第六章　欧式空间

1. (内积的定义, trace 的性质.)

证明: 首先, 对任意 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 有:

$$(A, B) = \mathrm{tr}(AB') = \mathrm{tr}((AB')') = \mathrm{tr}(BA') = (B, A),$$

所以, (,) 是对称的;

其次, 对任意 $A_1, A_2, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 有:

$$(x_1A_1 + x_2A_2, B) = \mathrm{tr}((x_1A_1 + x_2A_2)B')$$

$$= x_1\mathrm{tr}(A_1B') + x_2\mathrm{tr}(A_2B') = x_1(A_1, B) + x_2(A_2, B),$$

所以, (,) 关于第一个变量是线性的. 由对称性即得 (,) 是双线性的;

最后, 对任意 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 由 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ 和

$$\mathrm{tr}(AA') = \sum_{i=1}^{n}(AA')(i,i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A(i,j)(A')(j,i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2$$

即得 $(A, A) \geq 0$, 且, $(A, A) = 0$ 当且仅当 $a_{ij} = 0$, $1 \leq i, j \leq n$, 即, $A = 0$.

综上, (,) 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上的内积. □

2. ($\mathbb{R}^n$ 上的标准内积的基本性质.)

证明: 设 (,) 是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积, 即, 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 有 $(x, y) = x'y$. 于是, 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 有:

$(Ax, y) = (Ax)'y = (x'A')y = x'(A'y) = (x, A'y)$; 从而,

$(AA'x, x) = (A(A'x), x) = (A'x, A'x) = |A'x|^2$. □

3. (利用已知的内积构造新的内积.)

注:　下面的结论是有用的:

引理: 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义函数: (,) 为:

$$(X, Y) = X'AY, \text{ 任意 } X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

则 (,) 是双线性的. 进一步, (,) 是对称的当且仅当 A 是对称阵. □

证明: 由题设可得: $\ll \alpha, \beta \gg = (A\alpha, A\beta) = (A\alpha)'(A\beta) = \alpha'(A'A)\beta$, 所以, (,) 是双线性的; 进一步, 由于 $A'A$ 是对称的, 所以, (,) 是对称的;

对任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 有:

$$\ll \alpha, \alpha \gg = \alpha'(A'A)\alpha = (A\alpha)'(A\alpha) = |A\alpha|^2 \geq 0;$$

且, 如果 $\ll \alpha, \alpha \gg = 0$ 则 $|A\alpha|^2 = 0$, 即, $A\alpha = 0$; 但 A 可逆, 所以, $\alpha = 0$.

综上, $\ll, \gg$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积. $\square$

注: 此题的本质是: 对任意可逆的 n 阶实方阵 A 都有: AA' 是正定阵 (Chapter 7). 事实上, 任意的 n 阶正定阵都具有这种形式.

4. (一个实内积空间的例子.)

证明: 由定积分的性质即得 (,) 是双线性的, 对称的; 对任意 $f(x) \in C[a,b]$, 由 $h(x) > 0$ 可得:

$$(f(x), f(x)) = \int_a^b f^2(x)h(x)dx \geq 0,$$

且由函数的连续性得, $(f(x), f(x)) = 0$ 当且仅当 $f^2(x)h(x) = 0$, 即, 当且仅当 $f(x) = 0$.

综上, (,) 是 $C[a,b]$ 上的一个内积. 相应的 $C - B$ 不等式为:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)h(x)dx \int_a^b g^2(x)h(x)dx. \quad \square$$

注: 本题给出了利用函数空间上的内积构造积分不等式的一个例子.

5. (一个欧式空间的例子.)

(1) **证明**: 由题设, 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ 有: $(\alpha, \beta) = \alpha' \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \beta$,

从而由矩阵的运算性质得 (,) 是双线性和对称的 (矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是对称的.)

对任意 $\alpha = (x,y)' \in \mathbb{R}^2$ 有 $(\alpha, \alpha) = 3x^2 + 2y^2 \geq 0$, 且 $(\alpha, \alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$.

综上, (,) 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个内积. (但不是标准内积.)

(2) **解**: 由题设得:

$((7,2)', (1,1)') = 3 \times 7 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 = 25;$

$|(1023, -2046)| = \sqrt{3 \times 1023^2 + 2 \times (-2046)^2} = 1023\sqrt{11}.$

(3) **解**: 设 $\alpha = (x,y)'$, $x, y \in \mathbb{Z}$ 且 $|\alpha| = \sqrt{3x^2 + 2y^2} = 5$,

即, $3x^2 + 2y^2 = 25$, 从而, $|x| < 3$, $|y| < 4$. 直接验证, 没有整数解.

(4) **解**: $\alpha=(x,y)'\perp(1,-1)'$ 当且仅当 $(\alpha,(1,-1)')=3x-2y=0$, 当且仅当 $x=2t, y=3t$, $t\in\mathbb{R}$. 所以, 所求的向量为 $(2t,3t)'$, $t\in\mathbb{R}$.

6. (一个欧式空间的例子.)

证明:

(1) 由题设, 对任意 $X,Y\in\mathbb{R}^n$ 有 $(X,Y)=X'DY$, 其中 $D=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$ 是对角阵, 从而由矩阵的运算性质即得 (,) 是双线性和对称的; (利用 D 是对称阵.)

由于 $a_i>0$, 所以, 对任意 $X=(x_1,\cdots,x_n)'\in\mathbb{R}^n$ 有: $(X,X)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^2\geq 0$, 且, $(X,X)=0$ 当且仅当 $x_i=0$, 即, $X=0$.

综上, (,) 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积.

(2) **证明**: 直接由 (1) 中的内积的 $C-B$ 不等式即得. □

注: 在本题中, 取 $a_1=\cdots=a_n=\dfrac{1}{n}$, $y_1=\cdots=y_n=1$ 即可得到均值不等式.

7. (欧式空间中向量之间的夹角.) 略.

8. (欧式空间中向量之间的夹角.)

解: 设 V 是实内积空间, 内积为 (,), $\alpha,\beta\in V$ 都不是零向量.

则 α 与 β 的夹角为锐角 (或, 直角, 钝角) 当且仅当 $(\alpha,\beta)>0$ (或, $=0$, <0). □

9. (实内积空间上的距离, C-B 不等式的应用.)

证明:

(1) (三角不等式.)

由 C-B 不等式得: $|\alpha-\gamma|^2|\gamma-\beta|^2\geq(\alpha-\gamma,\gamma-\beta)^2$, 从而

$$\begin{aligned}
(|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|)^2&=|\alpha-\gamma|^2+|\gamma-\beta|^2+2|\alpha-\gamma||\gamma-\beta|\\
&\geq|\alpha-\gamma|^2+|\gamma-\beta|^2+2(\alpha-\gamma,\gamma-\beta)\\
&=(\alpha-\gamma,\alpha-\gamma)+2(\alpha-\gamma,\gamma-\beta)+(\gamma-\beta,\gamma-\beta)\\
&=(\alpha-\gamma+\gamma-\beta,\alpha-\gamma+\gamma-\beta)\\
&=(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=|\alpha-\beta|^2,
\end{aligned}$$

即, $|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|\geq|\alpha-\beta|$. □

(2) (余弦定理.) 直接验证即得. □

10. 证明: 由题设有 $(\alpha,\alpha)=0$, 而 $(\ ,\ )$ 是内积, 所以, $\alpha=0$. □

注: 本题的结论对任意实内积空间都成立. 一般地, 对于一个双线性函数 (即使是对称的) $(\ ,\ )$, 由 $(\alpha,\alpha)=0$ 推不出 $\alpha=0$.

11. (平行四边形法则.)

证明: $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)+(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$

$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$$

$$=2(\alpha,\alpha)+2(\beta,\beta)=2|\alpha|^2+2|\beta|^2.$$ □

注: 此题结论的几何意义是: 平行四边形的边长的平方和等于对角线的平方和. 本题的结论对任意实内积空间都成立.

12. (实内积空间中的极化恒等式.)

证明: 直接验证即得 (先算右边) :

$$|\alpha+\beta|^2-|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=4(\alpha,\beta).$$ □

注: 本题的结论对任意实内积空间都成立. 本题与第 **9** 题一起给出了实线性空间上的“距离”与“内积”之间的关系.

13. (正交向量组的线性无关性, 勾股定理.)

证明:

(1) 设 $x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$, $x_i\in\mathbb{R}$. 对任意 $1\le i\le m$, 用 α_i 在两边作内积得: $x_i(\alpha_i,\alpha_i)=0$; 而 $\alpha_i\neq 0$, 所以, $x_i=0$, 从而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关. 如果 $\dim V=n$, 则由线性无关的向量个数不超过维数 (基本引理) 可知, $m\le n$.

注1: 由上述证明可知, “两两正交的非零向量线性无关”这个结论在任意实内积空间中都是成立的. 这个结论可以用于验证线性无关性. 例如, 在 $C[0,2\pi]$ 中, $1,\sin x,\sin 2x,\cdots$ 是线性无关的.

注2: 这里用到的两边作内积的技巧是常用的.

(2) 由 $(\alpha_i,\alpha_j)=0\ (i\neq j)$ 即得

$$\begin{aligned}|\alpha_1+\cdots+\alpha_m|^2&=(\alpha_1+\cdots+\alpha_m,\alpha_1+\cdots+\alpha_m)\\&=\sum_{i=1}^m(\alpha_i,\alpha_i)+2\sum_{1\le i<j\le m}(\alpha_i,\alpha_j)=\sum_{i=1}^m(\alpha_i,\alpha_i)=\sum_{i=1}^m|\alpha_i|^2.\end{aligned}$$

$m=2$ 时, 该结论就是勾股定理. □

14. (内积的计算及应用.)

解: 设 γ 是风速. 则有如下方程组: $\begin{cases}v_1+\gamma=-a\alpha,\\ v_2+\gamma=-b\beta,\end{cases}$

其中 $a,b\in\mathbb{R}$. 于是 $v_1-v_2=-a\alpha+b\beta$.

设 $(-,-)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的标准内积.

注意到 α,β 是单位向量, 即: $(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)=1$.

分别用 $(-,\alpha)$ 和 $(-,\beta)$ 作用于 $v_1-v_2=-a\alpha+b\beta$ 我们得到

$$\begin{cases}(v_1-v_2,\alpha)=-a+b(\alpha,\beta),\\ (v_1-v_2,\beta)=-a(\alpha,\beta)+b,\end{cases}$$

由此即得: $a=\dfrac{(v_2-v_1,\alpha-(\alpha,\beta)\beta)}{1-(\alpha,\beta)^2}$.

所以 $\gamma=v_1-\dfrac{(v_2-v_1,\alpha-(\alpha,\beta)\beta)}{1-(\alpha,\beta)^2}\alpha$ 为所求. □

15. (正交向量.)

证明: 由 $|\alpha+\beta|^2=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)=|\alpha|^2+|\beta|^2$

可知, $(\alpha,\beta)=0$, 即, α 与 β 正交. □

16. (正交投影的基本性质.)

证明:

(1) 由 $\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$ 可知:

$|pr_\beta(\alpha)|=\left|\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta\right|=|\cos\langle\alpha,\beta\rangle|\dfrac{|\alpha||\beta|}{|\beta|^2}|\beta|=|\cos\langle\alpha,\beta\rangle||\alpha|$.

(即, α 的沿 β 的投影的长度为直角边 $|\alpha||\cos\langle\alpha,\beta\rangle|$.)

对任意 $\alpha_1,\alpha_2\in V$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ 有:

$$pr_\beta(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=\frac{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta$$

$$=k_1\frac{(\alpha_1,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta+k_2\frac{(\alpha_2,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta$$

$$=k_1pr_\beta(\alpha_1)+k_2pr_\beta(\alpha_2),$$

所以, $pr_\beta\in\mathrm{Hom}(V,L(\beta))$.

