MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 4 – Équations différentielles, théorie générale

L'exercice 1 permet de vérifier la bonne compréhension de quelques notions du cours

---

Pour la séance de petite classe du vendredi 19 mai,
préparer deux exercices parmi les trois suivants : Exercices 1, 2 et 3.

La présence d'un astérique $*$ signale les exercices plus difficiles.

La correction de la majorité des exercices sera disponible le vendredi 19 mai après la PC.

Exercice 1. (Applications directes du cours)

(a) On considère l'équation $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}$ avec $f \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ et $f(t, 0) = 0$. Vérifier que $x(t) = 0$ est solution avec $x_0 = 0$. En déduire que $x(0) > 0$ implique $x(t) > 0$ sur l'intervalle maximal d'existence.

(b) Soit $t \in \mathbf{R} \mapsto A(t) \in M_n(\mathbf{R})$ une application continue à valeur matricielle.

i) Retrouver par les théorèmes du cours que le problème de Cauchy $\dot{x} = A(t)x(t)$, $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$ a une unique solution globale.

ii) Supposons $M = \sup_{t\in\mathbf{R}} \|A(t)\|_\infty < +\infty$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme subordonnée à la norme ∞ sur $\mathbf{R}^n$. Donner une estimée $\|x(t)\|_\infty$ en fonction de $\|x_0\|_\infty$.

Exercice 2. (Une application du théorème du point fixe de Banach) On note $\mathcal{C}_{\text{pér}}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, périodiques de période 1 et de norme inférieure ou égale à 1, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty = \sup_{\mathbf{R}} |\cdot|$

(a) Montrer que l'espace métrique $(\mathcal{C}_{\text{pér}}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

(b) Montrer que l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad [f(x+\sqrt{3})]^2 + [f(x-\sqrt{2})]^3 + 10f(x) = \sin(2\pi x)$$

admet une solution f continue et périodique de période 1.

Indication : appliquer le théorème du point fixe de Banach à une application $\Phi : \mathcal{C}_{\text{pér}} \to \mathcal{C}_{\text{pér}}$ bien choisie.

Exercice 3. (Version intégrale du lemme de Gronwall) Soient $T > 0$ et $u \in \mathcal{C}([0, T[, \mathbf{R})$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ et une fonction continue $v : [0, T[\to [0, +\infty[$ telle que

$$\forall t \in [0, T[, \quad u(t) \leqslant C + \int_0^t u(s)v(s)ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [0, T[, \quad u(t) \leqslant C \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right).$$

Exercice 4. (Estimation de la divergence de solutions) Le but de l'exercice est de démontrer un résultat mentionné en cours sur l'estimation de la divergence des solutions, et d'en donner ensuite une généralisation.

On considère une application $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ continue et C-lipschitzienne en x, pour une constante $C > 0$.

(a) Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ définies sur l'intervalle $[0, T]$, où $T > 0$. Montrer que pour tout $t \in [0, T]$,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant e^{Ct} |x_1(0) - x_2(0)| .$$

(b) Soit $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ une application continue vérifiant, pour $\varepsilon > 0$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^N$,

$$|f(t, x) - g(t, x)| \leqslant \varepsilon.$$

Soient x_1 une solution de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ définie sur l'intervalle $[0, T]$, où $T > 0$, et x_2 une solution de l'équation $\dot{x} = g(t, x)$ définie sur l'intervalle $[0, T]$. Montrer que pour tout $t \in [0, T]$,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(0) - x_2(0)| e^{Ct} + \frac{\varepsilon}{C} \left(e^{Ct} - 1\right) .$$

Exercice 5. (*Inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles) On considère une norme $\| \cdot \|$ quelconque sur $\mathbf{R}^N$.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On note

$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_N'(x)) .$$

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $a, b \in I$, $a < b$, on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \int_a^b \|f'(s)\| ds.$$

(a) Montrer directement l'inégalité dans le cas des deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbf{R}^N$.

(b) Montrer l'inégalité dans le cas de la norme $\| \cdot \|_2$.

Indication. Utiliser la fonction $\psi : I \to \mathbf{R}$ définie par (on peut supposer $f(b) \neq f(a)$)

$$\psi(x) = f(x) \cdot v \quad \text{où} \quad v = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|_2}.$$

(On a noté $g \cdot h = \sum_{j=1}^N g_j h_j$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^N$.)

