PC 1 : Probabilités, Interférences et Dualité

Dernière modification 22 mai 2023

Exercice 1 : La désintégration d'une particule radioactive

Beaucoup de phénomènes naturels peuvent être modélisés par des processus sans mémoire. On va étudier la désintégration radioactive d'une particule, qui appartient à cette classe de processus. Le processus est défini de la manière suivante : si la particule ne s'est pas désintégrée au temps t, sa probabilité de désintégration pendant l'intervalle de temps infinitésimal $[t, t+\delta t]$ s'écrit $\frac{\delta t}{\tau}$, où $\tau > 0$ est une constante. Notons $P_S(t)$ la probabilité de survie (non désintégration) à l'instant t.

Q1 Déterminer $P_S(t+\delta t)$ en fonction de $P_S(t)$, de τ et de δt.

Si la particule survie jusqu'à l'instant $t+\delta t$, ça veut dire que elle a survecu jusqu'à l'instant t et en suite, ne s'est pas désintégré pendant l'intervalle $[t, t+\delta t]$. Donc,

$$P_S(t+\delta t) = P_S(t) \cdot \left(1 - \frac{\delta t}{\tau}\right) \tag{1}$$

Q2 Déduire l'expression de $P_S(t)$.

Utilisant l'exercice précedent, on note que

$$\frac{P_S(t+\delta t) - P_S(t)}{\delta t} = -\frac{P_S(t)}{\tau}. \tag{2}$$

Prenons la limite lorsque $\delta t \to 0$,

$$\frac{d}{dt}P_S(t) = -\frac{P_S(t)}{\tau} \iff P_S(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{3}$$

On note que $P_S(0) = 1$.
Il s'agit de la densité de la distribution exponentielle avec paramètre τ.

Q3 Déterminer la densité de probabilité du temps de désintégration $p(t)$.

Soit T l'instant de désintégration. On note que $T \sim p(t)$. On regarde la fonction de répartition de T. La probabilité que $T \leq t$ est égal à la probabilité que la particule n'est pas en vie à l'instant t. Donc,

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - P_S(t) \implies \int_0^t p(t)dt = 1 - P_S(t) \tag{4}$$

Par le théorème fondamental du calcul,

$$p(t) = \frac{d}{dt}(1 - P_S(t)) = -\frac{d}{dt}P_S(t). \tag{5}$$

Donc,

$$p(t) = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{6}$$

Q4 Vérifier que $p(t)$ est bien une densité de probabilité.

On note que $p(t) \geq 0 \quad \forall t \in \Omega = \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} p(t)dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} \\ &= 1, \text{ donc } p(t) \text{ est normalisée.}\end{aligned} \tag{7}$$

Q5 Calculer alors la durée de vie moyenne de la particule et sa variance.

Calculer durée de vie moyenne $\langle T \rangle$

$$\langle T \rangle = \int_0^{+\infty} t \cdot p(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}dt \tag{8}$$

Integration par parties tabular

$$\begin{array}{ccc} \frac{t}{\tau} & e^{-\frac{t}{\tau}} & \\ \frac{1}{\tau} & -\tau e^{-\frac{t}{\tau}} & + \\ 0 & \tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} & - \end{array}$$

Donc,

$$\int \frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}dt = -te^{-\frac{t}{\tau}} - \tau e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{9}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\langle T \rangle &= \left(-te^{-\frac{t}{\tau}} - \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} \\ &= \tau\end{aligned} \tag{10}$$

Calculer $\langle T^2 \rangle$

$$\langle T \rangle = \int_0^{+\infty} t^2 \cdot p(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt \tag{11}$$

Integration par parties tabular

$$\begin{array}{ccc} \frac{t^2}{\tau} & e^{-\frac{t}{\tau}} & \\ \frac{2t}{\tau} & -\tau e^{-\frac{t}{\tau}} & + \\ \frac{2}{\tau} & \tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{-} \\ 0 & -\tau^3 e^{-\frac{t}{\tau}} & + \end{array}$$

Donc,

$$\int \frac{t^2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -t^2 e^{-\frac{t}{\tau}} - 2t\tau e^{-\frac{t}{\tau}} - 2\tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{12}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \langle T^2 \rangle &= \left(-t^2 e^{-\frac{t}{\tau}} - 2t\tau e^{-\frac{t}{\tau}} - 2\tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Bigg|_{t=0}^{t\to+\infty} \\ &= 2\tau^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Calculer variance ΔT^2

$$\begin{aligned} \Delta T^2 &= \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 \\ &= 2\tau^2 - \tau^2 \\ &= \tau^2. \end{aligned} \tag{14}$$

On peut en déduire le écart-type, $\Delta T = \tau$.

Exercice 2 : Distribution gaussienne

On considère la densité de probabilité suivante, définie par une fonction gaussienne :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{15}$$

où x et x_0 sont des nombres réels, et σ est un nombre réel positif.

Q1 Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.
Formule utile : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$.

On note que $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= 2\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned} \tag{16}$$

Faisons la substitution $u = \frac{x-x_0}{\sigma} \implies dx = \sigma \cdot du$.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{2} \quad \text{par la formule dans l'énoncé.} \end{aligned} \tag{17}$$

Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

Q2 Calculer la valeur moyenne $\langle x \rangle$.

On utilise la même substitution $u = \frac{x-x_0}{\sigma} \implies dx = \sigma \cdot du$.

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma u + x_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= x_0. \end{aligned} \tag{18}$$

Q3 Calculer l'écart quadratique moyenne Δx.

On utilise encore la même substitution $u = \frac{x-x_0}{\sigma} \implies dx = \sigma \cdot du$.

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma u + x_0)^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} 2du \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} 2du + \frac{2\sigma x_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} 2du + \frac{x_0^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} 2du \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} 2du + x_0^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

Par integration par parties,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} 2du = -ue^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_{u\to-\infty}^{u\to+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}. \tag{20}$$

Donc, $\langle x^2 \rangle = x_0^2 + \sigma^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
\Delta x^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\
&= x_0^2 + \sigma^2 - x_0^2 \\
&= \sigma^2.
\end{aligned} \tag{21}$$

On en déduit, $\Delta x = \sigma$.

Exercice 3 : L'expérience des fentes de Young

On supposera que les ondes de matière diffractées par chaque fente sont de la forme $\psi(M) \propto e^{\frac{ip_0 r}{\hbar}}$ sur l'écran.

Q1 Notons r_1 et r_2 les distances entre l'écran et les fentes $S1$ et $S2$. Montrer que $r_{1,2} = \sqrt{(x \pm a/2)^2 + D^2}$ et donner une expression simplifiée de $r_1 - r_2$ en fonction de x en utilisant l'hypothèse $D \gg a$.

Par le théorème de Pythagore,

$$\left(\frac{a}{2} \pm x\right)^2 + D^2 = r_{1,2}^2. \tag{22}$$

Alors,

$$|r_1 - r_2| = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + D^2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + D^2} \tag{23}$$

Long have I waited...