(2) 直接计算:

$$(\beta,\alpha-pr_\beta(\alpha))=(\beta,\alpha)-\left(\beta,\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta\right)$$

$$=(\beta,\alpha)-(\beta,\beta)\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=(\beta,\alpha)-(\alpha,\beta)=0.$$ □

注: 这里的结论对任意的实内积空间都成立. 可以画一个斜边长为 $|\alpha|$, 两直角边分别为 $|pr_\beta(\alpha)|$, $|\alpha-pr_\beta(\alpha)|$ 的直角三角形帮助理解.

17. (对 Schnidt 正交化的理解.)

证明:

(1) 由定义得 $\xi_{m+1} \in L(\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta)$ 和 $\eta \in L(\xi_1, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1})$, 从而 $L(\xi_1, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}) = L(\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta)$ 成立.

进一步, 由于 $\xi_i \perp \xi_j$, $1 \le i \ne j \le m$, 所以对任意 $1 \le i \le m$ 有:

$$\begin{aligned}(\xi_{m+1}, \xi_i) &= \left(\eta - \frac{(\eta, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1 - \frac{(\eta, \xi_2)}{(\xi_2, \xi_2)}\xi_2 - \cdots - \frac{(\eta, \xi_m)}{(\xi_m, \xi_m)}\xi_m,\ \xi_i\right) \\ &= (\eta, \xi_i) - \frac{(\eta, \xi_i)}{(\xi_i, \xi_i)}(\xi_i, \xi_i) \\ &= (\eta, \xi_i) - (\eta, \xi_i) \\ &= 0.\end{aligned}$$

可以给出如下的几何解释: 由投影的定义有:

$$\xi_{m+1} = \eta - pr_{\xi_1}(\eta) - \cdots - pr_{\xi_m}(\eta),$$

即, $pr_{\xi_1}(\eta) + \cdots + pr_{\xi_m}(\eta)$ 是 η 的沿 $L(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ 的正交投影.

(2) 根据假设我们有: $\xi = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j\xi_j + a\eta, \quad a_j, a \in \mathbb{R}$.

由于 $(\xi, \xi_i) = 0$, $1 \le i \le m$, $(\xi_i, \xi_j) = 0$, $1 \le i \ne j \le m$, 把 $(-, \xi_i)$ 作用于此式即得 $0 = a_i(\xi_i, \xi_i) + a(\eta, \xi_i)$,

即, $a_i = -\dfrac{(\eta, \xi_i)}{(\xi_i, \xi_i)}a$, $1 \le i \le m$.

从而, $\xi = a\left(\eta - \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{(\eta,\xi_i)}{(\xi_i,\xi_i)}\xi_i\right) = a\xi_{m+1}$, 即, $\xi \in L(\xi_{m+1})$. □

18. (内积的度量阵的基本性质: 正定性.)

证明: 设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是欧式空间 $(V, (\ ,\ ))$ 的一个基, 使得 $A = ((\varepsilon_i, \varepsilon_j))$.

则对任意 $\alpha = (\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)X, \beta = (\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)Y \in V$

有 $(\alpha, \beta) = X'AY$. ①

(1) 由①即得: $0 \le (\alpha, \alpha) = X'AX$. □

(2) 对任意 $X \in \mathbb{R}^n$, 把 X 看成 α 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标. 则由①得: $(\alpha, \alpha) = X'AX$. 因此, $X'AX = 0$ 当且仅当 $(\alpha, \alpha) = 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$, 当且仅当 $X = 0$. □

注: 本题给出的结论实际上就是正定矩阵的定义. 即, 度量阵是正定阵, 反之亦然, 即, 有如下的

引理: 设 A 是 n 阶实对称阵. 则 A 是正定阵当且仅当 A 是某个 n 维欧式空间上的某个基的度量阵. □

19. (标正基的基本性质.)

证明:

(1) (用内积刻画了向量在标正基下的坐标.)

设 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$, $x_i \in \mathbb{R}$. 对每个 $1 \le i \le n$, 两边用 $(-, \varepsilon_i)$ 作用即得:

$$(\alpha, \varepsilon_i) = x_i(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = x_i. \qquad \square$$

注: 再次用到两边作内积的技巧. 事实上, $(\alpha, \varepsilon_i)\varepsilon_i$ 就是 α 的沿 ε_i 的投影. (因为 $|\varepsilon_i| = 1$).

(2) 对任意 $\alpha \in V$, 由 (1) 和 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$ 有:

$$|\alpha|^2 = (\alpha, \alpha) = \sum_{i,j=1}^{n} (\alpha, \varepsilon_i)(\alpha, \varepsilon_j)(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha, \varepsilon_i)^2. \qquad \square$$

注1: 本题是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积的相关事实的推广. 事实上, $\mathbb{R}^n$ 的基本向量 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 的关于标准内积的一个标正基 (当然, 还有别的标正基: 考虑 n 阶正交阵!). 于是, 对任意 $X = (x_1, \cdots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ 有:

$(X, \varepsilon_i) = x_i$, 从而由本题的 (1) 有: $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$, 与第 2 章中的列向量的运算吻合.

进一步, 由本题的 (2) 有: $|X|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, 也与通常意义下的长度的平方吻合.

注2: 欧式空间的标正基的另一个基本性质是

引理: 设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是欧式空间 $(V, (\ ,\ ))$ 的一个标正基. 则, 对任意 $\alpha = (\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_n)X, \beta = (\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_n)Y \in V$ 有: $(\alpha, \beta) = X'Y$, 即, 内积 (α, β) 等于 α, β 的坐标 $X, Y \in \mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积下的内积 $X'Y$.

证明: 直接计算:

$$(\alpha, \beta) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i, \ \sum_{j=1}^{n} y_j\varepsilon_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = X'Y. \qquad \square$$

注: 利用这个引理可以证明任意 n 维欧式空间都是与 $\mathbb{R}^n$ (标准内积) 等距的 (isometric).

20. (度量阵的一个应用.)

证明: (用待定系数法.)

设 $\alpha = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\varepsilon_j \in V$. 则 α 满足 $(\alpha, \varepsilon_i) = c_i$ 当且仅当其坐标 $(x_1, \ldots, x_n)'$ 是如下线性方程组的解:

$$\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_j = c_i: \quad 1\le i\le n.$$

由于其系数矩阵 $((\varepsilon_i,\varepsilon_j))_{1\le i,j\le n}$ 正好是内积 $(-,-)$ 的关于基 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ 的度量阵, 从而是可逆的, 所以上述方程组有且仅有一个解. □

21. (用 Schmidt 正交化方法求标正基.)

解: 注意这里默认的是 $\mathbb{R}^3$ 上的标准内积.

(1) 首先, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 (用行列式 $\det(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ 即可判定.) 令 $\eta_1=\alpha_3=(0,-2,0)$; (注意: 这里的方法是: 不令 $\eta_1=\alpha_1$! 这样会简化计算: 避免出现更多的分数.)

$$\begin{aligned}\eta_2 &= \alpha_1-\frac{(\alpha_1,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1\\ &=(2,-2,0)-\frac{4}{4}(0,-2,0)=(2,0,0);\\ \eta_3 &= \alpha_2-\frac{(\alpha_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1-\frac{(\alpha_2,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2\\ &=(-2,1,-2)-\frac{-2}{4}(0,-2,0)-\frac{-4}{4}(2,0,0)=(0,0,-2),\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{1}{|\eta_1|}\eta_1=(0,-1,0);\\ \varepsilon_2&=\frac{1}{|\eta_2|}\eta_2=(1,0,0);\\ \varepsilon_3&=\frac{1}{|\eta_3|}\eta_3=(0,0,-1).\end{aligned}$$

(2) 略.

(3) 略.

(4) 略.

22. (用 Schmidt 正交化方法求标正基.)

解: 首先取定 $\mathbb{R}[x]_3$ 的一个基: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=x$, $\alpha_3=x^2$. 令

$\eta_1=\alpha_1=1;$

$\eta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=x-0=x;$

(因为: $(\alpha_2,\eta_1)=\int_{-1}^{1}xdx=0$.)

$\eta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1-\dfrac{(\alpha_3,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2=x^2-\dfrac{1}{6};$

(因为: $(\alpha_3,\eta_1)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\dfrac{2}{3}$; $(\alpha_3,\eta_2)=\int_{-1}^{1}x^3dx=0$;

$(\eta_1,\eta_1)=\int_{-1}^{1}1dx=2$; $(\eta_2,\eta_2)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\dfrac{2}{3}$.)

又，$(\eta_3,\eta_3)=\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{6})dx=\dfrac{1}{3}$,

所以,

$$\varepsilon_1=\frac{1}{|\eta_1|}\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{|\eta_2|}\eta_2=\frac{\sqrt{6}}{2}x;$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{|\eta_3|}\eta_3=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-\tfrac{1}{2})$$

为所求的一个标正基. □

23. 略.

24. (基的扩充.)

解:

(1) 令 $\beta_3=(0,0,1)$ 则 β_1,β_2,β_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基.

令 $\eta_1=\beta_1,\eta_2=\beta_2$; (因为 β_1 与 β_2 已经是正交的了.)

$$\eta_3=\beta_3-\frac{(\beta_3,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1-\frac{(\beta_3,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2=(-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3});$$

则

$$\varepsilon_1=\frac{1}{|\eta_1|}\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1);$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{|\eta_2|}\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1);$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{|\eta_3|}\eta_3=\frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,1)$$

为所求. □

(2) 类似, 略.

注: 答案不唯一.

25. (正交矩阵的定义.)

注1: 这里的列向量正交指的是在 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积下正交.

解: 例如: $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$. 则 A 的列向量正交, 但 A 不是正交阵 (因为 A 的列向量组不是标正基). □

注2: 由 n 阶正交阵的定义, 有如下的

引理: 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 取定 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积. 则 A 是正交阵当且仅当 A 的列向量构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个标正基, 当且仅当 A 的行向量构成 $\mathbb{R}^n$ 的

一个标准基. (从而, A 的列向量构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个标正基当且仅当 A 的行向量构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个标正基.)

证明: 设 $A=(\xi_1\ \cdots\ \xi_n)$, 即, ξ_i 是 A 的列向量. 注意到:

$$A'A=\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \vdots\\ \xi_n'\end{pmatrix}(\xi_1\ \cdots\xi_n)=\begin{pmatrix}\xi_1'\xi_1 & \xi_1'\xi_2 & \cdots & \xi_1'\xi_n\\ \xi_2'\xi_1 & \xi_2'\xi_2 & \cdots & \xi_2'\xi_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi_n'\xi_1 & \xi_n'\xi_2 & \cdots & \xi_n'\xi_n\end{pmatrix}. \qquad ①$$

(分块矩阵的应用.)

于是, A 是正交阵当且仅当 $A'A=E_n$, 当且仅当 $\xi_i'\xi_j=(\xi_i,\xi_j)=\delta_{ij}$, 当且仅当 A 的列向量组构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个标正基.

类似地, 设 $A=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}$, 即, η_j 是 A 的行向量. 注意到:

$$AA'=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}(\eta_1'\ \cdots\eta_n')=\begin{pmatrix}\eta_1\eta_1' & \eta_1\eta_2' & \cdots & \eta_1\eta_n'\\ \eta_2\eta_1' & \eta_2\eta_2' & \cdots & \eta_2\eta_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \eta_n\eta_1' & \eta_n\eta_2' & \cdots & \eta_n\eta_n'\end{pmatrix}. \qquad ②$$

于是, A 是正交阵当且仅当 $AA'=E_n$, 当且仅当 $\eta_i\eta_j'=(\eta_i',\eta_j')=\delta_{ij}$, 当且仅当 A 的行向量组构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个标正基. □

注3: 由上面的引理, 任取 $\mathbb{R}^n$ (列向量空间) 的一个标正基, 把这些基向量拼成一个矩阵, 即得到一个正交阵. 因此, Schmidt 正交化给出了构造正交阵的一个基本方法. 另外, 欧式空间的任意两个基之间的过渡阵必然是正交阵; 从一个标正基出发, 利用一个正交阵过渡, 得到的是一个标正基.

