

## 一、常用的线性化方法

### 1. 双曲线:

$$\frac{1}{y} = a + \frac{b}{x} \xrightarrow{u=\frac{1}{y}, v=\frac{1}{x}} u = a + bv$$

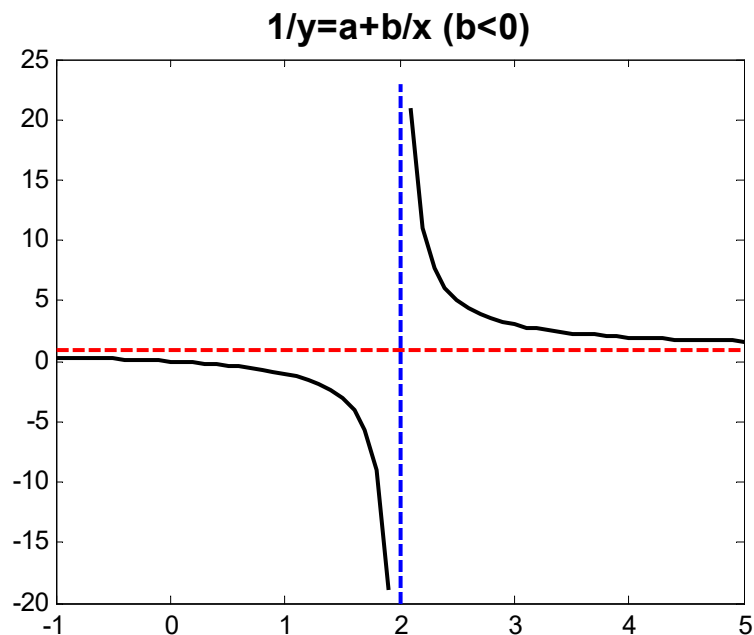
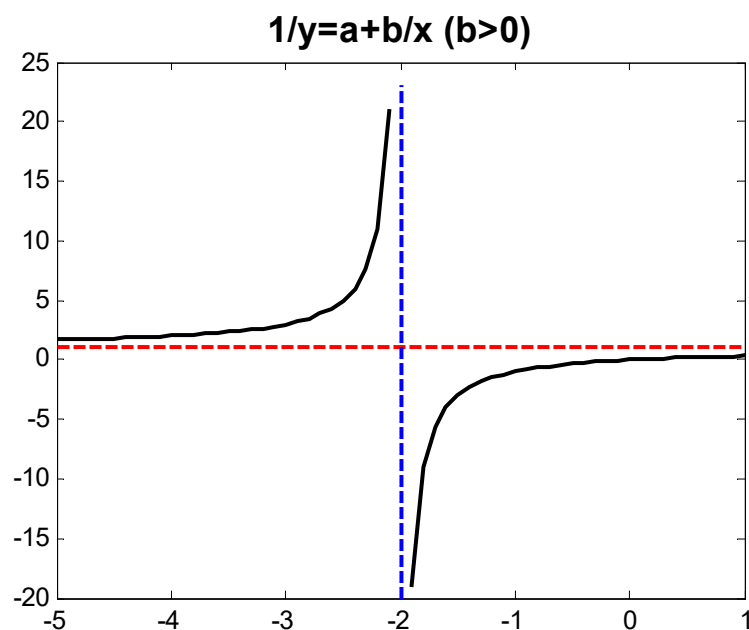


