一、置信区间

1. 置信区间的定义: 设总体$X \sim F(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$是未知参数, 对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$, 若统计量$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$满足: 对任意$\theta \in \Theta$有

$$\boxed{P\left\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n) \le \theta \le \hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right\} \ge 1-\alpha},$$

$1-\alpha$——为置信水平;

随机区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$——$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间;

$\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$——置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间的置信下限和置信上限.

【例2.24(P_{58})】设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的样本, 试在σ^2已知时求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

说明1: 置信水平为$1-\alpha$的置信区间并不是唯一的.

【习题2.22(P_{69})】随机地从一批零件中抽取16个, 测得长度 (单位: cm) 为:

2.14	2.10	2.13	2.15	2.13	2.12	2.13	2.10
2.15	2.12	2.14	2.10	2.13	2.11	2.14	2.11

设零件长度的分布为正态的, 且$\sigma=0.01$(cm), 试求总体均值的90%的置信区间.

解: 设长度$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

由$\sigma=0.01$已知, 选取枢轴量$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,

得μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left[\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2},\ \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\right]$,

代入样本得μ的置信水平为90%的置信区间为[2.1209, 2.1291].

2. 置信区间的统计意义:

(1) 随机区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$中包含$\theta$真值的区间约占$100(1-\alpha)\%$;

(2) 每个样本值确定一个$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$, $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$要么包含$\theta$, 要么不包含$\theta$, 包含$\theta$真值的可信程度为$100(1-\alpha)\%$.

3. 区间估计的一般步骤:

求总体分布中未知参数θ的置信区间的步骤:

(1) 寻找枢轴量$W=W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$, 其分布已知;

(2) 由**W**的分布确定***a*, *b***, 使$P\{a\le W\le b\}=1-\alpha$;

(3) 反解求$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$, 即由$a\le W\le b\Rightarrow\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2$.

二、正态总体均值、方差的置信区间(置信水平为$1-\alpha$)

一个正态总体均值与方差的置信区间

待估参数	其它参数	枢轴量W的分布	置信区间
μ	σ^2已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$[\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}]$
	σ^2未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_*/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left[\bar{X} \pm \dfrac{S_*}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right]$
σ^2	μ已知	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right]$
	μ未知	$\dfrac{(n-1)S_*^2}{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left[\dfrac{(n-1)S_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]$

【★习题2.3(P_{66})】使用一测量仪器对同一值进行了12次独立测量,其结果为(单位: mm)

232.50	232.48	232.15	232.52	232.53	232.30
232.48	232.05	232.45	232.60	232.47	232.30

并设测量值$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 试求μ,σ^2的置信水平为 0.99 的置信区间.

解: (1)由σ未知, 选取枢轴量$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_*/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$,

得μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left[\bar{X}\pm\dfrac{S_*}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\right]$,

代入样本得μ的置信水平为0.99的置信区间为[232.2965, 232.5085].

(2)由μ未知, 选取枢轴量$\dfrac{(n-1)S_*^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,

得σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left[\dfrac{(n-1)S_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]$,

代入样本得σ^2的置信水平为0.99的置信区间为[0.0140, 0.0803].

两个正态总体均值差与方差比的置信区间

待估参数	其它参数	枢轴量W的分布	置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left[(\bar{X}-\bar{Y})\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\left[(\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right]$

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 已知	$\dfrac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1}\bigg/\dfrac{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}{n_2}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \triangleq \dfrac{SS_1^2/SS_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1,n_2)$	$\left[\dfrac{SS_1^2/SS_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)}, \dfrac{SS_1^2/SS_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)}\right]$
	μ_1,μ_2 未知	$\dfrac{S_{1*}^2/S_{2*}^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \dfrac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2}{n_1-1}\bigg/\dfrac{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2}{n_2-1}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left[\dfrac{S_{1*}^2/S_{2*}^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}, \dfrac{S_{1*}^2/S_{2*}^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right]$