26. 即, 第 **25** 题中的引理的证明. 略.

27. (原题中应该加上对角元大于 0 的条件.)

证明:

法一: 由于 A 是正交阵, 所以, $A^{-1}=A'$; 又由于 A 是上三角的, 所以, A^{-1} 也是上三角的; 但是, $A^{-1}=A'$ 是下三角的, 所以, A 必然是对角阵 $A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$. 从而由 $AA'=E_n$ 即得 $a_i^2=1$, 但, $a_i>0$, 所以, $a_i=1$, $1\le i\le n$, 即, $A=E_n$ 是单位阵. □

法二: 设 A 是 n 阶三角的正交阵, 且 A 的对角元大于 0. 要证 $A=E_n$. 对 n 做归纳. $n=1$ 的情形是显然的. 假设结论对 $n-1$ 阶矩阵

成立. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \delta \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 $(n-1)$ 阶对角元为正数的上三角矩阵; δ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的列向量; 0 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的零向量. 由于 A 是正交阵, 所以

$$\begin{aligned} E_n = AA' &= \begin{pmatrix} A_1 & \delta \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1' & 0 \\ \delta' & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1A_1' + \delta\delta' & a_{nn}\delta \\ a_{nn}\delta' & a_{nn}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由此即得 $a_{nn} = 1$ (注意到 $a_{nn} > 0$) 和 $\delta = 0$. 所以 A 具有形式

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而 A_1 是正交矩阵和对角元是正数的上三角矩阵. 由归纳假设即得 A_1 是 $n-1$ 阶单位阵, 从而 A 是 n 阶单位阵. □

28. (Schmidt 正交化方法.)

课堂上已经证明. 略.

29. (可逆的实矩阵的 QR-分解.)

证明: 存在性由 Schmidt 正交化即得. 事实上, 设 $(-,-)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积, 并设 $A = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$, 即, α_i 是 A 的第 i 个列向量. 由于 A 可逆, 所以 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关. 设

$$\beta_1 = \alpha_1;$$

$$\beta_k = \alpha_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)} \beta_j, \quad k = 2, \ldots, n; \qquad ①$$

$$\gamma_k = \frac{1}{|\beta_k|} \beta_k, \; 1 \le k \le n.$$

则, $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标正基, 从而 $Q := (\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ 是正交阵. 另外, 由①可得 $Q = AT$, 其中 T 是对角元为正数的上三角阵. 从而 $A = QT^{-1}$. 注意到 $R := T^{-1}$ 也是对角元为正数的上三角阵. 所以就得到了 A 的满足条件的分解.

唯一性: 设 A 有分解 $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$, 其中 Q_1, Q_2 是正交阵, R_1, R_2 是对角元为正数的上三角阵. 则 $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$ 是对角元为正数的正交的上三角阵.

(正交阵的逆, 乘积仍然是正交阵.)

由第 **27** 题可知, $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$ 必然是单位阵, 从而 $Q_1 = Q_2$, $R_1 = R_2$. □

30. (求可逆实矩阵的 QR 分解.)

第 **29** 题中存在性的证明给出了算法. 略.

31. (实可逆矩阵的 Iwasawa 分解.)

证明: 由 QR-分解即得 (参见第 **29** 题), 因为任意对角元为正数的上三角阵都可以唯一地分解为一个对角元为正数的对角阵和一个对角元为 1 的上三角阵的乘积:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

32. (实反对称矩阵的一个性质, 矩阵的运算.)

证明: 直接验证:

$$\begin{aligned} &((E-A)(E+A)^{-1})((E-A)(E+A)^{-1})' \\ =\ &(E-A)(E+A)^{-1}((E+A)')^{-1}(E-A)' \\ =\ &(E-A)(E+A)^{-1}(E-A)^{-1}(E+A) = E, \end{aligned}$$

所以, $(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交阵.

所以, 只剩下证明 $E+A$ 可逆. 有以下两个方法:

法一: (用反证法.) 否则, 存在非零的 $X \in \mathbb{R}^n$ 使得 $(E+A)X = 0$, 即, $AX = -X$. 设 $(-,-)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积. 则

$$\begin{aligned} (X,X) &= -(AX,X) = -(AX)'X \\ &= -X'A'X = X'AX = (X,AX) = -(X,X), \end{aligned}$$

由此即得 $X = 0$, 矛盾. $\square$

法二: (用特征值, 特征多项式.) 因为 A 是实的反对称矩阵, 所以, A 的特征值只能是 0 或纯虚数. (参见下面的第 **71** 题.) 所以, -1 不是 A 的特征值, 即, $|-E-A| = (-1)^n|E+A| \neq 0$, 从而 $E+A$ 可逆.

(或者, 多项式 $g(x) = x+1$ 与 A 的特征多项式 $f(x)$ 必然互素, 从而由 Hamilton-Cayley 定理可得 $E+A = g(A)$ 可逆.) $\square$

33. (一个正交矩阵的例子.)

证明: (直接验证.) 设 $n \times n$ Helmert 矩阵 H 的行向量为: $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$.

首先, $|\alpha|^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\sqrt{n})^2}=\frac{n}{n}=1$;

$$|\alpha_i|^2=\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{(\sqrt{i(i+1)})^2}+\frac{(-i)^2}{(\sqrt{i(i+1)})^2}=\frac{i+i^2}{i(i+1)}=1;$$

所以, H 的行向量都是单位向量.

其次, 对任意 $1\le i\le n-1$ 有

$$\alpha'\alpha_i=\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{-i}{\sqrt{i(i+1)}}=\frac{i-i}{\sqrt{n}\sqrt{i(i+1)}}=0;$$

即, H 的第一行与其余各行正交;

对任意 $1\le i<j\le n-1$ 有:

$$\alpha_i'\alpha_j=\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}+\frac{i}{\sqrt{i(i+1)}}\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}$$

$$=\frac{i-i}{\sqrt{i(i+1)}\sqrt{j(j+1)}}=0,$$

即, H 的后 $n-1$ 个行向量两两之间是正交的. □

34. (正交群 $O(n)$ 与特殊正交群 $SO(n)$.)

证明: 设 $A,B\in O(n)$ (即, A,B 都是 n 阶正交阵),

则 $(AB)(AB)'=ABB'A'=AA'=E$, 所以, $AB\in O(n)$; ①

$A^{-1}(A^{-1})'=A^{-1}(A')^{-1}=(A'A)^{-1}=E^{-1}=E$, 即, $A^{-1}\in O(n)$; ②

设 $A,B\in SO(n)$ (即, A,B 是 n 阶行列式为 1 的正交阵),

则 $|AB|=|A||B|=1$, $|A^{-1}|=|A|^{-1}=1$,

从而由①②得, $AB\in SO(n)$, $A^{-1}\in SO(n)$. □

注: $O(n)$ 和 $SO(n)$ 都是一般线性群 $GL_n(\mathbb{R})$ (由 n 阶可逆实矩阵组成的群) 的子群, 在几何、物理上有重要意义. 在本题中, 由于 $GL_n(\mathbb{R})$ 是一个群, 所以, 要验证 $O(n)$, $SO(n)$ 是群, 只需验证它们是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群即可, 即, 只需验证它们对矩阵的乘法运算和求逆运算封闭即可. 类似的方法适用于线性空间、环等代数结构.

35. (二阶正交群 $O(2)$ 和二阶特殊正交群 $SO(2)$.)

证明:

(1) 注意到 $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in O(2)$ 当且仅当 $AA'=\mathrm{E}_2$, 当且仅当

$$a^2+b^2=1,\ \ ac+bd=0,\ \ c^2+d^2=1.$$

有两种可能: 或者 $a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$, 或者 $a=\cos\theta$, $b=-\sin\theta$. 在第一种情形下有 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$, 而在第二种情形下有 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

(2) 易见 $P(1,2)$ 是行列式为 -1 的正交阵, 所以

$$O(2)\supseteq SO(2)\cup P(1,2)SO(2).$$

另一方面, 由 (1) 可知行列式为 -1 的任意 $A\in O(2)$ 可以写成 $P(1,2)A_1$ 的形式, 其中 $A_1\in SO(2)$. 所以反包含关系也成立. □

36. (置换矩阵.)

证明: 设 A 是 n 阶置换阵, 即, 每一行和每一列均只有一个非零元, 且这个非零元是 1.

法一: 设 A 的第 i 列为 α_i, 则 $\alpha_i'\alpha_j=\delta_{ij}$, 即, $AA'=E$, 所以, A 是正交阵. □

法二: 设 ε_i 为 $\mathbb{R}^n$ 的基本列向量, $1\le i\le n$. 由于 A 是置换矩阵, 所以, A 的列向量组实际上是 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的一个排列, 即, 存在 n 元排列 $k_1k_2\cdots k_n$ 使得

$$A=(\varepsilon_{k_1}\ \varepsilon_{k_2}\ \cdots\ \varepsilon_{k_n}).$$

显然, ε_{k_1}, $\cdots$, ε_{k_n} 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标正基,

且 A 是从标正基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 到标正基 ε_{k_1}, $\cdots$, ε_{k_n} 的过渡矩阵, 因此是正交矩阵. □

37. (正交阵的特征值.)

注: 关于正交阵的特征值有如下的

引理: 设 $A\in O(n)$, 即, A 是 n 阶正交阵. 则 A 的任意复特征值 λ_0 都满足 $|\lambda_0|=1$, 即, A 的特征值位于单位圆上.

证明: 由于 λ_0 是 A 的特征值,

所以存在 $0\neq\xi\in\mathbb{C}^n$ 使得 $A\xi=\lambda_0\xi$. ①

在①两边取复共轭, 并注意到 A 是实矩阵, 得:

$$\overline{A\xi}=A\overline{\xi}=\overline{\lambda_0\xi}=\overline{\lambda_0}\ \overline{\xi}. \quad ②$$

其中, $\xi=(z_1,z_2,\cdots,z_n)'\in\mathbb{C}^n$, $\overline{\xi}=(\overline{z_1},\cdots,\overline{z_n})'$, $\overline{z}$ 表示 z 的复共轭.

用 ξ' 左乘②的两边, 并注意到, $A'=A^{-1}$, 得:

$$\xi'A\overline{\xi}=(\xi'A)\xi=(A'\xi)'\overline{\xi}=(A^{-1}\xi)'\overline{\xi}=\overline{\lambda_0}\ \xi'\overline{\xi}. \quad ③$$

由于 A 可逆, 所以由①得: $A^{-1}\xi = \dfrac{1}{\lambda_0}\xi$; 代入③得: $\xi'\overline{\xi} = \lambda_0\overline{\lambda_0}\xi'\overline{\xi}$. ④

由于 $\xi'\overline{\xi} = z_1\overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}z_n = \sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|^2 > 0$,

所以由④即得: $\lambda_0\overline{\lambda_0} = 1$, 即, $|\lambda_0| = 1$. □

注: 由上述引理, 正交阵的特征值都位于单位圆上, 但是 ± 1 未必是 A 的特征值; 实际上, A 甚至可能没有实特征值. 本题即是要求举出例子.

例如: $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, 其中, $\sin\theta \neq 0$. A 在 $\mathbb{R}^2$ 上的作用是旋转变换, 所以没有特征向量, 从而没有实特征值 (也可以直接用它的特征多项式得到). □

38. (Gram 矩阵: 是度量阵的推广.)

