PC 6 – Convergence & Loi des grands nombres

1 Différentes notions de convergence

Exercice 1 (Convergence d'une suite de v.a. de Bernoulli)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi Bernoulli, $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ avec $p_n \to 0$.

1. Montrer que $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$ et $X_n \overset{\mathrm{L}^1}{\to} 0$.
2. On suppose que $\sum_n p_n < \infty$. Montrer que $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$.
3. On suppose que $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$. Montrer qu'on n'a pas nécessairement $\sum_n p_n < \infty$. *On pourra considérer des variables aléatoires de la forme $X_n = f_n(U)$ avec U uniforme.*
4. On suppose maintenant que $\sum_n p_n = \infty$ et que les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Montrer que p.s. $X_n \not\to 0$ (autrement dit, que $\mathbb{P}(X_n \not\to 0) = 1$).

Exercice 2 (Convergence d'une suite de v.a. exponentielles)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle, $X_n \sim \mathcal{E}(n)$. Montrer que $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$. *On pourra étudier $\mathbb{P}(X_n > t_n)$ pour une suite t_n tendant vers 0 bien choisie.*

Exercice 3 (Autour des convergences $\mathbb{P}$ et p.s.)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, et Z et Z' deux variables aléatoires réelles.

1. On suppose que :
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Z \quad \text{et} \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Z'.$$
Montrer que $Z \overset{\text{p.s.}}{=} Z'$. Autrement dit, la limite en probabilité est unique presque surement. *On pourra commencer par montrer que $\mathbb{P}(|Z - Z'| > \varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.*
2. On suppose que $Z \overset{\text{p.s.}}{=} Z'$. Montrer que
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} Z \iff X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} Z'.$$
3. On suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante. Montrer que :
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Z \implies X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} Z.$$
On pourra montrer que $(X_n)_n$ est bornée presque surement.
4. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d. et on pose
$$m := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) < 1\},$$
avec F_X la fonction de répartition de X_1. On suppose que $m < +\infty$. On pose pour tout $n \geq 1$,
$$M_n := \max_{1\leq i\leq n} X_i.$$
Montrer que
$$M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} m.$$

Exercice 4 (Modes de convergence)**.**

1. Montrer qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire X si et seulement si $M_n = \sup_{k\geq n} |X_k - X|$ converge vers 0 en probabilité.
2. Montrer qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en probabilité vers 0 si et seulement si $\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right] \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. *On pourra commencer par écrire*

$$\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\mathbf{1}_{|X_n|\leq\varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\mathbf{1}_{|X_n|>\varepsilon}\right].$$

Exercice 5. (Lemme de Scheffé) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives, intégrables, convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire X intégrable et telle que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$. Montrer que $X_n \stackrel{\mathrm{L}^1}{\to} X$.

2 Loi des grands nombres

Exercice 6. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $\lambda > 0$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} g\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} g\left(\frac{k}{n}\right).$$

On pourra considérer des variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. et de loi bien choisie, et étudier la convergence de g appliquée à la moyenne empirique.

Exercice 7 (Biais par la taille)**.** On considère une population comportant un grand nombre n de foyers. On modélise la taille de ces foyers par une suite de v.a. i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, intégrables et de moyenne m. On note $p_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit T la taille du foyer d'un individu pris au hasard dans la population. Montrer que $\mathbb{P}(T = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{k}{m} p_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. *On pourra commencer par étudier $\mathbb{P}(T = k | X_1, \ldots, X_n)$ puis utiliser des propriétés de l'espérance conditionnelle vues en cours (on admettra que ces propriétés se généralisent au cas où on conditionne par plus d'une variable).*

Exercice 8 (Produit de variables aléatoires)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\{a, b\}$ avec $0 < a < 1 < b$ et telles que $\mathbb{E}[X_1] = 1$. On pose $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$. Montrer que $Y_n \stackrel{\text{p.s.}}{\to} 0$. La convergence a-t-elle lieu en moyenne ? La variable $Y = \sup_{n\geq 1} Y_n$ est-elle intégrable ?

Exercice 9 (Marche aléatoire simple sur $\mathbb{R}$)**.** On considère une particule se déplaçant sur l'axe réel, et on note X_n sa position à l'instant $n \in \mathbb{N}$. On suppose que X_0 est une v.a. réelle et que la position de la particule évolue de la manière suivante :

$$X_{n+1} = X_n + \varepsilon_{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. i.i.d., intégrables et de moyenne $m \neq 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} |X_n| = +\infty$ presque sûrement.