

# Chapitre 1: Interpolation polynomiale

June 8, 2023

## 1 Les polynômes de Lagrange et la formule de Newton

### 1.1 Théorème

Soient les  $n + 1$  points  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  où les  $x_i$  sont distincts. Alors, il existe un polynôme unique  $p_n$  de degré  $\leq n$ , appelé le polynôme d'interpolation, tel que

$$p_n(x_i) = y_i \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n$$

.

### 1.2 Définition (différences divisées)

Soient les couples  $(x_i, y_i)$  avec chaque  $x_i$  distinct pour  $i = 0, \dots, n$ . On définit:

$$\delta y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

et pour  $k = 2, 3, \dots$ , on a:

$$\delta^k y[x_i, x_{i+1}] = \frac{\delta^{k-1} y[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - \delta^{k-1} y[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

À modifier ??? On note  $\delta^0 y[x_i] = y[x_i] = y_i$

### 1.3 Théorème (Formule de Newton, 1669)

Le polynôme de Newton est défini par:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

avec:

$$c_k = \delta^k y[x_0, \dots, x_k]$$

Il est de degré  $\leq n$  et passe par les points  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  où les  $x_i$  sont distincts.