第七章　双线性型、二次型

1. (线性型的定义: 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 一个从 V 到 $\mathbb{F}$ 的线性映射 f 称为 V 上的一个线性型一个线性型也称为一个线性函数.)

解:

(1) 对任意 $f, g \in \mathbb{F}[x]_n$, $a, b \in \mathbb{F}$ 有:

$$\phi(af + bg) = (af + bg)(0) = af(0) + bg(0) = a\phi(f) + b\phi(g),$$

所以, ϕ 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的一个线性型. □

注: 本题给出的例子在函数空间上有类似的构造: 称为赋值线性函数: 例如: 在 $V = C[a,b]$ 上, $x_0 \in [a,b]$, 则 ϕ: $C[a,b] \to \mathbb{R}$: $\phi(f) = f(x_0)$, 就是 $C[a,b]$ 上的一个线性型.

(2) 不是, 因为行列式函数不是线性的: 存在 A, B 使得 $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. □

注: 行列式 $\det(a_{ij})$ 是 n^2 个变量 a_{ij} 的多项式函数. 但是, 由行列式的基本性质可知, det 可以看成是从 $\mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n$ 上的多重线性函数. (multilinear function.)

(3) 如果 $A = 0$, 则 $f \equiv 0$ 是线性的; 否则, 不是. 事实上,

$$\begin{aligned} f(aX + bY) &= (aX + bY)'A(aX + bY) \\ &= a^2X'AX + abX'AY + abY'AX + b^2Y'AY, \text{ 而} \end{aligned}$$

$$af(X) + bf(Y) = aX'AX + bY'AY.$$ □

(4) 由方阵的 trace 的性质有: 对任意 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 和 $a, b \in \mathbb{F}$ 有:

$$\mathrm{tr}(aA + bB) = \mathrm{tr}(aA) + \mathrm{tr}(bB) = a\mathrm{tr}(A) + b\mathrm{tr}(B),$$

所以, tr 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 上的一个线性型. □

注: 这个线性型的定义是整体的, 即, 不依赖于 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 的基的选取.

(5) 由定积分的性质有: 对任意 $f, g \in C[a,b]$ 和 $k, \ell \in \mathbb{R}$ 有:

$\int_a^b (kf(x) + \ell g(x))dx = k\int_a^b f(x)dx + \ell\int_a^b g(x)dx,$

所以, $f(x) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ 是 $C[a,b]$ 上的一个线性型. □

2. (线性型的基本计算: 任意线性型由它在基向量出的函数值唯一确定.)

(1) 由题设有

$$(f(\varepsilon_1)\ f(\varepsilon_2)\ f(\varepsilon_3))\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = (-3\ \ -1\ 2),$$

所以,

$$\begin{aligned}(f(\varepsilon_1)\ f(\varepsilon_2)\ f(\varepsilon_3)) &= (-3\ \ -1\ 2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (-3\ \ -1\ 2)\begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \\ &= (-11/3\ 2/3\ 7/3),\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}f(2047\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2046\varepsilon_3) &= (f(\varepsilon_1)\ f(\varepsilon_2)\ f(\varepsilon_3))\begin{pmatrix} 2047 \\ 1 \\ 2046 \end{pmatrix} \\ &= (-11/3\ 2/3\ 7/3)\begin{pmatrix} 2047 \\ 1 \\ 2046 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{11}{3} \times 2047 + \frac{2}{3} \times 1 + \frac{7}{3} \times 2046 = -2737.\end{aligned}$$

□

(2) (本质上与 (1) 相同.) 由题设有

$$(f(\varepsilon_1)\ f(\varepsilon_2)\ f(\varepsilon_3))\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&3&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=(1\ 0\ -1),$$

所以,

$$\begin{aligned}(f(\varepsilon_1)\ f(\varepsilon_2)\ f(\varepsilon_3))&=(-3\ -1\ 2)\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&3&0\\1&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\\&=(1\ 0\ -1)\begin{pmatrix}0.3&-0.1&0.6\\0.1&0.3&0.2\\0.3&-0.1&-0.4\end{pmatrix}\\&=(0\ 0\ 1),\end{aligned}$$

所以, 对任意 $\alpha=x\varepsilon_1+y\varepsilon_2+z\varepsilon_3\in V$ 有:

$$\begin{aligned}f(x\varepsilon_1+y\varepsilon_2+z\varepsilon_3)&=(f(\varepsilon_1)\ f(\varepsilon_2)\ f(\varepsilon_3))\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\&=(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=z,\end{aligned}$$

即, 所求的线性型为 f 为: $x\varepsilon_1+y\varepsilon_2+z\varepsilon_3\mapsto z$. □

3. ($\mathbb{R}^n$ 上的线性型, 对偶基.)

