# 四川大学期末考试试题（A卷）

闭卷

（ 2011 ——2012 学年第二学期）

课程号：201049050 课序号：02 课程名称：数学分析-2 任课教师：徐冰、杜正东 成绩：

适用专业年级：数学 2011 年级 学生人数：240 印题份数：280 学号： 姓名：

## 考 试 须 知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各级各类考试，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》。有考试违纪作弊行为的，一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理。

四川大学各级各类考试的监考人员，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》、《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》。有违反学校有关规定的，严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理。

## 注 意

答案一律写在答题纸上，否则不计分！交卷时将试题纸一并上交.

1. (20 分) 计算下列积分，每题 5 分:

$$(1)\quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\alpha+\sin x)(\beta+\sin x)} \quad (\beta>\alpha>1),$$

$$(2)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx,$$

$$(3)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^3 dx,$$

$$(4)\quad \int_0^1 x(x+1)^n\,dx \quad (n \text{ 为正整数}).$$

2. (15 分) 设区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 有唯一的不连续点 $c$ 且 $c\in(a,b)$，用 Riemann 积分存在的条件证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

3. (15 分) 设 $p,q\in\mathbb{R}$，讨论积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$$

的收敛性.

4. (20 分) 设 $f(t)$, $g(t)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，$\gamma\in\mathbb{R}$. 区间 $[\alpha,\beta]$ 上的函数序列 $\{x_n(t)\}$ 定义如下：$x_0(t)\equiv\gamma$，当 $n\geq 1$ 时，

$$x_n(t)=\gamma+\int_\alpha^t \big(f(\tau)x_{n-1}(\tau)+g(\tau)\big)\,d\tau.$$

可用(1)

(1) 用数学归纳法证明存在常数 $M>0$ 使得对 $n \ge 1$ 和 $t \in [\alpha, \beta]$ 有:

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le (|\gamma| + 1)\frac{M^n}{n!}(t-\alpha)^n.$$

(2) 用 (1) 的结果证明函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在区间 $\alpha \le t \le \beta$ 上一致收敛于某函数 $x(t)$.

可用(1)(2)

(3) 证明该极限函数 $x(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数且满足等式:

$$x(t) = \gamma + \int_\alpha^t \left(f(\tau)x(\tau) + g(\tau)\right) d\tau.$$

5. (15 分) 将下列函数在 $x=0$ 处展开为幂级数并求其收敛范围:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$$

6. (15 分) 讨论函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

的二次极限和二重极限.(各2)