

四川大学期末考试试题 (闭卷) A

(2013 2014学年上期)

课程号: 201097050 课序号: 0,1 课程名称: 高等代数-1 任课教师: 付昌建 卢明 谭友军 王皓

成绩:

适用专业年级: 2013级数学学院各专业 学生人数: 250 印题份数: 280

学号:

姓名:

考试须知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各级各类考试,必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》。有考试违纪作弊行为的,一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理。

四川大学各级各类考试的监考人员,必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》,《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》。有违反学校有关规定的,严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理。

注意: 满分100分,按题号把解答写在答题纸上。在以下题目中, F 表示一个数域; $M_{m \times n}(F)$ 表示 F 上的 $m \times n$ 阶矩阵全体; $M_n(F)$ 表示 F 上的 n 阶方阵全体; E_n 表示 n 阶单位矩阵;对任意的矩阵 A , A^T 表示 A 的转置, $r(A)$ 表示 A 的秩。

1. (20分) 设 $f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x - 5$, $g(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 10 \in F[x]$.

(1) (10分) 求 $f(x), g(x)$ 的最大公因子 $d(x) = (f(x), g(x))$;

(2) (10分) 设 $A \in M_n(F)$ 且满足 $d(A) = 0$. 证明: $A - 2E_n$ 可逆且求其逆(将逆矩阵表示为 A 的多项式)。

2. (20分) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in M_{m \times n}(F)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 分别为 A 的列向量. 记 $f: F^n \rightarrow F^m$ 为相应的线性映射使得 $f(e_1) = \alpha_1, f(e_2) = \alpha_2, \dots, f(e_n) = \alpha_n$, 其中 e_1, \dots, e_n 为向量空间 F^n 的标准单位向量. 证明:

(1) (5分) 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解集 $S = \ker f$;

(2) (10分) 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 有唯一解当且仅当 $\beta \in \text{im } f$ 且 $\ker f = \{0\}$;

(3) (5分) $r(\ker f) + r(\text{im } f) = n$.

3. (30分) 设 $A \in M_{m \times n}(F), B \in M_{m \times t}(F)$, 称 $AX = B$ 为关于 $X \in M_{n \times t}(F)$ 的矩阵方程。

(1) (10分) 利用线性方程组解的存在定理证明矩阵方程 $AX = B$ 有解当且仅当 $r(A) = r([A, B])$;

(2) (10分) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 求解矩阵方程 $AX = B$;

(3) (10分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ 且矩阵方程 $AX = B$ 有解, 但矩阵方程 $BX = A$ 无解. 试求 a, b 的取值。

4. (20分) 解答下列各题。

(1) (5分) 设 $A \in M_{m \times n}(F)$. 证明: $r(A) = 1$ 当且仅当存在非零列向量 $\alpha \in F^m, \beta \in F^n$ 使得 $A = \alpha\beta^T$;

(2) (5分) 设 $\alpha, \beta \in F^n$ 为非零列向量, $A = \alpha\beta^T$. 求次数最低的首项系数为1的多项式 $f(x) \in F[x]$ 使得 $f(A) = 0$;

(3) (10分) 设 $A, B \in M_{m \times n}(F)$ 且 $r(A) = r(B) = 1$. 设 α_1, α_2 分别为 A, B 的任意的非零列向量, β_1, β_2 分别为 A, B 的任意的非零行向量. 证明: $r(A + B) = 2$ 当且仅当 α_1, α_2 线性无关且 β_1, β_2 线性无关。

5. (10分) 设 $\alpha \in \mathbb{C}^n$ 为非零列向量且满足 $\alpha^T \alpha = 0$. 证明: 线性方程组 $(E_n - \alpha\alpha^T)X = 0$ 只有零解。

本题1页, 本页为第1页

教务处试题编号:

201-39-1

201-39