图4-14 双曲线

## 2. 幂函数曲线:

$$y = ax^b \xrightarrow{u=\ln y, \quad v=\ln x, \quad c=\ln a} u = c + bv$$

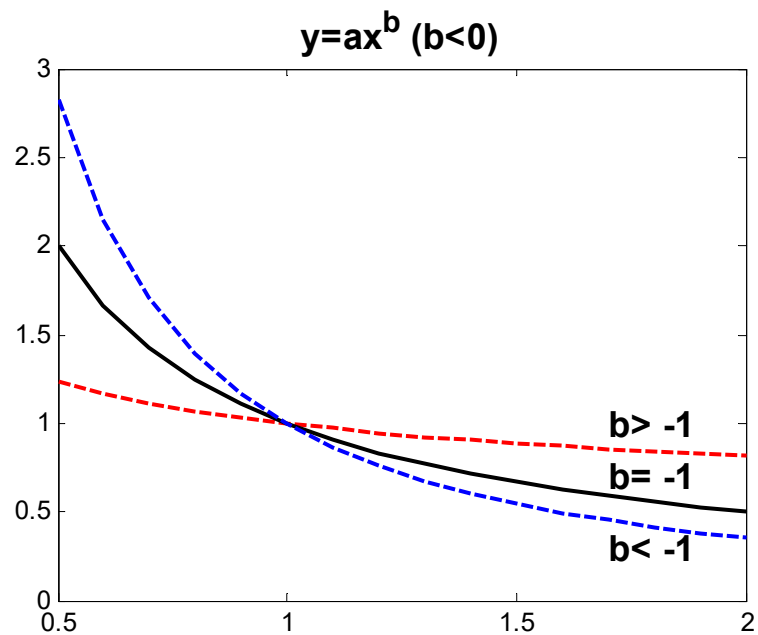
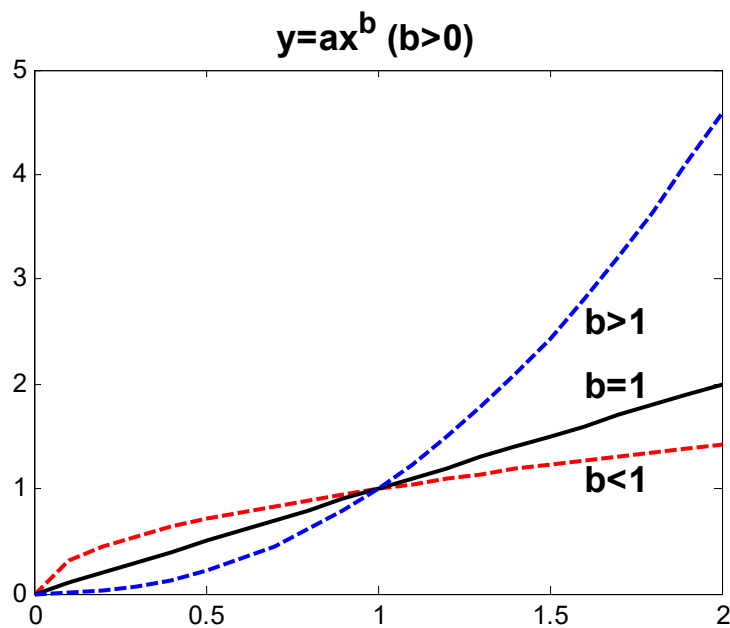


