DM8 : Pendule double

Gabriel PEREIRA DE CARVALHO

30 janvier 2024

Exercice 1

Partie 1 : Calculer le Lagrangien

D'abord, écrivons les coordonées de chaque masse.

$$P_1 = (x_1, y_1) = (l_1 \sin(\theta_1), l_1 \cos(\theta_1)) \tag{1}$$

$$P_2 = (x_2, y_2) = (l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)). \tag{2}$$

On sait que le Lagrangien est donné par $\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2; \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = (T_1 + T_2) - (V_1 + V_2)$. Alors, écrivons les énergies cinétique et potentiel de chaque masse.

Pour la particule 1, on a

$$\begin{cases} T_1 &= \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} = \frac{m_1}{2}\left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2(\theta_2)\right] = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2}{2} \\ V_1 &= -m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 \cos(\theta_1) \end{cases} \tag{3}$$

et pour la particule 2

$$\begin{cases} T_2 &= \frac{m_1(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} = \frac{m_2}{2}\left[(l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2))^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2))^2\right] \\ &= \frac{m_2}{2}\left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2\right] \\ V_2 &= -m_2 g y_2 = -m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)) \end{cases} \tag{4}$$

alors, on a le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2}{2} - (m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2}{2} - m_2 g l_2 \cos(\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \tag{5}$$

où on observe un terme de couplage entre les particules.

Partie 2 : Équations de mouvement

Exercice 2