# DM1 : Oscillations d'atomes piégés dans un potentiel parabolique

Dernière modification 29 mai 2023

## 1 Mesure par vol libre de la densité de probabilité de l'impulsion

**Q1** Rappeler sans démonstration l'expression des niveaux d'énergie du système.

Les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique à une dimension sont

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

**Q2** Compte tenu de la valeur numérique de $a_0$, pensez-vous qu'il soit possible de résoudre l'extension spatiale de l'etat fondamental à l'aide d'un microscope optique utilisant la lumière visible ?

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} && (1)\\ &= \sqrt{\frac{1,055 \cdot 10^{-34}\text{Js}}{(2,2 \cdot 10^{-25}\text{kg}) \cdot (5,718 \cdot 10^{5}\text{rad/s})}} && (2)\\ &= 2,9 \cdot 10^{-8}\text{m} && (3) \end{aligned}$$

Sachant que la résolution d'un microscope optique est $0,2\mu\text{m} \implies$ ce n'est pas possible de résoudre l'extension spatiale de l'état fondamental $a_0 \approx 0,03\mu\text{m}$.

**Q3** Au lieu de mesurer la densité de probabilité de la position, on choisit de mesurer la densité de probabilité de l'impulsion, $|\phi(p,t_0)|^2$, à un instant $t_0$ donné. Pour cela, on éteint brusquement le laser de piégeage à l'instant $t_0$, de sorte que les atomes se comportent comme un paquet d'ondes libre pour $t > t_0$. On rappelle que dans ce cas, pour $t - t_0$ suffisamment grand, on a

$$|\psi(x,t)|^2 \propto \left|\phi\left(\frac{mx}{t-t_0}, t_0\right)\right|^2$$

(méthode dite du *temps de vol* ou du *vol libre*). L'image obtenue reflète ainsi la densité de probabilité de l'impulsion $|\phi(p,t_0)|^2$ à l'instant $t_0$ où le laser de piégeage a été coupé. Commenter la figure 1(a), obtenue de cette manière lorque $|\psi(t_0)\rangle = |0\rangle$, et estimer un *ordre de grandeur* du temps de vol choisit, $T_v = t - t_0$.

On note que la distribution est une gaussienne comme attendu pour l'état fondamental $|0\rangle$ avec écart-type $\sigma \approx 100\mu$m.

Pour estimer le temps de vol, on utilise la relation

$$\Delta v_0 = \frac{\Delta x(T_v)}{T_v}$$

On note que

$$\begin{cases} \Delta v_0 & = \frac{\Delta p_0}{m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\hbar}{a_0} = 1,65 \cdot 10^{-2}\text{m/s} \\ \Delta x(T_v) & \approx 10^{-4}\text{m} \end{cases} \tag{4}$$

Donc, $T_v \approx 6$ms dans l'ordre de $10^{-3}$s.

**Q4** On considère une fonction d'onde $\psi(x)$ ainsi que sa transformée de Fourier $\phi(p)$. Ecrire l'expression de $\hat{a}^\dagger\psi(x)$ sous forme d'un opérateur différentiel, puis montrer que

$$\hat{a}^\dagger\phi(p) = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\frac{a_0}{\hbar}p - \frac{\hbar}{a_0}\frac{d}{dp}\right)\phi(p).$$

On veut calculer $\hat{a}^\dagger$.

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{a_0} + i\frac{a_0}{\hbar}\hat{p}\right)^\dagger && (5)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}^\dagger}{a_0} - i\frac{a_0}{\hbar}\hat{p}^\dagger\right) && (6)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{a_0} - i\frac{a_0}{\hbar}\hat{p}\right) && (7)\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{a_0} - i\frac{a_0}{\hbar}\hat{p}\right)\psi(x) && (8)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{a_0} - a_0\frac{d}{dx}\right)\psi(x). && (9)\end{aligned}$$

Pour calculer $\hat{a}^\dagger\phi(p)$, on applique la transformée de Fourier

$$\begin{cases} x\psi(x) & \mapsto i\hbar\frac{d}{dp}\phi(p) \\ \frac{d}{dx}\psi(x) & \mapsto \frac{ip}{\hbar}\phi(p) \end{cases} \tag{10}$$

Donc,

$$\hat{a}^\dagger\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{i\hbar}{a_0}\frac{d}{dp} - a_0\frac{ip}{\hbar}\right)\phi(p) \tag{11}$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\hbar}{a_0}\frac{d}{dp} + \frac{a_0 p}{\hbar}\right)\phi(p) \tag{12}$$

**Q5**En déduire que l'on peut écrire $\phi_1(p) = \xi p\phi_0(p)$ où $\xi$ est un nombre complexe que l'on déterminera.

On utilise la relation $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ avec $n = 0$.

