Université de Genève

Département d'informatique

Théorie de l'information pour la science des données et l'apprentissage automatique

Série d'exercices 8 — 17.05.2023 Délai : 23.05.2023

Note : Veuillez suivre les instructions suivantes
`https://moodle.unige.ch/mod/page/view.php?id=171850`.

Problème 1 (20 points).

Considérez la chaîne de Markov suivante :

$$X \to Y \to Z$$

Prouvez que :

(a) $I(X;Z) \leq I(X;Y)$

(b) $I(X;Y|Z) \leq I(X;Y)$

Indice : Utilisez les décompositions de $I(X;Y,Z)$ comme montrées durant le cours.

Problème 2 (30 points).

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires avec une probabilité conjointe $p(x,y,z)$. Dessinez le diagramme de Venn et indiquez $H(X|Y)$, $H(X|Y,Z)$, $I(X;Y)$, $I(Y;Z|X)$, $I(Y;X,Z)$.

Problème 3 (20 points).

Considérez la chaîne de Markov suivante :

$$X \to Y \to Z$$

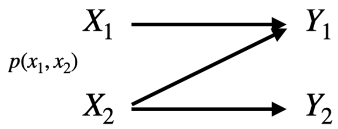
où $\mathcal{X} = \{1,2,\cdots,n\}$, $\mathcal{Y} = \{1,2,\cdots,k\}$, $\mathcal{Z} = \{1,2,\cdots,m\}$, $k < n$ et $k < m$. En utilisant les résultats du Problème 1, montrez que :

(a) $I(X;Z) \leq log_2(k)$

(b) En utilisant le point (a) montrez que pour $k = 1$, X et Z sont indépendants.

Problème 4 (30 points).

Soient X_1, X_2, Y_1 et Y_2 quatre variables aléatoires formant le modèle suivant :



Montrez que :

(a) $I(X_1, X_2; Y_1, Y_2) = 2H(X_2) + H(X_1|X_2) - H(X_2|Y_1) - H(X_2|Y_2) - H(X_1|X_2, Y_1)$

(b) En utilisant le point (a) réécrivez $I(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ en supposant que X_1 et X_2 sont independants.