证明:

(1) 直接计算可得:

$$\begin{aligned} G(i,j) &= (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} C(k,i)\eta_k,\ \sum_{\ell=1}^{n} C(\ell,j)\eta_\ell\right) \\ &= \sum_{k,\ell=1}^{n} (C')(i,k)A(k,\ell)C(\ell,j) \\ &= (C'AC)(i,j). \end{aligned}$$

(2) 如果 G 可逆那么 $\operatorname{rank}(G) = m$. 由 (1) 可得

$$m \geq \operatorname{rank}(C) \geq \operatorname{rank}(C'AC) = \operatorname{rank}(G) = m,$$

即, $\operatorname{rank}(C) = m$, 从而 $\operatorname{rank}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = m$, 即, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ 线性无关.

反之, 如果 G 不可逆, 那么存在非零的 $X \in \mathbb{R}^m$ 使得 $GX = 0$. 设 $\varepsilon = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m)X$. 则 $(\varepsilon, \varepsilon) = X'GX = 0$, 即, $\varepsilon = 0$, 所以, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ 线性相关, 矛盾. □

注: 本题的结论表明, 在实内积空间中, 可以利用向量组的 Gram 矩阵判定该向量组的线性关系.

39. (Schmidt 正交化方法的推广, 即, 也可以对线性相关的向量组作 Schmidt 正交化.)

证明:

(1) 这等价于证明如下的**断言**: 对任意 $2 \le t \le m$ 有 $(\xi_t, \xi_i) = 0$, $1 \le i \le t-1$. 对 t 做数学归纳. $t=2$ 的情形显然. 假设**断言**在小于 t 时成立. 由归纳假设可知, 对任意 $1 \le i \le t-1$ 有:

$$(\xi_t, \xi_i) = \left(\eta_t - \sum_{k=1}^{t-1} \frac{(\eta_t, \xi_k)}{(\xi_k, \xi_k)} \xi_k,\ \xi_i \right) = \left(\eta_t - \frac{(\eta_t, \xi_i)}{(\xi_i, \xi_i)} \xi_i,\ \xi_i \right) = 0,$$

从而**断言**得证.

(2) 由 (1) 可知, Gram 矩阵 $G(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ 是对角元为 (ξ_i, ξ_i) 的对角阵. 所以 $|G(\xi_1, \ldots, \xi_m)| = (\xi_1, \xi_1) \cdots (\xi_m, \xi_m)$. 如果存在 $\xi_i = 0$ 那么 $|G(\xi_1, \ldots, \xi_m)| = 0 = (\xi_1, \xi_1) \cdots (\xi_m, \xi_m)$. 而且, 在这种情形下向量组 $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 线性相关 (因为它等价于向量组 $\xi_1, \ldots, \xi_m$). 所以第 **38** 题可知 $|G(\eta_1, \ldots, \eta_m)| = 0$. 所以我们可以假设 $\xi_i \neq 0$, $1 \le i \le m$. 由定义有:

$$(\xi_1 \ \cdots \ \xi_m) = (\eta_1 \ \cdots \ \eta_m) T,$$

其中 T 是对角元为 1 的上三角阵. 从而 $|T| = 1$ 且

$$\begin{aligned} |G(\xi_1, \ldots, \xi_m)| &= |T'||G(\xi_1, \ldots, \xi_m)||T| \\ &= |G(\xi_1, \ldots, \xi_m)| = (\xi_1, \xi_1) \cdots (\xi_m, \xi_m), \end{aligned}$$

正如所需.

(3) 与 (2) 中类似, 我们可以假设 $\xi_i \neq 0$, $1 \le i \le m$. 从而由 (1) 和定义我们有:

$$\begin{aligned} (\eta_i, \eta_i) &= \left(\xi_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(\eta_i, \xi_k)}{(\xi_k, \xi_k)} \xi_k,\ \xi_i + \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{(\eta_i, \xi_\ell)}{(\xi_\ell, \xi_\ell)} \xi_\ell \right) \\ &= (\xi_i, \xi_i) + \sum_{k=1}^{i-1} (\eta_i, \xi_k)^2 \\ &\ge (\xi_i, \xi_i) > 0. \end{aligned}$$

再利用 (2) 即得. □

40. 略.

41. (Schmidt 正交化的应用: Hadamard 不等式.) **证明**:

(1) 直接计算可得:

$$A'A = \begin{pmatrix} \eta_1' \\ \ddots \\ \eta_n' \end{pmatrix} (\eta_1, \cdots \eta_n),$$

从而

$$(\eta_i,\eta_j)=\eta_i'\eta_j=(A'A)(i,j).$$

(2) 与第 **40** 题类似, 对 $\eta_1,\ldots,\eta_n$ 做 Schmidt 正交化我们得到两两正交的向量组 $\xi_1,\ldots,\xi_n$, 使得

$$|G(\eta_1,\ldots,\eta_n)|=|A|^2=|G(\xi_1,\ldots,\xi_n)|\leq(\eta_1,\eta_1)\cdots(\eta_n,\eta_n),$$

而这正好就是 Hadamard 不等式. 由第 **40** 题的 (3) 可知等号成立当且仅当对任意 $1\leq i\neq j\leq n$ 有 $(\eta_i,\xi_j)=0$. 从而得到其余的结论. □

42. (内积空间中两个子空间正交的条件.)

证明: 对任意 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{m}\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 和 $\beta=\sum\limits_{j=1}^{n}y_j\eta_j$ 有:

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\alpha_i,\beta_j)=0.$$ □

注: 本题的结论是: 要验证两个子空间是正交的, 只需对它们的生成元进行验证即可. □

43. (子空间的正交补的性质, 子空间的运算.)

证明:

(1) 任意取定 $\alpha\in W$. 则对任意 $\beta\in W^{\perp}$ 有 $(\alpha,\beta)=0$,

此即表明: $W\subseteq(W^{\perp})^{\perp}$; ①

注: ①不需要有限维的条件.

由于 $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V=n$; $\dim W^{\perp}+\dim(W^{\perp})^{\perp}=\dim V$,

所以, $\dim W=\dim(W^{\perp})^{\perp}$, ②

由①②即得: $W=(W^{\perp})^{\perp}$.

(利用维数关系.)

(2) 任意取定 $\alpha\in W^{\perp}$. 对任意 $\beta\in U\subseteq W$ 有 $(\alpha,\beta)=0$, 所以, $\alpha\in U^{\perp}$, 从而 $W\perp\subseteq U^{\perp}$.

注: 这个结论不需要有限维的条件.

(3) 因为 $U\subseteq U+W$, 所以, 由 (2) 得: $(U+W)^{\perp}\subseteq U^{\perp}$; 同理, $(U+W)^{\perp}\subseteq W^{\perp}$,

所以, $(U+W)^{\perp}\subseteq U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

反之, 任意取定 $\alpha\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$. 对任意 $\beta=\beta_1+\beta_2\in U+W$, 其中, $\beta_1\in U$, $\beta_2\in W$, 有:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2) = 0 + 0 = 0,$$

所以, $\alpha \in (U+W)^{\perp}$, 即, $U \perp \cap W^{\perp} \subseteq (U+W)^{\perp}$.

综上, $U \perp \cap W^{\perp} = (U+W)^{\perp}$.

(这个结论仍然不需要有限维的条件.)

(4) 由 (3) 和 (1) 得: $(U^{\perp} + W^{\perp})^{\perp} = (U^{\perp})^{\perp} \cap (W^{\perp})^{\perp} = U \cap W$,

从而, 再利用 (1) 得:

$$U^{\perp} + W^{\perp} = ((U^{\perp} + W^{\perp})^{\perp})^{\perp} = (U \cap W)^{\perp}.$$

44. (正交补与线性方程组之间的关系.)

证明: 设所给的线性方程组的系数矩阵为 A, 其行向量为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$. 则 $W = L(\alpha_1', \cdots, \alpha_m')$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

对任意 $\gamma = (k_1, \cdots, k_n)' \in \mathbb{R}^n$ 有: $\gamma \in S$ 当且仅当 $\sum_{j=1}^{n} k_i a_{ij} = 0$ 对每个 $1 \leq i \leq m$ 都成立.

而 $\sum_{j=1}^{n} k_i a_{ij} = \alpha_i' \gamma = (\alpha_i', \gamma)$. 所以, $\gamma \in S$ 当且仅当 $(\gamma, \alpha_i) = 0$ 对每个 $1 \leq i \leq m$ 都成立, 当且仅当 $\gamma \in W^{\perp}$, 从而: $S \subseteq W^{\perp}$. ①

又,

$$\dim W^{\perp} = n - \dim W = n - \operatorname{rank}(A),$$

(子空间与它的正交补的维数关系.)

$$\dim S = n - \operatorname{rank}(A),$$

(齐次线性方程组理论.)

所以, $\dim W^{\perp} = \dim S$, 从而由①得: $W^{\perp} = S$; 而 $\mathbb{R}^n = W \oplus W^{\perp}$, 所以, $\mathbb{R}^n = W \oplus S$. □

注: 本题的结论给出了实数域上的齐次线性方程组的解空间的几何含义, 给出了在 $\mathbb{R}^n$ 中求子空间 W 的补空间的**算法**:

设 $W = L(\beta_1, \cdots, \beta_m)$, $\beta_i \in \mathbb{R}^n$, (列向量) 设 A 是以 $\beta_1', \cdots, \beta_m'$ 为行向量的矩阵. 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间就是 W 在 $\mathbb{R}^n$ 中的正交补.

45. (正交补和正交投影的计算.)

解:

(1) 方程组 $2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_1 = (2, 0, 1)'$, $\xi_2 = (3, 2, 0)'$, 因此, ξ_1, ξ_2 是 W 的一个基.

作 Schmidt 正交化: $\beta_1 = \xi_1$, $\beta_2 = \xi_2 - \dfrac{(\xi_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (3/5, 2, -6/5)$,

再单位化, 即得 W 的一个标正基: $\varepsilon_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2$.

(2) (由第 **44** 题的结论) $W^\perp = L((2,-3,-4)')$, 它的一个标正基为: $\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,-3,-4)'$.

(3) 设 $(1,1,1)' = a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3$, 其中, $\xi_3 = (2,-3,-4)$, 由此即得 a, b, c. 略.

(4) 由于 $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$, 所以, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个标正基. 令 $A = (\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)$. 则任意 $(x,y,z)'$ 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的坐标为: $A^{-1}(x,y,z)'$. 从而, 所求的矩阵为 $P = A^{-1} = A'$.

46. 略.

47. (通过解齐次线性方程组求正交补.) 略.

48. (利用 u_1, u_2 构造 $\mathbb{R}^4$ 的一个标正基.) 略.

49. 由 Schmidt 正交化的构造即得. 略.

50. (Bessel 不等式, 标正基的扩充.)

证明: 由于 $\beta_1, \ldots, \beta_m$ 线性无关, 所以可以把它们扩充为 V 的由两两正交的向量组成的基:

$$\beta_1, \ldots, \beta_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_n.$$

对任意 $\beta \in V$, 设

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j.$$

对每 个$1 \le i \le n$, 用 $(-, \beta_i)$ 作用可得

$$x_i = \frac{(\beta, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}.$$

所以,

$$\begin{aligned}
(\beta, \beta) &= \left(\beta, \sum_{i=1}^{n} \frac{(\beta, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}\beta_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(\beta, \beta_i)^2}{(\beta_i, \beta_i)} \\
&\ge \frac{(\beta, \beta_1)^2}{(\beta_1, \beta_1)} + \cdots + \frac{(\beta, \beta_m)^2}{(\beta_m, \beta_m)},
\end{aligned}$$

正如所需. □

51. (正交投影的应用, 三角不等式.)

证明: 需要证明: 对任意 $\beta \in W$ 都有: $|\alpha - \beta| \ge |\alpha - \alpha_1|$.

