PC 2 (Chaînes de Markov : irréductibilité, loi invariante, ...)

Exercice 1 (États et lois invariantes). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{1,2,3,4,5\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Trouver les classes irréductibles et toutes les lois invariantes.

Exercice 2 (Équation aux dérivées partielles discrétisée).
L'objet de cet exercice est d'étudier par une méthode probabiliste une version discrète de l'équation suivante. Pour $\gamma \geq 0$ fixé, on cherche $f : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ solution de

$$\forall x \in \,]-1,1[\,,\ \forall t \geq 0\,, \qquad \partial_t f(x,t) = \frac{1}{2}\partial_x^2 f(x,t) - \gamma f(x,t)\,, \tag{1}$$

avec conditions au bord $f(-1,t) = a$ et $f(1,t) = b$ et la condition initiale $f(\cdot,0) = f_0(\cdot)$, avec f_0 une fonction donnée dans $C^2([-1,1])$ vérifiant les conditions au bord $f_0(-1) = a$ et $f_0(1) = b$.

Version discrète : soit $\alpha \in [0,1]$ et $L \in \mathbb{N}$. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\{-L,\dots,L\} \cup \{\dagger\}$ avec matrice de transition P de seuls termes non nuls

$$\forall\, i \in \{-L+1,\dots,L-1\}, \qquad P(i,i-1) = P(i,i+1) = \frac{1-\alpha}{2}\,, \quad P(i,\dagger) = \alpha\,,$$
$$P(-L,-L) = 1\,, \qquad P(L,L) = 1\,, \qquad P(\dagger,\dagger) = 1\,.$$

On pose $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = \dagger\}$. Soit ϕ sur $\{-L,\dots,L\}$ une fonction connue telle que $\phi(-L) = a$ et $\phi(L) = b$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \{-L,\dots,L\}$ on pose $u_n(i) = \mathbb{E}_i\big[\phi(X_n)\,\mathbb{1}_{\{n<T\}}\big] = \mathbb{E}\big[\phi(X_n)\,\mathbb{1}_{\{n<T\}} \mid X_0 = i\big]$. Montrer que si $i \in \{-L+1,\dots,L-1\}$ alors

$$u_{n+1}(i) - u_n(i) = \frac{1-\alpha}{2}\big(u_n(i+1) + u_n(i-1) - 2u_n(i)\big) - \alpha u_n(i)\,, \tag{2}$$

   tandis que $u_n(-L) = a$ et $u_n(L) = b$, et $u_0 = \phi$ sur $\{-L,\dots,L\}$.
2. On prend $\alpha = 0$. Pour $\beta \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \{-L,\dots,L\}$ on pose

$$v_n(i) = \mathbb{E}_i\left[\phi(X_n)\exp\left(-\beta\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\{X_k \notin \{-L,L\}\}}\right)\right]$$

   où une somme vide est nulle. Donner l'équation suivie par $v_n(i)$. Commenter.

Exercice 3 (Temps d'atteinte).
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur un espace d'états dénombrable E et soit $A \subset E$ un sous-ensemble non vide. On notera $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ le temps d'atteinte de A. On suppose qu'il existe $m \geq 1$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\forall x \in A^c, \qquad \mathbb{P}_x(X_m \in A) = \mathbb{P}(X_m \in A \mid X_0 = x) \geq \alpha.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A^c$,

$$\mathbb{P}_x(\tau > km) \leq (1-\alpha)^k.$$

2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_x(\tau > u) \leq (1-\alpha)^{-1}(1-\alpha)^{u/m}.$$

   En déduire que $\mathbb{E}_x[\tau] < +\infty$, et donc que $\tau < +\infty$ presque sûrement.

Exercice 4 (Lancers de pièces : Suites de 1 consécutifs)**.** On lance une pièce truquée : les résultats des lancers sont représentés par une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p. On définit $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $N_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$N_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad Y_n = 0\,, \\ \max\{k \in \{1,\dots,n\} : Y_{n-k+1} = Y_{n-k+2} = \cdots = Y_n = 1\} & \text{si} \quad Y_n = 1\,. \end{cases}$$

Alors N_n est la taille de la suite de 1 consécutifs qui se termine à l'instant n inclus.

1. Montrer que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition P.
2. Pour $k \geq 0$ on pose

$$T_k = \inf\{n \geq 0 : N_n = k\}\,, \qquad M_{k,n} = N_{T_k\wedge n} = \begin{cases} N_n & \text{si} \;\; n \leq T_k\,, \\ k & \text{si} \;\; n > T_k\,. \end{cases}$$

   (a) Montrer que $(M_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice Q_k.

   (b) Déterminer $\mathbb{P}(M_{k,n} = j)$ en fonction de Q_k pour $0 \leq j \leq k$.

   Pour aller plus loin : le 1/4h `python`
   Calculs numériques liés à la question 2

3. Soit $L_n = \max_{0\leq i\leq n} N_i$ la taille de la plus longue suite de 1 consécutifs obtenue avant l'instant $n \in \mathbb{N}$ (inclus).

   (a) Exprimer la loi de L_n à l'aide de ce qui précède.

   (b) Justifier que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov.