2017 级高等代数-2 测验-05

1. (2015) 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 为首一多项式且次数大于 1.

   (1) 证明: 存在矩阵 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 使得 A 的特征多项式为 $f(x)$;

   (2) 证明: 若 $f(x)$ 为不可约多项式, 则任意以 $f(x)$ 为特征多项式的两个矩阵都相似;

   (3) 问 $f(x)$ 为不可约多项式是否是上述命题 (2) 成立的充要条件? 若不是, 请问 $f(x)$ 应满足什么条件, 请说明理由.

<u>**提示: 考察有理标准形及矩阵相似的等价刻画.**</u>

解答. *(1)* 若 $f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$, 则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

的特征多项式为 $f(\lambda)$.

(2) 设 A,B 的特征多项式都是 $f(\lambda)$. 由矩阵的初等因子的乘积为特征多项式知 A,B 的初等因子都是 $f(\lambda)$, 从而 A 与 B 相似.

(3) 不是. 上述命题成立的充要条件为 $f(\lambda)$ 没有重因式.

设 $f(\lambda)=p_1(\lambda)\cdots p_r(\lambda)$, 其中 $p_i(\lambda)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的首一不可约多项式且 $p_i(\lambda)$ 与 $p_j(\lambda)$ 互素. 设 $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ 使得 A,B 的特征多项式为 $f(\lambda)$. 设 $d_1(A),\cdots,d_n(A)$ 为矩阵 A 的不变因子, $d_1(B),\cdots,\cdots,d_b(B)$ 为矩阵 B 的不变因子, 则 $d_i(A)|d_{i+1}(A), d_i(B)|d_{i+1}(B), \forall 1\leqslant i\leqslant n-1$ 且 $f(\lambda)=d_1(A)\cdots d_n(A)=d_1(B)\cdots d_n(B)$. 由此可知 $d_1(A)=\cdots d_{n-1}(A)=d_1(B)=\cdots=d_{n-1}(B)=1, d_n(A)=d_n(B)=f(\lambda)$. 从而 A,B 有相同的不变因子, 因此相似.

反之, 假设任意以 $f(\lambda)$ 为特征多项式的矩阵都相似. 假设 $f(\lambda)$ 有重因式, 不妨设 $f(\lambda)=p^2(\lambda)q(\lambda)$, 其中 $p(\lambda)$ 为不可约首一多项式. 设 $\deg p(\lambda)=t$, 由 (1) 知存在矩阵 $A_1\in M_t(\mathbb{F})$ 使得 A_1 的不变因子为 $1,1,\cdots,1,p(\lambda)$. 同理存在矩阵 $A_2\in M_{2t}(\mathbb{F})$ 使得 A_2 的不变因子为 $1,\cdots,1,p^2(\lambda)$, 存在 $A_3\in M_{n-2t}(\mathbb{F})$ 使得矩阵 A_3 的不变因子为 $1,\cdots,1,q(\lambda)$.

令 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$. 由准对角矩阵的初等因子为每个对角子矩阵的初等因子的并知 A 与 B 具有不同的初等因子,

从而不相似但 A,B 具有相同的特征多项式 $f(\lambda)$, 矛盾. 所有 $f(\lambda)$ 没有重因式.

2. (2015) 设 $V=M_2(\mathbb{R})$, $(-,-)$ 为 V 的内积, 其中 $(A,B)=tr(AB^T), A,B\in V$. 记 $U=\{\begin{bmatrix} a & b\\ b & 0\end{bmatrix}\mid \forall a,b\in\mathbb{R}\}$ 为 V 的子空间. 求 U 的正交补 $U^\perp$ 的一个标准正交基及向量 $\begin{bmatrix} 2016 & 0\\ 6 & 26\end{bmatrix}$ 在 U 上的正交投影.

<u>**提示: 考察 Schmidt 正交化、标准正交基及正交投影.**</u>

解答. 设 $B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in U$, 易知 B_1,B_2 为 U 的一个基. 设 $A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in U^\perp$, 则 $(A,B_1)=0=(A,B_2)$. 求解线性方程组可得

$$U^\perp=\{\begin{pmatrix} 0 & c\\ -c & d\end{pmatrix}\mid, c,d\in\mathbb{R}\}.$$

记 $A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 A_1,A_2 为 $U^\perp$ 的一个基. 直接验证可知 $A_1\perp A_2$, 从而 A_1,A_2 为 $U^\perp$ 的正交基. 另一方面, $(A_1,A_1)=2,(A_2,A_2)=1$. 令

$$C_1=\frac{A_1}{|A_1|}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}, C_2=\frac{A_2}{|A_2|}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 C_1,C_2 为 $U^\perp$ 的一个标准正交基. *(7 分)*

分别记 $A_U, A_{U^\perp}$ 表示矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2016 & 0\\ 6 & 26\end{pmatrix}$ 在 U 及 $U^\perp$ 上的正交投影. 我们有

$$A_{U^\perp}=(A,C_1)C_1+(A,C_2)C_2=\begin{pmatrix} 0 & -3\\ 3 & 26\end{pmatrix}.$$

由此可得 $A_U=A-A_{U^\perp}=\begin{pmatrix} 2016 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

3. 设 V 为欧氏空间. 记 $U=\{\mathbb{B}\in\operatorname{End}V\mid\forall\alpha\in V,(\mathbb{B}(\alpha),\alpha)=0\}$. 易知 U 为 $\operatorname{End}V$ 的子空间.

   (1) 证明: U 不是零子空间;

   (2) 求子空间 U 的维数.

<u>**提示: 考察反对称变换.**</u>

解答. *(1)* 设 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基. 设 $\mathbb{A} \in \operatorname{End} V$ 且

$$\mathbb{A}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)A,$$

其中 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 对任意的 $\alpha = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)X_\alpha \in V$, $\mathbb{A}(\alpha) = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)(AX_\alpha)$. 因此 $(\mathbb{A}(\alpha), \alpha) = 0$ 等价于 $X_\alpha^T A^T X_\alpha = (AX_\alpha)^T E_n X_\alpha = 0$. 由 α 的任意性可得 $\mathbb{A} \in U$ 当且仅当 $A^T = -A$. 显然存在非零的反对称矩阵 A, 因此存在非零的线性变换 $A \in U$.

(2) 由 (1) 的证明可知, 在固定 V 的一个标准正交基下, U 与 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶反对称矩阵构成的空间同构. 由此可得 $\dim_{\mathbb{R}} U = \frac{n(n-1)}{2}$.