图4-15 幂函数曲线

### 3. 指数曲线:

$$y = ae^{bx} \xrightarrow{u=\ln y, \quad c=\ln a} u = c + bx$$

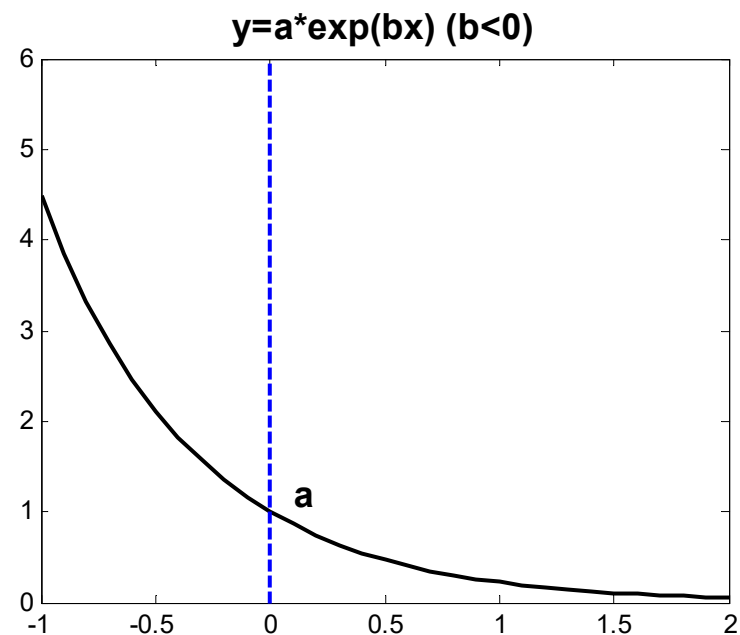
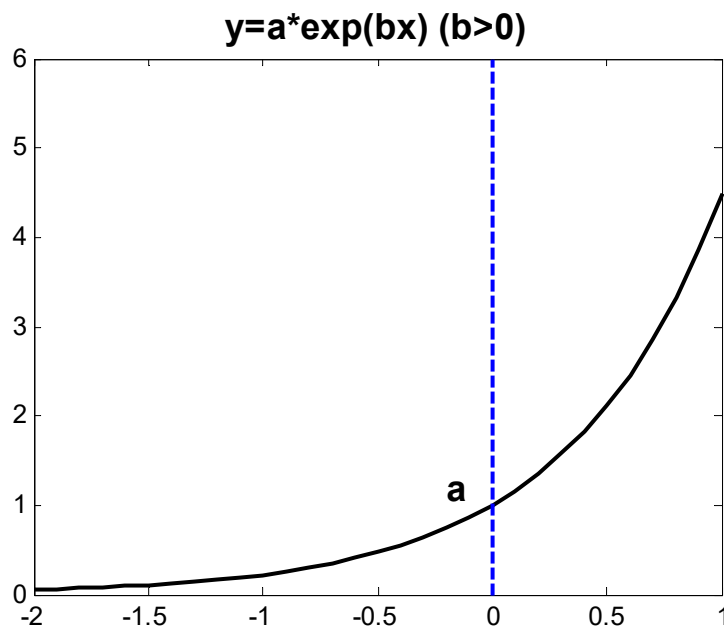


图4-16 指数曲线

## 4. 倒指数函数:

$$y = ae^{\frac{b}{x}} \xrightarrow{u=\ln y, \quad v=\frac{1}{x}, \quad c=\ln a} u = c + bv$$

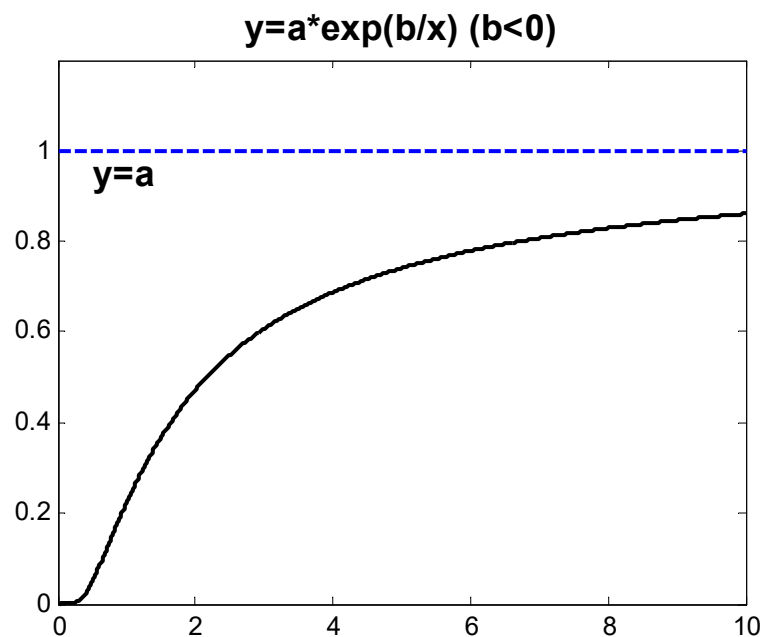
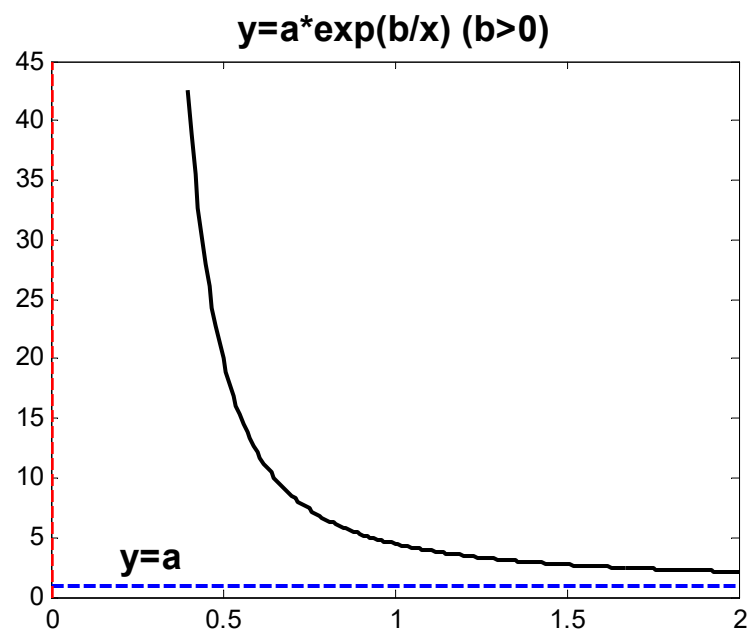


