MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 2 — Compacité, connexité, complétude

L'exercice 1 permet de vérifier la bonne compréhension de quelques notions du cours

———

Pour la séance de petite classe du vendredi 28 avril,
préparer deux exercices parmi les trois suivants : Exercices 2, 3 et 4.

———

La présence d'un astérique $*$ signale les exercices plus difficiles.

———

La correction de la majorité des exercices sera disponible le vendredi 28 avril après la PC.

———

Exercice 1 (Applications directes du cours)**.** (a) Vérifier que deux normes équivalentes engendrent la même topologie : sur un espace vectoriel normé E, muni de deux normes *équivalentes* $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, montrer que $Y \subset E$ est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_1)$ si, et seulement si, c'est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_2)$.

(b) Justifier que $\mathbf{R}$ muni de la distance naturelle est connexe.

(c) Montrer que toute suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé est bornée.

(d) Montrer que tout espace métrique compact est complet.

Exercice 2 (La notion d'application propre)**.** Soit (X, d) et (Y, d') des espaces métriques.

(a) Soient $(y_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente de (Y, d') et y sa limite. Montrer que l'ensemble

$$A = \{y_n, n \geqslant 0\} \cup \{y\}$$

est une partie compacte de Y.

Dans la suite, f désigne une application de X dans Y. On dit que $f : X \to Y$ est *fermée* si l'image par f de tout fermé de X est un fermé de Y. On dit que f est *propre* si f est continue et si l'image réciproque par f de tout compact est compacte.

(b) Montrer qu'une application propre est fermée.

Dans la suite, on suppose que $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sont des espaces vectoriels normés.

(c) On suppose que X et Y sont de dimension finie et que l'application f est continue. Montrer que f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

Exercice 3 (Une caractérisation très utile des espaces connexes)**.** Le but de l'exercice est de montrer qu'un espace métrique (X, d) est connexe si, et seulement si, toute application continue sur X à valeurs dans $\{0, 1\}$ est constante.

(a) Supposons qu'il existe une application continue $f : X \to \mathbf{R}$, non constante et qui prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$. En considérant les images réciproques $f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[)$ et $f^{-1}(]\frac{1}{2}, +\infty[)$, montrer que X n'est pas connexe.

(b) Supposons que X n'est pas connexe. Il existe alors deux ouverts disjoints non vides U et V tels que $X = U \cup V$. Montrer que la fonction $f : X \to \mathbf{R}$ qui associe la valeur 1 à tout élément de U et 0 à tout élément de V est continue sur X. Conclure.

(c) Une application : soit (X,d) un espace métrique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X d'intersection non vide. Alors $\cup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Exercice 4 (Espaces de Banach et séries normalement convergentes)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

(a) Montrer que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet si, et seulement si, ses parties fermées et bornées sont complètes.

On dit qu'une série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est *normalement convergente* si la série numérique de terme général $\|x_n\|_E$ converge.

(b) Montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach si, et seulement si, toute série normalement convergente est convergente.

Exercice 5 (Un exercice simple sur les espaces vectoriels normés)**.** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel et $f : E \to E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

et, pour une constante $M > 0$,

$$\forall x \in B_f(0,1), \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

(a) Montrer que f est $\mathbf{Q}$-linéaire.

(b) Soit $x \in E$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}$ tel que $\|x\| \leqslant \lambda$, on a : $\|f(x)\| \leqslant |\lambda| M$. En déduire que f est M-lipschitzienne.

(c) Montrer que f est une application linéaire et continue sur E.

Exercice 6 (*Topologie trace)**.** Soit (X,d) un espace métrique, Y une partie de X, et Z une partie de Y. On peut considérer Z comme une partie de (X,d), mais aussi comme une partie de l'espace métrique (Y,d) (ici, d est la restriction de la distance d à Y). Démontrer les assertions suivantes :

(a) Pour que Z soit une partie ouverte de (Y,d), il faut et il suffit qu'il existe une partie U de X ouverte dans (X,d) telle que $Z = U \cap Y$.

(b) Pour que Z' soit une partie fermée de (Y,d), il faut et il suffit qu'il existe une partie F de X fermée dans (X,d) telle que $Z' = F \cap Y$.

