2015级高等代数-1-A-参考答案

1. (20分) 设 $f(x)=x^5+5x+4,\ g(x)=x^2-2x+1\in\mathbb{Q}[x]$, $A\in M_n(\mathbb{Q})$ 满足 $g(A)=0$.

   (1) (8分) 问多项式 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上是否可约并说明理由;

   (2) (6分) 证明: 矩阵 $f(A)$ 可逆;

   (3) (6分) 求一个次数小于 2 的多项式 $h(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得 $h(A)=f(A)^{-1}$.

   解答:

   (1) 考虑多项式 $f(x+1)=(x+1)^5+5(x+1)+4=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+10x+10$. (4分)
   显然 $p=5$ 满足Eisenstein判别法则条件, 因此 $f(x+1)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 从而 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. (4分)

   (2) 方法一:由 $g(A)=A^2-2A+E_n=0$ 知 A 可逆且 A 的逆 $A^{-1}=2E_n-A$. (3分)
   将 $A^2=2A-E_n$ 代入 $f(A)=A^5+5A+4E_n$ 中计算可得 $f(A)=10A$, 从而可知$f(A)$可逆. (3分)
   方法二: 注意到 $g(x)=(x-1)^2$, 直接计算可知 $f(1)\neq 0$, 从而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素 (或由 (1) 知 $f(x)$ 不可约且 $\deg f(x)>\deg g(x)$). (4分)
   因此存在多项式 $u(x),v(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使得
   $$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1,$$
   代入 A 可得 $u(A)f(A)+v(A)g(A)=E_n$, 由条件知 $g(A)=0$, 因此 $u(A)f(A)=E_n$, 特别地, $f(A)$可逆. (2分)

   (3) 方法一: 由 (1) 中方法一知 $f(A)=10A$, 因此
   $$f(A)^{-1}=(10A)^{-1}=\frac{1}{10}A^{-1}=\frac{1}{5}E_n-\frac{1}{10}A.$$
   (6分)
   方法二 : 由带余除法计算可得
   $$1=f(x)(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}x)+g(x)(x^3+2x^2+3x+5),$$
   代入矩阵 A 可得 $1=f(A)(\frac{1}{5}E_n-\frac{1}{10}A)$, 从而 $f(A)^{-1}=(\frac{1}{5}E_n-\frac{1}{10}A)$. (6分)

2. (45分) 解答下列各题并说明理由:

   (1) (10分) 分别在实数域 $\mathbb{R}$ 及复数域 $\mathbb{C}$ 上求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4=1\\3x_1-x_2+2x_3-2x_4=4\\2x_2+2x_3+x_4=-1\end{cases}$ 的通解.

   (2) (10分) 设 $A\in M_{5\times 4}(\mathbb{F})$, $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^4$ 为以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系. 试求一个与矩阵 A 的行向量组等价的线性无关的向量组.

   (3) (10分) 设 $A\in M_3(\mathbb{R})$ 且 $\det A\neq 0$. 若 $\det A^*=\det(-2A^{-1})$, 求 $\det A$ 的值.

(4) (10分) 设 $\alpha\in\mathbb{F}^3$ 且 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$. 求 $\alpha^T\alpha$ 的值.

(5) (5分) 设 $\alpha\in\mathbb{F}^{2016}$ 且 $\alpha^T\alpha=2016$. 求行列式 $f(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda E_{2016}&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}$.

<u>解答</u>:

(1) 考虑该线性方程组的增广矩阵

$$A_{aug}=\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\3&-1&2&-2&4\\0&2&2&1&-1\end{pmatrix}.$$

利用初等行变换将 A_{aug} 化为阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\0&2&2&1&-1\\0&0&0&-3&-1\end{pmatrix},$$

(4分)

由此可知 $\gamma=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$为原方程组的一个特解. 另一方面, 由线性方程组的解的结构定理知, 该线性方程组的导出组的基础解系恰有一个向量. 利用上述阶梯形矩阵可求得 $\beta=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 为其导出组的一个基础解系. (4分)

从而原方程组在 $\mathbb{R}$ 及 $\mathbb{C}$ 上的通解分别为

$$\gamma+k\beta,k\in\mathbb{R},\gamma+l\beta,l\in\mathbb{C}.$$

(2分)

(2) 易知向量 β_1,β_2,β_3 线性无关, 由线性方程组的结构定理知矩阵 A的秩为$4-3=1$. (2分)
设 α^T 为矩阵 A 的任意一个非零行向量, 则α^T 为矩阵 A 的行向量组的一个极大线性无关组. 令 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^T$, 显然 $B\alpha=0$. 由 $r(B)=3$ 知 α 为线性方程组 $BY=0$ 的一个基础解系. (4分)

求解齐次线性方程组 $BY=0$ 可得 $\gamma=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ 为 $BY=0$ 的一个基础解系, 从而向量 γ^T 与 α^T等价. (4分)

(3) 由 $AA^*=\det(A)E_3$ 及 $\det(A)\neq 0$ 可得 $\det(A^*)=\det(A)^2$. (5分)
另一方面, $\det(-2A^{-1})=-8\det(A)^{-1}=\det(A^*)=\det(A)^2$, 从而 $\det(A)^3=-8$.
注意到 $A\in M_3(\mathbb{R})$, 因此 $\det(A)\in\mathbb{R}$. 由此可知 $\det(A)=-2$. (5分)

(4) <u>方法一</u>: 设$\alpha=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^3$. 计算可得

$$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}.$$

(5分)

由上式可知 $a^2=b^2=c^2=1$.

