MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 3 — Espaces de fonctions, densité, point fixe

L'exercice 1 permet de vérifier la bonne compréhension de quelques notions du cours

—

Pour la séance de petite classe du vendredi 5 mai,
préparer deux exercices parmi les trois suivants : Exercices 2, 3 et 4.

—

La présence d'un astérique $*$ signale les exercices plus difficiles.

—

La correction de la majorité des exercices sera disponible le vendredi 5 mai après la PC.

—

Exercice 1. (Applications de théorèmes importants du cours)

(a) (Théorème d'Ascoli et théorème de Riesz) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, inclus dans $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbf{R})$ et tel qu'il existe une constante $M>0$ avec : $\forall\, f\in E$, $\|f'\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$.

(i) Montrer que la boule unité fermée de $(E,\|\cdot\|_\infty)$, notée B, forme une famille équicontinue en tout point $x\in[0,1]$. En déduire que de toute suite de B, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}),\|\cdot\|_\infty)$.

(ii) On suppose de plus que E est fermé dans $(\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R}),\|\cdot\|_\infty)$. Montrer que E est de dimension finie.

(b) (Théorème de Weierstrass) Soit $f\in\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ satisfaisant

$$\forall\, n\in\mathbf{N},\quad \int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que $\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t=0$ et en déduire que f est la fonction nulle.

(c) (Théorème du point fixe) Soit (X,d) un espace métrique complet non vide et $f:X\to X$ continue. On suppose qu'il existe $n\in\mathbf{N}$ tel que f^n soit contractante (la fonction f^n étant définie par la récurrence $f^1=f$ et $f^n=f\circ f^{n-1}$, pour tout $n\geqslant 2$).

(i) Montrer que si x est un point fixe de f^n, alors $f(x)$ est aussi un point fixe de f^n.

(ii) Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 2. (Espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de différentes normes)

(a) Montrer que $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$, est un espace de Banach.

(b) Montrer que $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$, muni de la norme

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

n'est pas un espace de Banach.

Exercice 3. (Convergence de suites de fonctions et équicontinuité)

(a) Donner un exemple d'une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement vers une fonction discontinue.

(b) Donner un exemple d'une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement, mais pas uniformément, vers la fonction nulle.

(c) On considère la suite des fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. En quels points de $[0,1]$ la famille de fonctions $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est-elle équicontinue ?

Exercice 4. (Une variante du théorème de point fixe de Banach sur un espace métrique compact)
Soit f une application d'un espace métrique compact (X,d) dans lui-même, telle que, pour tout $x \neq y$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$.

(a) Montrer que f possède un unique point fixe.

(b) Ce résultat est-il toujours vrai si l'on remplace l'hypothèse de compacité de (X,d) par une hypothèse de complétude ?

(c) Montrer que pour tout $x \in X$, la suite $(f^n(x))_{n\geqslant 0}$ converge (f^n est défini par la récurrence $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$, pour tout $n \geqslant 2$).

(d) Montrer que la suite d'applications $(f^n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur X.

Exercice 5. (Espace des polynômes à coefficients réels muni de différentes normes)
On note $\mathbf{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on note

$$\mathcal{N}_1(P) := \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_2(P) := \sum_{j\in\mathbf{N}} e^{-j}\,|P(j)|.$$

(a) Vérifier qu'il s'agit de deux normes sur $\mathbf{R}[X]$.

(b) Ces normes sont-elles équivalentes ?

(c) L'espace $\mathbf{R}[X]$, muni de la norme $\mathcal{N}_1$, est-il complet ?

Exercice 6. (*Espace des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ muni de différentes normes)
Pour k un nombre réel strictement positif, on note $\mathcal{H}_k$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$, à valeurs réelles, telles que $f(0) = 0$ et satisfaisant, pour tous $x, y \in [0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

On pose $\mathcal{E} = \bigcup_{k>0} \mathcal{H}_k$ et pour une fonction donnée $f \in \mathcal{E}$, on note

$$\mathcal{N}(f) = \inf\{k > 0 : f \in \mathcal{H}_k\}.$$

(a) Justifier que $\mathcal{E}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{E}$.

(b) Prouver que l'on a $\|f\|_\infty \leqslant \mathcal{N}(f)$ pour toute $f \in \mathcal{E}$ mais que $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{N}$ ne sont pas des normes équivalentes sur $\mathcal{H}_k$.

