DM7 : Particule chargée dans un champ électrique

Gabriel PEREIRA DE CARVALHO

23 janvier 2024

Exercice 1

On applique la relation fondamentale de la dynamique avec la quadri-force de Lorentz dû au champ $\vec{E}$

$$\frac{d\underline{P}}{d\tau} = \underline{\mathcal{F}}_{Lorentz} \implies m\frac{du^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu.$$

Alors, en forme matricielle on a

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u^0 \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{pmatrix} = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} 0 & \frac{E}{c} & 0 & 0 \\ \frac{E}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^0 \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} \frac{du^0}{d\tau} &= \frac{qE}{mc}u^x \\ \frac{du^x}{d\tau} &= \frac{qE}{mc}u^0 \\ \frac{du^y}{d\tau} &= 0 \\ \frac{du^z}{d\tau} &= 0. \end{cases} \tag{1}$$

On observe que $u^y = u^y(\tau = 0)$ et $u^z = u^z(\tau = 0)$. D'où les vitesses v_y et v_z perpendiculares au champ $\vec{E}$ sont constantes. On a encore les deux premières équations à résoudre

$$\begin{cases} \frac{du^0}{d\tau} &= \frac{qE}{mc}u^x \\ \frac{du^x}{d\tau} &= \frac{qE}{mc}u^0 \end{cases} \tag{2}$$

On peut isoler la variable u^x qui nous intéresse. On a

$$\frac{d^2u^x}{d\tau^2} = \frac{qE}{mc}\frac{du^0}{d\tau} = \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 u^x$$

posons $\omega = \frac{qE}{mc}$, on a

$$\frac{d^2u^x}{d\tau^2} = \omega^2 u^x \tag{3}$$

ce qui correspond à l'équation d'un oscillateur harmonique. D'où

$$u^x = A\cos(\omega\tau) + B\sin(-\omega\tau). \tag{4}$$

Alors, en utilisant $u^x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} v_x$ on calcule

$$v_x = \frac{A}{\gamma}\cos\left(\omega\frac{t}{\gamma}\right) + \frac{B}{\gamma}\sin\left(\omega\frac{t}{\gamma}\right)$$

Cependant, on note que comme le facteur de Lorentz instantanée dépend encore de la vitesse, on a une équation implicite.

Exercice 2

Posons $a = \frac{qE}{m}$ et $v_{0,x} = 0$.
Par la **section 4.4.3 du poly**, on a

$$v_x = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}t^2}}$$

Exercice 3

L'énergie de la particule est

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = mc^2\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + 1} \tag{5}$$