MAT361 – Introduction à l'analyse réelle

Devoir personnel obligatoire à rendre en PC le vendredi 19 mai

Problème 1 (Théorème d'Ascoli)**.** Ce problème propose une preuve du théorème d'Ascoli.

Dans tout le problème (et en particulier aux questions (c), (k) et (l)), la norme utilisé dans $\mathbf{R}^N$ sera la norme sup : $\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^N(|x_i|)$.

(a) Montrer que si (Y,d) est un espace métrique compact et $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, alors, $\mathcal{C}(Y;E)$ l'espace des fonctions continues de Y dans E, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in Y}\|f(x)\|$, est un espace de Banach.

Définition 1. *Un espace métrique (X,d) est dit* ***précompact*** *si pour tout $\epsilon > 0$, il existe des éléments $x_1, \cdots, x_N$ de X tels que $X \subset \cup_{i=1}^N B(x_i, \epsilon)$.*

(b) Montrer que $[0,1]$ est précompact dans $\mathbf{R}$.

(c) Montrer que tout sous-ensemble borné de $\mathbf{R}^N$ est précompact.

(d) Montrer qu'un espace compact est précompact.

(e) Soit (X,d) un espace métrique et $Z \subset X$ précompact. Montrer que $\overline{Z}$ l'adhérence de Z est précompacte.

(f) Montrer que (X,d) est compact si et seulement s'il est complet et précompact.
On rappelle la définition d'équicontinuité et on introduit la notion d'uniforme équicontinuité.

Définition 2. *Soit (Y,d) un espace métrique. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(Y;\mathbf{R})$ une famille d'applications continues de Y vers $\mathbf{R}$.*

— *On dit que la famille $\mathcal{F}$ est* **équicontinue** *au point $y \in Y$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall y' \in Y, \quad d(y,y') < \delta \implies |f(y) - f(y')| < \varepsilon.$$

— *On dit que la famille $\mathcal{F}$ est* **équicontinue** *sur Y si elle est équicontinue en tout point de $y \in Y$.*

— *On dit que la famille $\mathcal{F}$ est* **uniformément équicontinue** *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall y, y' \in Y, \quad d(y,y') < \delta \implies |f(y) - f(y')| < \varepsilon.$$

(g) Montrer que si (Y,d) est compact et $\mathcal{F}$ est une famille équicontinue sur Y alors elle est uniformément équicontinue.
On rappelle l'énoncé du théorème d'Ascoli.

Théorème 1 (Théorème d'Ascoli)**.** *Soit (Y,d) un espace métrique* compact*. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(Y;\mathbf{R})$ une famille de fonctions qui vérifie les hypothèses suivantes.*

— *La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue sur Y.*

— *Pour tout $y \in Y$, l'ensemble $\mathcal{F}(y) := \{f(y) : f \in \mathcal{F}\}$ est une partie bornée de $\mathbf{R}$.*

Alors, de toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}(Y;\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

On se place maintenant sous les hypothèses du théorème d'Ascoli.

(h) Montrer que pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est compact.

(i) En déduire qu'il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est précompact (on rappelle que $(\mathcal{C}(Y;\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach donc complet). On fixe maintenant $\epsilon > 0$.

(j) Soit δ (donné par l'uniforme équicontinuité de $\mathcal{F}$) tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$ on ait l'implication $d(y, y') < \delta \Rightarrow |f(y) - f(y')| < \epsilon/3$. Montrer qu'il existe $y_1, \cdots, y_N \in Y$ tels que $Y = \cup_{i=1}^N B_Y(y_i, \delta)$.

(k) Montrer que $\mathcal{F}(y_1, \cdots, y_N) := \{(f(y_1), \ldots, f(y_N)) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbf{R}^N$ est précompact. En déduire qu'il existe M tel que

$$\mathcal{F}(y_1, \cdots, y_N) \subset \bigcup_{j=1}^{M} B_{\mathbf{R}^N}((f_j(y_i)_{i \in [1,N]}, \epsilon/3).$$

(l) Montrer que $\mathcal{F} \subset \cup_{j=1}^M B(f_j, \epsilon)$. En déduire que $\mathcal{F}$ est précompact.