图4-17 倒指数曲线

## 5. 对数曲线:

$$y = a + b \ln x \xrightarrow{v = \ln x} y = a + bv$$

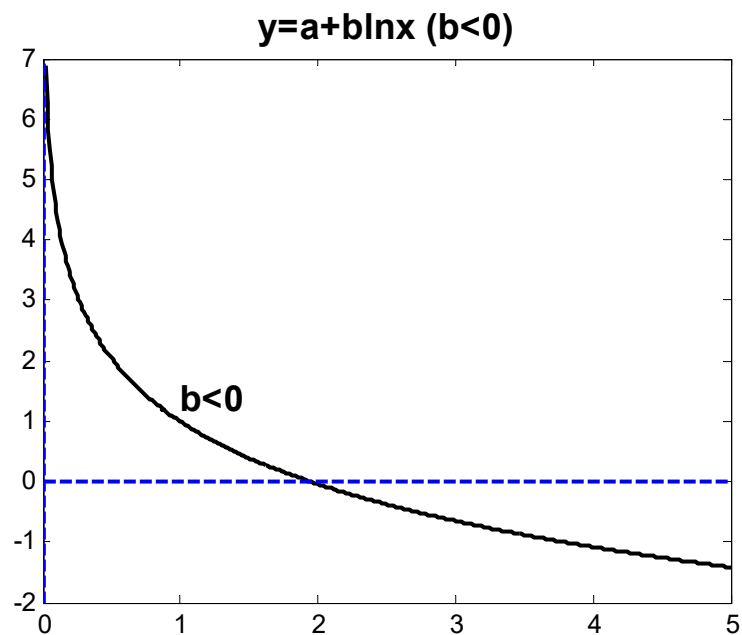
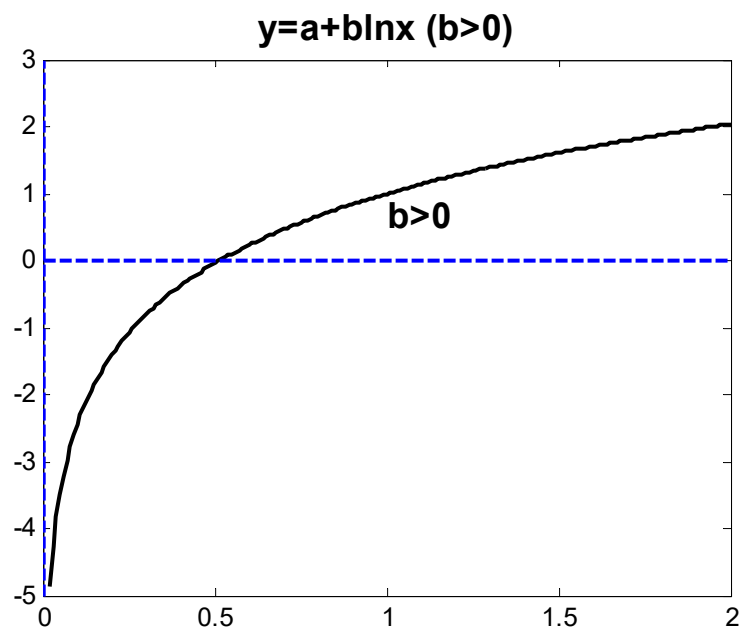


