

## PC 4 : Vecteurs aléatoires à densités - lois conditionnelles

Dernière modification 9 mai 2023

### Exercice 1

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Pour tout  $p \in \mathbb{R}$ , justifier que  $e^{pX}$  est intégrable et calculer  $\mathbb{E}(e^{pX})$ .

Une variable aléatoire  $X \in L^0$  est dite  $\mathbb{P}$  - intégrable si  $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ . Pour toute fonction mesurable  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a que  $h$  est  $P_X$  - intégrable si et seulement si  $h(X)$  est  $\mathbb{P}$  - intégrable.

Par définition,  $e^{pX}$  est intégrable si  $\mathbb{E}(|e^{pX}|) < +\infty$ .

La fonction  $e^{pX}$  est positive, donc  $\mathbb{E}(e^{pX})$  a un sens à calculer. On note que

$$|e^{pX}|f(x) = \frac{e^{px} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (1)$$

est bien intégrable par croissances comparées.

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{pX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{px - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{p^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-p)^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{p^2}{2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

## Exercice 2

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles indépendantes et  $S = X + Y$ . Lorsque  $X$  et  $Y$  suivent la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , déterminer la densité conditionnelle de  $X$  sachant  $S = s$ . En déduire  $\mathbb{E}(X|S)$ .

Par définition,

$$f_{X|S=s}(x) = \frac{f_{X,S}(x, s)}{f_S(s)} \quad (3)$$

Alors, on veut calculer la loi jointe  $f_{X,S}(x, s)$  et la loi marginale  $f_S(s)$ . On va utiliser la méthode de la fonction muette.

### Méthode de la fonction muette

Soit  $\mu$  une probabilité sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \mu(dx), \quad (4)$$

pour toute fonction  $h$  continue bornée. Alors,  $P_X = \mu$ .

Soit  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(X, S)] &= \mathbb{E}[\phi(X, X + Y)] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(x, x + y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

On note que  $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = [\lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}] [\lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{y \geq 0}] = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbf{1}_{x, y \geq 0}$ .

On fait la substitution

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases} \quad (6)$$

Alors,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \phi(x, x + y) \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbf{1}_{x, y \geq 0} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(u, v) \lambda^2 e^{-\lambda v} \mathbf{1}_{v \geq u \geq 0} du dv. \quad (7)$$

Donc,  $(u, v) = (X, S)$  admet densité

$$f_{X,S}(x, s) = \lambda^2 e^{-\lambda s} \mathbf{1}_{s \geq x \geq 0} \quad (8)$$

Pour vérifier ce résultat, on peut calculer la loi marginale  $f_X(x)$ .

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{+\infty} f_{X,S}(x, s) ds \\ &= \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda s} ds \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \text{ ce qui est cohérent.} \end{aligned} \quad (9)$$

On calcule la loi marginale

$$\begin{aligned}f_S(s) &= \int_0^{+\infty} f_{X,S}(x,s)dx \\&= \int_0^s s\lambda^2 e^{-\lambda s} dx \\&= \lambda^2 s e^{-\lambda s} \mathbf{1}_{s \geq 0}.\end{aligned}\tag{10}$$

Donc, on a la densité conditionnelle

$$f_{X|S=s}(x) = \frac{1}{s} \mathbf{1}_{s \geq x \geq 0} \quad \text{on reconnaît la loi uniforme } \mathcal{U}(0, s).\tag{11}$$

Pour calculer  $\mathbb{E}[X|S]$ , on calcule d'abord  $\mathbb{E}[X|S=s]$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|S=s] &= \int_{\mathbb{R}} x f_{X|S=s}(x) dx \\&= \int_0^s s \frac{x}{s} dx \\&= \frac{s}{2}.\end{aligned}\tag{12}$$

Donc,  $\mathbb{E}[X|S] = \frac{S}{2}$ .