Université de Genève

Département d'informatique

Théorie de l'information pour la science des données et l'apprentissage automatique

Série d'exercices 4 — 22.03.2023 | Délai : 28.03.2023

Note : Veuillez suivre les instructions suivantes
`https://moodle.unige.ch/mod/page/view.php?id=171850`.

Problème 1 (**Processus de Markov et EVD — 30 points**).
Faites la décomposition en valeurs propres de $\mathbf{K_{XX}}$ telle que donnée ci-dessous afin d'obtenir les matrices $\mathbf{U}$ et $\mathbf{D}$ pour $\sigma_X^2 = 1$, $N = 4$, $\rho = 0.1, 0.5, 0.95$. Conclure sur les propriétés de la matrice de valeurs propres : qu'observez-vous quant aux valeurs propres lorsque ρ change ? (Ce problème fait référence à la Slide 98 (Thème 1) du cours.)

$$N = 4 \quad \rho = 0.95$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{xx}} = \sigma_X^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{U} = \begin{array}{cccc} \text{High frequency} & & & \text{Low frequency} \\ \boxed{\begin{matrix} 0.2747 \\ -0.6516 \\ 0.6516 \\ -0.2747 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -0.5062 \\ 0.4937 \\ 0.4937 \\ -0.5062 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0.6516 \\ 0.2747 \\ -0.2747 \\ -0.6516 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0.4937 \\ 0.5062 \\ 0.5062 \\ 0.4937 \end{matrix}} \end{array}$$

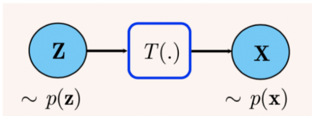
$$\mathrm{D} = \begin{matrix} \boxed{0.0300} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0.0506} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0.1627} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3.7568} \end{matrix}$$

Indice : Vous pouvez utiliser des fonctions Python (Numpy) pour la décomposition en valeurs propres (EVD).

Problème 2 (**Expliquer quelques concepts — 30 points**).

1. Expliquer le lien entre la décomposition en valeurs propres (EVD) et en valeurs singulières (SVD).
2. Expliquer pour quelles matrices on peut appliquer chacune de ces décompositions.
3. Peut-on appliquer la décomposition en valeurs singulières (SVD) à des matrices de covariance ? Qu'obtiendra-t-on ?

Problème 3 (Transformation affine — 40 points).
Soit $\mathbf{z} \sim p(\mathbf{z}) = \mathcal{N}(\bar{\mathbf{z}}, \mathbf{K_{zz}})$ une variable aléatoire suivant une distribution gaussienne multivariée. Soit $\mathbf{x} = \mathbf{Az}$ une transformation affine. (Ce problème fait référence à la Slide 99 (Thème 1) du cours.)



$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{W}^T}_{\mathbf{A}} \mathbf{z} = \mathbf{Az}$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{p_{\mathbf{z}}\left(T^{-1}(\mathbf{x})\right)}{\left|\det J_T(\mathbf{z})\right|} = \frac{p_{\mathbf{z}}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\right)}{\left|\det J_T(\mathbf{z})\right|} = \frac{p_{\mathbf{z}}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\right)}{\left|\det \mathbf{A}\right|}$$

1. Quel est l'impact d'une transformation linéaire (affine) $\mathbf{x} = \mathbf{Az}$ sur
   (a) la moyenne $\bar{\mathbf{x}}$
   (b) la matrice de covariance $\mathbf{K_{xx}}$

   par rapport à $\bar{\mathbf{z}}$ et $\mathbf{K_{zz}}$.
2. Trouver l'expression exacte de $p(\mathbf{x})$ directement grâce à la formule de la figure ci-dessus, c'est-à-dire sans utiliser le point 1.
3. Vous devriez trouver une nouvelle gaussienne dont la moyenne et la matrice de covariance ont changés. Écrivez-la de sorte à identifier $\bar{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{K_{xx}}$ tels que trouvés au point 1.