DM : Chaînes de Markov (Comportement asymptotique)

Gabriel PEREIRA DE CARVALHO

14 janvier 2024

Exercice 1 : Deux variantes de l'algorithme de Metropolis-Hastings

Algorithme de Metropolis-Hastings

1. Exprimer la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ en fonction de π et Q. En déduire que la chaîne de Markov est irréductible.

Soit $R : (x,y) \in E^2 \mapsto \min\left\{1, \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right\}$ la probabilité d'acceptation.

Alors, $\forall y \neq X_n$ on a $X_{n+1} = y$ avec probabilité $Q(X_n, y)R(X_n, y)$ car les tirages de $\tilde{X}_{n+1}$ et U_{n+1} sont indépendantes. Donc, soit P la matrice de transition, on a

$$\begin{cases} P(x,y) & = Q(x,y)R(x,y) \qquad \forall y \neq x \\ P(x,x) & = 1 - \sum_{y\neq x} P(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

Alors, on remarque que Q irréductible sur $E \implies P$ irréductible sur E.

2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est réversible par rapport à π.

Premièrement, on remarque que $\frac{R(x,y)}{R(y,x)} = \frac{\min\left\{1, \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right\}}{\min\left\{1, \frac{1}{\frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}}\right\}} = \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}$.

Montrons que

$$\forall x, y \in E, \qquad \pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$$

Pour $x = y$ c'est vrai. Alors, supposons $x \neq y$.
On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\pi(x)P(x,y)}{\pi(y)P(y,x)} &= \frac{\pi(x)Q(x,y)R(x,y)}{\pi(y)Q(y,x)R(y,x)} && (2) \\ &= \frac{\pi(x)Q(x,y)}{\pi(y)Q(y,x)} \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)} && (3) \\ &= 1. && (4) \end{aligned}$$

On en conclue que $(X_n)_{n\geq 0}$ est réversible par rapport à π.

3. En déduire un résultat de convergence des moyennes trajectorielles.

Soit $F : E \to \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}_\pi(|F|) < \infty$. Soit $X_0 \in E$ la donnée initiale de la trajectoire.

On remarque que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ avec matrice de transition P est irréductible avec mesure invariante unique π. Donc, par le **Théorème ergodique**, les moyennes trajectorielles convergent presque sûrement,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} F(X_i) \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbb{E}_\pi(F)$$

Première variante

1. Exprimer la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ en fonction de π et Q_1, Q_2. En déduire que la chaîne de Markov est irréductible.

Soit $R : (x,y,z) \in E^3 \mapsto \min\left\{1, \frac{\pi(z)Q_1(z,y)Q_2(y,x)}{\pi(x)Q_1(x,y)Q_2(y,z)}\right\}$ la probabilité d'acceptation.
Alors, $\forall z \neq X_n$ on a $X_{n+1} = z$ avec probabilité $\sum_{y\in E} Q_1(x,y)Q_2(y,z)R(x,y,z)$.
Donc, soit P la matrice de transition, on a

$$\begin{cases} P(x,z) &= \sum_{y\in E} Q_1(x,y)Q_2(y,z)R(x,y,z) \qquad \forall z \neq x \\ P(x,x) &= 1 - \sum_{z\neq x} P(x,z) \end{cases} \tag{5}$$

Alors, on remarque que Q_1, Q_2 irréductible sur $E \implies P$ irréductible sur E.

2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est réversible par rapport à π.

Premièrement, on remarque que $\frac{R(x,y,z)}{R(y,x,z)} = \frac{\min\left\{1, \frac{\pi(z)Q_1(z,y)Q_2(y,x)}{\pi(x)Q_1(x,y)Q_2(y,z)}\right\}}{\min\left\{1, \frac{1}{\frac{\pi(z)Q_1(z,y)Q_2(y,x)}{\pi(x)Q_1(x,y)Q_2(y,z)}}\right\}} = \frac{\pi(z)Q_1(z,y)Q_2(y,x)}{\pi(x)Q_1(x,y)Q_2(y,z)}$.

