

Devoir à la maison

Oscillations d'atomes piégés dans un potentiel parabolique

à rendre pour le 31 mai 2023

On considère une expérience effectuée avec des atomes froids, en l'occurrence des atomes de césium, placés dans un piège parabolique réalisé à l'aide d'un faisceau laser. Les atomes seront considérés comme des particules ponctuelles de masse $m = 2.2 \times 10^{-25}$ kg et leur mouvement sera supposé unidimensionnel selon l'axe x . L'opérateur impulsion est simplement noté \hat{p} , de sorte que l'hamiltonien du système s'écrit

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (1)$$

où $\omega/(2\pi) = 91$ kHz. On rappelle que l'opérateur \hat{a} est défini par

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{a_0} + i \frac{a_0}{\hbar} \hat{p} \right), \quad (2)$$

avec $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Les états propres de l'hamiltonien seront notés $|n\rangle$, avec $n \in \mathbb{N}$ et on rappelle les relations $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. La fonction d'onde associée à l'état $|n\rangle$ est notée $\psi_n(x)$ et sa transformée de Fourier est notée $\varphi_n(p)$, avec en particulier

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(\pi a_0^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a_0^2}\right), \quad (3)$$

et

$$\varphi_0(p) = \left(\frac{a_0^2}{\pi\hbar^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{a_0^2 p^2}{2\hbar^2}\right). \quad (4)$$

1. Mesure par vol libre de la densité de probabilité de l'impulsion

1.1 Rappeler sans démonstration l'expression des niveaux d'énergie du système.

1.2 Compte tenu de la valeur numérique de a_0 , pensez-vous qu'il soit possible de résoudre l'extension spatiale de l'état fondamental à l'aide d'un microscope optique utilisant de la lumière visible ?

1.3 Au lieu de mesurer la densité de probabilité de la position, on choisit de mesurer la densité de probabilité de l'impulsion, $|\varphi(p, t_0)|^2$, à un instant t_0 donné. Pour cela, on éteint brusquement le laser de piégeage à l'instant t_0 , de sorte que les atomes se comportent comme un paquet d'ondes libre pour $t > t_0$. On rappelle que dans ce cas, pour $t - t_0$ suffisamment grand, on a $|\psi(x, t)|^2 \propto |\varphi(p = mx/(t - t_0), t_0)|^2$ (méthode dite du *temps de vol* ou du *vol libre*). L'image obtenue reflète ainsi la densité de probabilité de l'impulsion $|\varphi(p, t_0)|^2$ à l'instant t_0 où le laser de piégeage a été coupé. Commenter la Figure 1(a), obtenue de cette manière lorsque $|\psi(t_0)\rangle = |0\rangle$, et estimer un ordre de grandeur du temps de vol choisi, $T_v = t - t_0$.

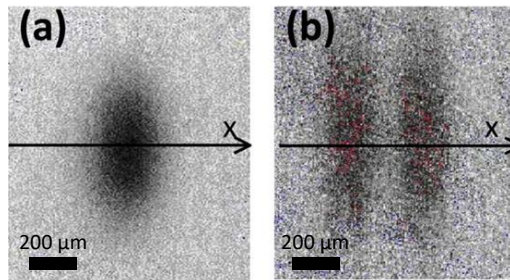


FIGURE 1 – Représentation du nuage atomique mesuré en faisant l'image de la fluorescence émise à l'aide d'un microscope, après un vol libre effectué durant le temps de vol T_v . Le système est placé initialement dans l'état $|0\rangle$ (a) ou $|1\rangle$ (b). La barre horizontale représente une longueur de $200 \mu\text{m}$. On ne tiendra pas compte de l'extension du nuage selon l'axe y perpendiculaire à l'axe x .

1.4 On considère une fonction d'onde $\psi(x)$ ainsi que sa transformée de Fourier $\varphi(p)$. Ecrire l'expression de $\hat{a}^\dagger \psi(x)$ sous forme d'un opérateur différentiel, puis montrer que

$$\hat{a}^\dagger \varphi(p) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_0}{\hbar} p - \frac{\hbar}{a_0} \frac{d}{dp} \right) \varphi(p). \quad (5)$$

1.5 En déduire que l'on peut écrire $\varphi_1(p) = \xi p \varphi_0(p)$, où ξ est un nombre complexe que l'on déterminera.

1.6 Commenter la Figure 1(b).

2. Préparation du système dans le premier état excité

On suppose qu'à l'instant initial le système est dans l'état fondamental $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Afin de manipuler l'état du système, on applique alors un second faisceau laser de fréquence appropriée de sorte que, pour $t > 0$, l'hamiltonien du système \hat{H}_0 est remplacé par le nouvel hamiltonien

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\Omega}{2} (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|), \quad (6)$$

où Ω est une grandeur réelle positive.

2.1 Déterminer les états propres de \hat{H}_1 ainsi que les valeurs propres correspondantes.

2.2 Décomposer l'état $|\psi(0)\rangle$ dans la base propre obtenue à la question précédente, puis en déduire pour $t > 0$ l'expression de $|\psi(t)\rangle$ dans cette même base.

2.3 Ecrire $|\psi(t)\rangle$ dans la base propre de \hat{H}_0 .

2.4 Calculer la probabilité $\mathcal{P}(t)$ qu'une mesure de H_0 effectuée à l'instant t donne le résultat $3\hbar\omega/2$, puis montrer que cette fonction est une fonction périodique dont on déterminera la période T .

2.5 A quel instant faut-il interrompre l'application du second laser pour placer le système dans l'état $|1\rangle$ (à une phase près) ?

3. Préparation d'un état non stationnaire

Dans cette partie, on choisit d'interrompre l'application du second faisceau laser discuté à la partie précédente à l'instant $T/4$. L'hamiltonien du système est ainsi H_1 pour $0 \leq t \leq T/4$ puis à nouveau \hat{H}_0 pour $t > T/4$.

3.1 Ecrire dans la base propre de \hat{H}_0 l'état du système à l'instant $t = T/4$, $|\psi(T/4)\rangle$, sachant que $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$.

3.2 En déduire l'expression de $|\psi(t = T/4 + \tau)\rangle$ pour $\tau > 0$.

3.3 Exprimer la densité de probabilité $|\varphi(p, t)|^2$ en fonction de $|\varphi_0(p)|^2$.

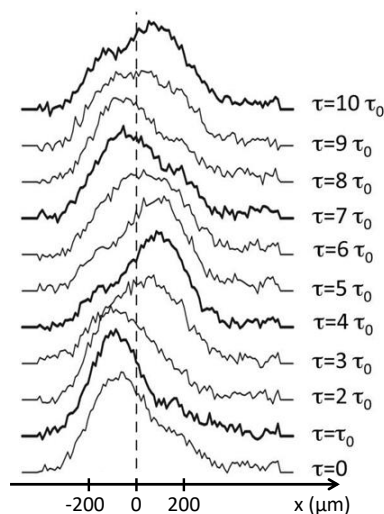


FIGURE 2 – Mesure de la distribution de l'impulsion effectuée à l'instant $t = T/4 + \tau$, pour différentes valeurs du temps d'évolution τ .

3.4 La Figure 2 représente la densité de probabilité obtenue par la méthode du vol libre pour différentes valeurs du temps d'évolution $\tau = q\tau_0$, où q est un entier. Justifier qualitativement la forme de ces courbes puis déterminer la valeur de τ_0 .