(c) Montrer l'inégalité pour toute norme $\| \cdot \|$.

Indications : On rappelle que pour tout $x \in I$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|h| \leqslant \delta$,

$$\|f(x + h) - f(x) - df_x(h)\| \leqslant \varepsilon |h|,$$

ce qui s'écrit également sous la forme $f(x+h) - f(x) = df_x(h) + o(h)$. La notation $h \mapsto df_x(h)$ désigne la différentielle de f au point x. En particulier, on a ici $df_x(h) = hf'(x)$.

Considérer $\varepsilon > 0$ arbitraire et définir l'ensemble A des $x \in [a, b]$ tels que la relation

$$\|f(y) - f(a)\| \leqslant \int_a^y \|f'(s)\| ds + 2\varepsilon(y - a) \tag{$\star$}$$

est vérifiée pour tout $y \in [a, x]$. Montrer que A est non vide et fermé dans $[a, b]$. Supposer que $b \notin A$ et considérer sa borne supérieure $c \in [a, b]$. Trouver une contradiction en utilisant le rappel ci-dessus. Conclure.

Exercice 6. (*Suite de l'exercice précédent) On s'intéresse maintenant au cas plus général d'une fonction $F : U \to \mathbf{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$, où U est un ouvert de $\mathbf{R}^M$. On note $\mathbf{J}_F$ la matrice Jacobienne de F, définie par sur U

$$\mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_M} \end{pmatrix}$$

Soient deux normes notées $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^M$ et $\mathbf{R}^N$. On définit, pour tout $X \in U$, la norme subordonnée de $\mathbf{J}_F(X)$ comme matrice de taille $N \times M$ par

$$\|\mathbf{J}_F(X)\| = \sup_{\|h\|=1} \|\mathbf{J}_F(X)h\|.$$

Montrer que pour tous $X, Y \in U$ tels que le segment joignant X à Y est contenu dans U,

$$\|F(Y) - F(X)\| \leqslant \sup_{\theta \in [0,1]} \|\mathbf{J}_F((1-\theta)X + \theta Y)\| \cdot \|Y - X\|.$$

Indication : utiliser l'application f définie par $f(\theta) = F((1-\theta)X + \theta Y)$.

Exercice 7. (*Application de l'exercice précédent)

(a) Montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $F : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est contractante sur $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|)$ si, et seulement si, il existe $k \in [0, 1[$ tel que $\sup_{\mathbf{R}^N} \|\mathbf{J}_F\| \leqslant k$.

(b) Montrer que si $F(0) = 0$ et $\|\mathbf{J}_F(0)\| < 1$, alors il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}^N$ tel que

$$\text{pour tout } X \in V, \quad \lim_{n \to +\infty} F^n(X) = 0,$$

où $F^n = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ fois}}$.

Exercice 8. (Une variante du théorème du point fixe de Banach) Soit (X, d) un espace métrique complet non vide. Soit $f : X \to X$ une application. On suppose que pour un entier $\ell \geqslant 1$, l'application f^ℓ est contractante (on rappelle que $f^\ell = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\ell \text{ fois}}$).

(a) Montrer que f admet un unique point fixe sur X.

(b) Montrer que pour tout $x_0 \in X$, la suite $(f^n(x_0))_{n \geqslant 0}$ converge vers le point fixe de f.

Exercice 9. (*Variante du théorème de Cauchy-Lipschitz) Le but de l'exercice est de donner une version raffinée du théorème de Cauchy-Lipschitz vu en cours, en rendant le temps d'existence $T > 0$ indépendant de la constante de Lipschitz C.

Soient δ un nombre réel positif et $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. On pose

$$A = \Big\{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N : |t - t_0| \leqslant \delta,\ |x - x_0| \leqslant \delta\Big\}.$$

On suppose que $f : A \to \mathbf{R}^N$ est continue et vérifie :

— Il existe $M > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in A$, $|f(t, x)| \leqslant M$;

— Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in A$, $(t, y) \in A$, $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant C|x - y|$.

Sous les hypothèses précédentes, on veut montrer qu'il existe une solution (J, x) de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ avec $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ et $T > 0$ dépendant de δ et M, mais indépendant de C.