Montrons que

$$\forall x, z \in E, \qquad \pi(x)P(x,z) = \pi(z)P(z,x)$$

Pour $x = z$ c'est vrai. Alors, supposons $x \neq z$.
On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\pi(x)P(x,z)}{\pi(z)P(z,x)} &= \frac{\pi(x)\sum_{y\in E} Q_1(x,y)Q_2(y,z)R(x,y,z)}{\pi(z)\sum_{y\in E} Q_1(z,y)Q_2(y,x)R(z,y,x)} \qquad (6) \\ &= \frac{\sum_{y\in E} \pi(x)Q_1(x,y)Q_2(y,z)R(z,y,x)\frac{\pi(z)Q_1(z,y)Q_2(y,x)}{\pi(x)Q_1(x,y)Q_2(y,z)}}{\sum_{y\in E} \pi(z)Q_1(z,y)Q_2(y,x)R(z,y,x)} \qquad (7) \\ &= \frac{\sum_{y\in E} \pi(z)Q_1(z,y)Q_2(y,x)R(z,y,x)}{\sum_{y\in E} \pi(z)Q_1(z,y)Q_2(y,x)R(z,y,x)} \qquad (8) \\ &= 1. \qquad (9) \end{aligned}$$

On en conclue que $(X_n)_{n\geq 0}$ est réversible par rapport à π.

3. En déduire un résultat de convergence des moyennes trajectorielles.

Soit $F : E \to \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}_\pi(|F|) < \infty$. Soit $X_0 \in E$ la donnée initiale de la trajectoire.

On remarque que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ avec matrice de transition P est irréductible avec mesure invariante unique π. Donc, par le **Théorème ergodique**, les moyennes trajectorielles convergent presque sûrement,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} F(X_i) \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbb{E}_\pi(F)$$

Deuxième variante

1. Exprimer la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ en fonction de π et Q_0, Q_1. En déduire que la chaîne de Markov est irréductible.

Soit $\forall c \in \{0,1\}, \quad R_c : (x,y) \in E^2 \mapsto \min\left\{1, \frac{\pi(y)Q_{1-c}(y,x)}{\pi(x)Q_c(x,y)}\right\}$ la probabilité d'acceptation pour $C_{n+1} = c$.

Alors, $\forall y \neq X_n$ on a $X_{n+1} = y$ avec probabilité $\frac{1}{2}Q_0(X_n,y)R_0(X_n,y)+\frac{1}{2}Q_1(X_n,y)R_1(X_n,y)$.

Donc, soit P la matrice de transition, on a

$$\begin{cases} P(x,y) &= \frac{1}{2}Q_0(x,y)R_0(x,y) + \frac{1}{2}Q_1(x,y)R_1(x,y) \qquad \forall y \neq x \\ P(x,x) &= 1 - \sum_{y\neq x} P(x,y) \end{cases} \tag{10}$$

Alors, on remarque que Q_0, Q_1 irréductible sur $E \implies P$ irréductible sur E.

2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est réversible par rapport à π.

Premièrement, $\forall c \in \{0,1\}$,on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{R_c(x,y)}{R_{1-c}(y,x)} &= \frac{\min\left\{1, \frac{\pi(y)Q_{1-c}(y,x)}{\pi(x)Q_c(x,y)}\right\}}{\min\left\{1, \frac{\pi(x)Q_c(x,y)}{\pi(y)Q_{1-c}(y,x)}\right\}} && (11) \\ &= \min\left\{1, \frac{\pi(y)Q_{1-c}(y,x)}{\pi(x)Q_c(x,y)}\right\} \max\left\{1, \frac{\pi(y)Q_{1-c}(y,x)}{\pi(x)Q_c(x,y)}\right\} && (12) \\ &= \frac{\pi(y)Q_{1-c}(y,x)}{\pi(x)Q_c(x,y)} && (13) \end{aligned}$$

Montrons que

$$\forall x, y \in E, \qquad \pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$$

Pour $x = y$ c'est vrai. Alors, supposons $x \neq y$.

