DM2

Dernière modification 15 juin 2023

Exercice 1

Considérons l'équation différentielle $\dot{X} = f(X)$ où $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $Z_0 \in \mathbb{R}^N$, on note $T_{max}(Z_0) > 0$ le temps d'existence maximal de la solution $Z(t)$ de l'équation différentielle $\dot{Z} = f(Z)$ de donnée initiale $Z(0) = Z_0$.
On fixe $X_0 \in \mathbb{R}^N$. Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $0 < T < T_{max}(X_0)$.

(a) Montrer l'existence de $R > 1$ tel que $X(t) \in B_f(X_0, R)$ pour tout $t \leq T$.

On raisonne par l'absurde.
Supposons que $\forall R > 1, \exists t \in [0, T]$ tel que $X(t) \notin B_f(X_0, R) \implies \exists T^* \in [0, T]$ tel que $X(t)$ explose en $T^* \leq T < T_{max}(X_0)$ ce qui est absurde.

(b) Montrer l'existence de $k_R > 0$ telle que f soit k_R-lipschitzienne sur $B_f(X_0, 2R)$.

On note que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall X, Y \in B_f(X_0, 2R) \subset \mathbb{R}^N$ le segment joignant X à Y est contenu dans $B_f(X_0, 2R)$.
Donc, par l'inégalité des accroissements finis, $\forall X, Y \in B_f(X_0, 2R)$,

$$||f(X) - f(Y)|| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} ||J_f(X + \theta(Y - X))|| \cdot ||Y - X||$$

Donc, il suffit de poser $k_R = \sup_{0 \leq \theta \leq 1} ||J_f(X + \theta(Y - X))||$

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < R$ et soit $Y_0 \in B_f(X_0, \epsilon)$.
On note $Y(t)$ la solution maximale de l'équation $\dot{X} = f(X)$ telle que $Y(0) = Y_0$. Son temps maximal d'existence est $T_{max}(Y_0)$.

(c) Montrer qu'il existe $T' \in]0, T]$ tel que $Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$ pour tout $t \leq T'$.

Soit $g : [0, \min(T_{max}(Y_0), T)] \to \mathbb{R}$ tel que $g(t) = ||Y(t) - X_0|| - 2R$.
$g(t)$ est continue car $Y(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
On note que $g(0) = ||Y(0) - X_0|| - 2R \leq \epsilon - 2R < -R < 0$.

On pose

$$T' = \begin{cases} \inf\{t : t \in [0, \min(T_{max}(Y_0), T)] \text{ et } g(t) = 0\} & \text{si l'infimum existe} \\ T \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

On note que $0 < T' \leq T$ et $\forall t \in [0, T'] \quad g(t) \leq 0 \iff Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$.

(d) Montrer que pour un tel T', on a $||X(t) - Y(t)|| \leq \epsilon e^{k_R t}$ pour tout $t \in [0, T']$.

Soit $h : [0, T'] \to \mathbb{R}$ tel que $h(t) = Y(t) - X(t)$. On veut étudier $||h(t)||$.

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \dot{Y}(t) - \dot{X}(t) & (2) \\ &= f(Y(t)) - f(X(t)) & (3) \end{aligned}$$

Donc, $||\dot{h}(t)|| = ||f(Y(t)) - f(X(t))|| \leq k_R ||Y(t) - X(t)|| = k_R ||h(t)||$
On considère ϕ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\phi(t)} &= k_R \phi(t) \\ \phi(0) &= \epsilon \end{cases} \tag{4}$$

On note que $\phi(t) = \epsilon e^{k_R t} \quad \forall t \in [0, T']$.
On note que $||h(0)|| = ||Y_0 - X_0|| \leq \epsilon \implies ||h(0)|| \leq \phi(0)$.
Par le lemme de Gronwall, $||h(t)|| \leq \phi(t)$.
Donc, $||Y(t) - X(t)|| \leq \epsilon e^{k_R t} \quad \forall t \in [0, T']$.

(e) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $T_{max}(Y_0) > T$.

Soit $\psi : t \in [0, T] \mapsto ||Y(t)||$. On veut montrer que $\exists \epsilon > 0$ tel que $\psi(t)$ est bornée $\implies$ la solution locale existe $\forall t \leq T$.
On sait que $\forall t \in [0, T'] \quad \psi(t) \leq 2R$.
Prenons $\epsilon = Re^{-k_R t}$. On veut montrer que $T' = T$.
Soit $g : t \in [0, T] \mapsto ||Y(t) - X_0|| - 2R$. On a défini

$$T' = \begin{cases} \inf\{t : t \in [0, \min(T_{max}(Y_0, T))] \text{ et } g(t) = 0\} & \text{si l'infimum existe} \\ T \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{5}$$

On note que

$$\begin{aligned} ||Y(t) - X_0|| &= ||(Y(t) - X(t)) + (X(t) - X_0) + X_0|| & (6) \\ &\leq ||Y(t) - X(t)|| + ||X(t) - X_0|| + ||X_0|| & (7) \\ &\leq Re^{-k_R T} \cdot e^{k_R t} + R + ||X_0|| & (8) \\ &\leq R(1 + e^{k_R(t-T)}) & (9) \end{aligned}$$

Donc $\forall t \leq T, g(t) \leq R(e^{k_R(t-T)} - 1)$.

