MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 1 – Espaces métriques

Pour la séance de petite classe du vendredi 21 avril,
préparer deux exercices parmi les trois suivants : Exercices 1, 2 et 4.

La présence d'un astérique $*$ signale les exercices plus difficiles.

La correction de la majorité des exercices sera disponible le vendredi 21 avril après la PC.

Exercice 1 (Définitions de distance et de fermé)**.** (a) Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que les applications $\delta_1 : (x, y) \in E \times E \to \delta_1(x, y) = \log(1 + d(x, y))$ et $\delta_2 : (x, y) \in E \times E \to \delta_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ sont des distances sur E.
Indication : on pourra au préalable vérifier les inégalités suivantes : pour tout $a, b \geq 0$, $\log(1 + a + b) \leq \log(1 + a) + \log(1 + b)$ et $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(b) Sur $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$, l'ensemble suivant est-il fermé

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} ; n \in \{1, 2, \dots\}\right\}?$$

Exercice 2 (Prolongement des égalités)**.** Soient f et g deux applications continues d'une espace métrique (E, d) dans $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle.

(a) Montrer que l'ensemble Z des points x de E tels que $f(x) = g(x)$ est un fermé de E.

(b) Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout x d'un sous-ensemble B dense dans E, alors $f = g$ sur E.

Exercice 3 (Forme linéaire continue sur un espace de fonctions)**.** On considère $C([0, 1])$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs réelles muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ de la convergence uniforme. Montrer que l'application $L : f \in C([0, 1]) \to f(0) \in (\mathbf{R}, | \cdot |)$ est une forme linéaire continue.

Exercice 4 (Normes de matrices)**.** Sur $M_N(\mathbf{K})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille N à coefficients dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on définit l'application $\| \cdot \|$ par :

$$\|A\| := \max_{i=1,\dots,N} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| \quad \text{où } A = (A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}.$$

(a) Vérifier que $\| \cdot \|$ est bien une norme sur $M_N(\mathbf{K})$. Prouver que pour toutes $A, B \in M_N(\mathbf{K})$,

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$$

(b) Prouver que la norme $\| \cdot \|$ ci-dessus est subordonnée à la norme sup $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbf{K}^N$, définie par $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |x_i|$ pour tout $x = (x_i) \in \mathbf{K}^N$.

(c) Retrouver le résultat de la question (a).

(d) Quelle est la norme sur $M_N(\mathbf{K})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbf{K}^N$, définie par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$ pour tout $x = (x_i) \in \mathbf{K}^N$?

Exercice 5 (Application distance à une partie non vide)**.** Soient (X, d) un espace métrique et Y une partie non vide de X.

(a) Prouver que l'application $d_Y : X \to \mathbf{R}$ définie par :

$$d_Y(x) := \inf_{y \in Y} d(x, y),$$

est 1-lipschitzienne.

(b) Prouver que x appartient à l'adhérence $\overline{Y}$ de Y si, et seulement si, $d_Y(x) = 0$.

(c) Prouver que les fermés de X sont les ensembles de zéros des fonctions continues sur X à valeurs réelles.

Exercice 6 (Comparaison de quelques normes sur l'espace des fonctions continues ou C^1)**.**

(a) Sur l'espace $C([0,1], \mathbf{R})$, montrer que les applications suivantes sont des normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x.$$

(b) Les deux normes ci-dessus sont-elles équivalentes ?

(c) Sur l'espace $C^1([0,1], \mathbf{R})$, établir quelques comparaisons parmi les normes suivantes :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty, \; N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f\|_1, \; N_3(f) = \|f'\|_1 + \|f\|_\infty, \; N_4(f) = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty.$$

Exercice 7 (De façon générale, l'union infinie de fermés n'est pas fermée. Toutefois, ce résultat est vrai moyennant une hypothèse supplémentaire (cas de $\mathbf{R}$))**.** Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on se donne un fermé F_n de $\mathbf{R}$ inclus dans $\mathbf{R} \setminus [-u_n, u_n]$. Montrer que $\cup_{n \in \mathbf{N}} F_n$ est fermé dans $\mathbf{R}$.

Exercice 8 (Variante plus générale de l'exercice 2)**.** Soient f et g deux applications continues d'un espace métrique (E, d) dans un autre (F, d'). Démontrer que l'ensemble A des points x tels que $f(x) = g(x)$ est fermé dans E.

