

DM2

Dernière modification 13 juin 2023

Exercice 1

Considérons l'équation différentielle $\dot{X} = f(X)$ où $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe \mathcal{C}^1 .
Pour tout $Z_0 \in \mathbb{R}^N$, on note $T_{max}(Z_0) > 0$ le temps d'existence maximal de la solution $Z(t)$ de l'équation différentielle $\dot{Z} = f(Z)$ de donnée initiale $Z(0) = Z_0$.
On fixe $X_0 \in \mathbb{R}^N$. Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $0 < T < T_{max}(X_0)$.

(a) Montrer l'existence de $R > 1$ tel que $X(t) \in B_f(X_0, R)$ pour tout $t \leq T$.

On raisonne par l'absurde.

Supposons que $\forall R > 1, \exists t \in [0, T]$ tel que $X(t) \notin B_f(X_0, R) \implies \exists T^* \in [0, T]$ tel que $X(t)$ explose en $T^* \leq T < T_{max}(X_0)$ ce qui est absurde.

(b) Montrer l'existence de $k_R > 0$ telle que f soit k_R -lipschitzienne sur $B_f(X_0, 2R)$.

On note que f est de classe \mathcal{C}^1 et $\forall X, Y \in B_f(X_0, 2R) \subset \mathbb{R}^N$ le segment joignant X à Y est contenu dans $B_f(X_0, 2R)$.

Donc, par l'inégalité des accroissements finis, $\forall X, Y \in B_f(X_0, 2R)$,

$$\|f(X) - f(Y)\| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|J_f(X + \theta(Y - X))\| \cdot \|Y - X\|$$

Donc, il suffit de poser $k_R = \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|J_f(X + \theta(Y - X))\|$

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < R$ et soit $Y_0 \in B_f(X_0, \epsilon)$.

On note $Y(t)$ la solution maximale de l'équation $\dot{X} = f(X)$ telle que $Y(0) = Y_0$. Son temps maximal d'existence est $T_{max}(Y_0)$.

(c) Montrer qu'il existe $T' \in]0, T]$ tel que $Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$ pour tout $t \leq T'$.

Soit $g : [0, \min(T_{max}(Y_0), T)] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $g(t) = \|Y(t) - X_0\| - 2R$.

$g(t)$ est continue car $Y(t)$ est de classe \mathcal{C}^1 .

On note que $g(0) = \|Y(0) - X_0\| - 2R \leq \epsilon - 2R < -R < 0$.

On pose

$$T' = \begin{cases} \inf\{t : t \in [0, \min(T_{max}(Y_0), T)] \text{ et } g(t) = 0\} & \text{si l'infimum existe} \\ T & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

On note que $0 < T' \leq T$ et $\forall t \in [0, T'] \quad g(t) \leq 0 \iff Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$.

(d) Montrer que pour un tel T' , on a $\|X(t) - Y(t)\| \leq \epsilon e^{k_R t}$ pour tout $t \in [0, T']$.

Soit $h : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $h(t) = Y(t) - X(t)$. On veut étudier $\|h(t)\|$.

$$\dot{h}(t) = \dot{Y}(t) - \dot{X}(t) \quad (2)$$

$$= f(Y(t)) - f(X(t)) \quad (3)$$

Donc, $\|\dot{h}(t)\| = \|f(Y(t)) - f(X(t))\| \leq k_R \|Y(t) - X(t)\| = k_R \|h(t)\|$

On considère ϕ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) &= k_R \phi(t) \\ \phi(0) &= \epsilon \end{cases} \quad (4)$$

On note que $\phi(t) = \epsilon e^{k_R t} \quad \forall t \in [0, T']$.

On note que $\|h(0)\| = \|Y_0 - X_0\| \leq \epsilon \implies \|h(0)\| \leq \phi(0)$.

Par le lemme de Gronwall, $\|h(t)\| \leq \phi(t)$.

Donc, $\|Y(t) - X(t)\| \leq \epsilon e^{k_R t} \quad \forall t \in [0, T']$.

(e) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $T_{max}(Y_0) > T$.

Soit $\psi : t \in [0, T] \mapsto \|Y(t)\|$. On veut montrer que $\exists \epsilon > 0$ tel que $\psi(t)$ est bornée \implies la solution locale existe $\forall t \leq T$.

On sait que $\forall t \in [0, T'] \quad \psi(t) \leq 2R$.

Prenons $\epsilon = R e^{-k_R T}$. On veut montrer que $T' = T$.

Soit $g : t \in [0, T] \mapsto \|Y(t) - X_0\| - 2R$. On a défini

$$T' = \begin{cases} \inf\{t : t \in [0, \min(T_{max}(Y_0), T)] \text{ et } g(t) = 0\} & \text{si l'infimum existe} \\ T & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

On note que

$$\|Y(t) - X_0\| = \|(Y(t) - X(t)) + (X(t) - X_0) + X_0\| \quad (6)$$

$$\leq \|Y(t) - X(t)\| + \|X(t) - X_0\| + \|X_0\| \quad (7)$$

$$\leq R e^{-k_R T} \cdot e^{k_R t} + R + \|X_0\| \quad (8)$$

$$\leq R(1 + e^{k_R(t-T)}) \quad (9)$$

Donc $\forall t \leq T, g(t) \leq R(e^{k_R(t-T)} - 1)$.

