# PC 6 : Convergence & Loi des grands nombres

Dernière modification 24 mai 2023

**Rappels**

— Convergence en probabilité

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \forall \epsilon > 0 \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

— Convergence em moyenne

$$X_n \xrightarrow{L^1} X \iff \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$$

— Convergence presque-sûrement

$$X_n \xrightarrow{\text{p.s}} X \iff \mathbb{P}\left(\{\omega : \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1$$

— Théorème de convergence dominée

$$\text{Si } X_n \xrightarrow{\text{p.s}} X \text{ et } \exists Z \text{ v.a réele tel que } \forall n, |X_n| \leq |Z| \text{ p.s. Alors, } X_n \xrightarrow{L^1} X$$

— Loi des grands nombres Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ i.i.d $\in L^1$.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{p.s}} \mathbb{E}(X_1)$$

— Lemme de Borel-Cantelli
  - — Si la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. C'est à dire, p.s il y a un nombre fini de $A_n$ qui sont réalisés.
  - — Si de plus la suite $(A_n)_n$ est indépendante, alors $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$. C'est à dire, p.s une infinité de $A_n$ sont réalisés.

**Q1** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi Bernoulli, $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ avec $p_n \to 0$.

1. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} 0$.
2. On suppose que $\sum_n p_n < \infty$. Montrer que $X_n \xrightarrow{p.s} 0$.
3. On suppose que $X_n \xrightarrow{p.s} 0$. Montrer qu'on n'a pas nécessairement $\sum_n p_n < \infty$.
4. On suppose maintenant que $\sum_n p_n = \infty$ et que les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Montrer que $X_n \not\to X$ p.s.

1. $$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n \to 0$$
   donc, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
   $$\mathbb{E}(|X_n - 0|) = \mathbb{E}(X_n) = p_n \to 0$$
   donc, $X_n \xrightarrow{L^1} 0$.
2. Par le lemme de Borel-Cantelli $\sum_n p_n < +\infty \implies \mathbb{P}(\limsup\{X_n = 1\})$. Donc, il y a un nombre fini de $X_i = 1 \implies X_n \xrightarrow{p.s} 0$.
   $$\mathbb{P}\left(\{\omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}\right) = \mathbb{P}(\limsup\{X_n = 1\}) = 0$$
3. Soit $U$ une v.a réele de loi uniforme $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. Prenons $X_n = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)$. On note $X_n \sim \mathbb{B}(\frac{1}{n})$.
   $$\sum_n p_n = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$$
   $X_n(\omega) = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U(\omega)) = 0 \forall n \geq n_0 \implies X_n \xrightarrow{p.s} 0$.
4. Par le lemme de Borel-Cantelli $\sum_n p_n = +\infty$ et la suite $(X_n)_n$ est indépendante, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$. Donc, on a une infinitude de $X_i = 1 \implies X_n \xrightarrow{p.s} 1$.

**Q4** Montrer qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire $X$ si et seulement si $M_n = \sup_{k\geq n}|X_k - X|$ converge vers 0 en probabilité.

Supposons que $X_n \xrightarrow{p.s} X \implies M_n \xrightarrow{p.s} 0 \implies M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Réciproquement, supposons que $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

$$\begin{aligned}
\iff \forall\epsilon > 0 \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n - 0| > \epsilon) &= 0 \\
&= \mathbb{P}(M_n > \epsilon) \\
&= \mathbb{P}(\sup_{k\geq n}|X_k - X| > \epsilon) \\
&= \mathbb{P}(\cup_{k\geq n}\{|X_k - X| > \epsilon\})
\end{aligned}$$

$$\iff \forall\epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(\cap_{n\geq 1}\cup_{k\geq n}\{|X_k - X| > \epsilon\}) = 0$$

En particulier, soit $B = \cup_{m\in\mathbb{N}}\cap_{n\geq 1}\cup_{k\geq n}\{|X_k - X| > \frac{1}{m}\}$ on a

$$\mathbb{P}\left(\cup_{m\in\mathbb{N}}\cap_{n\geq 1}\cup_{k\geq n}\{|X_k - X| > \frac{1}{m}\}\right) = 0.$$

$\mathbb{P}(\lim X_n \neq X) \leq \mathbb{P}(B) = 0 \implies X_n \xrightarrow{\text{p.s}} X$.

**Q6** Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $\lambda > 0$. Déterminer

1. $$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} g\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) dx_1 ... dx_n$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. Soit $X_i \sim \mathcal{U}[0,1]$ indépendantes.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} g\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) dx_1 ... dx_n &= \int_{[0,1]^n} g(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) dx_1 ... dx_n && (1)\\
&= \mathbb{E}(g(\bar{X_n})) && (2)\\
&\xrightarrow{\text{p.s}} \mathbb{E}(g(\mathbb{E}(X_i))) \text{ par la loi des grands nombres.} && (3)\\
&= g\left(\frac{1}{2}\right) && (4)
\end{aligned}$$

2. Soit $Y_n \sim \mathcal{P}(\lambda k)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} g\left(\frac{k}{n}\right) &= \mathbb{E}\left(g\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right) && (5)\\
&= \mathbb{E}(g(\bar{Z_n})) \text{ où } Z_i \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ indépendantes} && (6)\\
&\xrightarrow{\text{p.s}} g(\lambda) \text{ par la loi des grands nombres.} && (7)
\end{aligned}$$

**Q9** On considère une particule se déplaçant sur l'axe réel, et on note $X_n$ sa position à l'instant $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X_0$ est une v.a réelle et que la position de la particule évolue de la manière suivante

$$X_{n+1} = X_n + \epsilon_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r i.i.d intégrables et de moyenne $m \neq 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}|X_n| = +\infty$ p.s.

Par récurrence $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n \epsilon_n$.
Par la loi des grands nombres,

$$\iff \frac{1}{n}X_n = \frac{1}{n}X_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xrightarrow{\text{p.s}} \ngeq \nVdash = m \neq 0.$$

Donc $X \approx nm$ pour $n$ grand $\implies |X_n| \xrightarrow{\text{p.s}} +\infty$.