四川大学期末考试试题（闭卷）

（2015－－2016学年第1 学期）**A卷**

课程号: **201097050** 课序号: **01, 02** 课程名称: **高等代数-1(双语)** 任课教师: **付昌建 张志雄 谭友军 彭雪** 成绩:
适用专业年级: **2015级数学学院各专业** 学生人数: **269** 印题份数: **300** 学号: 姓名:

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注意：满分100分，按题号把解答写在答题纸上. 在以下题目中，$\mathbb{F}$ 表示一个数域，$\mathbb{F}[x]$ 表示 $\mathbb{F}$ 上的多项式组成的集合，$\mathbb{F}^n$ 表示 n 维列向量组成的向量空间，$\mathbb{Q}$ 表示有理数域，$\mathbb{R}$ 表示实数域，$\mathbb{C}$ 表示复数域，$M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 表示 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m\times n$ 型矩阵组成的集合，$M_n(\mathbb{F})$ 表示 $\mathbb{F}$ 上的所有的 $n\times n$ 型矩阵组成的集合，A^T 表示矩阵 A 的转置，A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩，$\det A$ 表示方阵 A 的行列式.

1. (20分) 设 $f(x)=x^5+5x+4$, $g(x)=x^2-2x+1\in\mathbb{Q}[x]$, $A\in M_n(\mathbb{Q})$ 满足 $g(A)=0$.

   (1) (8分) 问多项式 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上是否可约并说明理由;

   (2) (6分) 证明: 矩阵 $f(A)$ 可逆;

   (3) (6分) 求一个次数小于 2 的多项式 $h(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得 $h(A)=f(A)^{-1}$.

2. (45分) 解答下列各题并说明理由:

   (1) (10分) 分别在实数域 $\mathbb{R}$ 及复数域 $\mathbb{C}$ 上求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4=1\\ 3x_1-x_2+2x_3-2x_4=4\\ \quad 2x_2+2x_3+x_4=-1\end{cases}$ 的通解.

   (2) (10分) 设 $A\in M_{5\times4}(\mathbb{F})$, $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^4$ 为以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系. 试求一个与矩阵 A 的行向量组等价的线性无关的向量组.

   (3) (10分) 设 $A\in M_3(\mathbb{R})$ 且 $\det A\neq 0$. 若 $\det A^*=\det(-2A^{-1})$, 求 $\det A$ 的值.

   (4) (10分) 设 $\alpha\in\mathbb{F}^3$ 且 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$. 求 $\alpha^T\alpha$ 的值.

   (5) (5分) 设 $\alpha\in\mathbb{F}^{2016}$ 且 $\alpha^T\alpha=2016$. 求行列式 $f(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda E_{2016}&\alpha\\ \alpha^T&0\end{pmatrix}$.

3. (10分) 设 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 且满足 $A^TA=E_n$ 和 $\det A<0$, 其中 E_n 是单位阵. 证明: $r(A+E_n)<n$.

4. (15分)设 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}), B\in M_{n\times l}(\mathbb{F})$.

   (1) (8分) 证明: 如果 $r(AB)=r(B)$, 那么对任意的矩阵 $C\in M_{l\times k}(\mathbb{F})$, 有 $r(ABC)=r(BC)$;

   (2) (7分) 若对任意的矩阵 $C\in M_{n\times l}(\mathbb{F})$ 都有 $r(AC)=r(C)$, 求 $r(A)=?$

5. (10分) 求一个首一的 4 次有理多项式 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得其在复数域上的根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 满足方程组 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2=-1\\ \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3=1\\ \lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4+\lambda_4^4=-1\end{cases}$.

教务处试题编号：