On calcule

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi(x)P(x,y)}{\pi(y)P(y,x)} &= \frac{\pi(x)\left(\frac{1}{2}Q_0(x,y)R_0(x,y)+\frac{1}{2}Q_1(x,y)R_1(x,y)\right)}{\pi(y)\left(\frac{1}{2}Q_0(y,x)R_0(y,x)+\frac{1}{2}Q_1(y,x)R_1(y,x)\right)} && (14)\\
&= \frac{\pi(x)Q_0(x,y)R_0(x,y)+\pi(x)Q_1(x,y)R_1(x,y)}{\pi(y)Q_0(y,x)R_0(y,x)+\pi(y)Q_1(y,x)R_1(y,x)} && (15)\\
&= \frac{\pi(x)Q_0(x,y)R_1(y,x)\frac{\pi(y)Q_1(y,x)}{\pi(x)Q_0(x,y)}+\pi(x)Q_1(x,y)R_0(y,x)\frac{\pi(y)Q_0(y,x)}{\pi(x)Q_1(x,y)}}{\pi(y)Q_0(y,x)R_0(y,x)+\pi(y)Q_1(y,x)R_1(y,x)} && (16)\\
&= \frac{\pi(y)Q_1(y,x)R_1(y,x)+\pi(y)Q_0(y,x)R_0(y,x)}{\pi(y)Q_0(y,x)R_0(y,x)+\pi(y)Q_1(y,x)R_1(y,x)} && (17)\\
&= 1. && (18)
\end{aligned}
$$

On en conclue que $(X_n)_{n\geq 0}$ est réversible par rapport à π.

3. En déduire un résultat de convergence des moyennes trajectorielles.

Soit $F : E \to \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}_\pi(|F|) < \infty$. Soit $X_0 \in E$ la donnée initiale de la trajectoire.

On remarque que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ avec matrice de transition P est irréductible avec mesure invariante unique π. Donc, par le **Théorème ergodique**, les moyennes trajectorielles convergent presque sûrement,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} F(X_i) \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbb{E}_\pi(F)$$

Exercice 2 : Couplage et critère de Doeblin

On vérifie que pour chaque x_n, l'expression donné définit une probabilité.

Pour $n_0 = 1$, on a $\forall z \in E, \quad P(x,z) \geq \alpha m(z)$.

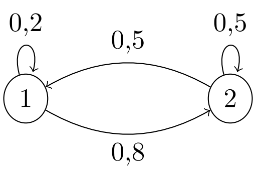
D'où $\forall z \in E, \quad \frac{1}{1-\alpha}\left(P(x,z) - \alpha m(z)\right) \geq 0$.

Alors, on calcule la somme des probabilités

$$\sum_{z\in E} \frac{1}{1-\alpha}\left(P(x,z)-\alpha m(z)\right) = \frac{1}{1-\alpha}\sum_{z\in E} P(x,z) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{z\in E} m(z) = 1.$$

0. Trouver un exemple de chaîne de Markov apériodique, irréductible et récurrente positive qui ne vérifie pas (1).

Considérons la chaîne de deux états avec matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.



On remarque que la chaîne est irréductible par connexité du graphe de transtions.

Par le **Théorème 4.6** du cours, on sait que cette chaîne est recurrente positive $\iff$ elle admet l'unique mesure invariante. On calcule

$$\begin{cases} 0,2\pi(1) + 0,5\pi(2) = \pi(1) \\ 0,8\pi(1) + 0,5\pi(2) = \pi(2) \\ \pi(1) + \pi(2) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi(1) &= \frac{5}{13} \\ \pi(2) &= \frac{8}{13} \end{cases} \tag{19}$$

donc, la chaîne est récurrente positive. Et la chaîne est apériodique car

$$\forall x, y \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P^n(x, y) > 0.$$

1. Vérifier que P est la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Calculons la probabilité de la transition $X_n \to z \in E$.