图4-18 对数曲线

## 6. S型曲线:

$$y = \frac{1}{a + be^{-x}} \xrightarrow{u = \frac{1}{y}, v = e^{-x}} u = a + bv$$

$y = 1/(a + b \cdot \exp(-x))$

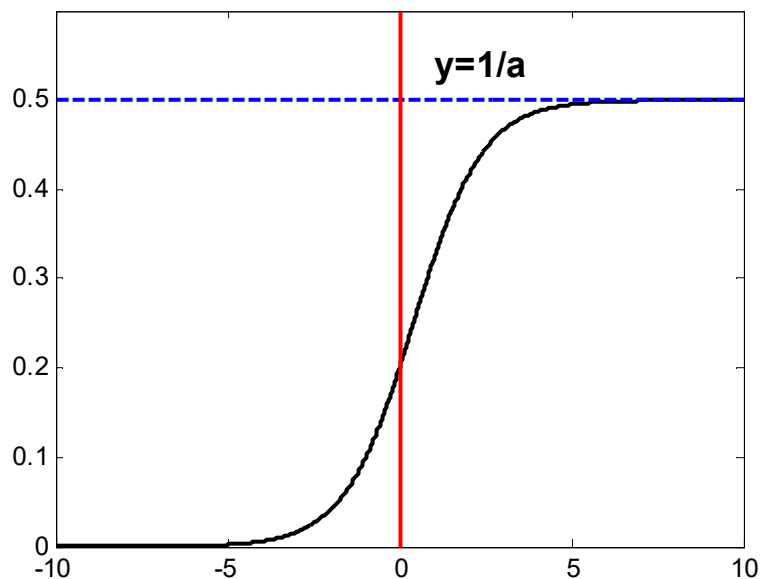


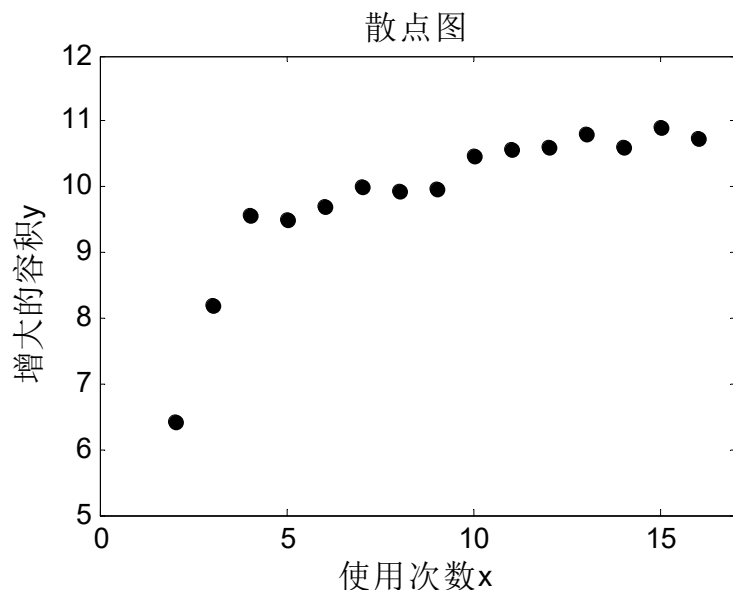
图4-19 S型曲线

实际应用中,一般作出所给数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 的散点图,将图形与直线或以上几种常见的曲线进行比较,选择其中的某条曲线来拟合这些点.