Exercice 9 (Exercice un peu abstrait de topologie des espaces métriques. La question (b) est pertinente en théorie de l'intégration)**.** Soit F un fermé quelconque d'un espace métrique (X, d). À chaque entier positif n, on fait correspondre l'ouvert O_n défini par $O_n = \cup_{x \in F} B_{1/n}(x)$, où $B_{1/n}(x)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon $1/n$.

(a) Montrer que $F \subset \cap_{n=1}^\infty O_n$. Démontrer l'inclusion réciproque. On montrera que si $y \in \cap_{n=1}^\infty O_n$ alors, pour chaque entier n, il existe $x_n \in F$ tel que $x_n \in B_{1/n}(y)$.

(b) En déduire que tout fermé d'un espace métrique est l'intersection dénombrable d'une famille d'ouverts et que tout ouvert est l'union dénombrable d'une famille de fermés.

Exercice 10 (Utilisation de la partie entière pour un exercice de topologie de $\mathbf{R}$)**.** Let but de l'exercice est de montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p + q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbf{Z}$, est dense dans $\mathbf{R}$.

(a) Remarquer que D est stable par addition et multiplication.

(b) Posons $u = \sqrt{2} - 1$; montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver $n \geqslant 1$ tel que $0 < u^n < b - a$, puis $m \in \mathbf{Z}$ vérifiant $a < mu^n < b$. En déduire le résultat.

Exercice 11 (Exercice de topologie de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$)**.** (a) Rappeler les définitions des bornes supérieure et inférieure d'un ensemble borné non vide de nombres réels. Soient A et B sont deux ensembles bornés non vides de $\mathbf{R}$. Calculer ou comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$, les nombres suivants (s'ils existent) :

$$\sup(A+B), \quad \sup(A \cup B), \quad \sup(A \cap B), \quad \inf(A \cup B), \quad \inf(A \cap B).$$

(b) Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $A \subset \mathbf{R}^n$ on définit $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. Dans $\mathbf{R}$, déterminer $d(0, \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$ et $d(\sqrt{2}, \mathbf{Q})$. Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer $d(M, \mathcal{D})$ où $M = (x, y, z)$ est un point de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{D}$ est la droite passant par l'origine et de vecteur directeur unitaire (a, b, c).

(c) Pour $A, B \subset \mathbf{R}^n$ on définit $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$. Trouver $d(A, B)$ lorsque A est une branche de l'hyperbole $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ xy = 1\}$ et B une asymptote.

(d) On définit $\operatorname{diam}(A) = \sup_{a,b \in A} \|a - b\|$, le *diamètre* de A. Que valent les diamètres $\operatorname{diam}(]0,1[\cap \mathbf{Q})$ et $\operatorname{diam}([0,1] \cap \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$?

Exercice 12 (*Application de l'exercice 5)**.** (a) Soient $A, B \subset X$. On suppose que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

(b) (Lemme d'Urysohn) Soient A et B deux fermés disjoints de X. Prouver qu'il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$.

Exercice 13 (*Exercice de topologie dans un espace de suites)**.** On note ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées, et C_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0, munis de la métrique d définie par $d(x, y) = \sup_{n \geqslant 0} |x_n - y_n|$ où l'on note $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ et $y = (y_n)_{n \geqslant 0}$.

(a) Montrer que C_0 est fermé dans ℓ^∞.

(b) Montrer que l'ensemble des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang est dense dans C_0 mais n'est pas dense dans ℓ^∞.

Exercice 14 (*Un deuxième exercice de topologie dans un espace de suites.)**.** Soit C_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0, muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. On considère la forme linéaire $\varphi : C_0 \to \mathbf{R}$ définie par

$$(u_n)_{n \geqslant 0} \mapsto \varphi((u_n)_{n \geqslant 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$

(a) L'application φ est-elle continue ?

(b) Calculer sa norme.

(c) Cette norme est-elle atteinte sur C_0 ?

Exercice 15 (*Exercice subtil sur les formes linéaires “positives”)**.** Soit E l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle $[0, 1]$, et muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Soit φ une forme linéaire sur E qui prend des valeurs positives sur toute fonction dont les valeurs sont toutes positives. Prouver que φ est une forme linéaire continue.