# 四川大学期末考试试题（A 卷）参考答案

(2014–2015 学年春)

**注意：满分 100 分，按题号把解答写在答题纸上．在以下题目中，$\mathbb{F}$ 表示一个数域,$\mathbb{Q}$ 表示有理数域，$\mathbb{R}$ 表示实数域，$\mathbb{C}$ 表示复数域，$A^T$ 表示矩阵 $A$ 的转置．**

1. (55 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2014 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. 记 $\mathbb{A} : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C}), X \mapsto AX - XA, X \in M_2(\mathbb{C})$ 为 $M_2(\mathbb{C})$ 上的线性变换. 解答下列各题并说明理由:

 (1) (15 分) 求线性变换 $\mathbb{A}$ 的核空间 $\ker \mathbb{A}$ 及像空间 $\operatorname{Im} \mathbb{A}$ 的一个基及维数;

 (2) (10 分) 求线性变换 $\mathbb{A}$ 的特征多项式 $f_{\mathbb{A}}(\lambda)$ 及最小多项式 $m_{\mathbb{A}}(\lambda)$;

 (3) (15 分) 求线性变换 $\mathbb{A}$ 的行列式因子、不变因子及其 Jordan 标准形;

 (4) (5 分) 求 $M_2(\mathbb{C})$ 的一个子空间 $U$ 使得 $U + \ker \mathbb{A} = U \oplus \ker \mathbb{A} = M_2(\mathbb{C})$;

 (5) (5 分) 问是否存在线性变换 $\mathbb{A}$ 的不变子空间 $W$ 使得 $W + \ker \mathbb{A} = W \oplus \ker \mathbb{A} = M_2(\mathbb{C})$;

 (6) (5 分) 令 $f(x_1, x_2) = X^T AX$, 其中 $X = (x_1, x_2)^T$. 求正交替换将实二次型 $f(x_1, x_2)$ 化为标准形.

**证明.** (1) 由线性变换 $\mathbb{A}$ 的定义可知

$$\ker \mathbb{A} = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}.$$

注意到 $A = 2E_2 + B$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $XA = AX$ 当且仅当 $AB = BA$. 直接计算可知

$$\ker \mathbb{A} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid \forall a, b \in \mathbb{C}\}.$$

易知 $\epsilon_1 = E_2, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为 $\ker \mathbb{A}$ 的一个基且 $\dim \ker \mathbb{A} = 2$.
由维数公式知 $\dim \operatorname{Im} \mathbb{A} = \dim M_2(\mathbb{C}) - \dim \ker \mathbb{A} = 2$.
令 $\epsilon_3 = E_{11}, \epsilon_4 = E_{21}$ 为相应的基本矩阵, 易知 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_4$ 为 $M_2(\mathbb{C})$ 的一个基. 特别地, $\mathbb{A}(\epsilon_3), \mathbb{A}(\epsilon_4)$ 为像空间 $\operatorname{Im} \mathbb{A}$ 的一个基. 计算可知

$$\mathbb{A}(\epsilon_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2014 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{A}(\epsilon_4) = \begin{pmatrix} 2014 & 0 \\ 0 & -2014 \end{pmatrix},$$

从而 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 为像空间 $\operatorname{Im} \mathbb{A}$ 的一个基.

(2) 显然基本矩阵 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 为 $M_2(\mathbb{C})$ 的一个基, 直接计算可得

$$\mathbb{A}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2014 & 0 \\ -2014 & 0 & 0 & 2014 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2014 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $f_{\mathbb{A}}(\lambda)=\det(\lambda E_4-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2014 & 0 \\ -2014 & 0 & 0 & 2014 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2014 & 0 \end{pmatrix})=\lambda^4$.

另一方面, $m_{\mathbb{A}}(\lambda)|f_{\mathbb{A}}(\lambda)=\lambda^4$. 由计算可知, $\mathbb{A}^2\neq 0, \mathbb{A}^3=0$, 从而 $m_{\mathbb{A}}(\lambda)=\lambda^3$.

(3) 法一: 直接计算可知 $D_1=D_2=1, D_3=\lambda, D_4=f_{\mathbb{A}}(\lambda)=\lambda^4$.

由不变因子与行列式因子的关系可知 $d_1=D_1=1, d_2=\frac{D_2}{D_1}=1, d_3=\frac{D_3}{D_2}=\lambda, d_4=\frac{D_4}{D_3}=\lambda^3$. 易知 $\mathbb{A}$ 的初等因子为 $\lambda, \lambda^3$, 从而 $\mathbb{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

法二: 显然 $D_1=D_2=1, D_4=\lambda^4$, 从而 $d_1=d_2=1$. 另 $d_4=m_{\mathbb{A}}(\lambda)=\lambda^3$ 且 $d_1d_2d_3d_4=f_{\mathbb{A}}(\lambda)=\lambda^4$, 从而 $d_3=\lambda$. 由 $D_3=d_3D_2=\lambda$. 易知 $\mathbb{A}$ 的初等因子为 $\lambda, \lambda^3$, 从而 $\mathbb{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 由 (1) 知 $U=< E_{11}, E_{21} >$ 满足要求.

