DM2

Dernière modification 12 juin 2023

Exercice 1

Considérons l'équation différentielle $\dot{X} = f(X)$ où $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $Z_0 \in \mathbb{R}^N$, on note $T_{max}(Z_0) > 0$ le temps d'existence maximal de la solution $Z(t)$ de l'équation différentielle $\dot{Z} = f(Z)$ de donnée initiale $Z(0) = Z_0$.
On fixe $X_0 \in \mathbb{R}^N$. Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $0 < T < T_{max}(X_0)$.

(a) Montrer l'existence de $R > 1$ tel que $X(t) \in B_f(X_0, R)$ pour tout $t \leq T$.

On raisonne par l'absurde.
Supposons que $\forall R > 1, \exists t \in [0, T]$ tel que $X(t) \notin B_f(X_0, R) \implies \exists T^* \in [0, T]$ tel que $X(t)$ explose en $T^* \leq T < T_{max}(X_0)$ ce qui est absurde.

(b) Montrer l'existence de $k_R > 0$ telle que f soit k_R-lipschitzienne sur $B_f(X_0, 2R)$.

On note que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall X, Y \in B_f(X_0, 2R) \subset \mathbb{R}^N$ le segment joignant X à Y est contenu dans $B_f(X_0, 2R)$.
Donc, par l'inégalité des accroissements finis, $\forall X, Y \in B_f(X_0, 2R)$,

$$||f(X) - f(Y)|| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} ||J_f(X + \theta(Y - X))|| \cdot ||Y - X||$$

Donc, il suffit de poser $k_R = \sup_{0 \leq \theta \leq 1} ||J_f(X + \theta(Y - X))||$

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < R$ et soit $Y_0 \in B_f(X_0, \epsilon)$.
On note $Y(t)$ la solution maximale de l'équation $\dot{X} = f(X)$ telle que $Y(0) = Y_0$. Son temps maximal d'existence est $T_{max}(Y_0)$.

(c) Montrer qu'il existe $T' \in]0, T]$ tel que $Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$ pour tout $t \leq T'$.

Soit $g : [0, \min(T_{max}(Y_0, T))] \to \mathbb{R}$ tel que $g(t) = ||Y(t) - X_0|| - 2R$.
$g(t)$ est continue car $Y(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
On note que $g(0) = ||Y(0) - X_0|| - 2R \leq \epsilon - 2R < -R < 0$

On pose

$$T' = \begin{cases} \inf\{t : t \in [0, \min(T_{max}(Y_0, T))] \text{ et } g(t) = 0\} & \text{si l'infimum existe} \\ T \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

On note que $0 < T' \leq T$ et $\forall t \in [0, T'] \quad g(t) \leq 0 \iff Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$.

(d) Montrer que pour un tel T', on a $||X(t) - Y(t)|| \leq \epsilon e^{k_R t}$ pour tout $t \in [0, T']$.

Soit $g : [0, T'] \to \mathbb{R}$ tel que $g(t) = ||Y(t) - X(t)||$

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= ||\dot{Y}(t) - \dot{X}(t)|| & (2) \\ &= ||f(Y(t)) - f(X(t))|| & (3) \\ &\leq k_R ||Y(t) - X(t)|| & (4) \\ &= k_R g(t) & (5) \end{aligned}$$

On considère ϕ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \phi(t) &= k_R \phi(t) \\ \phi(0) &= \epsilon \end{cases} \tag{6}$$

On note que $\phi(t) = \epsilon e^{k_R t} \quad \forall t \in [0, T']$.
On note que $g(0) = ||Y(0) - X(0)|| < \epsilon \implies \phi(0) \geq |g(0)|$.
Par le lemme de Gronwall, $|g(t)| = g(t) \leq \phi(t)$.
Donc, $||Y(t) - X(t)|| \leq \epsilon e^{k_R t} \quad \forall t \in [0, T']$.

(e) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $T_{max}(Y_0) > T$(on pourra raisonner par l'absurde en supposant que $T_{max}(Y_0) \leq T$ et que donc Y explose en temps fini).

On raisonne par l'absurde.
Supposons $\forall \epsilon > 0 \quad T_m ax(Y)$

()