Université de Genève

Département d'informatique

Théorie de l'information pour la science des données et l'apprentissage automatique

Série d'exercies 2 — 08.03.2023 Délai : 14.03.2023

Note : Veuillez suivre les instructions suivantes
`https://moodle.unige.ch/mod/page/view.php?id=171850`.

Problème 1 (**Transformation de Variables Aléatoires — 40 points**).

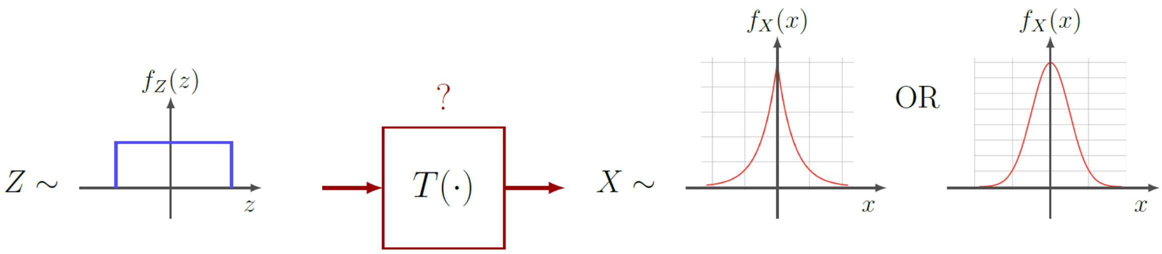
a) Étant donné une variable aléatoire (VA) uniforme à 1 dimension $Z \sim f_Z(z) = \mathcal{U}(z|-a,a)$, déduire la transformation analytique $X = T(Z)$ afin que $X \sim f_X(x) = \mathcal{N}\left(x|0,\sigma^2\right)$ soit une VA gaussienne. Faire de même afin que $X \sim f_X(x) = \mathcal{L}(x|0,b)$ soit une VA laplacienne. En d'autres termes, donner $T(\cdot)$ pour les deux cas.

$$\mathcal{U}(x|a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \forall x \in [a,b] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\mathcal{N}\left(x|\mu,\sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{L}(x|\mu,b) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'illustration ci-dessous explique la transformation attendue.



Indice: La conservation des probabilités $\int f_Z(z)\mathrm{d}z = \int f_X(x)\mathrm{d}x$ implique

$$\int_{z_0}^{z} f_Z(z')\mathrm{d}z' = \int_{T(z_0)}^{T(z)} f_X(x')\mathrm{d}x'. \tag{1}$$

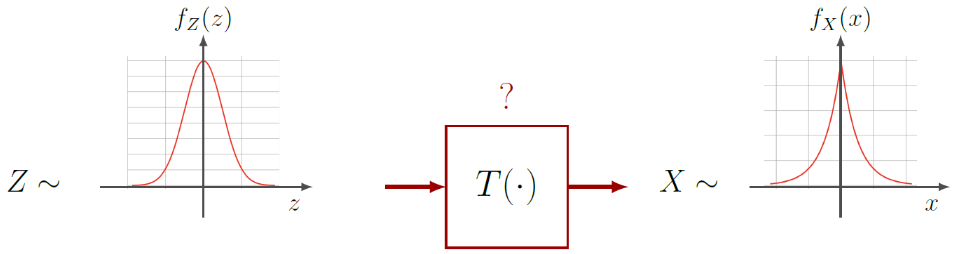
En particulier, cela est valable pour

$$\int_{-\infty}^{z} f_Z(z')\mathrm{d}z' = \int_{-\infty}^{T(z)} f_X(x')\mathrm{d}x'. \tag{2}$$

Les deux expressions de l'Eq. (2) sont les définitions des fonctions de répartition (cumulative distribution functions (CDF) en anglais) pour la VA Z à gauche $F_Z(z) = \Pr[Z \leq z]$ et la VA X à droite $F_X(T(z)) = \Pr[X \leq T(z)]$ respectivement.

Noter que $T(-\infty)$ n'est pas nécessairement égal à $-\infty$ et n'est peut-être même pas défini. Cependant $f_Z(z) = f_X(x) = 0$ de $-\infty$ à l'élément le plus petit de leur domaine respectif.

b) Déduire la transformation analytique d'une distribution (PDF) gaussienne en une distribution laplacienne.



Quelle est la transformation $X = T(Z)$?

Problème 2 (Effet d'une "Randomisation" — 20 points).

Dans ce problème, notre but est d'investiguer l'effet de l'ajout d'une bruit indépendant $\mathbf{Z}$ à un signal corrélé $\mathbf{X}$. À cette fin, générer un vecteur aléatoire

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Ensuite, ajouter à $\mathbf{X}$ un bruit indépendant

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{\mathbf{z}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathbf{z}}^2 \end{bmatrix}\right)$$

Afficher la distribution 2D (PDF) du vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z}$ pour différentes valeurs de $\sigma_{\mathbf{z}}^2$. Pour ce faire, essayer avec $\sigma_{\mathbf{z}}^2 \in \{0.1, 0.5, 1, 2, 10\}$ et afficher $1'000$ réalisations de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, c-à-d vecteurs générés aléatoirement. Décrire vos observations et conclusions. Observer la valeur de $\sigma_{\mathbf{z}}^2$ après laquelle $\mathbf{Y}$ ne semble plus présenter de propriétés de corrélation.

Problème 3 (Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev — 40 points).

a) (Inégalité de Markov) Pour toute variable aléatoire non-négative X et pour tout $t > 0$, montrer que

$$\Pr\{X \geq t\} \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

b) (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit Y une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. En exprimant $X = (Y - \mu)^2$, montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\Pr\{|Y - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

c) (Loi faible des grands nombres) Soit $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ une séquence de variables aléatoires i.i.d de moyenne μ et de variance σ^2. Soit $\bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ leur moyenne empirique. Montrer que

$$\Pr\{|\bar{Z}_n - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Donc $\Pr\{|\bar{Z}_n - \mu| \geq \epsilon\} \to 0$ pour $n \to \infty$. En d'autres termes, la moyenne empirique converge vers la moyenne réelle. Ceci est connu comme la loi faible des grands nombres.