$$\phi_1(p) = \hat{a}^\dagger\phi_0(p) \tag{13}$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\frac{a_0 p}{\hbar} - \frac{\hbar}{a_0}\frac{d}{dp}\right)\phi_0(p) \tag{14}$$

$$= \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a_0 p}{\hbar} - \frac{\hbar}{a_0}\left(-\frac{a_0^2 p}{\hbar^2}\right)\right)\left(\frac{a_0^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{a_0^2p^2}{2\hbar^2}\right) \tag{15}$$

$$= \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)\frac{2a_0 p}{\hbar}\left(\frac{a_0^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{a_0^2p^2}{2\hbar^2}\right) \tag{16}$$

$$= \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)\frac{2a_0 p}{\hbar}\phi_0(p) \tag{17}$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}ia_0}{\hbar}\right)p\phi_0(p) \tag{18}$$

Donc, $\phi_1(p) = \xi p\phi_0(p)$ avec $\xi = -\frac{\sqrt{2}ia_0}{\hbar}$

**Q6** Commenter la Figure 1(b).

La fonction d'onde $\psi_1(x)$ est proportionnel à la fonction d'Hermite $H_1(\frac{x}{a_0}) \implies$ la densité $|\psi_1(t)|^2$ est proportionnel à $H_1(\frac{x}{a_0})^2$. On observe dans la figure 1(b) la forme attendu avec 2 nuages distinctes.

## 2 Préparation du système dans le premier état excité

**Q1** Déterminer les états propres de $\hat{H}_1 = \frac{\hbar\Omega}{2}(|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|)$ ainsi que les valeurs propres correspondantes.

On veut résoudre $\langle \hat{H}_1 | \psi \rangle = \lambda \psi(x)$

$$\langle \hat{H}_1 | \psi \rangle = \frac{\hbar \Omega}{2} \left( \langle 0 | \psi \rangle |1\rangle + \langle 1 | \psi \rangle |0\rangle \right) \tag{19}$$
$$\tag{20}$$

Donc,

$$\frac{\hbar \Omega}{2} \left( \langle 0 | \psi \rangle |1\rangle + \langle 1 | \psi \rangle |0\rangle \right) = \lambda \psi(x)$$

On note que $\psi(x)$ doit être une combinaison lineaire de $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Donc,

$$\psi(x) = \lambda_0 \cdot \psi_0(x) + \lambda_1 \cdot \psi_1(x)$$

Alors,

$$\begin{cases} \lambda \lambda_0 \psi_0(x) & = \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 1 | \psi \rangle |0\rangle \\ \lambda \lambda_1 \psi_1(x) & = \frac{\hbar \Omega}{2} \langle 0 | \psi \rangle |1\rangle \end{cases} \tag{21}$$

On note que $\langle 0 | \psi \rangle = \lambda_0$ et $\langle 1 | \psi \rangle = \lambda_1$ parce que $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont orthogonaux. Donc,

$$\begin{cases} \lambda \lambda_0 & = \frac{\hbar \Omega}{2} \lambda_1 \\ \lambda \lambda_1 & = \frac{\hbar \Omega}{2} \lambda_0 \end{cases} \tag{22}$$

En divisant les deux équation on a $\lambda_0^2 = \lambda_1^2$.

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda_1 \iff \lambda = \frac{\hbar \Omega}{2} \\ \lambda_0 = -\lambda_1 \iff \lambda = \frac{\hbar \Omega}{2} \end{cases} \tag{23}$$

Donc, les états propres sont

$$\psi(x) = c(\psi_0(x) + \psi_1(x)) \text{où } c \in \mathbb{C} \text{ avec valeur propre } \frac{\hbar \Omega}{2} \tag{24}$$
$$\psi(x) = c(\psi_0(x) - \psi_1(x)) \text{où } c \in \mathbb{C} \text{ avec valeur propre } -\frac{\hbar \Omega}{2} \tag{25}$$

**Q2** Décomposer l'état $|\psi(0)\rangle$ dans la base propre obtenue à la question précédente, puis en déduire pour $t > 0$ l'expression de $|\psi(t)\rangle$ dans cette même base.

On utilise la base orthonormale $\left\{ \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right\}$.

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

On utilise $\psi(x,t) = \psi(x, t=0) \cdot e^{-\frac{i\lambda}{\hbar} t}$ où $\lambda$ est le valeur propre correspondant.

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\frac{\Omega}{2}t}}{\sqrt{2}} \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \frac{e^{+i\frac{\Omega}{2}t}}{\sqrt{2}} \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

**Q3** Ecrire $|\psi(t)\rangle$ dans la base propre de $\hat{H}_0$.

Dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$|\psi(t)\rangle = \left(\frac{e^{-i\frac{\Omega}{2}t} + e^{+i\frac{\Omega}{2}t}}{2}\right)|0\rangle + \left(\frac{e^{-i\frac{\Omega}{2}t} - e^{+i\frac{\Omega}{2}t}}{2}\right)|1\rangle \tag{26}$$

$$= \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)|0\rangle - i\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)|1\rangle \tag{27}$$

**Q4** Calculer la probabilité $\mathcal{P}(t)$ qu'une mesure de $H_0$ effectué à l'instant $t$ donne le résultat $3\hbar\omega/2$, puis montrer que cette fonction est une fonction périodique dont on déterminera la période $T$.