Fixons $X_n = x$. On a

$$\begin{aligned} \forall z \in E, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = z) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = z | B_{n+1} = 0)\mathbb{P}(B_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = z | B_{n+1} = 1)\mathbb{P}(B_{n+1} = 1) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(P(x, z) - \alpha m(z)\right)(1-\alpha) + m(z)\alpha \\ &= P(x, z) \end{aligned}$$

On en conclue que P est la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit $\tau = \inf\{n \geq 1 : B_n = 1\}$.
Montrer que $\mathbb{P}_x(X_\tau = y) = m(y)$ puis que

$$\mathbb{P}_x(X_n = y, \tau \leq n) = \sum_{k=1}^{n} (1-\alpha)^{k-1}\alpha(mP^{n-k})(y).$$

On remarque que X_τ est tirée au sort dans E selon m, donc X_τ ne dépend pas de $X_0, ..., X_{\tau-1}$ et $\mathbb{P}_x(X_\tau = y) = m(y)$.

Alors, calculons $\mathbb{P}_x(X_n = y, \tau \leq n)$. On a

$$\begin{align}
\mathbb{P}_x(X_n = y, \tau \leq n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x(X_n = y | \tau = k)\mathbb{P}_x(\tau = k) \tag{20}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x(X_n = y | \tau = k)(1-\alpha)^{k-1}\alpha \tag{21}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_\tau = z, X_n = y | \tau = k) \right)(1-\alpha)^{k-1}\alpha \tag{22}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{z\in E} m(z)\mathbb{P}_z(X_{n-k} = y) \right)(1-\alpha)^{k-1}\alpha \tag{23}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{z\in E} m(z)P^{n-k}(z,y) \right)(1-\alpha)^{k-1}\alpha \tag{24}\\
&= \sum_{k=1}^{n} (mP^{n-k})(y)(1-\alpha)^{k-1}\alpha. \tag{25}
\end{align}$$

3. Soient μ et ν deux probabilités sur E. Déduire de la question précédente que

$$\mu P^n(y) - \nu P^n(y) = \sum_{x\in E} \mathbb{P}_x(X_n = y, \tau > n)(\mu(x) - \nu(x))$$

puis que

$$\|\mu P^n - \nu P^n\|_{VT} = \frac{1}{2}\sum_{y\in E} |\mu P^n(y) - \nu P^n(y)| \leq (1-\alpha)^n$$

Soit $y \in E$, d'abord on calcule $\mu P^n(y) - \nu P^n(y)$. On a

$$\begin{align}
\mu P^n(y) - \nu P^n(y) &= \sum_{x\in E} (\mu(x) - \nu(x))P^n(x,y) \tag{26}\\
&= \sum_{x\in E} (\mu(x) - \nu(x))\mathbb{P}_x(X_n = y) \tag{27}\\
&= \sum_{x\in E} (\mu(x) - \nu(x))(\mathbb{P}_x(X_n = y, \tau \leq n) + \mathbb{P}_x(X_n = y, \tau > n)) \tag{28}
\end{align}$$

Mais par la question précedente, on sait que $\mathbb{P}_x(X_n = y, \tau \leq n)$ ne dépend pas de x et comme $\sum_{x\in E} \mu(x) = \sum_{x\in E} \nu(x) = 1$, les termes avec $\tau \leq n$ s'annulent. On en conclue,

$$\mu P^n(y) - \nu P^n(y) = \sum_{x\in E} (\mu(x) - \nu(x))\mathbb{P}_x(X_n = y, \tau > n).$$