(a) On considère l'application Φ définie sur E par

$$\Phi(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Montrer que pour tout entier $\ell \geqslant 1$, l'application Φ^ℓ est lipschitzienne avec constante de Lipschitz égale à $C^\ell T^\ell / \ell!$

(b) En utilisant le résultat de l'exercice 8, montrer que l'existence d'une solution sur un intervalle de temps dont la longueur ne dépend que de M.

Exercice 10. (Critère géométrique d'existence globale) On note $x \cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^N$. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant énoncé en cours. *Soit $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe deux fonctions continues p et $q : \mathbf{R} \to [0, +\infty[$ telles que pour tout $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$,*

$$x \cdot f(t, x) \leqslant p(t)(x \cdot x) + q(t).$$

Alors toute solution maximale de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ avec donnée initiale $(0, x_0)$ est globale en temps positif, *c'est-à-dire définie sur un intervalle contenant $[0, +\infty[$.*

(a) On pose $h(t) = x(t) \cdot x(t)$. Calculer $\dot{h}$.

(b) Conclure en utilisant l'hypothèse sur f.

Exercice 11. (Flot de gradient) Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$. On considère l'équation autonome

$$\dot{x}(t) = -\nabla F(x(t)), \quad t \geqslant 0, \quad x(0) = x_0,$$

où

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \right)$$

est le gradient de F.

(a) Soit (J, x) une solution de condition initiale $(0, x_0)$. Montrer que pour tout $t \in J$,

$$\frac{d}{dt}\left[F(x)\right] = -\|\nabla F(x)\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. En déduire que pour tout $t \in J$,

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant t^{\frac{1}{2}} (F(x_0) - F(x(t)))^{\frac{1}{2}}.$$

(b) On suppose que $\inf_{x \in \mathbf{R}^N} F(x) > -\infty$. Montrer alors que toute solution maximale est définie sur $J \supset [0, +\infty[$.

(c) Donner un exemple de fonction F telle que la solution explose en temps fini.

Exercice 12. (Sur les équations linéaires scalaires d'ordre 2) Soient p, q et r des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = r, \tag{NH}$$

et l'équation homogène associée

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0. \tag{H}$$

(a) Rappeler la structure de l'ensemble des solutions réelles de (H). Même question pour (NH).

(b) Écrire (NH) sous la forme d'un système d'ordre un en $X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$.

Soient h_1 et h_2 deux solutions de (H). On définit la matrice

$$W = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ \dot{h}_1 & \dot{h}_2 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\det W(t_0) = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\lambda h_1(t) + \mu h_2(t) = 0$. *Si* $\det W \neq 0$, *on dit que les solutions sont indépendantes.*

(d) On suppose à partir de maintenant que les deux solutions h_1 et h_2 satisfont pour tout temps $\det W \neq 0$. Soit x une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe des fonctions u_1 et u_2 de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$x = u_1 h_1 + u_2 h_2, \quad \dot{x} = u_1 \dot{h}_1 + u_2 \dot{h}_2.$$

Montrer que nécessairement $\dot{u}_1 h_1 + \dot{u}_2 h_2 = 0$.

(e) Calculer $\ddot{x} + p\dot{x} + qx$. En déduire que x est solution de (NH) si, et seulement si

$$\dot{u}_1 h_1 + \dot{u}_2 h_2 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{u}_1 \dot{h}_1 + \dot{u}_2 \dot{h}_2 = r.$$

(f) Déduire de la question précédente une expression de $\dot{u}_1$ et $\dot{u}_2$ en fonction de r et h_1, h_2.

(g) Conclusion : déduire de ce qui précéde une expression de la solution générale de (NH) en fonction de h_1, h_2 et r.

Exercice 13. (Suite de l'exercice précédent) Soit $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle du second ordre avec second membre

$$\ddot{x} + x = r.$$

(a) Donner deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée.

(b) En utilisant la formule obtenue dans l'exercice précédent, calculer la solution générale de l'équation avec second membre r.

(c) On suppose dans cette question que r est périodique de période 2π. Montrer que toute x est périodique si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} r(s) \sin s ds = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} r(s) \cos s ds = 0.$$

(d) Application : calculer les solutions des équations suivantes et discuter leur comportement

$$\ddot{x} + x = \cos(x) \quad \text{et} \quad \ddot{y} + y = \cos(2x).$$