PC 1 (Introduction aux chaînes de Markov)

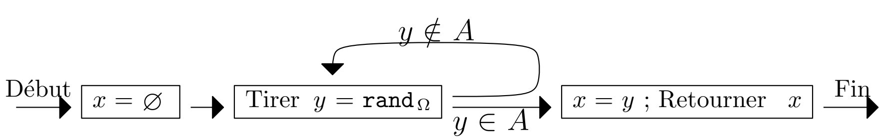
Exercice 1 (Récurrences aléatoires).

1. Soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans un ensemble $\mathcal{Z}$ quelconque (pas forcément dénombrable).
   Soit E un espace d'états dénombrable et $f : E \times \mathcal{Z} \to E$ une fonction. On se donne une variable aléatoire X_0 à valeurs dans E indépendante de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ et on construit une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires de la façon suivante : pour tout $n \geq 0$,
   $$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})\,.$$
   Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans E, et donner une expression pour sa matrice de transition $P = (P(i,j))_{i,j\in E}$.
2. Soit $P = (P(i,j))_{i,j\in E}$ une matrice stochastique sur un espace d'états E dénombrable. Construire une chaîne de Markov de matrice de transition P à l'aide d'une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de v.a. i.i.d. uniformes sur $[0,1]$.

Exercice 2 (Nouvelles chaînes de Markov à partir d'anciennes).
Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une chaîne de Markov sur un espace d'états dénombrable E et de matrice de transition P.

1. Montrer que $(X_{2n}, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov et préciser sa matrice de transition.
   (On peut montrer similairement que le processus $(X_{kn}, n \in \mathbb{N})$ pour $k \geq 1$ est une chaîne de Markov.)
2. Montrer que $(Y_n, n \geq 1)$ définie par $Y_n = (X_{n-1}, X_n)$ est une chaîne de Markov dont on précisera l'espace d'états, et donner sa matrice de transition Q.
   (On peut montrer similairement que le processus $Y_n = (X_{n-m}, X_{n-m+1}, \ldots, X_n)$ pour $n \geq m$, de mémoire $m \geq 1$, est une chaîne de Markov.)

Exercice 3 (Analyse du 1er pas : la méthode du rejet). Soit Ω un ensemble fini, on suppose que l'on dispose d'une fonction $\texttt{rand}_\Omega$ qui tire au sort de façon uniforme des éléments de Ω.
Pour $A \subset \Omega$ un ensemble non vide, la *méthode du rejet* est un algorithme qui permet de tirer uniformément au hasard un élément dans A en utilisant $\texttt{rand}_\Omega$. L'algorithme du rejet fonctionne de la façon suivante (dans l'algorithme, $\varnothing$ désigne un état artificiel qui n'appartient pas à Ω) :



On modélise le problème de la façon suivante. Soient $Y_1, Y_2, \ldots$ les valeurs successives renvoyées par $\texttt{rand}_\Omega$ (on suppose qu'elles sont indépendantes). On pose $X_0 = \varnothing$ et pour $k \geq 1$ on note X_k la valeur de la variable x dans l'algorithme du rejet, c'est-à-dire

$$X_k = \begin{cases} \varnothing & \text{si } k < T, \\ Y_T & \text{si } k \geq T, \end{cases}$$

où $T = \min\{k \geq 1,\ Y_k \in A\}$.

1. Justifier que $(X_k)_{k\geq 1}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $A \cup \{\varnothing\}$. Quelle est sa matrice de transition ?
2. Quelle est la loi de T ? Rappeler son espérance, et en déduire que $T < \infty$ presque sûrement.

3. Démontrer que la valeur finale X_T est bien distribuée uniformément dans A. (On pourra conditionner par rapport à X_1.)

Exercice 4 (Analyse du 1er pas : Alice vs Bob)**.** Alice et Bob jouent au jeu suivant. On tire une suite de Pile/Face indépendants équilibrés (c.-à-d. de probabilité 1/2) $X_1, X_2, X_3, \dots$. Alice gagne lorsque le 1er motif PFP apparaît, Bob gagne lorsque le 1er motif PPF apparaît. On cherche à déterminer la probabilité que Alice gagne.

1. Pour $n \geq 2$ on pose $Y_n = (X_{n-1}, X_n)$. Justifier que $(Y_n)_{n\geq 2}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{PP, PF, FP, FF\}$. Quelle est sa matrice de transition ?
2. Pour $x \in \{PP, PF, FP, FF\}$, on pose
$$\alpha_x = \mathbb{P}(\text{Alice gagne} \mid Y_2 = x).$$
Démontrer que $\alpha_{PP}, \alpha_{PF}, \alpha_{FP}, \alpha_{FF}$ sont solutions d'un système affine d'équations.
3. En déduire la probabilité que Alice gagne.

Exercice 5 (Lancers de pièces)**.** On lance une pièce truquée : les résultats des lancers sont représentés par une suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \geq 1$, on note $X_n = Y_n + Y_{n-1}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_1 = 0, X_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_2 = 1)$.
2. Est-ce que $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une chaîne de Markov ?

Exercice 6 (Bernoulli factory)**.** On considère une suite de lancers d'une pièce non équilibrée, modélisée par une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ i.i.d. de Bernoulli de paramètre $p \in (0,1)$. On souhaite, à partir de cette expérience aléatoire, tirer un échantillon selon une loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
On considère pour cela pour tout $k \geq 0$, $Y_k = (X_{2k}, X_{2k+1})$, on considère $T = \inf\{k \geq 0, X_{2k} \neq X_{2k+1}\}$ et on pose
$$Z = X_{2T}.$$

1. Donner la loi de la suite $(Y_k)_{k\geq 0}$.
2. Donner la loi de T et vérifier que $T < \infty$ presque sûrement.
3. Donner la loi de Z.
