数学分析小测验

小测验二(刘老师班)

要求: (1) 证明务必规范、严谨，该有的步骤务必保留. (2) 姓名学号务必写在答题纸上. (3) 请按照题目的顺序依次解答. (4) 计算题务必要有详细的解答步骤. (5) 附加题解答正确方可得分.

1 (本题 20 分, 二选一解答,):
(1) 用定义证明下列极限

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

解答: 由于 $x<0$ 时，

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{-x}}},$$

因此我们只需要用定义证明

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

便可. $\forall\epsilon>0$, $\exists\ \delta=\ln(1+\epsilon)$, 当 $0<x<\delta$ 时, 有

$$0<\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}-1<\epsilon.$$

(2) 给出下列函数的定义域并分析其在定义内的连续性.

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(4^n+x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

解答:

$$f(x)=\max\left\{4,x^2,\frac{1}{x^2}\right\}$$

2 (本题 30 分): 计算下列函数极限.

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\right),$$
$$(2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}.$$

解答:

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\right),$$
$$=\lim_{y=1/x\to 0^+}\frac{\left(\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1+y^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)}{y^2}=\frac{1}{2}.$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\cos x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-\cos x)}\frac{\frac{\pi}{2}(1-\cos x)}{\sin x}\frac{\sin x}{\sin(\sin x)}=0.$$

3 (本题 20 分): 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，并满足

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\quad f(1)=a>0.$$

结合 $f(x)$ 的连续性求其表达式.

解答: 由 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 不难求得

$$f(x)=a^x,\quad x\in Q.$$

再由 $f(x)$ 与 a^x 的连续性可知，

$$f(x)=a^x,\quad x\in R\setminus Q.$$

从而,

$$f(x)=a^x,\quad x\in R.$$

4 (本题 30 分): 若果 f_1 与 f_2 在 $[a,b]$ 上连续，定义函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 如下:

$$g(x)=\min\left\{\inf_{y\in[a,x]} f_1(y),\ \inf_{y\in[a,x]} f_2(y)\right\},$$
$$h(x)=\max\left\{\sup_{y\in[a,x]} f_1(y),\ \sup_{y\in[a,x]} f_2(y)\right\}.$$

证明 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

分析：记

$$w(x)=\inf_{y\in[a,x]} f_1(y),\quad q(x)=\sup_{y\in[a,x]} f_1(y).$$

由于

$$q(x)=\sup_{y\in[a,x]} f_1(y)$$

与

$$q(a)-q(x)=\inf_{y\in[a,x]}(q(a)-f_1(y))$$

连续性相同. 因此，我们只需要证明

$$w(x)=\inf_{y\in[a,x]} f_1(y)$$

在 $[a,b]$ 上连便可.

证明：$\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时, 有

$$f(x)\in(f(a)-\epsilon,f(a)+\epsilon),$$

因此，$x\in(a,a+\delta)$ 时, 有

$$w(x)\in(w(a)-\epsilon,w(a)+\epsilon),$$

即 $w(x)$ 在 $x=a$ 出连续.

任意取 $x_0 \in (a,b]$,

(1) 若

$$w(x)=\inf_{y\in[a,x_0]} f_1(y)=f(y_0)<f_1(x_0), \quad y_0<x_0,$$

则存在 $\delta_1>0$，当 $x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)\cap[a,b]$ 时,

$$f(x)_1>f_1(y_0),$$

从而，当 $x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)\cap[a,b]$ 时

$$w(x)=f_1(y_0).$$

(2) 若

$$w(x)=\inf_{y\in[a,x_0]} f_1(y)=f_1(x_0),$$

则有

$$f_1(x)\geq w(x)\geq w(x_0)\geq f_1(x_0), \quad x<x_0,$$

$$w(x)=\min\left\{\inf_{y\in[a,x_0]} f_1(y), \inf_{y\in[x_0,x]} f_1(y)\right\}, \quad x>x_0.$$

由 $f(x)$ 在 x_0 出连续, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta_2>0$, 当 $x\in(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)\cap(a,b]$ 时, 有

$$f(x)\in(f(x_0)-\epsilon,f(x_0)+\epsilon).$$

因此, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap(a,b]$ 时, 有

$$w(x)\in(f(x_0)-\epsilon,f(x_0)+\epsilon).$$

即

$$|w(x)-w(x_0)|<2\epsilon.$$

5 (本题 30 分, 附加题): 设 f 在 (a,b) 上单调递增，任取 $x_0\in(a.b)$，证明

$$\inf_{x>x_0} f(x)\geq f(x_0)\geq \sup_{x<x_0} f(x).$$