PC 2 : Tribus et espaces de probabilité – Variables aléatoires réelles – Densités de probabilité

Les exercices 1 et 4 sont corrigés pour vous donner un exemple de rédaction.

1 Tribus et espaces mesurés

Exercice 1. On définit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que ls intervalles $]a, b]$, $]-\infty, a[$, $]a, b[$, $[a, b[$ et $[a, b]$ appartiennent à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tous réels $a < b$.

Solution. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. On a $]a, b] =]-\infty, a]^c \cap]-\infty, b]$. Comme une tribu est stable par intersection et passage au complémentaire, on obtient que $]a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. On a $]-\infty, a[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-\infty, a - 1/n]$. Comme une tribu est stable par union dénombrable, on obtient bien que $]-\infty, a[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Il suffit de remarquer que $]a, b[=]a, b] \cap]-\infty, b[$ et d'utiliser les deux points précédents.
4. On a $[a, b[=]-\infty, b[\cap [a, +\infty[=]-\infty, b[\cap]-\infty, a[^c$. Comme une tribu est stable par intersection et passage au complémentaire, on obtient le résultat escompté en utilisant le second point.
5. On a $[a, b] =]-\infty, b] \cap [a, +\infty[=]-\infty, b] \cap]-\infty, a[^c$. On conclut alors comme pour le point précédent.

Exercice 2. On appelle « boréliens » les ensembles dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; on rappelle que la mesure de Lebesgue Leb est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathrm{Leb}(]a, b[) = b - a$ pour touts réels $a < b$.

1. Montrer que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est borélien et de mesure de Lebesgue nulle.
3. Soit $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Montrer que N^c est dense dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on pourra montrer raisonner par l'absurde et considérer $t \in \mathbb{R}$ tel que il existe un voisinage ouvert O de cet élément vérifiant $O \cap N^c = \emptyset$.

Exercice 3 (Tribu engendrée par une fonction)**.** On considère une fonction $X : \Omega \to E$. Si $\mathcal{E}$ est une tribu sur E, montrer que

$$\mathcal{A} = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$$

est une tribu sur Ω.

2 Variables aléatoires réelles

Exercice 4 (Loi uniforme)**.** Soit U une v.a. uniforme sur $[0,1]$. On définit $X = \min(U, 1-U)$ et $Y = \max(U, 1-U)$. Trouver les lois de X et Y.

Solution. La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $[1/2, 1]$ et pour tout $t \in [1/2, 1]$,

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(U \leq t, 1-U \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t, U \geq 1-t) = t - (1-t) = 2t - 1$$

donc Y suit la loi uniforme sur $[1/2, 1]$. On remarque que $X = 1 - Y$ et on en déduit que X suit la loi uniforme sur $[0, 1/2]$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F, soit un intervalle A et soit $Y = \mathbb{1}_A(X)$. Donner la fonction de répartition de Y.

Exercice 6 (Variables exponentielles)**.** Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles distribuée selon une loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que $U = X/\lambda$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.
2. Donner la loi de la variable aléatoire $V = 1 + \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.
3. Donner la loi de $W = \sqrt{X}$.
4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \min(X, a)$, où $a > 0$. La variable Y a-t-elle une densité ? Pour cette dernière question on pourra montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue alors $t \mapsto \int_{-\infty}^{t} f(s)\mathrm{d}s$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (Simulation par la méthode d'inversion)**.** Comment créer des réalisations d'une loi de probabilité donnée à l'aide d'un ordinateur ? Il existe de nombreuses méthodes différentes en fonction de la loi que l'on souhaite simuler. L'ingrédient de base de toutes ces méthodes est un générateur de (pseudo-)variables aléatoires indépendantes de la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. En effet, tout bon langage de programmation est équipé d'un tel générateur. Certaines méthodes de simulation consistent à tirer une réalisation de la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et à appliquer une transformation telle que le résultat suit la loi souhaitée. D'autres méthodes plus complexes nécessitent plusieurs réalisations de la loi uniforme, qui sont combinées de sorte qu'on obtienne une réalisation de la loi souhaitée.

Pour la méthode de simulation dite d'inversion on considère une fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$ et on introduit son inverse généralisée définie par

$$p \in [0,1] \mapsto F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x;\, F(x) \geq p\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1. Montrer en utilisant que F est continue à droite que pour tout $p \in]0,1[$, $F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p$.
2. Montrer que $F^{\leftarrow}(p) \leq x$ si et seulement si $p \leq F(x)$ pour tout $p \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, la variable aléatoire $X = F^{\leftarrow}(U)$ a pour fonction de répartition F.
4. Déduire de la question précédente une méthode générale de simulation de variables aléatoires réelles et l'appliquer au cas d'une variable exponentielle.
5. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles dont la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $p \in]0,1[$, $F \circ F^{\leftarrow}(p) = p$. En déduire la loi de $F_X(X)$?

Exercice 8. Considérons une variable aléatoire X continue à valeurs positives représentant la durée de vie d'une ampoule, de fonction de répartition F et de densité f continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$. La fonction *taux de panne* associée est définie pour tout $t > 0$ par

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

1. Montrer que pour tout $t > 0$,

   $$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}(X \in]t, t+\epsilon[\mid X > t) = \lambda(t).$$

   On interprète $\lambda(t)$ comme le taux de panne conditionnel instantané en supposant que l'ampoule fonctionnait encore au temps t.
2. Calculer la fonction taux de panne quand X suit une loi exponentielle.
3. Montrer que l'on peut caractériser la loi de X par sa fonction taux de panne λ : plus précisément, donner une expression de F en fonction de λ.
4. Exprimer la fonction de répartition associée à un taux de panne affine $\lambda : t \mapsto a + bt$. Pour $a = 0$, la loi obtenue est appelée *loi de Rayleigh*.