DM3 : Non-commutativité des transformations de Lorentz

Gabriel PEREIRA DE CARVALHO

Dernière modification 10 décembre 2023

Exercice 1

Posons la rapidité $\alpha_1 = \operatorname{artanh}\left(\frac{v_1}{c}\right)$, on a la matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$

$$\Lambda(\vec{v_1}) = \Lambda(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha_1) & -\sinh(\alpha_1) & 0 & 0 \\ -\sinh(\alpha_1) & \cosh(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Analogiquement ^posons la rapidité $\alpha_2 = \operatorname{artanh}\left(\frac{v_2}{c}\right)$, on a la matrice de passage de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}''$

$$\Lambda(\vec{v_2}) = \Lambda_2(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha_2) & 0 & -\sinh(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh(\alpha_2) & 0 & \cosh(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Alors, pour calculer la matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}''$ on fait le produit

$$\Lambda(\vec{v_2})\Lambda(\vec{v_1}) = \Lambda_2(\alpha_2)\Lambda(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha_1)\cosh(\alpha_2) & -\sinh(\alpha_1)\cosh(\alpha_2) & -\sinh(\alpha_2) & 0 \\ -\sinh(\alpha_1) & \cosh(\alpha_1) & 0 & 0 \\ -\cosh(\alpha_1)\sinh(\alpha_2) & \sinh(\alpha_1)\sinh(\alpha_2) & \cosh(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\Lambda(\vec{v_2})\Lambda(\vec{v_1}) \neq \Lambda(\vec{v_1})\Lambda(\vec{v_2})$, en effet

$$\Lambda(\vec{v_1})\Lambda(\vec{v_2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha_1)\cosh(\alpha_2) & -\sinh(\alpha_1) & -\cosh(\alpha_1)\sinh(\alpha_2) & 0 \\ -\sinh(\alpha_1)\cosh(\alpha_2) & \cosh(\alpha_1) & \sinh(\alpha_1)\sinh(\alpha_2) & 0 \\ -\sinh(\alpha_2) & 0 & \cosh(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$