Petite Classe 2

Transformation de Fourier - Paquet d'ondes - Relation d'incertitude

1 Propriétés de la transformation de Fourier *(Facultatif)*

La transformation de Fourier a de nombreuses propriétés (voir l'appendice B du livre) qui nous seront trés utiliées dans la suite. L'objet de ce premier exercice est d'établir quelques.

Q1 Traslation :

$$\mathcal{F}\left[\psi(x-x_0)\right] = e^{\frac{-ipx_0}{\hbar}}\varphi(p) \tag{2.1}$$

Q2 Dilatation :

$$\mathcal{F}\left[\psi(ax)\right] = \frac{1}{|a|}\varphi(p/a) \tag{2.2}$$

Q3 Derivation :

$$\mathcal{F}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n\psi(x)\right] = (ip/\hbar)^n\varphi(p) \tag{2.3}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{d}{dp}\right)^n\varphi(p)\right] = (-ix/\hbar)^n\psi(x) \tag{2.4}$$

Q4 Isométrie (théorème de Parseval-Plancherel) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^*(x)\psi_2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*(p)\varphi_2(p)dp \tag{2.5}$$

que l'on peut écrire de maniére plus compacte en utilisant la notation du produit scalaire sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle \tag{2.6}$$

Q5 Linéairité :

pour λ et μ des nombres complexes quelquonque, on a

$$\mathcal{F}\left[\lambda\psi_1(x) + \mu\psi_2(x)\right] = \lambda\mathcal{F}\left[\psi_1(p)\right] + \mu\mathcal{F}\left[\psi_2(p)\right] \tag{2.7}$$

Q5 Conjugaison :

$$\mathcal{F}\left[\psi^*(x)\right] = \varphi^*(-p) \tag{2.8}$$

2 Le paquet d'ondes

Lors de la premiére PC, nous avons décrit les photons et la matiére uniquement par des ondes planes $e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$. De telles ondes ne sont en fait pas réalistes physiquement car d'une part elles ne sont pas normalisables (*i.e.* de carré sommable), et d'autre part car elles s'étendent uniformément à l'infini comme s'il n'y avait aucun obstacle dans l'univers.
En revanche, elle constitue une base de fonctions simples sur laquelle il est possible de décomposer toute fonction d'onde de forme arbitraire $\psi(x,t)$ grâce à la transformation de Fourier. Dans cette exercice, nous allons traiter le cas d'une forme gaussienne et nous étudierons son èvolution lorsqu'elle se propage.

2.1 Cas général

Commencons par voir comment la transformation de Fourier permet de décomposer en ondes planes.

Q1 En utilisant l'équation de Schrödinger 1D pour une particule libre,

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}, \tag{2.9}$$

quelle est "l'équation de Schrödinger" satisfaite par $\varphi(p,t)$? En posant $E(p) = \frac{p^2}{2m}$ déduire que

$$\varphi(p,t) = \varphi(p,t=0)e^{-iE(p)t/\hbar}. \tag{2.10}$$

Q2 En utilisant l'expression (**??**) pour la fonction d'onde $\psi(x,t)$, comment s'écrit-elle en fonction de $\varphi(p,t=0)$? Expliquer l'expression "décomposer la fonction d'onde en onde planes".

2.2 Cas d'une fonction d'onde gaussienne

Appliquons cette décomposition à un exemple typique : la gaussienne.

Q1 Soit $\psi(x,t)$ une fonction d'onde obéissant à l'équation de Schrödinger. À $t = 0$, on suppose que la forme de cette fonction d'onde vérifie l'équation différentielle du premier ordre suivante (on note $\psi(x) = \psi(x,0)$) :

$$\frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{x\psi(x)}{2\sigma_x^2} = 0 \tag{2.11}$$

La résoudre en utilisant la condition initiale $\psi(0) = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma_x)^{1/2}$, où σ_x est un nombre réel strictement positif.

Q2 On note $\varphi(p) = \mathcal{F}[\psi(x)]$. Ecrire la transformation de Fourier de l'équation différentielle (2.11) en utilisant les équations (2.3) et (2.4) (on définira $\sigma_p = \hbar/(2\sigma_x)$). En déduire $\varphi(p)$.

Q3 Que devient $\varphi(p)$ si je remplace $\psi(x)$ par $\psi(x)e^{ip_0x/\hbar}$ (utiliser la propriété de translation de la transformation de Fourier) ?

Q4 En utilisant l'équation (2.10), écrire alors la décomposition en onde plane de $\psi(x,t)$.

Q5 *(Facultatif)* Pour simplifier les calculs, on prendra $p_0 = 0$ dans la suite. En déduire $\psi(x,t)$. On utilisera la relation :

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{\tilde{\sigma}^2 p^2}{\hbar^2}}\right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2\tilde{\sigma}^2}}e^{-\frac{x^2}{4\tilde{\sigma}^2}} \tag{2.12}$$

valable pour tout $\tilde{\sigma}$ complexe tel que $\mathrm{Re}(\tilde{\sigma}^2) > 0$.

Q6 *(Facultatif)* Etalement d'un paquet d'onde libre : montrer que $\Delta x^2(t) = \Delta x^2(0) + \Delta v^2 t^2$, avec $\Delta v = \sigma_p/m$. En déduire $\Delta x(t)\Delta p(t)$. Qualitativement, pourquoi le paquet d'onde s'étale ?

3 Relation d'incertitude de Heisenberg

À l'aide des propriétés de la transformation de Fourier, nous nous proposons de retrouver la relation d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{2.13}$$

en 1D, à l'aide d'une fonction auxiliaire,

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| x\,\psi(x) + \lambda \frac{d\psi(x)}{dx}\right|^2, \tag{2.14}$$

pour un nombre réel λ quelconque que nous spécifierons plus tard.

Q1 Quel est la borne inférieure de l'intégrale $I(\lambda)$?

Q2 Calculer l'intégrale en fonction de $\langle x^2 \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$.

Q3 Quelle est la dimension physique de λ ? En faisant l'hypothèse que la fonction d'onde a les propriétés $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$, retrouver la relation d'incertitude de Heisenberg (2.13).

4 Principe de correspondance *(Facultatif)*

Le principe de correspondance (Relations d'Ehrenfest), proposé par Niels Bohr, établit que la mécanique classique doit se retrouver comme une approximation de la mécanique quantique. Dans cet exercice, nous allons montrer ce principe pour une particule quantique de masse m décrite par la fonction d'onde $\psi(x,t)$ solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})\right]\psi \tag{2.15}$$

Q1 Montrer la relation cinématique $m\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle p \rangle$

Q2 Retrouver la relation fondamentale de la dynamique de Newton $\frac{d\langle p \rangle}{dt} = -\langle \partial_x V \rangle$

Q3 Dans le cas de cette particule, que prédit donc l'équation de Schrödingerr que ne prédisait pas déà la mécanique classique ?