2018 级高等代数 -1 测验 -02 试题
(第 4、5 题任选一题)

1. （20 分）设 $f(x) = x^5 + 7x^4 + 19x^3 + 26x^2 + 20x + 8 \in \mathbb{C}[x]$. 求 $f(x)$ 的所有重根及重数.

解答. 注意到 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 由有理根的存在必要条件验证可知 -2 是 $f(x)$ 的一个有理根. 重复上述过程可得

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4) \\ &= (x+2)^2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) \\ &= (x+2)^3(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

注意到 $(x+2, x^2+x+1) = 1$. 由此可得 -2 是 $f(x)$ 的 3 重根. 显然 x^2+x+1 没有重根. 因此 $f(x)$ 只有一个重根 -2 且重数为 3.

2. （20 分）设 $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 且 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$. 记

$$a = \max\{|a_i|, |b_j|, 0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m\}.$$

证明: 若存在整数 $t > 2a$ 使得 $f(t) = g(t)$, 则 $f(x) = g(x)$.

证明. 由 $f(t) = g(t)$ 可得: $a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 = b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_o$. 注意到 $f(t), g(t) \in \mathbb{Z}$. 由 $a_0 - b_0 = (b_m t^m + \cdots + b_1 t) - (a_n t^n + \cdots + a_1 t)$ 可得 $t \mid a_0 - b_0$. 注意到 $|a_0 - b_0| \leqslant |a_0| + |b_0| \leqslant 2a < t$. 因此 $a_0 - b_0 = 0$, 即 $a_0 = b_0$. 从而由 $f(t) = g(t)$ 可得

$$a_n t^n + \cdots + a_1 t = b_m t^m + \cdots + b_1 t.$$

因为 $t > 0$, 所以 $a_n t^{n-1} + \cdots + a_2 t + a_1 = b_m t^{m-1} + \cdots + b_2 t + b_1$. 因此 $t \mid a_1 - b_1$. 但是, $t > 2a \geqslant |a_1| + |b_1| \geqslant |a_1 - b_1|$. 所以, 利用与 $a_0 = b_0$ 完全相同的讨论可得 $a_1 = b_1$. 重复上述步骤可得 $m = n$ 且 $a_i = b_i$. 因此 $f(x) = g(x)$. □

3. （40 分）设 $f(x) = x^{p-1} + 2x^{p-2} + \cdots + 2^{p-2}x + 2^{p-1} \in \mathbb{Q}[x]$, 其中 p 为素数.

   (1) 求 $f(x)$ 的所有有理根;

   (2) 判断 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约并说明理由;

   (3) 在复数域 $\mathbb{C}$ 上求 $f(x)$ 的标准分解式.

解答. *(1)* 令 $g(x) = (x-2)f(x) = x^p - 2^p \in \mathbb{Z}[x]$. 显然 $f(x)$ 的有理根一定是 $g(x)$ 的有理根. 当 $p = 2$ 时有有理根 $x = -2$.

当 $p > 2$ 时, 由有理根的存在必要条件可知 $g(x)$ 只有一个有理根 2. 另一方面显然 $g'(2) \neq 0$, 因此 2 是多项式 $g(x)$ 的单根. 由此可知 $f(x)$ 没有有理根.

(2) 注意到 $f(x)=2^{p-1}((\frac{x}{2})^{p-1}+\cdots+\frac{x}{2}+1)$. 令 $g(y)=y^{p-1}+\cdots+y+1$. 易知 $f(x)$ 不可约当且仅当 $g(y)$ 不可约. 考虑多项式 $g(y+1)=(y+1)^{p-1}+\cdots+(y+1)+1$. 利用 *Eisenstein* 判别法知 $g(y+1)$ 不可约, 从而 $f(x)$ 不可约.

(3) 由 (2) 知 $(x-2)f(x)=x^p-2^p=\prod_{k=0}^{p-1}(x-2e^{\frac{2k\pi}{p}i})$.
由此可得 $f(x)=\prod\limits_{k=1}^{p-1}(x-2e^{\frac{2k\pi}{p}i})$.

4. （20 分）求多项式 x^n+1 在复数域 $\mathbb{C}$ 及实数域 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式.

解答. 注意到 $x^n=-1=e^{\pi i}$ 的 n 个根为: $x_k=e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i}$, $k=0,1,\ldots,n-1$, 故 x^n+1 在复数域的标准分解式可得

$$x^n+1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i}).$$

注意到 $\overline{e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i}}=e^{\frac{(2n-2k-1)\pi}{n}i}$, 由此可得 x^n+1 在 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式

$$x^n+1=\begin{cases}\prod\limits_{k=0}^{t-1}(x^2-2\cos\frac{2k+1}{n}\pi x+1) & n=2t,\\ (x+1)\prod\limits_{k=0}^{t-1}(x^2-2\cos\frac{2k+1}{n}\pi x+1) & n=2t+1.\end{cases}$$

5. （20 分）设 $\zeta=e^{\frac{2\pi}{5}i}\in\mathbb{C}$. 求多项式 $x^n-\zeta$ 在 $\mathbb{C}$ 上的标准分解式.

解答. 记 $z:=e^{\frac{2\pi}{5n}i}\in\mathbb{C}$. 易知 $(e^{\frac{2\pi}{5n}i})^n=e^{\frac{2\pi}{5}i}$. 由此计算可得

$$\begin{aligned}x^n-\zeta &= \zeta((\frac{x}{z})^n-1)\\ &= \zeta\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{x}{z}-e^{\frac{2k\pi}{n}i})\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}(x-ze^{\frac{2k\pi}{n}i})\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}(x-e^{\frac{2\pi}{5n}i}e^{\frac{2k\pi}{n}i})\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}(x-e^{\frac{10k+2\pi}{5n}i})\end{aligned}$$