**Cours de Relativité et principes variationnels (PHY 431)**
**Ecole polytechnique – Ingénieur – 2ème année**
**Année 2023-2024**
**Pr. Sylvain Chaty**

# PC9 : Le principe de Feynman (31/01/2024)

**Notions :** Liens entre physique classique et quantique, Le principe de Feynman et la physique moderne, Le noyau de Feynman pour une particule libre, Déduction de l'équation de Schrödinger, *Révision des principes variationnels, Equations d'Euler-Lagrange pour une théorie des champs (champ scalaire ou électromagnétique), L'action en fonction du point et du temps d'arrivée, Noyau de Feynman pour un oscillateur harmonique*

**Exercice à rendre pour le 05/02/2024 : Particule relativiste dans un champ électromagnétique**

La dynamique d'une particule relativiste chargée, de charge $q$, dans un champ électromagnétique, peut être décrite par l'action d'une particule libre $S_{lib}$ (discutée dans la PC5), manifestement invariante de Lorentz, à laquelle on ajoute un terme d'interaction entre la charge et le champ, le long de sa ligne d'univers, sous la forme :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{lib} + \mathcal{S}_{emg} \tag{1}$$

avec

$$\mathcal{S}_{lib} = -mc^2 \int_{T_A}^{T_B} d\tau = -mc \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu}} d\lambda \text{ avec } \dot{x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{2}$$

et

$$\mathcal{S}_{emg} = -q \int_A^B \eta_{\mu\nu} A^\mu \dot{x}^\nu d\lambda \tag{3}$$

avec $\underline{\mathrm{A}}$ quadrivecteur potentiel électromagnétique, dont les composantes sont $A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A})$, les potentiels scalaire $\phi$ et vecteur $\vec{A}$ étant reliés au champ électromagnétique par :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ et } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{4}$$

1. Montrer qu'en prenant pour paramètre $\lambda$ le temps $t$ d'un référentiel inertiel, le Lagrangien d'interaction électromagnétique s'écrit :

$$\mathcal{L}_{emg}(\vec{x}, \vec{v}; t) = q\left(-\phi(\vec{x}, t) + \vec{v}.\vec{A}(\vec{x}, t)\right) \tag{5}$$

2. Calculer ensuite les moments généralisés $\vec{p}$ pour le Lagrangien total $\mathcal{L}_{lib} + \mathcal{L}_{emg}$ ;
3. Ecrire l'équation d'Euler–Lagrange comme une équation d'évolution pour $\vec{p}_{lib}$ ;
4. Montrer enfin qu'elle s'identifie à l'équation de la dynamique, incluant la force de Lorentz :

$$\frac{d(\gamma m\vec{v})}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{6}$$