数学分析小测验

小测验二 (付老师班)

要求: (1) 证明务必规范、严谨，该有的步骤务必保留. (2) 姓名学号务必写在答题纸上. (3) 请按照题目的顺序依次解答. (4) 计算题务必要有详细的解答步骤. (5) 附加题解答正确方可得分.

1 (本题 20 分, 二选一解答,):

(1) 用定义证明下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e+x)}{x+4}=\frac{1}{4}.$$

证明: 不难求的当 $x\in(-1,1)$ 时

$$\left|\frac{x+4-4\ln(e+x)}{4x+16}\right|=\left|\frac{x-4\ln(1+x/e)}{4x+16}\right|$$
$$<\frac{|x/4|+|\ln(1+x/e)|}{3}.$$

对于 $\forall\epsilon>0$, $\exists\ \delta_1=6\epsilon$, 当 $0<|x|<\delta_1$ 时, 有

$$|x/12|<\frac{\epsilon}{2}$$

$\exists\ \delta_2=\min\{e^{1+\epsilon/2}-e,\left|e^{1-\epsilon/2}-e\right|\}$, 当 $0<|x|<\delta_2$ 时, 有

$$\frac{|\ln(1+x/e)|}{3}<\frac{\epsilon}{2}.$$

从而, 当 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,1\}$ 时，有

$$\left|\frac{x+4-4\ln(e+x)}{4x+16}\right|<\epsilon.$$

(2) 给出下列函数的定义域并分析其在定义内的连续性.

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(\cos^{2n}x+\sin^{2n}x\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

解答：不难求的

$$f(x)=\max\left\{\left|\cos x\right|,\left|\sin x\right|\right\}.$$

2 (本题 30 分): 计算下列函数的极限.

$$(1):\lim_{x\to0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x,$$

$$(2):\lim_{x\to0^+}x\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i}{x}\right],\quad k\in\mathbb{N}.$$

解答:(1): 由

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0^+}xln\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)\\&=\lim_{x\to0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)\ln\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)\\&\times\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}=0.\end{aligned}$$

可得

$$\lim_{x\to0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim_{x\to0^+}xln\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)}=1.$$

(2): 由

$$\frac{1}{n+1}\le x<\frac{1}{n}\Rightarrow in\le\left[\frac{i}{x}\right]\le i(n+1)$$

可得

$$
\begin{aligned}
k(k+1)/2 &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sum_{i=1}^{k} i}{n+1}\\
&\le \lim_{x\to0^+} x\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i}{x}\right]\\
&\le \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\sum_{i=1}^{k} i}{n} = k(k+1)/2.
\end{aligned}
$$

3 (本题 20 分): 分析函数

$$
f(x)=\begin{cases}|x|, & x\in(R\setminus Q)\cup\{0\},\\ \frac{xq}{q+1}, & x=\frac{p}{q},\quad (p,q)=1,\quad p\in\mathbb{Z},\quad q\in\mathbb{N}.\end{cases}
$$

在其定义域内的连续性.

4 (本题 30 分): 若果 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，并且满足

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1.
$$

证明对于任意 $a>0$, 有

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1.
$$

解答: 注意到:

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{f(2^n x)}{f(2^{n-1}x)}=1,\quad n=0,1,2\cdots.
$$

由其得

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{f(2^n x)}{f(x)}=1,\quad n=0,1,2\cdots.
$$

$\forall\, a>1,\ \exists\, n_0$ 使得

$$
2^{n_0}\le a<2^{n_0+1}.
$$

因此，由夹逼可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1,\quad a>1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(x/a)}=1,\quad a>1,$$

即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1,\quad a>0.$$

5 (本题 30 分, 附加题): 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，证明以下结论:

(1) $\forall\epsilon>0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$\left|f\left(a+\frac{(b-a)k}{2n}\right)-f\left(a+\frac{(b-a)(k-1)}{2n}\right)\right|<\epsilon,\quad 1\le k\le n.$$

(2) 分析下列极限是否存在，若存在，求出极限.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(a+\frac{(b-a)k}{2n}\right).$$