【\*例4.8-4.9(P<sub>190-193</sub>)】出钢时所用盛钢水的钢包,由于钢水对耐火材料的浸蚀,容积不断增大. 试找出使用次数 $x$ 与增大的容积 $y$ 之间的关系. 试验数据列于下表4-7.

表4-7

x	2	3	4	5	6
y	6.42	8.20	9.58	9.50	9.70
x	7	8	9	10	11
y	10.00	9.93	9.99	10.49	10.59
x	12	13	14	15	16
y	10.60	10.80	10.60	10.90	10.76



**说明:** 本例如果选用双曲线函数回归, 则所求回归方程满足

$\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{y_i} - \frac{1}{\hat{y}_i} \right)^2$  最小, 而并非满足残差平方和  $Q_e = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  最小, 因此

所求得的回归曲线 (4.81) 不一定是最佳的拟合曲线. 在选用曲线来表示  $y$  与  $x$  之间的关系时, 最好选用不同的曲线类型分别进行计算,

然后进行比较, 残差平方和  $Q_e = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  最小者为最优.



## 二、多项式回归

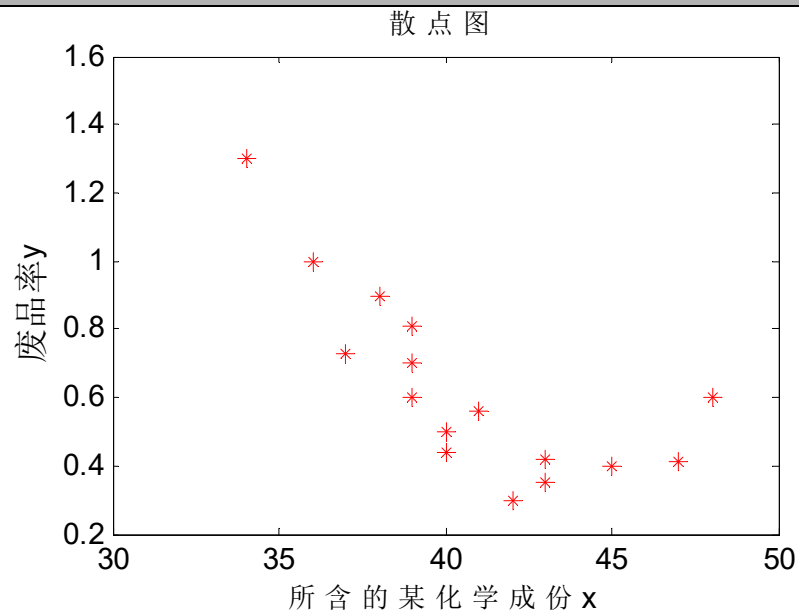
$$\begin{cases} y = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_p x^p + \varepsilon, & (p \geq 2) \\ E\varepsilon = 0, D\varepsilon = \sigma^2 < \infty \end{cases} \text{—— 多项式回归模型} \quad (4.83)$$

令  $x^i = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), 则(4.83)可化归成多元线性回归模型:

$$\begin{cases} y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon \\ E\varepsilon = 0, D\varepsilon = \sigma^2 < \infty \end{cases} \quad (4.38)$$

【★例4.10(P<sub>194</sub>)】某种半成品在生产过程中的废品率 $y(\%)$ 与它所含的某种化学成分 $x(0.01\%)$ 有关, 现将试验所得的16组数据记录如下表, 求 $y$ 对 $x$ 的回归方程.

x	34	36	37	38	39	39	39	40
y	1.30	1.00	0.73	0.90	0.81	0.70	0.60	0.50
x	40	41	42	43	43	45	47	48
y	0.44	0.56	0.30	0.42	0.35	0.40	0.41	0.60



作业:

(P<sub>196-200</sub>) 4.4, 4.8, 4.11