PC 4 : Vecteurs aléatoires à densités - lois conditionnelles

Dernière modification 24 mai 2023

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $p \in \mathbb{R}$, justifier que e^{pX} est intégrable et calculer $\mathbb{E}(e^{pX})$.

Une variable aléatoire $X \in L^0$ est dite $\mathbb{P}$ - intégrable si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. Pour toute fonction mesurable $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a que h est P_X - intégrable si et seulement si $h(X)$ est $\mathbb{P}$ - intégrable.

Par définition, e^{pX} est intégrable si $\mathbb{E}(|{}^{'\mathbb{X}}|) < +\infty$.
La fonction e^{pX} est positive, donc $\mathbb{E}({}^{'\mathbb{X}})$ a un sens a calculer. On note que

$$|e^{px}|f(x) = \frac{e^{px} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{1}$$

est bien intégrable par croissances comparées.

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{pX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{px - \frac{x^2}{2}} \, dx \\
&= e^{\frac{p^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-p)^2}{2}} \, dx \\
&= e^{\frac{p^2}{2}}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Exercice 2

Soit X e Y deux variables aléatoires réelles independantes et $S = X + Y$. Lorsque X et Y suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la densité conditionnelle de X sachant $S = s$. En déduire $\mathbb{E}(X|S)$.

Par définition,

$$f_{X|S=s}(x) = \frac{f_{X,S}(x,s)}{f_S(s)} \tag{3}$$

Alors, on veut calculer la loi jointe $f_{X,S}(x,s)$ et la loi marginale $f_S(s)$. On va utiliser la méthode de la fonction muette.

Méthode de la fonction muette
Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\mu(dx), \tag{4}$$

pour toute fonction h continue bornée. Alors, $P_X = \mu$.

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(X,S)] &= \mathbb{E}[\phi(X, X+Y)] \\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \phi(x, x+y) f_{X,Y}(x,y)dxdy \end{aligned} \tag{5}$$

On note que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = [\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x\geq 0}][\lambda e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{y\geq 0}] = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathbf{1}_{x,y\geq 0}$.
On fait la substitution

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases} \tag{6}$$

Alors,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \phi(x, x+y)\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathbf{1}_{x,y\geq 0}dxdy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \phi(u,v)\lambda^2 e^{-\lambda v}\mathbf{1}_{v\geq u\geq 0}dudv. \tag{7}$$

Donc, $(u,v) = (X,S)$ admet densité

$$f_{X,S}(x,s) = \lambda^2 e^{-\lambda s}\mathbf{1}_{s\geq x\geq 0} \tag{8}$$

Pour vérifier ce résultat, on peut calculer la loi marginale $f_X(x)$.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{+\infty} f_{X,S}(x,s)ds \\ &= \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda s}ds \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \text{ce qui est cohérent.} \end{aligned} \tag{9}$$

On calcule la loi marginale

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \int_0^{+\infty} f_{X,S}(x,s)dx \\ &= \int_0 s\lambda^2 e^{-\lambda s} dx \\ &= \lambda^2 s e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{s \geq 0}. \end{aligned} \tag{10}$$

Donc, on a la densité conditionnelle

$$f_{X|S=s}(x) = \frac{1}{s}\mathbb{1}_{s \geq x \geq 0} \quad \text{on reconnait la loi uniforme } \mathcal{U}(0,s). \tag{11}$$

Pour calculer $\mathbb{E}[X|S]$, on calcule d'abord $\mathbb{E}[X|S=s]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|S=s] &= \int_{\mathbb{R}} x f_{X|S=s}(x)dx \\ &= \int_0 s\frac{x}{s}dx \\ &= \frac{s}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Donc, $\mathbb{E}[X|S] = \frac{S}{2}$.