四川大学期末考试试题（闭卷）

(2017–2018学年第 1 学期)　　A 卷

课程号: **201097050** 课序号: **01, 02** 课程名称: 高等代数-1(双语) 任课教师: 付昌建 卢明 马强 谭友军　　成绩:
适用专业年级: 数学学院2017级各专业 学生人数: **269** 印题份数: **300**　　学号:　　姓名:

考　生　承　诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：
1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
2、不带手机进入考场；
3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注意: 满分100分, 按题号把解答写在答题纸上. 在以下题目中, $\mathbb{F}$ 表示数域, $\mathbb{Q}$ 表示有理数域, A' 为矩阵 A 的转置, A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵, $M_n(\mathbb{F})$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶方阵组成的集合, E_n 表示 n 阶单位阵.

1. (本题满分30分) 设 $f(x)=x^8+2x^7+x^6-x^5-2x^4-x^3+x^2+2x+1\in\mathbb{Q}[x]$.

(1) (10分) 求多项式 $f(x)$ 的有理根, 并给出其重数;

(2) (10分) 在 $\mathbb{Q}$ 上将 $f(x)$ 分解为首一的不可约多项式的乘积;

(3) (5分) 令 $\alpha_1,\cdots,\alpha_8$ 为多项式 $f(x)$ 的复根. 求 $\sum_{i=1}^{8}\alpha_i^{2018}$;

(4) (5分) 设 $A\in M_n(\mathbb{Q})$ 且满足 $f(A)=0$. 问矩阵 A 是否可逆? 若不可逆,请说明理由; 若可逆, 请将 A 的逆表示为 A 的多项式.

2. (本题满分35分) 解答下列各题:

(1) (10分) 设 $\beta=\begin{pmatrix}4\\6\\6\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^3$. 求线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$ 的通解;

(2) (8分) 是否存在矩阵 A 满足 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ 且 $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, 并说明理由;

(3) (10分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0\\2&3&a\\-1&0&1\end{pmatrix}$. 问 a 取何值时矩阵 A 可逆;

(4) (7分) 设 $A\in M_4(\mathbb{F})$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 A 的列向量. 已知齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为 $k(0,1,0,1)'$. 求齐次线性方程组 $A^*X=0$ 的一个基础解系.

3. (本题满分15分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. 设 $B\in M_3(\mathbb{F})$ 且满足 $A^*BA=2BA-8E_3$, 求 B.

4. (本题满分10分) 设 $0\neq\alpha\in\mathbb{F}^n, A\in M_n(\mathbb{F})$.

(1) 证明: α, $A\alpha$, $\cdots$, $A^n\alpha$ 线性相关;

(2) 设 $g(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的不可约多项式且满足 $g(A)\alpha=0$. 证明: $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关;

(3) 若 (2) 中的 $k=n$, 利用多项式 $g(x)$ 的系数求矩阵 A 的行列式.

5. (本题满分10分) 设 $A\in M_n(\mathbb{F}),\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为矩阵 A 的列向量. 设 $\eta_1,\cdots,\eta_r\in\mathbb{F}^n$ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系. 令 $B=(A,A^2)$.

(1) 证明: A, B 的秩相等;

(2) 利用 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\eta_1,\cdots,\eta_r$ 求齐次线性方程组 $BY=0$ 的一个基础解系.