高等代数 01 平时测验 04

(第 4、5 题选做一题)

1. 当 k 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

无解? 有唯一解? 有无穷多解? 当有解时, 求其一般解.

提示: 考查线性方程组的解的判别定理.

解答. 对原方程组作初等变换可得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + (k+2)x_3 = 1 \\ (k+3)(k-2)x_3 = k-2 \end{cases}$$

由方程组的解的判别定理知:

- 原方程组无解当且仅当 $(k+3)(k-2) = 0$ 且 $k-2 \neq 0$. 特别地, 原方程组无解当且仅当 $k = -3$.
- 原方程组有唯一解当且仅当 $(k+3)(k-2) \neq 0$, 即 $k \neq -3$ 且 $k \neq 2$. 此时解为

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{k+3}, x_3 = \frac{1}{k+3}.$$

- 原方程组有无穷多解当且仅当 $(k+3)(k-2) = 0$ 且 $k-2=0$, 即 $k=2$. 此时解为

$$x_1 = 5x_3, x_2 = 1 - 4x_3.$$

2. 设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ 是数域, $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \mathbb{F}^n \subset \mathbb{K}^n$. 问向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 在 $\mathbb{F}$ 上线性相关是否等价于在数域 $\mathbb{K}$ 上线性相关? 请说明理由.

结论: 向量组的秩不依赖于数域的扩大而改变, 从而矩阵的秩也不依赖于数域的扩大而改变.

解答. 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 在数域 $\mathbb{F}$ 上线性相关当且仅当其在数域 $\mathbb{K}$ 上线性相关.

显然向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 在数域 $\mathbb{F}$ 上线性相关可以推出其在数域 $\mathbb{K}$ 上线性相关. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上线性相关. 等价地, 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上有非零解. 线性方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上有非零解当且仅当对其作 (数域 $\mathbb{K}$ 上的) 初等变换后的阶梯形线性方程组的主变量个数小于 s(虽然可经不同的初等变换得到的阶梯形可能不相同, 但主变量的个数都小于 s). 注意到方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 的系数都属于数域 $\mathbb{F}$, 因此只需要经过数域 $\mathbb{F}$ 上的初等变换将原方程组化为阶梯形方程组. 由此可得方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 在数域 $\mathbb{F}$ 可经有限步初等变换化为阶梯形方程组且其主变量的个数小于 s. 从而 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 在数域 $\mathbb{F}$ 上有非零解, 即 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 在数域 $\mathbb{F}$ 上线性相关.

3. 设 S 和 T 是向量空间 $\mathbb{F}^n$ 的向量组. 证明: 向量组 S 与 T 等价当且仅当 $r(S) = r(S \cup T) = r(T)$.

证明. 我们只需要证明向量组 S 可由向量组 T 线性表出当且仅当 $r(T) = r(S \cup T)$. 设 S 可由向量组 T 线性表出, 则显然有向量组 T 与向量组 $S \cup T$ 等价. 由此可知 $r(T) = r(S \cup T)$.

另一方面, 设 $r(T) = r(S \cup T)$. 由此可知向量组 T 的极大无关组也是向量组 $S \cup T$ 的极大线性无关组. 从而 S 中的任意向量可由 T 线性表出.

□

4. 设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \mathbb{F}^n$ 的秩为 $s-1$ 且存在非零向量 $\alpha_i, \alpha_j (i \neq j)$ 使得 $\alpha_j = l\alpha_i$, 其中 $l \in \mathbb{F}$. 问该向量组总共有多少个极大线性无关组, 请说明理由.

提示: 考查不同条件下极大无关组的刻画.

解答. 总共有两个极大线性无关组.

不妨设 $i = 1, j = 2$. 即 $\alpha_2 = l\alpha_1$. 显然向量组 $\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_s$ 可以线性表出整个向量组. 由 $r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = s-1$ 可得 $\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_s$ 是向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大无关组. 由 $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$ 知 $l \neq 0$. 同理可得 $\alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 也是一个极大无关组. 除此之外的任意的含有 $s-1$ 个向量的子组同时包含向量 α_1, α_2. 有条件可知该向量组线性相关，从而不是极大的线性无关子组.

5. 设有 n 种不同种类的书籍, 有 $n+1$ 个人读且每人至少读一本. 证明: 在这 $n+1$ 个人中存在两组不同的人使得他们两组人读过的书的种类相同.

证明. 对第 $1 \leqslant i \leqslant n+1$ 个人, 我们赋予一个 n 维向量 $\alpha_i = (a_{i1}, \cdots, a_{in}) \in \mathbb{Q}^n$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 人读了第 } j \text{ 类书}, \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

注意到 $\mathbb{Q}^n$ 的任意的 $n+1$ 个向量一定线性相关, 从而存在不全为零的数 $k_1, \cdots, k_{n+1} \in \mathbb{Q}$ 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{n+1}\alpha_{n+1} = 0.$$

记 $k_{i_1}, \cdots, k_{i_t}$ 为 $k_1, \cdots, k_{n+1}$ 中大于零的数, $k_{j_1}, \cdots, k_{j_s}$ 为 $k_1, \cdots, k_{n+1}$ 中小于零的数. 由此可得

$$k_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + k_{i_t}\alpha_{i_t} = -k_{j_1}\alpha_{j_1} - \cdots - k_{j_s}\alpha_{j_s}.$$

令 $S = \{i_1, \cdots, i_t\}, T = \{j_1, \cdots, j_s\} \subset \{1, \cdots, n+1\}$. 由上述等式可知 S 与 T 中的人读过的书的种类相同. □