

# DM1 : Oscillations d'atomes piégés dans un potentiel parabolique

Dernière modification 29 mai 2023

## 1 Mesure par vol libre de la densité de probabilité de l'impulsion

**Q1** Rappeler sans démonstration l'expression des niveaux d'énergie du système.

Les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique à une dimension sont

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

**Q2** Compte tenu de la valeur numérique de  $a_0$ , pensez-vous qu'il soit possible de résoudre l'extension spatiale de l'état fondamental à l'aide d'un microscope optique utilisant la lumière visible ?

$$a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \tag{1}$$

$$= \sqrt{\frac{1,055 \cdot 10^{-34} \text{Js}}{(2,2 \cdot 10^{-25} \text{kg}) \cdot (5,718 \cdot 10^5 \text{rad/s})}} \tag{2}$$

$$= 2,9 \cdot 10^{-8} \text{m} \tag{3}$$

Sachant que la résolution d'un microscope optique est  $0,2\mu\text{m} \implies$  ce n'est pas possible de résoudre l'extension spatiale de l'état fondamental  $a_0 \approx 0,03\mu\text{m}$ .

**Q3** Au lieu de mesurer la densité de probabilité de la position, on choisit de mesurer la densité de probabilité de l'impulsion,  $|\phi(p, t_0)|^2$ , à un instant  $t_0$  donné. Pour cela, on éteint brusquement le laser de piégeage à l'instant  $t_0$ , de sorte que les atomes se comportent comme un paquet d'ondes libre pour  $t > t_0$ . On rappelle que dans ce cas, pour  $t - t_0$  suffisamment grand, on a

$$|\psi(x, t)|^2 \propto \left| \phi\left(\frac{mx}{t - t_0}, t_0\right) \right|^2$$

(méthode dite du *temps de vol* ou du *vol libre*). L'image obtenue reflète ainsi la densité de probabilité de l'impulsion  $|\phi(p, t_0)|^2$  à l'instant  $t_0$  où le laser de piégeage a été coupé. Commenter la figure 1(a), obtenue de cette manière lorsque  $|\psi(t_0)\rangle = |0\rangle$ , et estimer un ordre de grandeur du temps de vol choisit,  $T_v = t - t_0$ .

On note que la distribution est une gaussienne comme attendu pour l'état fondamental  $|0\rangle$  avec écart-type  $\sigma \approx 100\mu\text{m}$ .

Pour estimer le temps de vol, on utilise la relation

$$\Delta v_0 = \frac{\Delta x(T_v)}{T_v}$$

On note que

$$\begin{cases} \Delta v_0 &= \frac{\Delta p_0}{m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\hbar}{a_0} = 1,65 \cdot 10^{-2} \text{m/s} \\ \Delta x(T_v) &\approx 10^{-4} \text{m} \end{cases} \quad (4)$$

Donc,  $T_v \approx 6\text{ms}$  dans l'ordre de  $10^{-3}\text{s}$ .

**Q4** On considère une fonction d'onde  $\psi(x)$  ainsi que sa transformée de Fourier  $\phi(p)$ . Ecrire l'expression de  $\hat{a}^\dagger \psi(x)$  sous forme d'un opérateur différentiel, puis montrer que

$$\hat{a}^\dagger \phi(p) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{a_0}{\hbar} p - \frac{\hbar}{a_0} \frac{d}{dp} \right) \phi(p).$$

On veut calculer  $\hat{a}^\dagger$ .

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{a_0} + i \frac{a_0}{\hbar} \hat{p} \right)^\dagger \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}^\dagger}{a_0} - i \frac{a_0}{\hbar} \hat{p}^\dagger \right) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{a_0} - i \frac{a_0}{\hbar} \hat{p} \right) \quad (7)$$

Donc,

$$\hat{a}^\dagger \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{a_0} - i \frac{a_0}{\hbar} \hat{p} \right) \psi(x) \quad (8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{a_0} - a_0 \frac{d}{dx} \right) \psi(x). \quad (9)$$

Pour calculer  $\hat{a}^\dagger \phi(p)$ , on applique la transformée de Fourier

$$\begin{cases} x\psi(x) & \mapsto i\hbar \frac{d}{dp}\phi(p) \\ \frac{d}{dx}\psi(x) & \mapsto \frac{ip}{\hbar}\phi(p) \end{cases} \quad (10)$$

Donc,

$$\hat{a}^\dagger \phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{i\hbar}{a_0} \frac{d}{dp} - a_0 \frac{ip}{\hbar} \right) \phi(p) \quad (11)$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\hbar}{a_0} \frac{d}{dp} + \frac{a_0 p}{\hbar} \right) \phi(p) \quad (12)$$

**Q5** En déduire que l'on peut écrire  $\phi_1(p) = \xi p \phi_0(p)$  où  $\xi$  est un nombre complexe que l'on déterminera.

**Q6** Commenter la Figure 1(b).

## 2 Préparation du système dans le premier état excité

**Q1** Déterminer les états propres de  $\hat{H}_1 = \frac{\hbar\Omega}{2} (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|)$  ainsi que les valeurs propres correspondantes.

**Q2** Décomposer l'état  $|\psi(0)\rangle$  dans la base propre obtenue à la question précédente, puis en déduire pour  $t > 0$  l'expression de  $|\psi(t)\rangle$  dans cette même base.

**Q3** Ecrire  $|\psi(t)\rangle$  dans la base propre de  $\hat{H}_0$ .

**Q4** Calculer la probabilité  $\mathcal{P}(t)$  qu'une mesure de  $H_0$  effectué à l'instant  $t$  donne le résultat  $3\hbar\omega/2$ , puis montrer que cette fonction est une fonction périodique dont on déterminera la période  $T$ .

**Q5** A quel instant faut-il interrompre l'application du second laser pour place le système dans l'état  $|1\rangle$  (à une phase près) ?

## 3 Préparation d'un état non stationnaire

**Q1**

Q2

Q3

Q4