Petite Classe 1

Probabilités - Interférences - Dualité

1 Probabilités

1.1 Quelques rappels *(Facultatif)*

Q1 Donner la définition de la valeur moyenne de x, notée $\langle x \rangle$, et de son l'écart-type (ou écart quadratique moyen), noté Δx pour le cas d'une variables aléatoires discrète.

Q2 Donner la définition de la valeur moyenne $\langle x \rangle$ et de l'écart-type Δx pour le cas d'une variable aléatoires continue.

Q3 Quelle est la dimension physique (ou unité) de la densité de probabilité par rapport à celle de la variable aléatoire continue ?

Q4 La fonction d'onde $\Psi(x)$ en mécanique quantique étant une *amplitude de probabilité*, écrire la valeur moyenne d'une fonction $f(x)$ dépendant de la variable x.

1.2 Processus de Markov : la désintégration d'une particule radioactive

Beaucoup de phénomènes naturels peuvent être modélisés par des processus sans mémoire. Dans un tel processus, la prédiction du futur à partir du présent n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information concernant le passè, autrement dit la probabilité d'occurrence est totalement indépendante de l'histoire précédente du système. Les processus de Markov portent le nom de leur inventeur, Andreï Markov (1856-1922) un mathématicien russe. On va étudier la désintégration radioactive d'une particule, qui appartient à cette classe de processus. Le processus est défini de la manière suivante : si la particule ne s'est pas désintégrée au temps t, sa probabilité de désintégration pendant l'intervalle de temps infinitésimal $[t, t + \delta t]$ s'écrit $\delta t/\tau$, où $\tau > 0$ est une constante. Notons $P_S(t)$ la probabilité de survie (non désintégration) à l'instant t.

Q1 Déterminer $P_S(t + \delta t)$ en fonction de $P_S(t)$, de τ et de δt.

Q2 Déduire l'expression de $P_S(t)$.

Q3 Déterminer la densité de probabilité du temps de désintégration $p(t)$.

Q4 Vérifier que $p(t)$ est bien une densité de probabilité (la densité de probabilité $p(t)$ est normalisée).

Q5 Calculer alors la durée de vie moyenne de la particule et sa variance.

1.3 Distribution gaussienne

On considère la densité de probabilité suivante, définie par une fonction gaussienne :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{1.1}$$

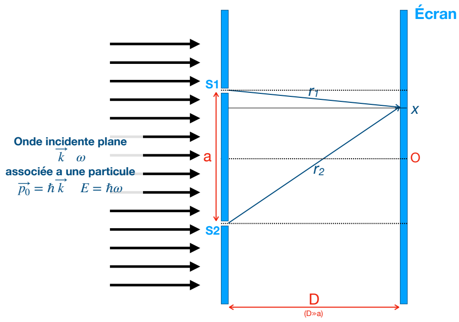
où x et x_0 sont des nombres réels, et σ est un nombre réel positif.

Q1 Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.
[Formule utile : $\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, e^{-z^2/2} = \sqrt{2\pi}$]

Q2 Calculer la valeur moyenne $\langle x \rangle$.

Q3 Calculer l'écart quadratique moyen Δx.

2 Interférences et Dualité : l'expérience de les fentes de Young



On reprend l'expérience d'interférence décrite dans le cours : l'expérience de les fentes de Young. Pour simplifier, supposons une onde incidente plane arrivant perpendiculaire aux fentes, monochromatique, de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω, qui est l'onde de de Broglie associée à une particule d'impulsion $\vec{p}_0 = \hbar\vec{k}$ et d'énergie $E = \hbar\omega$. La distance entre les deux fentes S1 et S2 est noté a et est supposé beaucoup plus petite que la distance D séparant les fentes d'Young de l'écran. On supposera les fentes infiniment minces. On ne s'intéresse qu'aux ondes planes se propageant vers la droite (o néglige toute reflections sur l'écran). On prendra comme origine des temps l'onde au niveau des fentes et comme origine spatiale le point O. On supposera que les ondes de matiére diffractées par chaque fente sont de la forme $\psi(M) \propto \exp(ip_0 r/h)$ sur l'écran.

Q1 Notons r_1 et r_2 les distances entre l'écran et les fentes S1 et S2. Montrer que $r_{1,2} = \sqrt{(x \pm a/2)^2 + D^2}$ et donner une expression simplifiée de $r_1 - r_2$ en fonction de x en utilisant l'hypothése $D \gg a$.

Q2 Déterminer la fonction d'onde ψ_{total} en un point M de l'écran et en déduire la densité de probabilité de présence d'une particule. Quelle est la taille de l'interfrange de la figure d'interférence observée ?

Q3 On veut savoir par quelle fente passent les particules. L'écran est donc monté sur roulettes de sorte que l'impact de chaque particule peut faire bouger l'écran selon l'axe vertical. En mesurant son déplacement, on peut en déduire la projection de l'impulsion des particules sur cet axe. Déterminer, en fonction de x, cette projection pour des particules passant par les fentes S1 et S2 que l'on notera p_{1x} et p_{2x}.

Q4 Afin de différencier les particules passant par les fentes S1 et S2, notre résolution doit être suffisamment fine. L'incertitude sur la quantité de mouvement Δp_x de l'écran doit donc êre trés inférieure à $|p_{1x} - p_{2x}|$. En utilisant l'inégalité d'Heisenberg, en déduire une limite inférieure sur l'incertitude en position Δx de ce méme écran.

Q5 La mesure de la position de l'impact de la particule sur l'écran est donc entachée d'une erreur Δx. D'apreś vous, est-il toujours possible de voir les franges dans ces conditions et pourquoi ?

3 Longueurs d'onde de de Broglie

Pour chacune des situations suivantes, calculer la longueur d'onde de de Broglie sachant que la constante de Planck (h) vaut environ 6.62×10^{-34} m^2 kg / s.

Q1 la vôtre en train de marcher à 1 m/s

Q2 celle des électrons de l'expérience d'Hitachi ayant une énergie de 50keV, une masse $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg et une charge 1.6×10^{-19} C

Q3 un atome d'hélium ($m = 6.7 \times 10^{-27}$ kg) se propageant à 940 m/s

Q4 un atome de sodium ($m = 4 \times 10^{-26}$ kg) refroidi par laser et refroidissement évaporatif jusqu'à une vitesses de 1 mm/s.