Alors, on remarque que $\tau > n \iff B_1 = ... = B_n = 0$. D'où,

$$\mathbb{P}(\tau > n) = (1-\alpha)^n.$$

Donc, on a

$$
\begin{aligned}
\|\mu P^n - \nu P^n\|_{VT} &= \frac{1}{2}\sum_{y\in E} |\mu P^n(y) - \nu P^n(y)| && (29)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{y\in E}\left|\sum_{x\in E}(\mu(x)-\nu(x))\mathbb{P}_x(X_n = y, \tau > n)\right| && (30)\\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{y\in E}\left(\sum_{x\in E}|\mu(x)-\nu(x)|\mathbb{P}_x(X_n = y, \tau > n)\right) && (31)\\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{y\in E}\left(\sum_{x\in E}\mathbb{P}_x(X_n = y, \tau > n)\right) && (32)\\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{x\in E}\left(\sum_{y\in E}\mathbb{P}_x(X_n = y, \tau > n)\right) && (33)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{x\in E}\mathbb{P}_x(\tau > n) && (34)\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau > n) && (35)\\
&= \frac{1}{2}(1-\alpha)^n \leq (1-\alpha)^n && (36)
\end{aligned}
$$

4. Montrer que $y \mapsto P^n(x,y)$ converge vers une mesure π et que π ne dépend pas de x. Montrer que π est une mesure de probabilité invariante pour le processus $\{X_n\}_{n\geq 0}$.

Montrons d'abord qu'il existe une mesure de probabilité invariante π.

Posons $X_0 = x \in E$, on veut calculer $\mathbb{E}_x(T_x^+)$.

Premièrement, on remarque que $\forall x, y \in E$ on a $P(x,y) \leq 1 - P(x,x) \leq 1 - \alpha m(x)$. Alors, soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(T_x^+ > k) &= \sum_{y\neq x} P(x,y)\mathbb{P}_y(T_x^+ > k-1) && (37)\\
&\leq (1-\alpha m(x))\mathbb{P}_x(T_x^+ > k-1) && (38)
\end{aligned}
$$

Par récurrence, on conclue $\mathbb{P}_x(T_x^+ > k) \leq (1-\alpha m(x))^k$. Alors, on a

$$
\mathbb{E}_x(T_x^+) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}_x(T_x^+ > k) \leq \sum_{k\geq 0}(1-\alpha m(x))^k < +\infty. \qquad (39)
$$

Donc, par le **Théorème 4.6** du cours, on conclue qu'il existe une mesure invariante π donnée par

$$
\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^+)}
$$

Finalement, montrons que $y \mapsto P^n(x,y)$ converge vers π.

Par l'exercice 3, on a

$$\|P^n(x,\cdot)-\pi P^n\|_{VT}= \|P^n(x,\cdot)-\pi\|_{VT}\leq (1-\alpha)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en conclue que $y \mapsto P^n(x,y)$ converge vers π.

5. Montrer maintenant que lon peut toujours se ramener au cas $n_0 = 1$ dans 1.

Supposons $n_0 > 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov avec matrice de transition P et $X_0 = x \in E$.

Par division euclidienne,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists k, \ell \in \mathbb{N} \quad \text{tels que } n = kn_0 + \ell \quad \text{avec } 0 \leq \ell < n_0.$$

Soit $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov avec matrice de transition P^{n_0} avec $\tilde{X}_0$ distribuée sous $P^\ell(x,\cdot)$.

On remarque que la chaîne $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$ vérifie le **critère de Doeblin** avec $n_0 = 1$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_n = y) &= \sum_{z\in E} P^\ell(x,z)\mathbb{P}_z(X_{n-l} = y) && (40)\\ &= \sum_{z\in E} P^\ell(x,z)\mathbb{P}_z(\tilde{X}_k = y) && (41)\end{aligned}$$

donc si $y \mapsto P^{kn_0}(z,y)$ converge vers une mesure invariante, alors $y \mapsto P^n(x,y)$ converge aussi.