数学学院 2018 级 201097050-01
《高等代数-1》小测验 (2018 年 12 月 19 日)
测验时间: 40 分钟; 满分: 100 分.

从以下 $\underline{8}$ 道题中选作 $\underline{4}$ 道题.

1. 已知 $A^n = 2E_n$, $B = A^2 - 2A + 2E_n$, 其中, E_n 是单位阵. 证明: B 可逆.

证明: 设 $f(x) = x^n - 2$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$, 则有 $(f(x), g(x)) = 1$, 所以存在多项式 $u(x), v(x)$ 满足:

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

用矩阵 A 代替上面的不定元 x 有:

$$u(A)f(A) + v(A)g(A) = E_n.$$

由题意 $f(A) = A^n - 2E_n = 0$, 故有 $v(A)g(A) = v(A)B = E_n$, 所以 B 可逆.

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆.

解: 由第 7 题结论可知 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. 设 A 为 n 阶方阵, E_n 是单位阵. 证明: $r(A) + r(A - E_n) = n$ 当且仅当 $A^2 = A$.

证明: 充分性: 若 $A^2 = A$ 则 $(A - E_n)A = 0$, 即 A 的每一个列向量都是齐次方程组 $(A - E_n)X = 0$ 的解. 所以 $r(A) \le n - r(A - E_n)$, 即有 $r(A) + r(A - E_n) \le n$. 又因为 $r(A) + r(A - E_n) \ge r(A - (A - E_n)) = r(E_n) = n$, 所以得到 $r(A) + r(A - E_n) = n$.

必要性(方法一): 设 $X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A - E_n \end{pmatrix}$, 有

$$Y = \begin{pmatrix} E_n & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A - E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A(A - E_n) \\ E_n & A - E_n \end{pmatrix}.$$

显然 $r(A) + r(A - E_n) = r(X) = r(Y) = r(A(A - E_n)) + r(E_n)$.
由 $r(A) + r(A - E_n) = n = r(E_n)$ 可得 $r(A(A - E_n)) = 0$, 即 $A^2 = A$.

必要性(方法二): 考虑齐次线性方程组 $(A - E_n)AX = 0$ 的解. 显然齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $(A - E_n)X = 0$ 的解都是 $(A - E_n)AX = 0$ 的解. 记方程组 $AX = 0$ 和 $(A - E_n)X = 0$ 的基础解系分别为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r1}$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_{r2}$. 由 $r(A) + r(A - E_n) = n$ 可得 $r1 + r2 = n$. 假设

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{r1}\alpha_{r1} + t_1\beta_1 + \cdots + t_{r2}\beta_{r2} = 0,$$

两边左乘以 A, 注意到 $A\alpha_i = (A - E_n)\beta_j = 0$, 即 $A\beta_j = \beta_j$, 有

$$t_1\beta_1 + \cdots + t_{r2}\beta_{r2} = 0,$$

所以 $t_1 = t_2 = \cdots = t_{r2} = 0$ 且 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{r1}\alpha_{r1} = 0$, 故 $k_1 = \cdots = k_{r1} = 0$. 所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r1}, \beta_1, \cdots, \beta_{r2}$ 线性无关, 从而是 F^n 的一组基. 即对任意的 $X \in F^n$ 都是 $(A - E_n)AX = 0$ 的解, 所以 $(A - E_n)A = 0$, 即 $A^2 = A$.

4. 设 A 是域 F 上的 $n\times n$ 矩阵, $f_1(x),f_2(x)\in F[x]$ 满足 $(f_1(x),f_2(x))=1$. 令 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$. 证明：齐次方程组 $f(A)X=0$ 的任意解都可以唯一地表示为 $f_1(A)X=0$ 的解和 $f_2(A)X=0$ 的解的和.

证明: 由于 $(f_1(x),f_2(x))=1$, 故存在 $u(x),v(x)\in F(x)$ 满足:

$$u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=1.$$

于是对任意的 $X\in F^n$ 恒有 $u(A)f_1(A)X+v(A)f_2(A)X=X$.

对齐次方程组 $f(A)X=0$ 的任意解 X, 令 $Y=v(A)f_2(A)X, Z=u(A)f_1(A)X$. 则有:

$$f_1(A)Y=f_1(A)v(A)f_2(A)X=v(A)f_1(A)f_2(A)X=v(A)f(A)X=0,$$

同理 $f_2(A)Z=0$ 且 $X=Y+Z$.