(5) 不存在. 否则若存在 $W$ 使得 $W+\ker\mathbb{A}=W\oplus\ker\mathbb{A}=M_2(\mathbb{C})$, 则 $\dim W=2$, 取 $\eta_1, \eta_2$ 为 $W$ 的一个基, $\eta_3, \eta_4$ 为 $\ker\mathbb{A}$ 的一个基, 则

$$\mathbb{A}(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{pmatrix} C & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{pmatrix},$$

其中 $C$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 2 阶方阵. 由 $f_{\mathbb{A}}(\lambda)=\lambda^4$ 知 $C$ 的特征多项式为 $\lambda^2$, 从而 $C^2=0$. 由此可知 $\mathbb{A}^2=0$ 与 $\mathbb{A}$ 的最小多项式为 $\lambda^3$ 矛盾.

(6) 令 $B=\begin{pmatrix} 2 & 1007 \\ 1007 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $f(x_1,x_2)=X^tBX$, 其中 $X=(x_1,x_2)^t$. 求矩阵 $B$ 的特征多项式可得 $f_B(\lambda)=(\lambda-2)^2-1007^2$, 从而 $B$ 的特征值为 $\lambda_1=1009, \lambda_2=-1005$. 分别求解特征向量可得, $\eta_1=(1,1)^t$ 为 $\lambda_1$ 的特这向量, $\eta_2=(-1,1)^t$ 为 $\lambda_2$ 的特征向量. 分别对向量 $\eta_1, \eta_2$ 单位化可得 $\alpha_1=\frac{\eta_1}{|\eta_1|}=(\frac{\sqrt{s}}{2},\frac{\sqrt{s}}{2})^t, \alpha_2=\frac{\eta_2}{|\eta_2|}=(-\frac{\sqrt{s}}{2},\frac{\sqrt{s}}{2})^t$. 令

$$P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

则 $X=PY$ 为正交替换且相应的标准形为 $f(y_1,y_2)=1009y_1^2-1005y_2^2$.

$\square$

2. (10 分) 设 $\alpha=(1,1,1,1)^T, \beta=(1,0,0,1)^T\in\mathbb{R}^4$. 记 $U$ 表示由向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 生成的欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

(1) (5 分) 求 $U$ 在 $\mathbb{R}^4$ 中的正交补空间 $U^\perp$ 的一个标准正交基;

(2) (5 分) 求向量 $\gamma=(1,2,3,5)$ 在子空间 $U$ 上的正交投影.

**证明.** (1) 由定义知 $U^\perp=\{X\in\mathbb{R}^4\mid \alpha\perp X,\beta\perp X\}$. 令 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^t$, 则 $X\in U^\perp$ 当切仅当

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0;\\ x_1+x_4=0.\end{cases}$$

求解上述线性方程可得基础解系 $\eta_1=(-1,0,0,1)^t,\eta_2=(0,-1,1,0)^t$. 对向量组 $\eta_1,\eta_2$ 进行 Schmidt 正交化可得

$$\epsilon_1=(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})^t,\epsilon_2=(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^t$$

为 $U^\perp$ 的一个标准正交基.

(2) 记 $\gamma_{U^\perp}$ 表示向量 $\gamma$ 在子空间 $U^\perp$ 上的正交投影, 则

$$\gamma_{U^\perp}=(\gamma,\epsilon_1)\epsilon_1+(\gamma,\epsilon_2)\epsilon_2=(-2,-1/2,1/2,2)^t.$$

从而 $\gamma$ 在 $U$ 上的正交投影 $\gamma_U=\gamma-\gamma_{U^\perp}=(3,5/2,5/2,3)^t$.

□

3. (10 分) 设 $A_1,A_2\in M_n(\mathbb{F}),B_1,B_2\in M_m(\mathbb{F})$.

(1) (5 分) 证明: 若矩阵 $A_1$ 与 $A_2$ 相似且 $B_1$ 与 $B_2$ 相似, 则矩阵 $\begin{pmatrix}A_1&0\\0&B_1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A_2&0\\0&B_2\end{pmatrix}$ 相似;

(2) (5 分) 若矩阵 $\begin{pmatrix}A_1&0\\0&B_1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A_2&0\\0&B_2\end{pmatrix}$ 相似且矩阵 $A_1$ 与 $A_2$ 相似, 问矩阵 $B_1$ 与 $B_2$ 是否相似, 请说明理由.

**证明.** (1) 由 $A_1$ 与 $A_2$ 相似知存在 $n$ 阶可逆矩阵 $P\in M_n(\mathbb{F})$ 使得 $A_2=P^{-1}A_1P_1$. 同理存在 $m$ 阶可逆矩阵 $Q\in M_m(\mathbb{F})$ 使得 $B_2=Q^{-1}B_1Q$.

令 $X=\begin{pmatrix}P&0\\0&Q\end{pmatrix}$. 显然 $X$ 为可逆矩阵且

$$\begin{pmatrix}A_2&0\\0&B_2\end{pmatrix}=X^{-1}\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}X,$$

从而 $\begin{pmatrix}A_2&0\\0&B_2\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$ 相似.