(上表中 $S_w = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_{*1}^2+(n_2-1)S_{*2}^2}{n_1+n_2-2}}$)

【★例2.28(P_{63})】设A、B两种牌号的灯泡寿命(小时)相互独立，且其寿命分别服从$N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$. 随机选取A种灯泡5只，B种灯泡7只，做灯泡寿命试验，算得$\bar{x}_A=1000$，$\bar{x}_B=980$，$s_{*A}^2=784$，$s_{*B}^2=1024$. 试求$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.99的置信区间，并说明两种灯泡的寿命是否有明显差异，其中假设$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$.

解:由σ未知，选取枢轴量$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$,

得$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right],$$

代入样本得$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.99的置信区间为[-36.5319, 76.5319].

结论1:

若$[\mu_1 \overset{\wedge}{-} \mu_2]_1 < 0 < [\mu_1 \overset{\wedge}{-} \mu_2]_2$, 则认为$\mu_1$与$\mu_2$无明显差别;

若$[\mu_1 \overset{\wedge}{-} \mu_2]_1 > 0$, 则认为$\mu_1$明显大于$\mu_2$;

若$[\mu_1 \overset{\wedge}{-} \mu_2]_2 < 0$, 则认为$\mu_1$明显小于$\mu_2$.

对方差比有雷同结论, 只需把**0**改成**1**则可.

三、非正态总体参数的区间估计 (利用中心极限定理)

1. 独立同分布(列维-林德伯格)中心极限定理:

对随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$:

定理条件	X_i独立	X_i同分布	$E(X_i)=\mu$	$D(X_i)=\sigma^2>0$
定理结论	$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N\left(E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right], D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right) = N(n\mu, n\sigma^2)$ $\Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N(0,1)$			

2. 中心极限定理的应用:

(1) 总体X~(0-1)分布

问题:设总体$X \sim (0-1)$,且$P(X=1)=p, p\in(0,1)$,求p的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

(1-精确) 构造枢轴量:由$\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,p)}$无法分离出枢轴量.

(2-近似) 构造枢轴量:$\boxed{u=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim\sim\sim} N(0,1)}$.

【★例2.31(P_{66})】对一批产品，欲通过抽样检查其不合格率. 今抽取产品100件，发现不合格品有4件，求不合格率的置信水平为0.95的置信区间.

解: 设 $X=\begin{cases}1, & \text{本产品为不合格品}\\ 0, & \text{本产品为合格品}\end{cases}$，即 $X\sim b(1,p)$.

选取枢轴量 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\xrightarrow{n\to\infty}N(0,1)$，由 $\left|\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right|\le u_{1-\alpha/2}$ 得

$$(n+u_{1-\alpha/2}^2)p^2-(2n\overline{X}+u_{1-\alpha/2}^2)p+n\overline{X}^2\le 0,$$

其解集则为 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

代入样本得 p 的置信水平为95%的置信区间为[0.0157, 0.0984].

(2) 总体$X \sim \pi(\lambda)$

问题: 设总体$X \sim \pi(\lambda)$, 求λ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

(1-精确) 构造枢轴量: 由$\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \pi(n\lambda)}$无法分离出枢轴量.

(2-近似) 构造枢轴量:

$$\boxed{W = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \overset{n\to\infty}{\sim\!\sim\!\sim\!\sim} N(0,1)}.$$

(3) 总体X~exp(θ)

问题:设总体 $X\sim\exp(\theta)$, 其概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, 求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

(1-精确) 构造枢轴量:

$$\boxed{\chi^2=2\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\chi^2(2n)}.$$

(2-近似) 构造枢轴量:

$$\boxed{W=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\theta}{\sqrt{n\theta^2}}\ \overset{n\to\infty}{\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim}\ N(0,1)}.$$

作业: ($P_{66\text{-}69}$) 2.24, 2.25