Donc $g(t) < 0 \quad \forall t < T$ et $g(T) \leq 0$. Alors, $T' = T$.
On conclue $\forall t \in [0, T] \quad \psi(t) = ||Y(t)|| \leq 2R$. Donc, $T_{max}(Y_0) > T$.

Définition. Soit $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit $\liminf_{X \to X_0} \phi$ par la formule suivante :

$$\liminf_{X \to X_0} \phi = \sup_{\epsilon \to 0} \left(\inf_{||X - X_0|| < \epsilon} \phi(X) \right)$$

(f) Montrer que $\liminf_{X \to X_0} T_{max}(X) \geq T_{max}(X_0)$.

On a montré que $\forall Y_0$ tel que $||Y_0 - X_0|| < \epsilon$ on a $\forall T < T_{max}(X_0) \quad T_{max}(Y_0) > T$. Donc, $T_{max}(Y_0) \geq T_{max}(X_0)$.
Donc, $\inf_{||X - X_0|| < \epsilon} T_{max}(X) \geq T_{max}(X_0)$.
Donc $\liminf_{X \to X_0} T_{max}(X) \geq T_{max}(X_0)$.

(g) On considère $f(x, y) = (x^2 y, 0)$. Pour une condition initiale $X_0 = (x_0, y_0)$, donner $T_{max}(X_0)$.
En particulier déterminer les conditions initiales X_0 pour lesquelles la solution $X(t)$, telle que $X(0) = X_0$, est globale. Tracer le portrait de phase de cette équation.

On a le système autonome de dimension 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = x^2 y \\ \dot{y}(t) & = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Donc, $y(t) = y_0 \implies \dot{x}(t) = x^2 y_0$.
On note que c'est une équation à variables séparables.

$$\frac{dx}{x^2} = y_0 dt \tag{11}$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t y_0 dt \tag{12}$$

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} = y_0 t \tag{13}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 y_0 t} \tag{14}$$

On a donc la solution locale

$$X(t) = \left(\frac{x_0}{1 - x_0 y_0 t}, y_0 \right)$$

Le temps maximale de existence de $X(t)$ est donnée par

$$1 - x_0 y_0 T_{max} = 0 \iff T_{max} = \frac{1}{x_0 y_0}$$

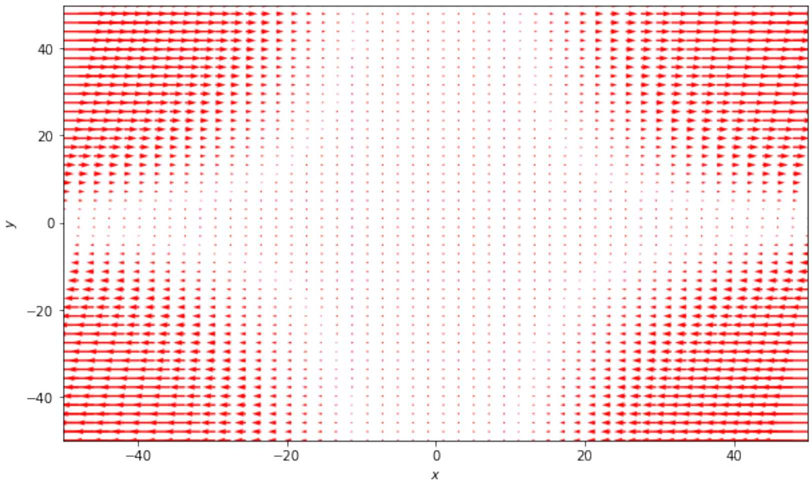
On note que les conditions initiales X_0 pour lesquelles la solution $X(t)$ est globale sont

$$\begin{cases} X_0 &= (x_0, 0) \implies X(t) = (x_0, 0) \\ X_0 &= (0, y_0) \implies X(t) = (0, y_0) \end{cases} \tag{15}$$

Enfin, on trace le portrait de phase. On note que les trajectoires des solutions dans le plan (x, y) sont toujours des droites avec y constante.

On note que si $y_0 > 0$ on a $\dot{x}(t) > 0$, donc la solution se déplace vers la droite.