Donc $g(t) < 0 \quad \forall t < T$ et $g(T) \leq 0$. Alors, $T' = T$.

On conclue $\forall t \in [0, T] \quad \psi(t) = \|Y(t)\| \leq 2R$. Donc, $T_{max}(Y_0) > T$.

Définition. Soit $\phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit $\liminf_{X \rightarrow X_0} \phi$ par la formule suivante :

$$\liminf_{X \rightarrow X_0} \phi = \sup_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\inf_{\|X - X_0\| < \epsilon} \phi(X) \right)$$

(f) Montrer que $\liminf_{X \rightarrow X_0} T_{max}(X) \geq T_{max}(X_0)$.

On a montré que $\forall Y_0$ tel que $\|Y_0 - X_0\| < \epsilon$ on a $\forall T < T_{max}(X_0) \quad T_{max}(Y_0) > T$. Donc, $T_{max}(Y_0) \geq T_{max}(X_0)$.

Donc, $\inf_{\|X - X_0\| < \epsilon} T_{max}(X) \geq T_{max}(X_0)$.

Donc $\liminf_{X \rightarrow X_0} T_{max}(X) \geq T_{max}(X_0)$.

(g) On considère $f(x, y) = (x^2y, 0)$. Pour une condition initiale $X_0 = (x_0, y_0)$, donner $T_{max}(X_0)$.

En particulier déterminer les conditions initiales X_0 pour lesquelles la solution $X(t)$, telle que $X(0) = X_0$, est globale. Tracer le portrait de phase de cette équation.

On a le système autonome de dimension 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= x^2y \\ \dot{y}(t) &= 0 \end{cases} \quad (10)$$

Donc, $y(t) = y_0 \implies \dot{x}(t) = x^2y_0$.

On note que c'est une équation à variables séparables.

$$\frac{dx}{x^2} = y_0 dt \quad (11)$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t y_0 dt \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} = y_0 t \quad (13)$$

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 y_0 t} \quad (14)$$

On a donc la solution locale

$$X(t) = \left(\frac{x_0}{1 - x_0 y_0 t}, y_0 \right)$$

Le temps maximale de existence de $X(t)$ est donnée par

$$1 - x_0 y_0 T_{max} = 0 \iff T_{max} = \frac{1}{x_0 y_0}$$

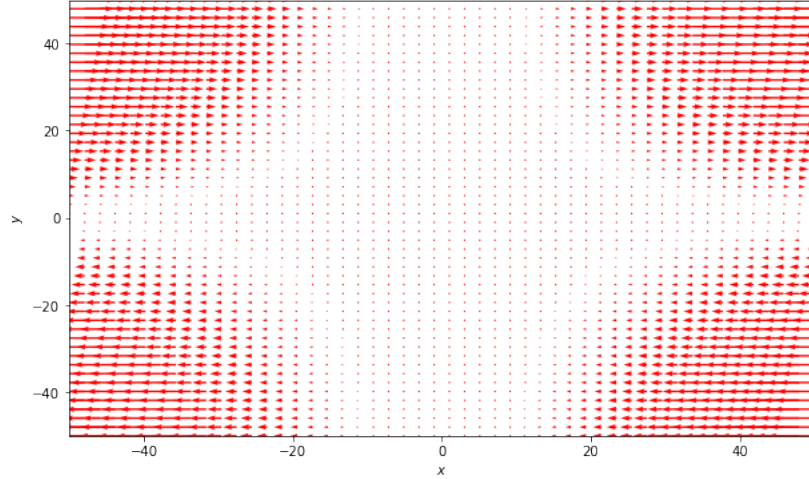
On note que les conditions initiales X_0 pour lesquelles la solution $X(t)$ est globale sont

$$\begin{cases} X_0 = (x_0, 0) \implies X(t) = (x_0, 0) \\ X_0 = (0, y_0) \implies X(t) = (0, y_0) \end{cases} \quad (15)$$

Enfin, on trace le portrait de phase. On note que les trajectoires des solutions dans le plan (x, y) sont toujours des droites avec y constante.

On note que si $y_0 > 0$ on a $\dot{x}(t) > 0$, donc la solution se déplace vers la droite.

Par contre si $y_0 < 0$ on a $\dot{x}(t) < 0$, donc la solution se déplace vers la gauche.



(h) On considère maintenant $f(x, y) = (x^2 - yx^4, 0)$. Soit $a > 0$, montrer que l'on a $T_{max}(a, 0) < +\infty$ alors que pour tout ϵ tel que $\epsilon a^2 < 1$, on a $T_{max}(a, \epsilon) = +\infty$. Ceci peut s'écrire

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{max}(a, \epsilon) \neq T_{max}(a, 0)$$

Exercice 2

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, la suite $\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}$ (avec $A^0 = I_n$ la matrice identité) est une suite de Cauchy et converge vers une matrice notée e^A . Si de plus A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ commutent, alors on a $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.

(a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(t) = e^{tA}$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et calculer sa dérivée.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(s+t) = f(s)f(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et telle que $f(0)$ est inversible. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $f(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.