# 四川大学期末考试试题（闭卷）（A）

（2011——2012 学年第 2 学期）

课程号：201098050　课序号：0.1　课程名称：高等代数-2　任课教师：彭国华 谭友军 罗院婷　　成绩：

适用专业年级：数学学院 2011 级各专业　学生人数：　244　印题份数：270　　学号：　　　姓名：

**考 试 须 知**

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各级各类考试，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》。有考试违纪作弊行为的，一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理。

四川大学各级各类考试的监考人员，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》、《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》。有违反学校有关规定的，严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理。

1.（本题满分 50 分）设$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 解答下列各题.

(1)　(10 分) 求$A$的 Jordan 标准型和极小多项式.

(2)　(10 分) 设$V$是所有与$A$可交换的矩阵组成的 3 阶方阵的集合. 证明$V$关于矩阵的加法运算和数乘运算是一个线性空间，并求$V$的维数.

(3)　(10 分) 设$A$是线性映射$f\in\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$的矩阵. 分别求$f$的核$\ker(f)$和像$\mathrm{im}(f)$的维数，并写出它们的一个基.

(4)　(10 分) 设$A$是线性空间$W$上的线性变换$\mathbb{A}$的矩阵. 写出$\mathbb{A}$的所有不变子空间.

(5)　(10 分) 求二次型$g(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$的标准型，并写出相应的非退化线性替换.

2.（本题满分 20 分）设$A$是$n$阶实对称矩阵.

(1)　(10 分) 写出$A$是正定矩阵的 5 个充分必要条件(不必证明).

(2)　(5 分)　证明：矩阵$\sqrt{-5}E_n+A$可逆，其中，$E_n$是$n$阶单位阵.

(3)　(5 分)　设$A$是欧式空间$V$上的线性变换$\mathbb{T}$在某个基下的矩阵. 问：$\mathbb{T}$是对称变换吗？说明理由.

3.（本题满分 10 分）设$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. 用两种方法证明$A$在任意数域$\mathbb{F}$上都不可能相似于对角阵.

4.（本题满分 10 分）设$A,B$为$n$阶实方阵.

(1)　(6 分) 分别举出$n=2$时满足如下条件的例子：

(i)　$A$与$B$在实数域上是相似的，但在实数域上不是合同的.

(ii)　$A$与$B$在实数域上是合同的，但在实数域上不是相似的.

(iii)　$A,B$都不是正交阵，但$AB$是不为单位阵的正交阵.

(2)　(4 分) 假设存在复可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=B$. 利用$P$求一个实可逆矩阵$Q$使得$Q^{-1}AQ=B$.

5.（本题满分 5 分）设$A$是$n$阶正交阵. 证明：对$A$的任意特征值$a$都有$|a|=1$.

6.（本题满分 5 分）设$\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_n$是数域$\mathbb{F}$上的线性空间$V$的一个基，$A=(a_{ij})$是$\mathbb{F}$上的$n$阶方阵. 设$\gamma_1$、$\gamma_2$、…、$\gamma_n\in V^*$满足$\gamma_i(\alpha_j)=a_{ij}$，$1\le i,j\le n$. 证明：$\gamma_1$、$\gamma_2$、…、$\gamma_n$是对偶空间$V^*$的一个基当且仅当$A$可逆.

注：1 试题字迹务必清晰，书写工整。

2 题间不留空，一般应题卷分开

3 务必用 A4 纸打印

教务处试题编号：