注意到 $\alpha^T\alpha=a^2+b^2+c^2$，因此 $\alpha^T\alpha=3$. (5分)

注：利用上述等式可以解得 $\alpha^T=(1,-1,1)$ 或者 $(-1,1,-1)$.

<u>方法二</u>： 利用公式 $\det(\lambda E_3-\alpha\alpha^T)=\lambda^2\det(\lambda-\alpha^T\alpha)$， 计算可得$\alpha^T\alpha=3$.

(5) 讨论 λ 是否为零. 记 $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda E_{2016} & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=0$ 时，$f(0)=\det(A(0))$. 注意到 $r(A(0))=2$， 因此 $f(0)=0$; (1分)

当 $\lambda\neq 0$ 时, 考虑

$$\begin{pmatrix}E_{2016} & 0\\ -\frac{1}{\lambda}\alpha^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda E_{2016} & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E_{2016} & \alpha\\ 0 & -\frac{1}{\lambda}\alpha^T\alpha\end{pmatrix}.$$

(3分)

由此可得 $f(\lambda)=\det(\begin{pmatrix}\lambda E_{2016} & \alpha\\ 0 & -\frac{1}{\lambda}\alpha^T\alpha\end{pmatrix})=-2016\lambda^{2015}$. (1分)

3. (10分) 设 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 且满足 $A^TA=E_n$ 和 $\det A<0$, 其中 E_n 是单位阵. 证明: $r(A+E_n)<n$.

<u>解答</u>：由 $A^TA=E_n$ 可知 $A+E_n=A+A^TA=(E+A^T)A$. (6分)

从而 $\det(A+E_n)=\det((E+A^T)A)=\det(E+A^T)\det(A)$.

注意到 $(A+E)^T=E+A^T$，因此有 $\det(A+E)=\det(A^T+E)$，代入上式有

$$\det(A+E)=\det(A+E)\det(A).$$

由 $\det(A)<0$ 可知 $\det(A+E_n)=0$. (4分)

4. (15分)设 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}), B\in M_{n\times l}(\mathbb{F})$.

   (1) (8分) 证明: 如果 $r(AB)=r(B)$, 那么对任意的矩阵 $C\in M_{l\times k}(\mathbb{F})$, 有 $r(ABC)=r(BC)$;

   (2) (7分) 若对任意的矩阵 $C\in M_{n\times l}(\mathbb{F})$ 都有 $r(AC)=r(C)$, 求 $r(A)=?$

<u>解答</u>：

(1) 设线性方程组 $ABX=0$ 的解集为 S_1，线性方程组 $BX=0$ 的解集为 S_2， 线性方程组 $BCX=0$ 的解集为 S_3，线性方程组 $ABCX=0$ 的解集为 S_4.

显然由如下的包含关系 $S_2\subseteq S_1$，$S_3\subseteq S_4$.

由条件 $r(AB)=r(B)$ 知 $S_1=S_2$. 注意到$r(ABC)=r(BC)$ 等价于证明 $S_3=S_4$. (5分)

下证 $S_4\subseteq S_3$.

对任意的向量 $\alpha\in S_4$, 则 $ABC\alpha=0$， 因此 $C\alpha\in S_1$. 由 $S_1=S_2$ 可得 $C\alpha\in S_2$，从而 $BC\alpha=0$. 特别地，$\alpha\in S_3$. (3分)

(2) <u>断言</u>：$r(A)=n$. (3分)

否则假设 $r(A)<n$，考虑以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 $AX=0$，则 $AX=0$ 有非零解. 设 $\beta\in\mathbb{F}^n$ 为任意的非零解.

令 $C=(\beta,\cdots,\beta)\in M_{n\times l}(\mathbb{F})$, 则 $AC=0$. 因此$r(AC)=0<1=r(C)$ 与题目假设矛盾. (4分)

5. (10分) 求一个首一的 4 次有理多项式 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得其在复数域上的根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 满足方程组 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2=-1\\ \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3=1\\ \lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4+\lambda_4^4=-1\end{cases}$.

解答：记 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ 为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 的初等对称多项式，则 $f(x)=x^4-\sigma_1x^3+\sigma_2x^2-\sigma_3x+\sigma_4$. (3分)

分别将 $\lambda_1,\cdots,\lambda_4$ 的对称多项式 $\lambda_1^k+\lambda_2^k+\lambda_3^k+\lambda_4^k, k=1,2,3,4$, 表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ 的多项式可得

$$\begin{aligned}
1 &= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=\sigma_1\\
-1 &= \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2=\sigma_1^2-2\sigma_2\\
1 &= \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3\\
-1 &= \lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4+\lambda_4^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4
\end{aligned}$$

(6分)

解之可得 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=1$，因此

$$f(x)=x^4-x^3+x^2-x+1.$$

(1分)