utilisant un court r
  - Étape de **décapsulation** qui annule le terme principal et récupère le message (modulo petit bruit)

Flux complet de Kyber-KEM

Vue d'ensemble du protocole



Garanties de sécurité

Si D-MLWE est difficile :

1. Un adversaire ne peut pas distinguer (A, t) d'aléatoire
2. Un adversaire ne peut pas retrouver s de (A, t)
3. Un adversaire ne peut pas retrouver m de (u, v) sans s
4. La clé partagée K est indistinguable d'une clé aléatoire

Résultat : Sécurité **IND-CCA2** (la plus forte notion de sécurité pour KEM)

Avantages et limitations de Kyber

Avantages

Sécurité post-quantique :

Résistant aux attaques d'ordinateurs quantiques

Performances :

- Clés relativement petites
- Calculs efficaces
- Peut être implémenté sur matériel limité

Fondements mathématiques solides :

Basé sur problèmes de réseaux bien étudiés

Standardisation :

Sélectionné par le NIST pour standardisation

Limitations et défis

Tailles de clés :

Plus grandes que RSA/ECC classiques (mais acceptables)

Nouveauté :

- Moins de temps pour analyse cryptanalytique
- Implémentations peuvent avoir des vulnérabilités

Attaques d'implémentation :

Nécessite des contre-mesures spécifiques

Probabilité d'échec :

Très faible mais non nulle (contrairement aux schémas classiques)

Comparaison avec d'autres approches post-quantiques

Familles de cryptographie post-quantique

1. **Basés sur les réseaux (Lattice-based) :**
   - **Kyber** (KEM)
   - Dilithium (signatures)
   - **Avantages :** Efficaces, bien étudiés
   - **Kyber appartient à cette famille**
2. **Basés sur les codes (Code-based) :**
   - Classic McEliece
   - **Avantages :** Très mature
   - **Inconvénients :** Très grandes clés
3. **Basés sur les hash (Hash-based) :**
   - SPHINCS+
   - **Avantages :** Sécurité minimale bien comprise
   - **Inconvénients :** Signatures volumineuses
4. **Basés sur les isogénies (Isogeny-based) :**
   - SIKE (cassé en 2022)
   - **Inconvénients :** Moins mature, vulnérabilités découvertes

Pourquoi Kyber ?

Kyber a été choisi par le NIST pour :

- Bon équilibre **performance/sécurité**
- Flexibilité (plusieurs niveaux de sécurité)
- Implémentations efficaces possibles
- Fondements mathématiques robustes

Concepts mathématiques à maîtriser

Algèbre

Structures algébriques :

- Anneaux de polynômes
- Modules
- Opérations modulo

Polynômes :

- Addition, multiplication de polynômes
- Réduction modulo $X^n + 1$
- Coefficients modulo q

Théorie des réseaux

Concepts fondamentaux :

- Base d'un réseau
- Combinaisons linéaires entières
- SVP et CVP
- Difficulté NP et average-case

Cryptographie

Primitives :

- KEM (Key Encapsulation Mechanism)
- PKE (Public Key Encryption)
- Sécurité IND-CCA2

Fonctions de hachage :

- SHA3-256, SHA3-512
- SHAKE256 (XOF)

Problèmes de difficulté

LWE et variantes :

- Learning With Errors
- Module-LWE
- Decision-MLWE
- Lien avec les réseaux

Questions d'examen types

Questions conceptuelles

Ordinateurs quantiques :

- Différence entre bit et qubit
- Qu'est-ce que la superposition ?
- Qu'est-ce que l'intrication ?
- Quels sont les défis de l'informatique quantique ?

Menaces :

- Pourquoi les ordinateurs quantiques menacent-ils la cryptographie actuelle ?
- Qu'est-ce que l'algorithme de Shor ?
- Quels systèmes sont affectés ?

Solutions post-quantiques :

- Qu'est-ce que la cryptographie post-quantique ?
- Pourquoi les réseaux sont-ils intéressants ?
- Qu'est-ce que CRYSTALS-Kyber ?

