

DM8 : Pendule double

Gabriel PEREIRA DE CARVALHO

1^{er} février 2024

Exercice 1

Partie 1 : Calculer le Lagrangien

D'abord, écrivons les coordonnées de chaque masse.

$$P_1 = (x_1, y_1) = (l_1 \sin(\theta_1), l_1 \cos(\theta_1)) \quad (1)$$

$$P_2 = (x_2, y_2) = (l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)). \quad (2)$$

On sait que le Lagrangien est donné par $\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2; \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = (T_1 + T_2) - (V_1 + V_2)$. Alors, écrivons les énergies cinétique et potentiel de chaque masse.

Pour la particule 1, on a

$$\begin{cases} T_1 &= \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} = \frac{m_1}{2} [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1)] = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2}{2} \\ V_1 &= -m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 \cos(\theta_1) \end{cases} \quad (3)$$

et pour la particule 2

$$\begin{cases} T_2 &= \frac{m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} = \frac{m_2}{2} [(l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2))^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2))^2] \\ &= \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2] \\ V_2 &= -m_2 g y_2 = -m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)) \end{cases} \quad (4)$$

alors, on a le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2}{2} + (m_1 + m_2)gl_1 \cos(\theta_1) + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2}{2} + m_2 g l_2 \cos(\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (5)$$

où on observe un terme de couplage entre les particules.

Partie 2 : Équations de mouvement

On utilise les équations d'Euler-Lagrange par rapport aux coordonnées θ_1 et θ_2 .

D'abord, considérons l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \mathcal{L} \right) \quad (6)$$

On calcule les dérivées

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathcal{L} &= -(m_1 + m_2)gl_1 \sin(\theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \mathcal{L} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \mathcal{L} \right) &= (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (7)$$

Donc, on a notre première équation de mouvement

$$-(m_1 + m_2)gl_1 \sin(\theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Alors, considerons l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} \mathcal{L} \right) \quad (8)$$

On calcule les dérivées

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \mathcal{L} &= -m_2 gl_2 \sin(\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} \mathcal{L} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} \mathcal{L} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (9)$$

Donc, on a notre première deuxième équation de mouvement

$$-m_2 gl_2 \sin(\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2)gl_1 \sin(\theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ -m_2 gl_2 \sin(\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (10)$$

Exercice 2

On remarque que le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, donc le système est isolé et **l'énergie est conservée**. Cependant, l'impulsion n'est pas conservée car le lagrangien n'est pas invariant par translation et le moment cinétique est conservé seulement dans le axe perpendiculaire au plan du mouvement.

Par le **Théorème de Poincaré-Bendixson**, une condition nécessaire pour un système chaotique est avoir ≥ 3 variables indépendantes. Donc, on conclue que le double pendule décrit dans l'exercice n'est pas chaotique.

Cependant, on remarque que si les masses ne restent pas dans un même plan vertical, on aurait plus de degrés de liberté et là le système pourrait être chaotique.