由于 α_1 是 α 的沿 W 的正交投影, 所以, $\alpha-\alpha_1\in W^{\perp}$, 而 $\alpha_1-\beta\in W$ (W 是子空间!), 因此, $(\alpha-\alpha_1,\alpha_1-\beta)=0$, 于是由勾股定理得:

$$|\alpha-\beta|^2=|(\alpha-\alpha_1)+(\alpha_1-\beta)|^2=|\alpha-\alpha_1|^2+|\alpha_1-\beta|^2\geq|\alpha-\alpha_1|^2,$$

即, $|\alpha-\beta|\geq|\alpha-\alpha_1|$.

在 $\mathbb{R}^3$ 中, $|\alpha-\alpha_1|$ 是 α 到 W (例如, 过原点的直线或平面) 的垂线段的长.

□

注: 这是一个基本结论, 是最小二乘法的理论基础. 这里的代数的方法比微积分方法简便.

52. (欧式空间向量与子空间的夹角, 正交投影, 勾股定理.)

不失一般性, 我们可以总是假定两个向量 $\alpha,\beta\in V$ 的夹角是锐角, 即, 规定: $\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{|(\alpha,\beta)|}{|\alpha||\beta|}$, 于是,

$$\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{|(\alpha,\beta)|}{|\alpha||\beta|}=\frac{\left|\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\right||\beta|}{|\alpha|}=\frac{|pr_\beta(\alpha)|}{|\alpha|}, \qquad ①$$

其中, $pr_\beta(\alpha)=\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta$ 表示 α 在 β 上的投影, 参见第 **16** 题.

(1) 需要证明: 对任意 $\beta\in V$ 都有: $\langle\alpha,\beta\rangle\geq\langle\alpha,\alpha_1\rangle$.

由于余弦函数在 $[0,\pi/2]$ 上是减函数, 所以, 由①, 只需证明: 对任意 $\beta\in V$ 有: $|pr_\beta(\alpha)|\leq|pr_{\alpha_1}(\alpha)|$. ②

由于 α_1 是 α 在 W 上的正交投影, 即, $\alpha-\alpha_1\in W^{\perp}$, 所以, $(\alpha-\alpha_1,\alpha_1)=0$, 即, $(\alpha,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_1)$,

从而 $pr_{\alpha_1}(\alpha)=\dfrac{(\alpha,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\alpha_1$,

所以, 由②, 只需证明: $|pr_\beta(\alpha)|\leq|\alpha_1|$. ③

由于 $\alpha-\alpha_1\in W^{\perp}$, 而 $pr_\beta(\alpha)\in W$,

所以, $(\alpha-\alpha_1,pr_\beta(\alpha))=0$,

另一方面, 有: $(\alpha-pr_\beta(\beta),pr_\beta(\alpha))=0$, (由投影的定义.)

所以, $(\underline{\alpha_1-\alpha}+\underline{\alpha-pr_\beta(\alpha)},pr_\beta(\alpha))=0$,

即, $(\alpha_1-pr_\beta(\alpha),pr_\beta(\alpha))=0$, 从而由勾股定理有:

$$\begin{aligned}|\alpha_1|^2&=|\alpha_1-pr_\beta(\alpha)+pr_\beta(\alpha)|^2\\&=|\alpha_1-pr_\beta(\alpha)|^2+|pr_\beta(\alpha)|^2\geq|pr_\beta(\alpha)|^2,\end{aligned}$$

即, ③成立.

当 $V=\mathbb{R}^3$ 且 $\dim W=2$ 时, $\langle\alpha,W\rangle$ 就是解析几何中的直线与平面所成的角. □

注: 可以通过作图 (立体几何中的三垂线定理) 来帮助理解不等式③的证明.

(2) 可以直接求出平面 $L(\alpha,\beta)$ 的法向量 η (解齐次线性方程组), 然后计算 η 与 γ 的夹角 θ, 则, γ 与 $L(\alpha,\beta)$ 所成的角为 $\pi/2-\theta$. 略.

53. (一个欧式空间的例子: 欧式空间的非零子空间仍然是欧式空间.)

(1) **证明**: 由 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2dx=1;$

$$(\cos ix,\cos ix)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 ixdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2ix}{2}dx=1;$$
$$(\sin jx,\sin jx)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 jxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2jx}{2}dx=1,$$

可知, S_n 中的向量都是单位向量; 进一步, 由

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\cos ix\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos ixdx=0;$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sin jx\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin jxdx=0;$$
$$(\cos ix,\sin jx)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ \cos ix\sin jxdx=0$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\sin(jx+ix)+\sin(jx-ix))dx=0$$

可知, S_n 中的向量是两两正交的.

综上, S_n 是 $C[0,2\pi]$ 中的一个标正集.

(2) 由于 S_n 的向量非零且两两正交, 所以, S_n 中的向量线性无关; 又由于 $x-\pi$ 不能由 S_n 线性表出 (若不然, 设

$$x-\pi=c\frac{1}{\sqrt{2}}+\sum_{i=1}^{n}\cos ix+\sum_{j=1}^{n}b_j\sin jx,$$

两边求二阶导数, 即得矛盾.)

所以, 由 S_n 和 $x-\pi$ 生成的 $C[0,2\pi]$ 的子空间 V 的维数是 $2n+1+1=2n+2$, 且, S_n 中的全部向量和 $x-\pi$ 构成了 V 的一个基.

设 $n=1$. 由上面的讨论可知, 此时, $\dim V=4$, V 的一个基为: $\alpha_1:=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha_2:=\cos x$, $\alpha_3:=\sin x$, $\alpha_4:=x-\pi$, 而 $W=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$. 由 (1), $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 W 的一个标正基.

作 Schmidt 正交化: $\eta_i=\alpha_i$, $1\le i\le 3$ (因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已经两两正交了),

$\eta_4=\alpha_4-\dfrac{(\alpha_4,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1-\dfrac{(\alpha_4,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2-\dfrac{(\alpha_4,\eta_3)}{(\eta_3,\eta_3)}\eta_3$,

则, $\alpha_4-\eta_4=\dfrac{(\alpha_4,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1+\dfrac{(\alpha_4,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2+\dfrac{(\alpha_4,\eta_3)}{(\eta_3,\eta_3)}\eta_3$

就是 $\alpha_4=x-\pi$ 在 W 上的正交投影,

从而, α_4 到 W 的距离为: $|\alpha_4-(\alpha_4-\eta_4)|=|\eta_4|$. 具体计算略.

$n=2$ 的情形类似. □

54. (实内积空间之间的度量映射的基本性质: 保长度, 保距离, 保夹角.)

证明: 由于 f 是度量映射 (保内积), 所以, 对任意 $\alpha\in V$ 有:

$$|f(\alpha)|^2=(f(\alpha),f(\alpha))=(\alpha,\alpha)=|\alpha|^2,$$

从而 $|f(\alpha)|=|\alpha|$.

从而, 对任意 $\alpha,\beta\in V$ 有:

$$d(f(\alpha),f(\beta))=|f(\alpha)-f(\beta)|=|f(\alpha-\beta)|=|\alpha-\beta|=d(\alpha-\beta);$$

(注意到度量映射是线性的.)

$$\cos\langle f(\alpha),f(\beta)\rangle\frac{(f(\alpha),f(\beta)}{|f(\alpha)||f(\beta)|}=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}=\cos\langle\alpha,\beta\rangle,$$

即, $\langle f(\alpha),f(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$. □

55. (线性映射成为度量映射的充要条件.)

证明: 由题设 (f 线性且 $(f(\varepsilon_i),f(\varepsilon_j))=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$) 可得:

对任意 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$, $\beta=\sum\limits_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j$ 有:

$$(f(\alpha),f(\beta))=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(f(\varepsilon_i),f(\varepsilon_j))=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=(\alpha,\beta),$$

所以, f 是度量映射. □

注: 本题的含义是, 对于内积空间之间的**线性映射** f, 要验证 f 是度量映射, 只需要在基向量上验证即可.

56. (内积空间之间的保内积的映射必然是线性映射.)

证明: 对任意 $\alpha,\beta\in V$ 和 $k,\ell\in\mathbb{R}$ 有:

$$(f(k\alpha+\ell\beta)-kf(\alpha)-\ell f(\beta),f(k\alpha+\ell\beta)-kf(\alpha)-\ell f(\beta))$$

(用内积的双线性性展开)

$= (f(k\alpha+\ell\beta), f(k\alpha+\ell\beta)) - k(f(k\alpha+\ell\beta), f(\alpha)) - \ell(f(k\alpha+\ell\beta), f(\beta))$

$-k(f(\alpha), f(k\alpha+\ell\beta)) + k^2(f(\alpha), f(\alpha)) + k\ell(f(\alpha), f(\beta))$

$-\ell(f(\beta), f(k\alpha+\ell\beta)) + k\ell(f(\beta), f(\alpha)) + \ell^2(f(\beta), f(\beta))$

(由于 f 保内积)

$= (k\alpha+\ell\beta, k\alpha+\ell\beta) - k(k\alpha+\ell\beta, \alpha) - \ell(k\alpha+\ell\beta, \beta)$

$-k(\alpha, k\alpha+\ell\beta) + k^2(\alpha, \alpha) + k\ell(\alpha, \beta)$

$-\ell(\beta, k\alpha+\ell\beta) + k\ell(\beta, \alpha) + \ell^2(\beta, \beta) = 0,$

此即表明: $f(k\alpha+\ell\beta) - kf(\alpha) - \ell f(\beta) = 0,$

即, $(k\alpha+\ell\beta) = kf(\alpha) + \ell f(\beta)$, 所以, f 是线性的. □

注: 在内积空间中, 要验证一个向量是零向量, 可以通过验证它的长度为 0 来得到.

57. **注**: 由题设有:

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = (1\ x\ x^2)\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \qquad ①$$

从而由矩阵的运算性质可知, τ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]_3$ 是线性映射.

但是, 其中的矩阵并不是正交阵. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的基本向量. 则 $\tau(\varepsilon_2) = -1/2 + x$, 从而 $(\tau(\varepsilon_2), \tau(\varepsilon_2)) = 1/12 \neq 1 = (\varepsilon_2, \varepsilon_2)$.

58. (正交变换的一个性质: 正交变换的不变子空间的正交补仍然是不变子空间.)

证明: (对任意 $\alpha \in W^\perp$, 要证 $\mathbb{A}\alpha \in W^\perp$, 即, 对任意 $\beta \in W$ 有 $(\mathbb{A}\alpha, \beta) = 0$.)

设 $(-,-)$ 是 V 上的内积. 则 W 关于 $(-,-)$ 也是一个欧式空间. 由于 W 是 $\mathbb{A}$- 不变的, 所以 $\mathbb{A}|_W$ 也是 W 上的正交变换, 特别, $\mathbb{A}|_W$ 是 W 的自同构. 所以, 对任意 $\beta \in W$ 都存在唯一的 $\beta_1 \in W$ 使得 $\beta = \mathbb{A}|_W(\beta_1) = \mathbb{A}(\beta_1)$. 从而, 对任意 $\alpha \in W^\perp$ 有

$$(\mathbb{A}(\alpha), \beta) = (\mathbb{A}(\alpha), \mathbb{A}(\beta_1)) = (\alpha, \beta_1) = 0,$$

此即表明, $\mathbb{A}(\alpha) \in W^\perp$. □

注: 本题的结论是有用的: 设 $\mathbb{A}$ 是欧式空间 V 上的一个线性变换, 设 $\mathbb{A}$ 有一个非平凡的不变子空间, 则由 $V = W \oplus W^\perp$ 和 $W^\perp$ 也是 $\mathbb{A}$-子空间可知, 存在 V 的一个基, 使得 $\mathbb{A}$ 在这个基下的矩阵是准对角阵.

或者, 设 A 是 n 阶正交阵. 设 A 有非平凡的不变子空间 $W \subset \mathbb{R}^n$, 则A 相似于一个准对角阵. (对实对称阵有类似的结论, 从而可导出实对称阵可对角化的结论.)

