PC 3 : Espérance, inégalités, Fubini

1 Exercices corrigés

Exercice 1. Calculer l'espérance et la variance des lois : uniforme sur un intervalle $\mathcal{U}([a,b])$, exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et gaussienne $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Solution. Les trois lois sont à densité, disons f, on utilise alors les formules (théorème 5.3) :

$$\mathbb{E}(X) = \int x f(x)\mathrm{d}x, \qquad \mathbb{E}(X^2) = \int x^2 f(x)\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

On trouve ainsi :

1. Loi uniforme, $X \sim \mathcal{U}([a,b])$:

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Loi exponentielle, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \underset{[IPP]}{=} \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \underset{[IPP]}{=} \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. Loi gaussienne, $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$:

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu+\sigma u}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \mu,$$
$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\mu+\sigma u)^2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \mu^2 + \sigma^2\int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

Par ailleurs, par intégration par partie,

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit $\mathrm{Var}(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$.

Exercice 2. Soit X une variable distribuée selon la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable $Y = \sqrt{X}$.

Solution. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Par la formule de transfert, on a

$$\mathbb{E}(f(Y)) = \mathbb{E}(f(\sqrt{X})) = \lambda\int_0^{+\infty} f(\sqrt{x})\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

En faisant le changement de variable $x = u^2$, $u \geq 0$, dans l'intégrale précédente, on voit que

$$\mathbb{E}(f(Y)) = 2\lambda\int_0^{+\infty} f(u)u\,\mathrm{e}^{-\lambda u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} f(u)h(u)\mathrm{d}u,$$

avec $h(u) = 2\lambda u\,\mathrm{e}^{-\lambda u^2}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u)$, $u \in \mathbb{R}$. L'égalité précédente étant vraie pour toute fonction f mesurable bornée, on en déduit que Y admet la densité h.

2 Lois

Exercice 3 (Loi de Cauchy)**.** Soit X une variable aléatoire de Cauchy, de densité donnée par $x \mapsto (\pi(1+x^2))^{-1}$. Démontrer que la loi de $1/X$ admet une densité et la calculer en utilisant la méthode de la fonction muette.

Exercice 4 (Egalité en loi)**.** Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.

1. On suppose que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

3 Inégalités

Exercice 5.
Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable centrée (i.e. telle que $\mathbb{E}(X) = 0$) et $a > 0$.

1. Montrer que $a \leq \mathbb{E}\left((a - X)\,\mathbb{1}_{\{X<a\}}\right) \leq \sqrt{\mathbb{P}(X < a)}\sqrt{\mathrm{Var}(X) + a^2}$. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy–Schwarz.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)+a^2}$ et comparer avec la majoration obtenue par l'inégalité de Bienaymé Chebychev.

Exercice 6 (Inégalité de Paley-Zygmund)**.** Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda\mathbb{E}(X) + X\,\mathbb{1}_{\{X>\lambda\mathbb{E}(X)\}}$.
2. On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, que pour tout $\lambda \in]0, 1[$ on a

$$\mathbb{P}(X > \lambda\mathbb{E}(X)) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \inf_{c\in\mathbb{R}} \mathbb{E}((X - c)^2)$.
2. En déduire que si X est à valeurs dans $[a, b]$, alors $\mathrm{Var}(X) \leq \frac{1}{4}(b - a)^2$. Peut-il y avoir égalité ?

4 Loi jointe-loi marginale-vecteurs aléatoires

Exercice 8. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{e}^{-x(1+y^2)}\,\mathbb{1}_{x,y\geq 0}\,.$$

1. Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité.
2. Déterminer les lois de X et de Y.

Exercice 9. On considère un gâteau circulaire avec une cerise sur le bord. On découpe le gâteau en deux parts en coupant suivant deux rayons choisis au hasard.

1. Avec quelle probabilité la part contenant la cerise est-elle plus petite que la part ne contenant pas la cerise ?
2. Quelle est la longueur angulaire moyenne de la part contenant la cerise ?

5 Exercices supplémentaires

Exercice 10. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Déterminer la loi de $\sin V$.

Exercice 11 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Soit X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)} \tag{CS}$$

1. Vérifier que pour tout $x, z \in \mathbb{R}$, $xz \leq \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2}$. En déduire que si $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$, alors XZ est intégrable et
$$\mathbb{E}(|XZ|) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(X^2) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Z^2).$$
2. En appliquant l'inégalité précédente à $Z = tY$, avec $t > 0$, montrer (CS).

Exercice 12 (Lois jointes, marginales et conditionnelles)**.** Soit (X, Y) et (X', Y') des couples de variables aléatoires de densités respectives

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{4}(1 + xy)\,\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x, y) \quad \text{et} \quad f_{(X',Y')}(x', y') = \frac{1}{4}\,\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x', y').$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien de densités.
2. Montrer que (X, Y) et (X', Y') ne suivent pas la même loi.
3. Montrer que (X, Y) et (X', Y') ont les mêmes lois marginales, c'est-à-dire que X et X' sont de même loi, et que Y et Y' sont de même loi (en fait X, X', Y, Y' sont de même loi !).

Solution.

1. Clairement, $f_{(X,Y)} \geq 0$ et $f_{(X',Y')} \geq 0$ sur $\mathbb{R}^2$. On remarque que $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ et $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$. Ainsi
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{(X,Y)}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{(X',Y')}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$
2. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0) &= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1 1 + xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}\\ \mathbb{P}(X' \geq 0, Y' \geq 0) &= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$
Donc (X, Y) et (X', Y') n'ont pas la même loi (on pourrait aussi faire plus bref parce que c'est évident vu que les densités sont différentes...)
3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f_{X'}(x) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}u$ et de même $f_{Y'}(y) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$. Par ailleurs
$$f_X(x) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4} + xy\right)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x),$$
et de même $f_Y(y) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$.