Questions techniques

LWE et MLWE :

- Différence entre LWE et Learning Without Errors
- Qu'est-ce que MLWE ?
- Différence entre MLWE (search) et D-MLWE (decision)

Réseaux :

- Définir un réseau euclidien
- Qu'est-ce que SVP et CVP ?
- Pourquoi sont-ils NP-difficiles ?

Kyber :

- Structure de Kyber-KEM
- Rôle de Kyber-PKE
- Fonctions de hachage utilisées

Questions pratiques

Sécurité :

- Sur quoi repose la sécurité de Kyber ?
- Qu'est-ce que IND-CCA2 ?
- Quelles sont les attaques d'implémentation possibles ?

Crypto-agilité :

- Pourquoi est-elle importante ?
- Recommandations du NIST
- Approche hybride classique/post-quantique

Exemple jouet :

- Expliquer les étapes de KeyGen, Encapsulation, Decapsulation
- Pourquoi le déchiffrement peut-il échouer ?
- Comment récupère-t-on le message ?

Recommandations pratiques

Pour la transition post-quantique

1. Inventaire :

Identifier tous les systèmes utilisant la cryptographie asymétrique

2. Priorisation :

Prioriser les systèmes critiques pour la migration

3. Crypto-agilité :

Concevoir les systèmes pour permettre le changement d'algorithmes

4. Approche hybride :

Combiner algorithmes classiques et post-quantiques pendant la transition

5. Tests :

Tester les implémentations contre les attaques d'implémentation

Pour l'implémentation de Kyber

Sécurité :

- Implémenter des **contre-mesures** contre les canaux auxiliaires
- Utiliser des **générateurs aléatoires cryptographiques** de qualité
- Valider tous les **paramètres** en entrée

Performance :

- Optimiser les opérations sur polynômes
- Utiliser des implémentations vectorisées si possible
- Considérer l'utilisation de matériel dédié

Conformité :

- Suivre les **spécifications NIST**
- Utiliser des implémentations **certifiées** si possible
- Rester à jour avec les recommandations

Conclusion générale

Résumé des points clés

Menace quantique :

Les ordinateurs quantiques menacent la cryptographie actuelle basée sur factorisation et logarithmes discrets

Solution : Kyber-KEM :

- Mécanisme d'encapsulation de clés **post-quantique**
- Basé sur la difficulté de **MLWE** et **D-MLWE**
- Fondé sur les **problèmes de réseaux** (NP-difficiles et average-case hard)
- Sécurité **IND-CCA2** prouvée

Transition :

- Nécessite une **crypto-agilité**
- Approche **hybride** recommandée
- Plus grande **migration cryptographique** de l'histoire

Perspectives futures

Défis à venir :

- Optimisation des implémentations
- Analyse cryptanalytique continue
- Standardisation complète
- Déploiement à grande échelle

Opportunités :

- Nouvelles primitives cryptographiques
- Meilleure compréhension des mathématiques sous-jacentes
- Infrastructure plus robuste et agile

Glossaire des termes importants

AES : Advanced Encryption Standard - chiffrement symétrique

Average-case hard : Difficile en moyenne, pas seulement dans le pire cas

Ciphertext : Texte chiffré

CVP : Closest Vector Problem

D-MLWE : Decision Module Learning With Errors

Decoherence : Effondrement de la superposition quantique

Entanglement : Intrication quantique

IND-CCA2 : Indistinguishability under Adaptive Chosen Ciphertext Attack

KEM : Key Encapsulation Mechanism

Lattice : Réseau euclidien

LWE : Learning With Errors

MLWE : Module Learning With Errors

NP-hard : Non-deterministic Polynomial-time hard

PKE : Public Key Encryption

Plaintext awareness : Conscience du texte clair

Qubit : Quantum bit - unité quantique d'information

Superposition : État quantique combinant plusieurs états de base

SVP : Shortest Vector Problem