59. (正交变换的复合.)

解: 如果 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ 都是实内积空间 V 上的正交变换,

则对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有:

$$((\mathbb{A}\mathbb{B})(\alpha), (\mathbb{A}\mathbb{B})(\beta)) = (\mathbb{A}(\mathbb{B}(\alpha)), \mathbb{A}(\mathbb{B}(\beta))) = (\mathbb{B}\alpha, \mathbb{B}\beta) = (\alpha, \beta),$$

(后面的两个等号分别用了 $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ 是正交变换.)

所以, $\mathbb{A}\mathbb{B}$ 仍然是正交变换. □

60. (第二类正交变换(正交阵)必然有特征值 -1, 行列式与特征值.)

注: 任意正交阵的特征值全部位于单位圆上. (参见第 **37** 题中的**引理**.)

证明: 这等价于证明, 如果 A 是正交阵且 $|A| = -1$, 那么 -1 是 A 的特征值, 而这可以证明如下:

$$|A + E| = |A + A'A| = |E + A'||A| = -|E + A'| = -|E + A|,$$

即, $|E + A| = 0$, 从而 -1 是 A 的特征值. □

61. (反射变换.)

证明: 由定义可得, 对任意 $\alpha \in V$ 有, $R_v(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, v)v$. 从而, 对任意 $\alpha, \beta \in V$ 和 $a, b \in \mathbb{R}$ 有:

$$\begin{aligned} R_v(a\alpha + b\beta) &= (a\alpha + b\beta) - 2(a\alpha + b\beta, v) \\ &= a(\alpha - 2(\alpha, v)v) + b(\beta - 2(\beta, v)v) = aR_v(\alpha) + bR_v(\beta), \end{aligned}$$

所以, R_v 是 V 上的线性变换; 进一步, 由于 $(v, v) = 1$, 所以对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有:

$$\begin{aligned} (R_v(\alpha), R_v(\beta)) &= (\alpha - 2(v, \alpha)v,\ \beta - 2(v, \beta)v) \\ &= (\alpha, \beta) - 2(\alpha, v)(\beta, v) - 2(\beta, v)(\alpha, v) \\ &\quad + 4(\alpha, v)(\beta, v)(v, v) \\ &= (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

综上, R_v 是 V 上的正交变换. □

注: 反射变换是欧式空间中最重要的正交变换 (参见下面的第 **62** 题). 其基本性质如下:

引理: 设 V 是欧式空间, 内积为 (,). 则

(1) 对任意单位向量 v, 相应的反射变换 R_v 满足 $R_v^2 = 1$, 这里的 1 是 V 上的恒等变换; 且, 对任意 $\alpha \in L(\alpha)^\perp$ 有: $R_v(\alpha) = \alpha$, 对任意 $\gamma \in L(v)$ 有 $R_v(\gamma) = -\gamma$, 从而, R_v 是第二类的正交变换.

(2) 对任意单位向量 $\alpha, \beta \in V$ 都存在一个反射变换 R_v 使得 $R_v(\alpha) = \beta$.

证明:

(1) 把 v 扩充为 V 的一个标正基 $v_1 = v, v_2, \ldots, v_n$. 则 R_v 在这个标正基下的矩阵是对角阵 $\mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$, 所以 R_v 是第二类的正交变换.

利用这个对角阵即得 $R_v^2 = 1$. 也可以通过如下的计算得到: 对任意 $\alpha \in V$ 有:

$$R_v^2(\alpha) = R_v(\alpha - 2(\alpha, v)v) = \alpha - 2(\alpha, v)v - 2(\alpha, v)(v - 2v) = \alpha.$$

对任意 $\alpha \in L(v)^\perp$, 由于 $(\alpha, v) = 0$, 所以

$$R_v(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, v)v = \alpha;$$

对任意 $\gamma = kv \in L(v)$ 有: $(\gamma, v) = (kv, v) = k$, 所以,

$$R_v(\gamma) = \gamma - 2(\gamma, v)v = \gamma - 2kv = kv - 2kv = -kv = -\gamma. \qquad \square$$

(2) 对任意单位向量 $\alpha \neq \beta$ 考虑如下的单位向量:

$$v = \frac{1}{|\alpha - \beta|}(\alpha - \beta).$$

注意到, 由于 α, β 是单位向量, 所以 $|\alpha - \beta|^2 = 2 - 2(\alpha, \beta)$, 从而

$$\begin{aligned} R_v(\alpha) &= \alpha - 2(v, \alpha)v = \alpha - \frac{2(\alpha - \beta, \alpha)}{|\alpha - \beta|^2}(\alpha - \beta) \\ &= \alpha - \frac{2(\alpha, \alpha - \beta)}{2 - 2(\alpha, \beta)}(\alpha - \beta) \\ &= \alpha - (\alpha - \beta) = \beta, \end{aligned}$$

正如所需.

62. (Cartan-Dieudonné 定理的在欧式空间下的特殊情形: 任意正交变换都是若干反射变换的乘积 (复合).)

证明: 取定 V 的任意一个标正基 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. 则, 对 V 的任意正交变换 $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}(\varepsilon_1), \ldots, \mathbb{A}(\varepsilon_n)$ 也是 V 的一个标正基. 设 t 是满足如下条件的下标 i 的个数: $\mathbb{A}(\varepsilon_i) \neq \varepsilon_i$. 我们通过对 t 做归纳来证明任意正交变换都是反射变换的复合(乘积).

如果一个正交变换 $\mathbb{T}$ 的 t 满足 $t = 0$ 那么 $\mathbb{T}$ 是恒等变换. 所以, 对任意单位向量 v 都有 $\mathbb{T} = R_v^2$. 即, $t = 0$ 的情形结论成立.

假设结论对上面定义的个数不超过 $t-1$ 的正交变换都成立.

对任意正交变换 $\mathbb{T}$, 其个数为 t.

不失一般性, 我们可以假设 $\mathbb{T}(\varepsilon_1)\neq\varepsilon_1$. 由第 **61** 题中的**引理**的 (2) 可知, 存在反射变换 R_{v_1} 使得 $R_{v_1}(\mathbb{T}(\varepsilon_1))=\varepsilon_1$, 其中,

$$v_1=\frac{1}{|\mathbb{T}(\varepsilon_1)-\varepsilon_1|}(\mathbb{T}(\varepsilon_1)-\varepsilon_1).$$

进一步, 由 $(\varepsilon_1,\varepsilon_j)=0$ 和

$$(\mathbb{T}(\varepsilon_1),\varepsilon_j)=(\mathbb{T}(\varepsilon_1),\mathbb{T}(\varepsilon_j))=(\varepsilon_1,\varepsilon_j)=0,$$

可知, 如果对某些下标 $j\neq 1$ 有 $\mathbb{T}(\varepsilon_j)=\varepsilon_j$, 那么

$$\begin{aligned}(R_{v_1}\mathbb{T})(\varepsilon_j) &= \mathbb{T}(\varepsilon_j)-2(v_1,\mathbb{T}(\varepsilon_j))v_1\\ &= \varepsilon_j-2\frac{1}{|\mathbb{T}(\varepsilon_1)-\varepsilon_1|}(\mathbb{T}(\varepsilon_1)-\varepsilon_1,\,\varepsilon_j)v_1\\ &= \varepsilon_j.\end{aligned}$$

所以正交变换 $R_{v_1}\mathbb{T}$ 的上述定义的个数不超过 $t-1$. 由归纳假设知, 存在反射变换 $R_{v_2},\ldots,R_{v_s}$ 使得

$$R_{v_1}\mathbb{T}=R_{v_2}\cdots R_{v_s}.$$

根据第 **61** 题中的**引理** 的 (1) 有: $R_{v_1}^{-1}=R_{v_1}$. 所以,

$$\mathbb{T}=R_{v_1}^{-1}R_{v_2}\cdots R_{v_s}=R_{v_1}R_{v_2}\cdots R_{v_s},$$

正如所需. □

注: 欧式空间上的一个正交变换 $\mathbb{A}$ 写成反射变换的写法不唯一; 但是, 由于任意反射变换的行列式都是 -1, 所以, $\mathbb{A}$ 的反射变换因子的个数的奇偶性是确定: 如果 $\mathbb{A}$ 是第一 (二) 类的, 则其反射变换的因子个数是偶 (奇) 数.

63. (参见前面的第 **35** 题.) 略.

64. (三维实线性空间上的任意线性变换必然有实特征值; 而正交变换的特征值都位于单位圆上. 所以, 如果 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的第一类的正交变换, 则 $\mathbb{A}$ 一定有一个特征值是 1. 任意欧式空间上的第二类正交变换都有一个特征值是 -1. (参见第 **60** 题.)) 略.

65. 略.

66. 略.

67. 略.

注: 以上五个题目都涉及到对 $\mathbb{R}^3$ 上的正交变换的刻画. 取定 $\mathbb{R}^3$ 的一个标正基后, 等价于对群 $O(3)$ 和 $SO(3)$ 的刻画.

68. (欧式空间上的保距变换与保内积变换的关系. 已知: 保内积变换一定是保距的 (参见第 **54** 题); 但保距变换未必是保内积的, 甚至不一定是线性的. 本题的结论说明: 保距变换实际上是一个保内积变换和一个平移变换的复合.)

证明: 设 $\gamma = \mathbb{A}(0)$. 定义 $\mathbb{B}: V \to V$ 为

$$\mathbb{B}(\alpha) = \mathbb{A}(\alpha) - \gamma: \ \ \alpha \in V.$$

由第 **56** 题可知, 只需证明 $\mathbb{B}$ 是度量映射 (从而必然是线性的).

首先我们有:

$$|\alpha| = |\alpha - 0| = |\mathbb{A}(\alpha) - \gamma| = |\mathbb{B}(\alpha)|, \ \ \alpha \in V.$$

设 $(-,-)$ 是 V 上的内积. 那么, 对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有:

$$\begin{aligned}
|\alpha - \beta|^2 &= (\alpha - \beta, \alpha - \beta) \\
&= (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) - 2(\alpha, \beta) \\
&= (\mathbb{A}(\alpha) - \mathbb{A}(\beta),\ \mathbb{A}(\alpha) - \mathbb{A}(\beta)) \\
&= (\mathbb{A}(\alpha) - \mathbb{A}(0) - (\mathbb{A}(\beta) - \mathbb{A}(0)), \\
&\quad\ \mathbb{A}(\alpha) - \mathbb{A}(0) - (\mathbb{A}(\beta) - \mathbb{A}(0))) \\
&= (\mathbb{B}(\alpha) - \mathbb{B}(\beta), \mathbb{B}(\alpha) - \mathbb{B}(\beta))) \\
&= (\mathbb{B}(\alpha), \mathbb{B}(\alpha)) + (\mathbb{B}(\beta), \mathbb{B}(\beta)) - 2(\mathbb{B}(\alpha), \mathbb{B}(\beta)) \\
&= (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) - 2(\mathbb{B}(\alpha), \mathbb{B}(\beta)),
\end{aligned}$$

此即表明 $(\alpha, \beta) = (\mathbb{B}(\alpha), \mathbb{B}(\beta))$, 即, $\mathbb{B}$ 是度量映射. □

69. (正交变换的存在性.)

证明: 必要性 ($\Rightarrow$) 是显然的, 因为正交变换是度量映射.