Par contre si $y_0 < 0$ on a $\dot{x}(t) < 0$, donc la solution se déplace vers la gauche.



(h) On considère maitenant $f(x, y) = (x^2 - yx^4, 0)$. Soit $a > 0$, montrer que l'on a $T_{max}(a, 0) < +\infty$ alors que pour tout ϵ tel que $\epsilon a^2 < 1$, on a $T_{max}(a, \epsilon) = +\infty$.
Ceci peut s'écrire

$$\lim_{\epsilon \to 0} T_{max}(a, \epsilon) \neq T_{max}(a, 0)$$

Si $y_0 = 0$, on note que

$$\dot{x}(t) = x^2 \tag{16}$$

$$\iff \frac{dx}{x^2} = dt \quad \text{similaire à l'équation de l'exercice 1g} \tag{17}$$

$$\iff x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \tag{18}$$

Donc, $T_{max}(a, 0) = \frac{1}{a} < +\infty$.
Alors, soit y_0 tel que $y_0 x_0^2 < 1$.
On note que

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= x^2 - y_0 x^4 && (19)\\
\iff \frac{dx}{x^2(1-y_0x^2)} &= dt && (20)\\
\iff dx\left(\frac{1}{x^2} + \frac{y_0}{1-y_0x^2}\right) &= dt && (21)\\
\iff \int_{x_0}^{x(t)} dx\left(\frac{1}{x^2} + \frac{y_0}{1-y_0x^2}\right) &= \int_0^t dt && (22)
\end{aligned}$$

Avec la substitution $u = x_0\sqrt{y_0}$

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x(t)} \frac{y_0}{1-y_0x^2}dx &= \int_{x_0\sqrt{y_0}}^{x(t)\sqrt{y_0}} \frac{y_0}{1-u^2}\frac{du}{\sqrt{y_0}} && (23)\\
&= \frac{\sqrt{y_0}}{2}\left(\int_{x_0\sqrt{y_0}}^{x(t)\sqrt{y_0}} \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) && (24)\\
&= \frac{\sqrt{y_0}}{2}(\log(1+x(t)\sqrt{y_0}) + \log(1-x(t)\sqrt{y_0}) - \log(1+x_0\sqrt{y_0}) - \log(1-x_0\sqrt{y_0})) && (25)
\end{aligned}$$

On note que $\log(1-x_0\sqrt{y_0})$ est bien définie car $x_0\sqrt{y_0} < 1$.
Donc,

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} + \frac{\sqrt{y_0}}{2}\log\left(\frac{1-x(t)^2y_0}{1-x_0^2y_0}\right) = t$$

On note que $|x(t)| < \frac{1}{y_0}$. Donc, la solution est globale.

$$T_{max}(a,\epsilon) = +\infty$$

Exercice 2

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, la suite $\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$ (avec $A^0 = I_n$ la matrice identité) est une suite de Cauchy et converge vers une matrice notée e^A. Si de plus A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ commutent, alors on a $e^Ae^B = e^{A+B} = e^Be^A$.

(a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(t) = e^{tA}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

On veut montrer que $||e^A|| \leq e^{||A||}$.

$$
\begin{aligned}
||e^A|| &= ||\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}|| && (26)\\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{||A^k||}{k!} && (27)\\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{||A||^k}{k} && (28)\\
&= e^{||A||} && (29)
\end{aligned}
$$

Alors, on veut montrer que f est continue. $\forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0$, on pose

$$
\delta = \frac{\ln(\epsilon)}{||A||}
$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t - t_0|< \delta$, on a

$$
\begin{aligned}
||f(t) - f(t_0)|| &= ||e^{(t-t_0)A}|| && (30)\\
&\leq ||e^{\delta A}|| && (31)\\
&\leq e^{||\delta A||} && (32)\\
&= e^{||A||\cdot \frac{\ln(\epsilon)}{||A||}} && (33)\\
&= \epsilon && (34)
\end{aligned}
$$

On veut calculer $\forall t \in \mathbb{R}$ la limite

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} && (35)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{Ah}}{h} && (36)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(Ah)^k && (37)\\
&= \lim_{h\to 0} A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(Ah)^k && (38)\\
&= Ae^{At} && (39)
\end{aligned}
$$

Donc $f'(t)$ existe et on note que $f'(t) = Ae^{tA}$ est continue car $f(t)$ est continue.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(s+t) = f(s)f(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et telle que $f(0)$ est inversible. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $f(t) = e^{tA}$ pout tout $t \in \mathbb{R}$.

On note que $f'(t) = f'(0)f(t)$.
Soit $f'(0) = A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = e^{tA} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ est solution globale.