(c) On fixe $k > 0$. Discuter la compacité de $\mathcal{H}_k$ dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$ et dans $\big(\mathcal{E}, \mathcal{N}\big)$.

Exercice 7. (Séries normalement convergentes dans un Banach)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $K \geqslant 0$ et $\phi \in \mathcal{C}(E;E)$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \|\phi(x)\| \leqslant K\,\|x\|.$$

Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathcal{C}(E;E)$ telle que

$$f(0) = 0, \quad \text{et pour tout } x \in E,\ f(x) - f(x/2) = \phi(x).$$

Indication : on pourra utiliser la série de fonctions

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \phi(2^{-n}x),$$

et le fait général que dans un espace de Banach toute série normalement convergente est convergente (voir feuille 2, exercice 12).

Exercice 8. (*Exponentielle d'application linéaire) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbf{K}$-espace de Banach. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.

(a) Soit $L \in \mathcal{L}(E,E)$ telle que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < R$. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n L^n$$

définit un élément de $\mathcal{L}(E,E)$.

Indication : on rappelle que dans un espace de Banach toute série normalement convergente est convergente (voir feuille 2, exercice 12). On rappelle également que $(E, \|\cdot\|_E)$ étant un espace de Banach, $(\mathcal{L}(E,E), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,E)})$ est également un espace de Banach.

(b) Soit $L \in \mathcal{L}(E,E)$. Montrer que

$$e^L := \sum_{n\geqslant 0} \frac{L^n}{n!}$$

définit un élément de $\mathcal{L}(E,E)$.

(c) Soient $L, M \in \mathcal{L}(E,E)$ tels que $L \circ M = M \circ L$. Montrer que

$$e^L \circ e^M = e^M \circ e^L = e^{L+M}.$$

(d) En déduire que, si $L \in \mathcal{L}(E,E)$ alors e^L est inversible et a pour inverse $e^{-L} \in \mathcal{L}(E,E)$.

(e) Soit $L \in \mathcal{L}(E,E)$ telle que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < 1$. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{L}(E,E)$ telle que

$$V^2 = I_E - L.$$

(I_E désigne l'opérateur identité de E.)

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

Exercice 9. (Autour de l'équicontinuité et de la convergence de suites de fonctions)
On considère (X, d_X) et (Y, d) deux espaces métriques.

(a) Étendre la notion d'équicontinuité donnée en cours au cas d'une famille d'applications continues de (X, d_X) dans (Y, d).

(b) Soit $a \in X$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications $X \to Y$. On suppose que $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est équicontinue en a et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction g. Prouver que g est continue en a.

(c) On considère maintenant une partie dense Z de (X, d_X) et on suppose que (Y, d) est complet. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications $X \to Y$ telle que la famille $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est équicontinue et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur Z. Prouver que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur X.

Exercice 10. (Suite de l'exercice précédent) On considère (X, d_X) et (Y, d) deux espaces métriques. Dans cette exercice, on suppose que (X, d_X) est compact.
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications continues $(X, d_X) \to (Y, d)$. On suppose que la famille $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est équicontinue et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction g. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge *uniformément* vers g.

Exercice 11. (Preuve du théorème de Weierstrass esquissée dans le cours) Démontrer le théorème de Weierstrass classique en suivant les indications données dans le cours (utiliser le fait que sur tout intervalle compact, la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales).

Exercice 12. (Une autre preuve du théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein)

(a) On pose

$$R_{n,k} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} R_{n,k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k R_{n,k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) R_{n,k}.$$

(b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 R_{n,k}(x) = nx(1-x).$$

(c) On pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Montrer que ces polynômes convergent uniformément vers f sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 13. (*Une variante du théorème de point fixe de Banach dans un espace compact convexe)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On rappelle qu'une partie Y de E est dite *convexe* si pour tout points $x, y \in Y$, et tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y \in Y$.

Soient K une partie compacte et convexe de $(E, \|\cdot\|)$ et $f : K \to K$ une application 1-lipschitzienne, *i.e.* telle que pour tous $x, y \in K$, on ait :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|.$$

(a) Soit $a \in K$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'application

$$f_n(x) = \frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}\,f(x),$$

admet un point fixe dans K.

(b) En déduire que f admet un point fixe dans K.