充分性 ($\Leftarrow$). (1) 根据假设有 $G(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = G(\beta_1, \cdots, \beta_m)$. 所以由第 **38** 题可知, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关当且仅当 $\beta_1, \ldots, \beta_m$ 线性无关. 设 $V_1 = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $V_2 = L(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

(2) 假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关 (从而 $\beta_1, \ldots, \beta_m$ 也线性无关). 设

$$\xi_1 = \alpha_1,$$

$$\xi_i = \alpha_i - \frac{(\alpha_i, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1 - \cdots - \frac{(\alpha_i, \xi_{i-1})}{(\xi_{i-1}, \xi_{i-1})}\xi_{i-1},$$
$$i = 2, \ldots, m-1.$$

由归纳假设可得 (α_j, ξ_k) $(k \leq j-1)$ 和 (ξ_j, ξ_j) $(1 \leq j \leq m)$ 由 Gram 矩阵 $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ 唯一确定. 设 $\gamma_j = \frac{1}{|\xi_j|}\xi_j$ $(1 \leq j \leq m)$. 那么 $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ 构成 V_1 的一个标正基. 设

$$(\gamma_1, \cdots, \gamma_m) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)P_1, \text{ 即},$$
$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m)P_1^{-1}. \qquad (*)$$

那么, 转移矩阵 P_1 由 $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ 唯一确定.

完全类似地, 我们对 $\beta_1, \ldots, \beta_m$ 做 Schmidt 正交化得到 V_2 的一个标正基 $(\delta_1, \ldots, \delta_m)$, 而且相应的转移矩阵 P_2 也由 Gram 矩阵 $G(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ 唯一确定:

$$(\delta_1, \cdots, \delta_m) = (\beta_1, \cdots, \beta_m)P_2, \text{ 即},$$
$$(\beta_1, \cdots, \beta_m) = (\delta_1, \cdots, \delta_m)P_2^{-1}\ . \qquad (**)$$

从而 $P_1 = P_2$. 分别取 $V_1^{\perp}$ 和 $V_2^{\perp}$ 的标正基 $\gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_n$ 和 $\delta_{m+1}, \ldots, \delta_n$. 则 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 和 $\delta_1, \ldots, \delta_n$ 是 V 的两个标正基. 定义 $\mathbb{A} \in \mathrm{End}(V)$ 为 $\gamma_i \mapsto \delta_i$ $(1 \leq i \leq n)$. 则 $\mathbb{A}$ 是 V 的正交变换. 进一步, 由 (*) 和 (**) 以及 $P_1 = P_2$ 可知 $\mathbb{A}(\alpha_i) = \beta_i$ $(1 \leq i \leq m)$.

(3) 假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性相关 (从而 $\beta_1, \ldots, \beta_m$ 也线性相关). 不失一般性我们可以设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 不全为 0, 从而我们可以设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 的一个极大无关子组. 于是, 又利用

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = G(\beta_1, \ldots, \beta_m)$$

和第 **38** 题的 (2) 可得 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 是 $\beta_1, \ldots, \beta_m$ 的一个极大无关子组. (注意到, $\eta_1, \ldots, \eta_q$ 的任意子组 $\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_p}$ 的 Gram 矩阵 $G(\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_p})$ 是 $G(\eta_1, \ldots, \eta_q)$ 的主子阵). 设

$$\alpha_j = x_{j1}\alpha_1 + \cdots + x_{jr}\alpha_r : \ \ r+1 \leq j \leq m, \ \ x_{jk} \in \mathbb{R}, \ 1 \leq k \leq r.$$

对每个 $r+1 \leq j \leq m$, 用 $(-, \alpha_k)$ $(1 \leq k \leq r)$ 作用于这个等式我们得到

$$(\alpha_j, \alpha_k) = (\alpha_1, \alpha_k)x_{j1} + \cdots + (\alpha_r, \alpha_k)x_{jr} : \ \ 1 \leq k \leq r, \qquad (***)$$

此即表明, $(x_{j1}, \ldots, x_{jr})^t$ 是线性方程组的解, 而该线性方程组的系数矩阵是可逆的 Gram 矩阵 $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. 类似地, 设

$$\beta_j = y_{j1}\beta_1 + \cdots + y_{jr}\beta_r: \ \ r+1 \le j \le m, \ \ y_{jk} \in \mathbb{R}, \ 1 \le k \le r,$$

则 $(y_{j1}, \ldots, y_{jr})^t$ 是线性方程组的解, 该线性方程组是可逆的 Gram 矩阵 $G(\beta_1, \ldots, \beta_r)$:

$$(\beta_j, \beta_k) = (\beta_1, \beta_k)y_{j1} + \cdots + (\beta_r, \beta_k)y_{jr}: \quad 1 \le k \le r. \qquad (****)$$

根据假设, (***) 和 (****) 是相同的线性方程组, 且都是只有唯一解, 从而 $x_{jk} = y_{jk}$, $r+1 \le j \le m$, $1 \le k \le r$.

于是, 根据 (2) 的讨论, 存在 V 的正交变换 $\mathbb{A}$ 使得 $\mathbb{A}(\alpha_i) = \beta_i$, $1 \le i \le r$. 所以, 对任意 $r+1 \le j \le m$ 有:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\alpha_j) &= x_{j1}\mathbb{A}(\alpha_1) + \cdots + x_{jr}\mathbb{A}(\alpha_r) \\ &= y_{j1}\beta_1 + \cdots + y_{jr}\beta_r \\ &= \beta_j \end{aligned}$$

正如所需. □

70. (正交阵的特征值的模都为 1, 即, 正交阵的特征值都位于单位圆上.)

证明: 就是前面第 **37** 题中的**引理**的证明. □

71. (反对称实矩阵的特征值只能是 0 或纯虚数.)

证明: 假设 A 是 n 阶反对称实矩阵. 设 λ_0 是 A 的任意复特征值. 于是存在非零的 $\xi = (z_1, \ldots, z_n)' \in \mathbb{C}^n$ 使得 $A\xi = \lambda_0\xi$. 由于 A 是实矩阵, 所以通过取复共轭我们得到

$$\overline{A\xi} = \overline{A}\,\overline{\xi} = A\overline{\xi} = \overline{\lambda_0}\,\overline{\xi}.$$

又由于 A 是反对称的, 所以通过取转置可得:

$$(A\overline{\xi})' = \overline{\xi}'A' = -\overline{\xi}'A = \overline{\lambda_0}\,\overline{\xi}'.$$

右乘 ξ 可得

$$-\overline{\xi}'A\xi = -\overline{\xi}'(A\xi) = -\lambda_0\overline{\xi}'\xi = \overline{\lambda_0}\,\overline{\xi}'\xi,$$

此即表明, $(\lambda_0 + \overline{\lambda_0})\overline{\xi}'\xi = 0$. 但是,

$$\overline{\xi}'\xi = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 > 0.$$

所以 $\lambda_0 + \overline{\lambda_0} = 0$, 即, λ 是 0 或纯虚数. □

72. (实对称阵 (欧式空间上的对称变换) 的性质.)

证明:

法一: (利用可对角化.)

因为 $\mathbb{A}$ 是欧式空间 V 上的对称变换, 所以存在 V 的一个标正基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \varepsilon_n$ 使得 $\mathbb{A}$ 在这个基下的矩阵是对角阵

$\operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0)$, 其中, $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq r$. 于是

$\operatorname{im}(\mathbb{A}) = L(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$, $\ker \mathbb{A} = L(\varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n)$,

从而, $(\operatorname{im}(\mathbb{A}))^{\perp} = \ker \mathbb{A}$, $(\ker \mathbb{A})^{\perp} = \operatorname{im}(\mathbb{A})$,

(正交补的唯一性.)

特别地, $V = \operatorname{im}(\mathbb{A}) \oplus \operatorname{im}(\mathbb{A})^{\perp} = \operatorname{im}(\mathbb{A}) \oplus \ker \mathbb{A}$. □

(对于欧式空间 V 的任意子空间 W 有 $V = W \oplus W^{\perp}$.)

法二: (直接用定义和维数公式.)

任意固定 $\mathbb{A}\alpha \in \operatorname{im}(\mathbb{A})$. 由于 $\mathbb{A}$ 是对称变换, 所以对任意 $\beta \in \ker \mathbb{A}$ 有:

$(\mathbb{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathbb{A}\beta) = (\alpha, 0) = 0,$

此即表明 $\mathbb{A}\alpha \in (\ker \mathbb{A})^{\perp}$, 于是, $\operatorname{im}(\mathbb{A}) \subseteq (\ker \mathbb{A})^{\perp}$;

由维数公式, $\dim \operatorname{im}(\mathbb{A}) = \dim V - \dim \ker \mathbb{A} = \dim (\ker \mathbb{A})^{\perp}$;

所以, $\operatorname{im}(\mathbb{A}) = (\ker \mathbb{A})^{\perp}$, 从而, $(\ker \mathbb{A})^{\perp} = \operatorname{im}(\mathbb{A})$, 且:

$$V = \operatorname{im}(\mathbb{A}) \oplus \operatorname{im}(\mathbb{A})^{\perp} = \operatorname{im}(\mathbb{A}) \oplus \ker \mathbb{A}. \qquad \square$$

73. (对称变换的一个充要条件, 类似于度量映射的情形, 参见第 **55** 题.)

证明: 对任意 $\alpha = (\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_n)X$, $\beta = (\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_n)Y$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$ 有:

$$(\mathbb{A}\alpha, \beta) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (\mathbb{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (\varepsilon_i, \mathbb{A}\varepsilon_j) = (\alpha, \mathbb{A}\beta),$$

所以 $\mathbb{A}$ 是对称变换. □

注: 本题的结论表明, 要验证欧式空间上的一个线性变换是否为对称变换, 只需在基向量上验证即可. □

74. (欧式空间上的对称变换的基本性质.)

(1) (欧式空间上的对称变换与实对称阵的关系.)

证明: 设 $\mathbb{A}$ 是欧式空间 V 上的一个对称变换, 而 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标正基, 且

$$(\mathbb{A}\varepsilon_1 \ \cdots \ \mathbb{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_n)A.$$

(要证 A 是对称阵.)

对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 有:

$$(\mathbb{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} A(k,i)\varepsilon_k,\ \varepsilon_j\right) = \sum_{k=1}^{n} A(k,i)(\varepsilon_k, \varepsilon_j) = A(j,i);$$

同理可得: $(\varepsilon_i, \mathbb{A}\varepsilon_j) = A(i,j)$;

而 $\mathbb{A}$ 是对称变换, 所以, $(\mathbb{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = (\varepsilon_i, \mathbb{A}\varepsilon_j)$,

从而, $A(j,i) = A(i,j)$, 即, A 是对称阵. □

(2) (n 维欧式空间上的任意对称变换的恰好有 n 个实特征值 (重根按重数计).)

证明: 设 $\mathbb{A}$ 是欧式空间 V 上的一个对称变换, 而 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标正基, 且

$$(\mathbb{A}\varepsilon_1 \ \cdots \ \mathbb{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_n)A.$$

则 $\mathbb{A}$ 的特征值就是 A 的特征值. 由 (1) 可知, A 是 n 阶实对称阵; 而 n 阶实对称阵的特征值全部是实数. 所以, $\mathbb{A}$ 恰好有 n 个实特征值 (重根按重数计).

(3) (欧式空间上的对称变换可对角化.)

证明: 设 $\mathbb{A}$ 是欧式空间 V 上的一个对称变换, 而 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一个标正基, 且

$$(\mathbb{A}\xi_1 \ \cdots \ \mathbb{A}\xi_n) = (\xi_1 \ \cdots \ \xi_n)A.$$

则由 (1) 可知, A 是 n 阶实对称阵, 从而存在正交阵 T 使得 $T'AT = T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是对角阵,

其中, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 是 A (因此也是 $\mathbb{A}$ 的) 的全部特征值 (重根按重数计).

把 T 作为过渡矩阵得到 V 的一个标正基:

$$(\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_n) = (\eta_1 \ \cdots \ \eta_n)T,$$

则 $\mathbb{A}$ 在 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是对角阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 从而, 每个 ε_i 都是 $\mathbb{A}$ 的一个特征向量. □

75. (欧式空间上的对称变换与实对称阵的关系.)

