Chapitre 3: condition et stabilité

June 9, 2023

1

2

3

3.1 Définition

Soient $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tel que $\vec{x} \neq 0$ et $f(\vec{x}) \neq 0$

La condition $\kappa = \kappa(f(\vec{x}))$ du problème f en x est le plus petit nombre tel que $\forall \epsilon > 0$ et $\forall \vec{y} \neq \vec{x}$, on a:

$$\frac{||\vec{y} - \vec{x}||}{||\vec{x}||} \leq \epsilon \ \Rightarrow \ \frac{||f(\vec{y}) - f(\vec{x})||}{||f(\vec{x})||} \leq \kappa\epsilon + o(\epsilon)$$

On dit que f est bien conditionné en $\vec{x}$ si κ n'est pas trop grand comparé à ϵ_{mach}. Sinon, on dit que f est mal conditionné.

3.2

3.3 Définition (Norme opérateur)

Soit $A \in \mathbb{R}^{m*n}$. On définit:

$$A_{p\to q} = \max_{||\vec{x}||_p = 1} ||A\vec{x}||_q = \max_{\vec{x}\neq 0} \frac{||A\vec{x}||_q}{||\vec{x}||_p}$$

Donc $||A||_{p\to q}$ est le plus petit nombre tel que $||A\vec{x}||_q \leq ||A||_{p\to q}||\vec{x}||_p \ \forall \vec{x} \neq 0$

3.4 Propriétés (des normes d'opérateur)

Soit A^{m*n}. Alors la norme d'opérateur $||A||$ est une norme matricielle respectant:

- $||A|| \geq 0$
- $||A|| = 0 \ \Leftrightarrow \ A = 0$

- $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$
- $||\alpha A|| = |\alpha| * ||A||$
- $||A\vec{x}|| \leq ||A|| * ||\vec{x}|| \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $||A * B|| \leq ||A|| * ||B|| \ \forall B \in \mathbb{R}^{n*p}$ et $||B||$ une norme d'opérateur.

3.5 Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable. Alors la contition κ de f en $\vec{x}$ satisfait:

$$\kappa = \lim_{\epsilon \to 0} \sup(\frac{||f(\vec{y}) - f(\vec{x})}{\epsilon ||f(\vec{x})||} : \frac{||\vec{y} - \vec{x}||}{||\vec{x}||} \leq \epsilon) = \frac{||f'(\vec{x})|| * ||\vec{x}||}{||f(\vec{x})||}$$

3.6

3.7 Corollaire

Soient $f_1, \ldots, f_n$ différentiables. Alors la condition de $f = f_1 \circ \ldots \circ f_n$ satisfait:

$$\kappa(f) \leq \kappa(f_1) \cdot \ldots \cdot \kappa(f_n)$$

3.8 Définition

Un algorithme $\tilde{f}$ pour un problème f est forward stable (stable au sens direct) si $\forall \vec{x}$:

$$\frac{||\tilde{f}(\vec{x}) - f(\vec{x})||}{||f(\vec{x})||} \leq C \cdot \kappa_{f,\vec{x}} \cdot \epsilon_{mach} + o(\epsilon_{mach})$$

où C ne dépend pas de $\vec{x}$.

3.9

3.10

3.11 Définition (Principe de Wilkinson)

Un algorithme $\tilde{f}$ pour un problème f est backward stable si: $\forall \vec{x}$, $\exists \tilde{\vec{x}}$ tel que:

$$\tilde{f}(\vec{x}) = f(\tilde{\vec{x}}) \ et \ \frac{||\tilde{\vec{x}} - \vec{x}||}{||\vec{x}||} \leq C \cdot \epsilon_{mach} + o(\epsilon_{mach})$$

où C ne dépend pas de $\vec{x}$ et n'est pas trop grand.

Autrement dit, le résultat d'un algorithme qui est backward stable correspond au résultat exacte de données légèrement perturbées...

3.12

3.13 Théorème

Soit $\tilde{f}$ un algorithme qui est backward stable pour le problème f. Alors $\tilde{f}$ est aussi forward stable.

3.14 Théorème

Soit f un problème défini de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$). Le fait que f soit bien ou mal conditionné ne dépend pas du choix des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. C'est aussi vrai pour un algorithme qui est backward stable ou forward stable.