Exercice 7 (Compacts et recouvrement par des ouverts)**.** Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement par parties *ouvertes* d'un espace métrique *compact* (X,d). Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans l'un des U_i.

Exercice 8 (*Une façon abstraite de construire un modèle pour tout espace métrique compact)**.** Rappel : un *homéomorphisme* est une application bijective continue dont l'application réciproque est elle-même continue (ce qui n'est pas automatique).

(a) Montrer que toute application injective continue d'un espace métrique compact X dans un espace métrique Y est un homéomorphisme de X vers $f(X)$.

Sur $[0,1]^{\mathbf{N}}$ (l'ensemble des suites à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$) on définit l'application

$$d\Big((x_n)_{n\geqslant 0}, (y_n)_{n\geqslant 0}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}}.$$

(b) Montrer que d est une distance sur $([0,1]^{\mathbf{N}}, d)$.

(c) Montrer qu'une suite $(x^k)_{k \geqslant 0} = \left((x_n^k)_{n \geqslant 0}\right)_{k \geqslant 0}$ dans $[0,1]^{\mathbf{N}}$ converge vers une suite $y = (y_n)_{n \geqslant 0} \in [0,1]^{\mathbf{N}}$ au sens de la distance d, si et seulement si elle converge composante par composante, c'est-à-dire :

$$\forall n \geqslant 0, \quad x_n^k \to y_n \quad \text{quand} \quad k \to +\infty \ ;$$

(d) Prouver que $([0,1]^{\mathbf{N}}, d)$ est un espace métrique compact (utiliser un argument d'*extraction diagonale*).

Une application f est un *homéomorphisme* si elle est continue, bijective, et l'application réciproque f^{-1} est continue. Deux espaces sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre (le sens n'importe pas dans la formulation : l'application réciproque d'un homéomorphisme est un homéomorphisme).

(e) Prouver que tout espace métrique compact est homéomorphe à une *partie* de $[0,1]^{\mathbf{N}}$.

Exercice 9 (*Une caractérisation des parties connexes de $\mathbf{R}$)**.** Le but de l'exercice est de montrer que les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles de $\mathbf{R}$ (sans utiliser le fait que la connexité par arc implique la connexité). On rappelle qu'une partie J de $\mathbf{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tout $x, y \in J$, si $x < y$, alors $[x, y] \subset J$.

(a) On considère une partie J de $\mathbf{R}$ non vide et qui n'est pas un intervalle. Montrer qu'il existe un point $c \in \mathbf{R} \setminus J$ tel que $J \cap]-\infty, c[$ et $J \cap]c, +\infty[$ sont non vides, ouverts dans J et disjoints. Conclure.

(b) Soit un intervalle compact $J = [a, b]$ de $\mathbf{R}$. Supposer que J est la réunion de deux parties fermées disjointes non vides F_0 et F_1. Sans perte de généralité, on suppose que $a \in F_0$. On définit

$$c = \sup\{x \in J \text{ tel que } [a, x] \subset F_0\}.$$

Montrer que $c \in F_0$ et $c \in F_1$ et conclure.

(c) Dans le cas d'un intervalle non compact, utiliser l'exercice 3 (c) pour conclure.

Exercice 10 (On s'en doutait...encore faut-il le démontrer !)**.** Montrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ ne sont pas homéomorphes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ qui soit continue, bijective et telle que f^{-1} soit aussi continue.

Exercice 11 (*Une partie de $\mathbf{R}^2$ connexe mais pas connexe par arc)**.**

(a) Soit (X, d) un espace métrique et Y une partie de X. Montrer que si Y est connexe, alors tout ensemble $B \subset X$ tel que $Y \subset B \subset \bar{Y}$ est également connexe. Indication : on pourra utiliser la définition de connexe et un argument par contradiction.

(b) On note Γ le *graphe* de la fonction défine sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \sin(1/x)$. Déterminer l'adhérence $\overline{\Gamma}$ de Γ. Montrer que $\overline{\Gamma}$ est connexe, mais n'est pas connexe par arc.

Exercice 12 (Connexe implique connnexe par arc dans les espaces vectoriels normés)**.** Montrer qu'un ouvert connexe U de $\mathbf{R}^N$ est connexe par arcs. Montrer que l'on peut joindre deux points de U par une ligne polygonale. Plus généralement, montrer qu'un ouvert connexe d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé est connexe par arcs.