证明: 必要性: 设 $\mathbb{A}$ 是欧式空间 V 上的对称变换, 由第 **74** 题的 (1) 可知, $\mathbb{A}$ 在 V 的任意标正基下的矩阵都是对称的.

充分性: 设欧式空间 V 上的线性变换 $\mathbb{A}$ 在某个标正基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵 A 是对称阵, 则由第 **74** 题的 (1) 的证明过程中的计算得: 对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 有:

$$(\mathbb{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = A(j,i) = A(i,j) = (\varepsilon_i, \mathbb{A}\varepsilon_j),$$

从而由第 **73** 题的结论即得 $\mathbb{A}$ 是对称变换. □

76. (欧式空间上的对称变换的特征向量, 可对角化: 等价于实对称阵可以正交相似于对角阵.)

证明: 必要性: 设 $\mathbb{A}$ 是对称变换. 任意取定 V 的一个标正基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$, 并设 $\mathbb{A}$ 在这个标正基下的矩阵为 A. 于是, 由第 **75** 的结论可知 A 是对称阵;

从而存在正交阵 T 使得 $T'AT = T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是对角阵;

令 $(\xi_1 \ \cdots \ \xi_n) = (\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_n)T$;

则 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一个标正基, 且 $\mathbb{A}$ 在这个基下的矩阵是对角阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 即, $\mathbb{A}\xi_i = \lambda_i\xi_i$, 从而, $\mathbb{A}$ 有 n 个两两正交的特征向量.

充分性: 设 $\mathbb{A}$ 有 n 个两两正交的特征向量 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$: $\mathbb{A}\gamma_i = \lambda_i\gamma_i$, $1 \le i \le n$. 不妨设 γ_i 是单位向量. (任意特征向量的非零倍数仍然是特征向量.)

于是, $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 V 的一个标正基, 且 $\mathbb{A}$ 在这个基下的矩阵是对角阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 更是一个对称阵, 所以由第 **75** 题的结论可知, $\mathbb{A}$ 是 V 上的对称变换. □

77. (实对称阵的正交对角化.)

算法: 设 A 是 n 阶实对称阵, 求正交阵 T 使得 $T'AT = T^{-1}AT$ 是对角阵.

Step 1: 求出 A 的**全部互不相同的**特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$. (必有 $\lambda_i \in \mathbb{R}$.)

Step 2: 对每个 λ_i $(1 \le i \le s)$, 求 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的一个基础解系 $\xi_{i1}, \cdots, \xi_{it_i}$, 并对这个向量组作 Schmidt 正交化, 再单位化, 得到两两正交的单位向量 $\varepsilon_{11}, \cdots, \varepsilon_{it_i}$.

Step 3: 结论: $\varepsilon_{11}, \cdots, \varepsilon_{1t_1}, \varepsilon_{21}, \cdots, \varepsilon_{2t_2}, \cdots, \varepsilon_{s1}, \cdots, \varepsilon_{st_s}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标正基. 令

$$T = (\varepsilon_{11} \ \cdots \ \varepsilon_{1t_1} \ \varepsilon_{21} \ \cdots \ \varepsilon_{2t_2} \ \cdots \ \varepsilon_{s1} \ \cdots \ \varepsilon_{st_s})$$

则 T 是 n 阶正交阵, 且

$$T^{-1}AT = T'AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{t_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{2t_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{t_s} \end{pmatrix}$$ 是对角阵, 其中, E_{t_i} 是 t_i 阶单位阵. □

解:

(1) A 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 5)$, 所以, A 的全部互不相同的特征值为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_1 = (2, -1)'$, 单位化得: $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)'$;

(由于基础解系只含一个解向量, 所以, 不需要 Schmidt 正交化了.)

方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_1 = (1, 2)'$, 单位化得: $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)'$;

令 $P = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2)$, 则 $P'AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 5 \end{pmatrix}$. □

(2) A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10);$$

(先把第 2 行加到第 3 行, 然后可提出因式 $\lambda - 1$.)

所以, A 的全部互不相同的特征值为 $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 10$.

方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为:

$$\xi_{11} = (-2, 0, 1), \xi_{12} = (-2, 1, 0)';$$

作 Schmidt 正交化, 再单位化得:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1)', \varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}(-2/5, 1, -4/5)'.$$

方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_{21} = (-1, -2, 2)'$, 单位化得 $\varepsilon_{21} = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)'$.

令 $P = (\varepsilon_{11}\ \varepsilon_{12}\ \varepsilon_{21})$,

则 P 是正交阵且 $P'AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$. □

(3) A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 3 \\ -1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda-2);$$

(先把第 2 行的 -1 倍加到第 3 行, 然后可提出因式 $\lambda - 3$.)

所以, A 的全部互不相同的特征值为

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \lambda_3 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$$

方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_1 = (0, -1, 1)$, 单位化得: $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$;

(正交阵的计算略) 所求的对角阵为:

$$P^{-1}AP = P'AP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & (-3+\sqrt{17})/2 & \\ & & (-3-\sqrt{17})/2 \end{pmatrix}.$$

(4) A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-5)^2;$$

(直接按第一列展开.)

所以, A 的全部互不相同的特征值为 $\lambda_1 = 0$ (二重); $\lambda_2 = 5$ (二重).

方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为

$\xi_{11} = (-2, 0, 0, 1)'$, $\xi_{12} = (0, 1, -2, 0)'$;

作 Scimidt 正交化, (其实这两个向量已经两两正交了) 再单位化得:

$\varepsilon_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 0, 1)'$, $\xi_{12} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2, 0)'$;

方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为

$\xi_{21} = (1, 0, 0, 2)'$, $\xi_{12} = (0, 2, 1, 0)'$;

作 Scimidt 正交化, (其实这两个向量已经两两正交了) 再单位化得:

$\varepsilon_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 0, 2)'$, $\xi_{12} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1, 0)'$.

令 $P = (\varepsilon_{11}\ \varepsilon_{12}\ \varepsilon_{21}\ \varepsilon_{22})$,

则 P 是正交阵且 $P'AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 5 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}$. □

(5) A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix};$$

(用拆列法: 把第一列分拆:)

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

(利用: 各行元素之和相等, 把后面各列加到第一列, 即可提取因式.)

$$= \lambda(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} - (\lambda+4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)^3(\lambda+2),$$

所以, A 的全部互不相同的特征值为 $\lambda_1 = 2$ (三重), $\lambda_2 = -2$.

方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为:

$$\xi_{11} = (1,1,0,0)', \xi_{12} = (1,0,1,0)', \xi_{13} = (1,0,0,1),$$

作 Schmidt 正交化, 再单位化得:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{6}}{3}(1/2,-1/2,1/2,0),$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{8}{\sqrt{86}}(3/8,-3/8,-1/4,1);$$

方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为:

$$\xi_{21} = (-1/2,1/2,1/2,1/2)';$$

单位化得: $\varepsilon_{21} = (-1/2,1/2,1/2,1/2)'$.

令 $P = (\varepsilon_{11}\ \varepsilon_{12}\ \varepsilon_{13}\ \varepsilon_{21})$.

则 P 是正交阵且 $P'AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$. □

78. (欧式空间上的对称变换及其正交对角化: 用矩阵.)

(1) **证明**: 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的基本 (列) 向量, 从而是 $\mathbb{R}^3$ 的一个标正基. 由题设, f 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为:

$(f(\varepsilon_1)\ f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)) = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)A$, 其中 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

即, f 在 $\mathbb{R}^3$ 的标正基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵 A 是一个对角阵, 从而 f 是一个对称变换. □

(2) (利用 A 去求标正基.)

A 的特征多项式为:

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda+1),$$

所以, A 的全部互不相同的特征值为:

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-4,\ \lambda_3=-1.$

方程组 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 的一个基础解系为: $\xi_1=(1,2,2)'$,

单位化后得: $\eta_1=\frac{1}{3}(1,2,2)'$;

方程组 $(\lambda_2 E-A)X=0$ 的一个基础解系为: $\xi_2=(2,-2,1)'$,

单位化后得: $\eta_2=\frac{1}{3}(2,-2,1)'$;

方程组 $(\lambda_3 E-A)X=0$ 的一个基础解系为: $\xi_3=(-1,-1,2)'$,

单位化后得: $\eta_3=\frac{1}{3}(-2,-1,2)'$.

则 η_1,η_2,η_3 是 $\mathbb{R}^3$ 得一个标正基. 令 $P=(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3)$.

则 f 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为:

$$P^{-1}AP=P'AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$ □

79. 不唯一. 因为, 特征子空间的基, 也就是 $(\lambda_0 E-A)X=0$ 的基础解系, 不唯一.

80. 证明:

法一: (反证法: 利用: n 阶方阵 A 不可逆当且仅当 $AX=0$ 有非零解. 用 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积.)

假设 M^tM 不可逆. 那么存在非零的 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 使得 $(M^tM)\xi=0$. 考虑 $\mathbb{R}^n$上的标准内积 $(-,-)$. 则

$\xi^t(M^tM)\xi=(M\xi)^t(M\xi)=(M\xi,M\xi)=0,$

即, $M\xi=0$. 设 $M=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\xi=(x_1,\ldots,x_n)^t$. 则

$0=M\xi=x_1\alpha_1+\ldots+x_n\alpha_n,$

从而, 由 $\xi\neq 0$ 得 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关, 矛盾.

(或者, 直接由 M 的列向量线性无关得: $MX=0$ 只有零解, 从而 $M\xi=0$ 意味着 $\xi=0$, 矛盾.) □

法二: (利用结论: 对任意 $m\times n$ 型实矩阵 A 有 $r(A'A)=r(AA')=r(A)$.)

由于 $M_{m\times n}$ 的列向量线性无关, 所以, $r(M)=n$,

从而 $r(M^tM)=r(M)=n$; 但 M^tM 是 n 阶方阵, 所以, M^tM 可逆. $\square$

注1: 如果 M 不是实矩阵, 那么上述结论是不对的. 例如, $M=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$, 其中, $i=\sqrt{-1}$. 则 $M^tM=0$. 事实上, 上面的两个证明方法都用到了实数.

注2: 本题中的 M^tM 实际上是一类正定矩阵.

81. (实对称矩阵可对角化的应用: 实对称阵 (或, 欧式空间上的对称变换) 的幂等分解.)

证明: 由于 A 是实对称矩阵, 所以存在正交阵 T 使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{t_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_rE_{t_r}\end{pmatrix}$$

是对角阵, 其中 E_{t_i} 是 t_i 阶单位阵. 令

$$A_i=T\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_{t_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}T^{-1},\ \ 1\le i\le r,$$

即, A_i 是与 $T^{-1}AT$ 有相同分块方式的对角阵. 可以直接验证 A_i $(1\le i\le r)$ 满足要求:

(1) $A_1+\cdots+A_r=T^{-1}E_nT=E_n$;

(2) 由于 $\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_{t_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_{t_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}$,

所以,

$$A_i^2=T^{-1}\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_{t_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}^2T$$

$$= T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_{t_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} T = A_i;$$

(3) 由于对 $1 \leq i \neq j \leq r$ 有:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_{t_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_{t_j} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

所以,

$$A_iA_j = T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_{t_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_{t_j} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} T$$

$$= T^{-1}0T = 0;$$

(4) 由

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{t_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r E_{t_r} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} E_{t_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + \lambda r \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E_{t_r} \end{pmatrix}$$

得: $A = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r$.

$\square$

82 (最小二乘解.) 略.

83. 略.

84. 略.

85. 略.

86. 略.

87. 略.

88. (酉矩阵的特征值全部位于单位圆上.)

证明: 与正交矩阵的情形完全相同, 参见第 **37** 题**引理**的证明. 用 A^* (A 的转置共轭) 代替正交矩阵情形下的 A' . □

89. (酉空间中的极化等式.) 略.