假设有两种分解 $X=Y+Z=Y^*+Z^*$ 都满足要求, 注意到 $Y-Y^*=Z^*-Z$, 可得到:

$$\begin{aligned}Y-Y^*&=u(A)f_1(A)(Y-Y^*)+v(A)f_2(A)(Y-Y^*)\\&=u(A)f_1(A)(Y-Y^*)+v(A)f_2(A)(Z^*-Z)\\&=0,\end{aligned}$$

故 $Y=Y^*,Z=Z^*$, 分解的唯一性得证.

5. 设 A,B 都是 n 阶可逆方阵, 若 $A+B$ 可逆. 证明: $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆.

证明: 由于 $A^{-1}(A+B)B^{-1}=(E_n+A^{-1}B)B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$, 左边是三个可逆矩阵的乘积, 故 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆, 并且 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(A^{-1}(A+B)B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$.

6. 设 A 为 n 阶方阵. 证明: $r(A^n)=r(A^{n+1})$.

证明: 只要证明其次线性方程组 $A^nX=0$ 和 $A^{n+1}X=0$ 同解即可. 显然 $A^nX=0$ 的解一定是 $A^{n+1}X=0$ 的解, 下面证明 $A^{n+1}X=0$ 的解一定是 $A^nX=0$ 的解.

假设存在一个 α 满足 $A^{n+1}\alpha=0$ 但是 $A^n\alpha\neq 0$. 则向量 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\ldots,A^n\alpha$ 都是非零向量. 假设

$$k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_nA^n\alpha=0,$$

两边左乘以 A^n, 由于 $A^{n+1}\alpha=\cdots=A^{2n}\alpha=0$, 于是有 $k_0A^n\alpha=0$, 故 $k_0=0$. 同理可得 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. 所以向量组 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\ldots,A^n\alpha$ 线性无关, 与 $n+1$ 个 n 维向量必然是线性相关矛盾, 所以假设不成立. 即 $A^{n+1}X=0$ 的解一定是 $A^nX=0$ 的解. 因此 $r(A^n)=r(A^{n+1})$.

7. 设 A_{11},A_{22} 分别为 m,n 阶方阵, 分块矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$. 假设 A_{22} 和 A 均可逆, 求矩阵 A 的逆, 并说明 $B=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 可逆.

解: 假设 $X=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$ 为 A 的逆矩阵, 由定义有:

$$AX=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m&0\\0&E_n\end{pmatrix}.$$

由上式可得:

$$A_{11}X_{11}+A_{12}X_{21}=E_m \tag{1}$$
$$A_{11}X_{12}+A_{12}X_{22}=0 \tag{2}$$
$$A_{21}X_{11}+A_{22}X_{21}=0 \tag{3}$$
$$A_{21}X_{12}+A_{22}X_{22}=E_n \tag{4}$$

由 (3) 式有: $X_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}X_{11}$. 带入 (1) 式有:

$$A_{11}X_{11} + A_{12}X_{21} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})X_{11} = BX_{11} = E_m. \tag{5}$$

由 (5) 式显然 B 可逆且 $X_{11} = B^{-1}$, 于是 $X_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B^{-1}$.

由 (4) 式有: $X_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}X_{12}$. 带入 (2) 式有:

$$A_{11}X_{12} + A_{12}(A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}X_{12}) = 0 \quad \Rightarrow \quad BX_{12} = -A_{12}A_{22}^{-1}.$$

因为 B 可逆, 故 $X_{12} = -B^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$, 于是 $X_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}B^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$.

故

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}B^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}B^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

8. 设 A, B 都是 n 阶方阵. 证明: $E_n - AB$ 可逆当且仅当 $E_n - BA$ 可逆.

证明: 充分性, 若 $E_n - BA$ 可逆, 假设 $E_n - AB$ 不可逆, 则存在非零向量 X 满足 $(E_n - AB)X = 0$. 由 $X = ABX$ 两边同左乘以 B 得到 $BX = BABX$, 显然 $BX \neq 0$, 否则得到 $X = ABX = 0$ 矛盾. 于是存在非零向量 $Y = BX$ 是齐次方程组 $(E_n - BA)Y = 0$ 的解, 与 $E_n - BA$ 可逆矛盾, 所以 $E_n - AB$ 可逆.

同理可证明必要性.(**注:** $(E_n - BA)^{-1} = E_n + B(E_n - AB)^{-1}A$)