DM5 : Pendule à point dattache mobile

Gabriel PEREIRA DE CARVALHO

Dernière modification 30 janvier 2024

Exercice 1

On sait que $\mathcal{L} = T - V$.
D'abord, calculons l'énergie potentiel et cinétique pour chacun des deux points.
Le point de masse M a pour coordonées $(x_1, y_1) = (x, 0) \implies (\dot{x_1}, \dot{y_1}) = (\dot{x}, 0)$. On a

$$\begin{cases} T_1 &= \frac{1}{2}M(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) = \frac{M\dot{x}^2}{2} \\ V_1 &= mgy_1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Alors, le point de masse m a pour coordonées

$$(x_2, y_2) = (x + l\sin(\theta), \quad -l\cos(\theta)) \implies (\dot{x_2}, \dot{y_2}) = (\dot{x} + l\dot{\theta}\cos(\theta), \quad l\dot{\theta}\sin(\theta)).$$

On a

$$\begin{cases} T_2 &= \frac{1}{2}m(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}(2\dot{x}l\dot{\theta}\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2) \\ V_2 &= mgy_2 = -mgl\cos(\theta) \end{cases} \tag{2}$$

Ce qui donne

$$\mathcal{L} = (T_1 + T_2) - (V_1 + V_2) = \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}(2\dot{x}l\dot{\theta}\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2) + mgl\cos(\theta)$$

Exercice 2

On utilise les équation d'Euler-Lagrange par rapport aux coordonées x et θ.
D'abord, considerons l'équation

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\mathcal{L}\right). \tag{3}$$

On calcule les dérivées

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L} &= -m\dot{x}l\dot{\theta}\sin(\theta) - mgl\sin(\theta) = -ml\sin(\theta)(\dot{x}\dot{\theta} + g) \\ \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\mathcal{L} &= \frac{m}{2}(2\dot{x}l\cos(\theta) + 2l^2\dot{\theta}) \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\mathcal{L}\right) = m\ddot{x}l\cos(\theta) - m\dot{x}l\dot{\theta}\sin(\theta) + ml^2\ddot{\theta} \end{cases} \tag{4}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
& -ml\sin(\theta)(\dot{x}\dot{\theta}+g) = ml(\ddot{x}\cos(\theta) - \dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta) + l\ddot{\theta}) && (5)\\
\iff & \sin(\theta)(\dot{x}\dot{\theta}+g) = \dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta) - \ddot{x}\cos(\theta) - l\ddot{\theta} && (6)\\
\iff & \ddot{x}\cos(\theta) + l\ddot{\theta} + \sin(\theta)g = 0. && (7)
\end{aligned}
$$

Donc, on a notre première équation de mouvement. Alors, considerons l'équation

$$
\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\mathcal{L}\right). \tag{8}
$$

On calcule les dérivées

$$
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L} &= 0\\
\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\mathcal{L} &= (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos(\theta) \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\mathcal{L}\right) = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)
\end{cases} \tag{9}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
& 0 = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) && (10)\\
\iff & (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = 0. && (11)
\end{aligned}
$$

Donc, on a deux équations de mouvement

$$
\begin{cases}
\ddot{x}\cos(\theta) + l\ddot{\theta} + \sin(\theta)g &= 0\\
(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) &= 0.
\end{cases} \tag{12}
$$

Exercice 3

En supposant $\theta << 1$, on a $\cos(\theta) \approx 1$ et $\sin(\theta) \approx \theta$ ce qui donne

$$
\begin{cases}
\ddot{x} + l\ddot{\theta} + \theta g &= 0\\
(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} - ml\dot{\theta}^2\theta &= 0.
\end{cases} \tag{13}
$$

On remarque que le terme $ml\dot{\theta}^2\theta$ d'ordre 3 est négligeable pour des petites oscillations. On peut donc récrire les équations de mouvement

$$
\begin{cases}
\ddot{x} + l\ddot{\theta} + \theta g &= 0\\
(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= 0.
\end{cases} \tag{14}
$$

En realisant la substitution $\ddot{x} = -l\ddot{\theta} - \theta g$, on a

$$
Ml\ddot{\theta} + (M+m)\theta g = 0 \iff \ddot{\theta} = -\left(\frac{m+M}{M}\right)\frac{g}{l}\theta
$$

on remarque que c'est analogue à l'oscillateur harmonique avec $\omega^2 = \left(\frac{m+M}{M}\right)\frac{g}{l}$. Donc

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{avec } \theta_0, \phi_0 \text{ les conditions initiales} \tag{15}$$

Alors, $\ddot{x} = -\frac{ml}{M+m}\ddot{\theta}$ d'où

$$\ddot{x} = \frac{ml}{M+m}\omega^2\theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) \tag{16}$$

$$\iff \dot{x} = \frac{ml}{M+m}\omega\theta_0 \sin(\omega t + \phi_0) + C_1 \tag{17}$$

$$\iff x = -\frac{ml}{M+m}\theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) + C_1 t + C_2 \tag{18}$$

avec C_1, C_2 les conditions initiales.