La mesure donne le résultat $\frac{3\hbar\omega}{2} \iff$ le système est dans l'état $|1\rangle$.

$$\mathcal{P}(t) = \left|-i\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right|^2 \tag{28}$$

$$= \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)^2 \tag{29}$$

$$= \frac{1 - cos\,(\Omega t)}{2} \tag{30}$$

Donc, $\mathcal{P}(t)$ est périodique avec période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

**Q5** A quel instant faut-il interrompre l'application du second laser pour placer le système dans l'état $|1\rangle$ (à une phase près) ?

$$\mathcal{P}(t) = 1 \iff \cos(\Omega t) = -1 \iff t = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{T}{2}$$

# 3 Préparation d'un état non stationnaire

**Q1** Ecrire dans la base propre de $\hat{H}_0$ l'état du système à l'instant $t = T/4$, sachant que $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$.

On note $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\Omega} \implies \frac{\Omega t}{2} = \frac{\pi}{4}$

$$|\psi(\frac{T}{4})\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle \tag{31}$$

$$= \frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - i\frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{32}$$

**Q2** En déduire l'expression de $|\psi(t = T/4 + \tau)\rangle$ pour $\tau > 0$.

On note que $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont des états propres du hamiltonien $\hat{H}_0$ avec les valeurs propres $\frac{\hbar\omega}{2}$ et $\frac{3\hbar\omega}{2}$. Donc,

$$|\psi(t = T/4 + \tau)\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}\tau}\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - ie^{-i\frac{3\omega}{2}\tau}\frac{|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

**Q3** Exprimer la densité de probabilité $|\phi(p,t)|^2$ en fonction de $|\phi_0(p)|^2$.

On applique la transformée de Fourier

$$\phi(t = \frac{T}{4} + \tau) = e^{-i\frac{\omega}{2}\tau}\frac{\phi_0(p)}{\sqrt{2}} - ie^{-i\frac{3\omega}{2}\tau}\frac{\phi_1(p)}{\sqrt{2}}$$

Donc,

$$|\phi(p,t)|^2 = \frac{1}{2}\left|\phi_0(p) - ie^{-i\omega\tau}\phi_1(p)\right|^2 \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2}\left|1 - i\xi pe^{-i\omega\tau}\right|^2 |\phi_0(p)|^2 \tag{34}$$

Avec $\xi = -\frac{\sqrt{2}ia_0}{\hbar}$, on note que

$$\left|1 - i\xi pe^{-i\omega\tau}\right|^2 = \left|1 - \frac{\sqrt{2}a_0}{\hbar}pe^{-i\omega\tau}\right|^2 \tag{35}$$

$$= \left|1 - \frac{\sqrt{2}a_0}{\hbar}p\cos(\omega\tau) + i\frac{\sqrt{2}a_0}{\hbar}p\sin(\omega\tau)\right|^2 \tag{36}$$

$$= 1 - \frac{2\sqrt{2}a_0}{\hbar}p\cos(\omega\tau) + \frac{2a_0^2}{\hbar^2}p^2\cos^2(\omega\tau) + \frac{2a_0^2}{\hbar^2}p^2\sin^2(\omega\tau) \tag{37}$$

$$= 1 + \frac{2a_0^2}{\hbar^2}p^2 - \frac{2\sqrt{2}a_0}{\hbar}p\cos(\omega\tau) \tag{38}$$

Donc,

$$|\phi(p,t)|^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{a_0^2}{\hbar^2}p^2 - \frac{\sqrt{2}a_0}{\hbar}p\cos(\omega\tau)\right)|\phi_0(p)|^2 \tag{39}$$

**Q4** La figure 2 répresente la densité de probabilité obtenue par la méthode du vol libre pour différentes valeurs du temps d'évolution $\tau = q\tau_0$, où $q$ est un entier. Justifier qualitativement la forme de ces courbes puis déterminer la valeur de $\tau_0$.

On sait que $phi(p,t)|^2 = \frac{1}{2}\left|\phi_0(p) - ie^{-i\omega\tau}\phi_1(p)\right|^2$.

Donc, conforme $\tau$ varie, les coefficients de la superposition entre $|0\rangle$ et $|1\rangle$ changent périodiquement. C'est pourquoi on voit la courbe c'est se déplacer à droite et après à gauche périodiquement.

On note que le période est $7\tau_0$. Donc,

$$\frac{2\pi}{\omega} = 7\tau_0 \iff \tau_0 = 1,57 \cdot 10^{-6} s$$