(2) 相似.

记 $X_i$ 表示矩阵 $A_i$ 的初等因子的集合 (允许元素相等), $Y_i$ 表示矩阵 $B_i$ 的初等因子的集合, 其中 $i=1,2$. 由条件可知集合 $X_1=X_2$ 且 $X_1\cup Y_1=X_2\cup Y_2$, 从而 $Y_1=Y_2$. 特别地 $B_1$ 与 $B_2$ 具有相同的初等因子, 因此 $B_1$ 与 $B_2$ 相似.

□

4. (10 分) 设 $A = A^T \in M_n(\mathbb{Q})$. 证明: 矩阵 $A$ 为正定矩阵当且仅当对任意的非零向量 $\alpha \in \mathbb{Q}^n$, $\alpha^T A\alpha > 0$.

**证明.** 必要性: 由 $A$ 为正定矩阵知对任意的非零向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 都有 $\alpha^t A\alpha > 0$, 从而对任意的非零向量 $\alpha \in \mathbb{Q}^n$, $\alpha^T A\alpha > 0$.

充分性: 由矩阵 $A$ 为对称矩阵知存在 $\mathbb{Q}$ 上的可逆矩阵 $P$ 使得 $P^tAP = \mathrm{diag}\{d_1, \cdots, d_n\}$, 其中 $d_1, \cdots, d_n \in \mathbb{Q}$.

我们断言 $d_i > 0, i = 1, \cdots, n$. 否则存在 $d_k \leqslant 0$, 记 $\epsilon_k$ 表示 $\mathbb{Q}^n$ 的第 $k$ 个单位向量, 令 $\alpha = P\epsilon_k$, 则 $\alpha^t A\alpha = d_k$ 与条件矛盾. 因此矩阵 $A$ 的正惯性指数等于 $n$, 所以 $A$ 为正定矩阵. □

5. (15 分) 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约且 $\deg f(x) = n$, 其中 $n > 1$. 设 $A \in M_n(\mathbb{Q})$ 满足 $f(A)$=0.

(1) (5 分) 问矩阵 $A$ 在数域 $\mathbb{Q}$ 上是否可对角化, 请说明理由;

(2) (5 分) 记 $V := \{h(A) \mid h(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ 为所有能表示为矩阵 $A$ 的多项式的矩阵构成的 $M_n(\mathbb{Q})$ 的子空间. 试求子空间 $V$ 的维数.

(3) (5 分) 设 $C(A) := \{X \in M_n(\mathbb{Q}) \mid XA = AX\}$ 表示所有与矩阵 $A$ 乘法交换的矩阵构成的 $M_n(\mathbb{Q})$ 的子空间. 试求子空间 $C(A)$ 的维数.

**证明.** (1) 不可对角化.

设 $m_A(\lambda)$ 为矩阵 $A$ 的最小多项式, 由条件知 $m_A(\lambda)|f(\lambda)$ 且 $f(\lambda)|m(\lambda)$. 因此 $m(\lambda)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不能分解为互不相同的一次多项式的乘积, 从而 $A$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可对角化.

(2) 断言 $E_n, A, \cdots, A^{n-1}$ 为线性空间 $V$ 的一个基. 记 $m(x)$ 表示矩阵 $A$ 的最小多项式, 由 (1) 知 $m(x)$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的 $n$ 次不可约首一多项式. 对任意的 $B = h(A) \in V, h(x) \in \mathbb{Q}[x]$. 由带余除法知存在多项式 $q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 且 $\deg r(x) < \deg m(x)$ 使得

$$h(x) = m(x)q(x) + r(x).$$

特别地, $B = h(A) = r(A)$, 从而 $B$ 可以由向量组 $E, A, \cdots, A^{n-1}$ 线性表示.
若 $E_n, A, \cdots, A^{n-1}$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}$ 使得

$$k_0E_n + k_1A + \cdots + k_{n_1}A^{n-1} = 0.$$

令 $g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} k_i x^i$, 则 $g(x) \neq 0$ 且 $g(A) = 0$ 与 $A$ 的最小多项式为 $n$ 次矛盾. 所以 $E, A, \cdots, A^{n-1}$ 为线性空间 $V$ 的一个基, 特别地 $\dim V = n$.

(3) 由 $A$ 的最小多项式为 $\mathbb{Q}$ 上的 $n$ 次不可约多项式知 $A$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化. 记 $W$ 表示所有与 $A$ 乘法交换的 $n$ 阶复矩阵构成的 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性子空间, 则 $\dim_{\mathbb{C}} W = n$. 易知 $V \subseteq C(A) \subset W$, 从而 $\dim_{\mathbb{Q}} C(A) \geqslant \dim_{\mathbb{Q}} V = n$. 若 $\dim_{\mathbb{Q}} C(A) = m > n$, 则存在 $m$ 个有理数矩阵 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in C(A)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关. 易知 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 在 $\mathbb{C}$ 上也线性无关, 与 $\dim_{\mathbb{C}} W = n$ 矛盾. 因此 $\dim C(A) = n$.

□