DM9 : Particule relativiste dans un champ électromagnétique

Gabriel PEREIRA DE CARVALHO

11 février 2024

Exercice 1

Par définition, l'action le long d'une trajectoire est donnée par

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_1} \mathcal{L}(x, \dot{x}; t) dt \tag{1}$$

D'où le Lagrangien d'interaction électromagnétique est donné par

$$\mathcal{L}_{emg} = -q\eta_{\mu\nu} A^\mu \dot{x}^\nu \tag{2}$$

En développant la notation d'Einstein, on a

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu} A^\mu \dot{x}^\nu &= A^0 \dot{x}^0 - A^1 \dot{x}^1 - A^2 \dot{x}^2 - A^3 \dot{x}^3 && (3)\\
&= \frac{\phi}{c} c \frac{dt}{dt} - A_x \frac{dx}{dt} - A_y \frac{dy}{dt} - A_z \frac{dz}{dt} && (4)\\
&= \phi - A_x v_x - A_y v_y - A_z v_z && (5)\\
&= \phi - \vec{v} \cdot \vec{A} && (6)
\end{aligned}$$

On en conclue que

$$\mathcal{L}_{emg} = q \left(-\phi + \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \tag{7}$$

Exercice 2

Le lagrangien d'une particule libre est donné par

$$\mathcal{L}_{lib} = \frac{1}{2} m \dot{x} \tag{8}$$

d'où on a le Lagrangien total

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{lib} + \mathcal{L}_{emg} = \frac{1}{2} m \dot{x} + q \left(-\phi + \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \tag{9}$$

Alors, calculons les moments conjugués p_i. On a

$$
\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} && (10)\\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{1}{2}m\dot{x} + q\left(-\phi + \vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right) && (11)\\
&= m\dot{x}_i + qA_i && (12)
\end{aligned}
$$

On en conclue que $\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + q\vec{A}$.

Exercice 3

Écrivons l'équation d'Euler Lagrange

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \iff \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + q\vec{A}\right) = q\left(-\nabla\phi + \nabla(\vec{v}\cdot\vec{A})\right) \tag{13}
$$

en fonction de $\vec{p}_{lib}$, on a

$$
\frac{d}{dt}\vec{p}_{lib} = q\left(-\frac{d\vec{A}}{dt} - \nabla\phi + \nabla(\vec{v}\cdot\vec{A})\right) \tag{14}
$$

Exercice 4

On calcule

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\dot{x}\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right) && (15)\\
&= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} && (16)
\end{aligned}
$$

Par la relation $\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{v}\times(\nabla\times A)$ on a

$$
-\frac{d\vec{A}}{dt} + \nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times(\nabla\times A) \tag{17}
$$

Donc, on peut récrire l'équation d'Euler Lagrange

$$
\frac{d}{dt}\vec{p}_{lib} = q\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times(\nabla\times A)\right) \tag{18}
$$

Alors, on utilise les rélations $\vec{B} = \nabla\times A$ et $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ qui donnent

$$
\frac{d}{dt}\vec{p}_{lib} = q\left(\vec{E} + v\times\vec{B}\right) \tag{19}
$$