

## DM3 : Non-commutativité des transformations de Lorentz

Gabriel PEREIRA DE CARVALHO

Dernière modification 10 décembre 2023

### Exercice 1

Posons la rapidité  $\alpha_1 = \operatorname{artanh}\left(\frac{v_1}{c}\right)$ , on a la matrice de passage de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$

$$\Lambda(\vec{v}_1) = \Lambda(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha_1) & -\sinh(\alpha_1) & 0 & 0 \\ -\sinh(\alpha_1) & \cosh(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 2

Analogiquement posons la rapidité  $\alpha_2 = \operatorname{artanh}\left(\frac{v_2}{c}\right)$ , on a la matrice de passage de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}''$

$$\Lambda(\vec{v}_2) = \Lambda_2(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha_2) & 0 & -\sinh(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh(\alpha_2) & 0 & \cosh(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 3

Alors, pour calculer la matrice de passage de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}''$  on fait le produit

$$\Lambda(\vec{v}_2)\Lambda(\vec{v}_1) = \Lambda_2(\alpha_2)\Lambda(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha_1)\cosh(\alpha_2) & -\sinh(\alpha_1)\cosh(\alpha_2) & -\sinh(\alpha_2) & 0 \\ -\sinh(\alpha_1) & \cosh(\alpha_1) & 0 & 0 \\ -\cosh(\alpha_1)\sinh(\alpha_2) & \sinh(\alpha_1)\sinh(\alpha_2) & \cosh(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que  $\Lambda(\vec{v}_2)\Lambda(\vec{v}_1) \neq \Lambda(\vec{v}_1)\Lambda(\vec{v}_2)$ , en effet

$$\Lambda(\vec{v}_1)\Lambda(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha_1)\cosh(\alpha_2) & -\sinh(\alpha_1) & -\cosh(\alpha_1)\sinh(\alpha_2) & 0 \\ -\sinh(\alpha_1)\cosh(\alpha_2) & \cosh(\alpha_1) & \sinh(\alpha_1)\sinh(\alpha_2) & 0 \\ -\sinh(\alpha_2) & 0 & \cosh(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$