L'Ensemble Canonique

1 Systèmes à deux niveaux dont un dégénéré

On considère un ensemble de N particules discernables, chacune pouvant occuper un état dénergie $-\epsilon$ et q états regroupés en énergie autour de la valeur $+\epsilon$. On suppose $q > 1$. Dans la limite des hautes températures :

- ☐ l'énergie totale du système est nulle.
- ☐ l'énergie totale du système est positive et ne dépend pas de q.
- ☐ l'énergie totale du système est positive et croît avec q.

On calcule la fonction de partition canonique Z_c

$$Z_c = \sum_m e^{-\frac{E_m}{k_B T}} = e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} + q e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}$$

Alors, l'énergie totale du système est

$$U = \sum_m p_m E_m \tag{1}$$

$$= \sum_m \frac{e^{-\frac{E_m}{k_B T}}}{Z_c} E_m \tag{2}$$

$$= \epsilon \left(\frac{-e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} + q e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}}{e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} + q e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}} \right) \tag{3}$$

$$= \epsilon \left(1 - \frac{2}{1 + q e^{-2\frac{\epsilon}{k_B T}}} \right) \tag{4}$$

Donc dans la limite des hautes températures on a

$$\lim_{T \to +\infty} U = \epsilon \left(1 - \frac{2}{1+q} \right)$$

d'où on remarque que U est positive $\forall q > 1$ et une fonction croissante de q.

2 Polarisation de spins nucléaires

On considère un système de N protons indépendants et discernables. Le moment magnétique associé au spin du proton est beaucoup plus petit que celui de l'électron : il vaut

$$\mu_P = 2,79 \left(\frac{m_e}{M_p}\right) \mu_B,$$

où m_e est la masse de l'électron, M_P celle du proton et μ_B est le magnéton de Bohr.

On fixe la température à $0,01K$. Calculer le champ magnétique qu'il faut appliquer pour obtenir une aimantation de l'ordre des $\frac{3}{4}$ de l'aimantation maximale possible.

Premièrement, on remarque que l'aimantation maximale possible est

$$M_{max} = N\mu_P$$

On sait que l'énergie E_m du système dans un certain microétat d'aimantation M_m est donnée par $E_m = -M_m B$. Alors, calculons la fonction de partition canonique Z_c

$$\begin{aligned} Z_c &= \sum_m e^{-\frac{E_m}{k_B T}} && (5) \\ &= \sum_m e^{\frac{M_m B}{k_B T}} && (6) \end{aligned}$$

On sait que l'aimantation totale (par unité de volume) est donnée par

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= k_B T \frac{\partial}{\partial B} \ln(Z_c) && (7) \\ &= \frac{k_B T}{Z_c} \frac{\partial}{\partial B} Z_c && (8) \\ &= \frac{k_B T}{Z_c} \left(\sum_m \frac{\partial}{\partial B} e^{\frac{M_m B}{k_B T}} \right) && (9) \\ &= \frac{1}{Z_c} \sum_m M_m e^{\frac{M_m B}{k_B T}} && (10) \end{aligned}$$

3 Fluctuations de longueur d'un ressort

On prend un ressort de longueur au repos L_0 et de raideur K, et on accroche à son extrémité une masse M. L'ensemble est à l'équilibre thermique à la température T, et on suppose $L_0 \gg \sqrt{\frac{kT}{K}}$.

On étudie les fluctuations thermiques de la longueur L du ressort, en mesurant $\Delta = \langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2$. La quantité Δ :

- ☐ décroit quand M augmente.
- ☐ croît quand M augmente.
- ☐ est indépendante de M.

Soit $x(t)$ la position de la masse M, avec $x(0) = 0$. On remarque que $L(t) = L_0 + x(t)$. L'équation du mouvement est

$$\ddot{x} = g - \frac{k}{M}x$$

On applique la transformation de Laplace avec conditions initiales nulles

$$s^2 X = \frac{g}{s} - \frac{k}{M}X$$

d'où

$$X(s) = \frac{g}{s\left(s^2 + \frac{k}{M}\right)} \implies x(t) = \frac{gM}{k}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)\right)$$

On en conclue que

$$\begin{cases} \langle x \rangle & = \frac{gM}{k} \implies \langle L \rangle = L_0 + \frac{gM}{k} \implies \langle L \rangle^2 = L_0^2 + 2\frac{gM}{k}L_0 + \frac{g^2M^2}{k^2} \\ \langle x^2 \rangle & = \frac{5g^2M^2}{4k^2} \implies \langle L^2 \rangle = L_0^2 + 2L_0\langle x \rangle + \langle x^2 \rangle = L_0^2 + 2\frac{gM}{k}L_0 + \frac{5g^2M^2}{4k^2} \end{cases} \tag{11}$$

Donc $\Delta = \frac{g^2M^2}{4k^2}$ croît quand M augmente.