(1) **证明**: (列向量空间上的线性型的一般形式.)

法一: (线性映射的存在唯一性定理: 任意线性映射由它在基向量上的作用唯一确定.)

设 ε_i 是 $\mathbb{R}^n$ 的第 i 个基本向量, $1\le i\le n$. 则, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基.

对任意 $f\in(\mathbb{R}^n)^*$, 设 $f(\varepsilon_i)=a_i$, 则对任意 $(x_1,\cdots,x_n)'\in\mathbb{R}^n$ 有:

$$f((x_1,\cdots,x_n)')=f\left(\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i\right)=\sum_{i=1}^n x_if(\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^n a_ix_i.\ \square$$

法二: (用对偶基.)

设 ε_i 是 $\mathbb{R}^n$ 的第 i 个基本向量, $1 \le i \le n$. 设 ε_i^* $(1 \le i \le n)$ 是 ε_i $(1 \le i \le n)$ 的对偶基.

则, 对任意 $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ 都存在唯一的 $a_i \in \mathbb{R}$ 使得 $f = \sum\limits_{i=1}^n a_i \varepsilon_i^*$;

从而, 对任意 $(x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ 有:

$$\begin{aligned} f((x_1, \ldots, x_n)') &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i\right) = \left(\sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_j^*\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_j x_i \varepsilon_j^*(\varepsilon_i) = \sum_{i,j=1}^n a_j x_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i x_i. \end{aligned}$$ □

注: 这个结论对任意的列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 都成立. 事实上, 上面的两个证明方法都可以用于证明如下的更一般的结论:

对任意的 $\mathbb{F}$ 上的 n 维空间 V, 任意取定 V 的一个基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$. 则, 对任意 $f \in V^*$, 存在 $a_i \in \mathbb{F}$ 使得

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \text{ 任意 } x_i \in \mathbb{F}.$$

(2) (对偶基之间的过渡矩阵. 题目的意思是写出 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 的作为 $\mathbb{R}^3$ 上的线性函数的具体表达式.)

解: 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的基本向量. (把 $\mathbb{R}^3$ 中的向量都看成列向量.) 由题设有:

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)A, \text{ 其中, } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即, A 是从 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.

设从对偶基 ε_1^*, ε_2^*, ε_3^* 到对偶基 α_1^*, α_2^*, α_3^* 的过渡矩阵为 B, 即,

$(\alpha_1^*\ \alpha_2^*\ \alpha_3^*) = (\varepsilon_1^*\ \varepsilon_2^*\ \varepsilon_3^*)B$. 则, 只需计算 B. 但是

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = \alpha_i^*(\alpha_j) &= \left(\sum_{k=1}^3 B(k,i)\varepsilon_k^*\right)\left(\sum_{\ell=1}^3 A(\ell,j)\varepsilon_\ell\right) \\ &= \sum_{k,\ell=1}^3 B(k,i)A(\ell,j) \\ &= \sum_{k=1}^3 (B^T)(i,k)A(k,j), \end{aligned}$$

此即表明,

$$B=(A^{-1})'=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-4&-5&6\\-3&-3&4\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}.$$

(这里用伴随矩阵来求逆: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$, 较为简便.)

从而:

$\alpha_1^*=\varepsilon_1^*+\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*$, 即, $\alpha_1^*((x,y,z)')=x+y-z$;

$\alpha_2^*=-4\varepsilon_1^*-5\varepsilon_2^*+6\varepsilon_3^*$, 即, $\alpha_2^*((x,y,z)')=-4x-5y+6z$;

$\alpha_3^*=-3\varepsilon_1^*-3\varepsilon_2^*+4\varepsilon_3^*$, 即, $\alpha_3^*((x,y,z)')=-3x-3y+4z$.

□

注: 上面的计算适用于一般的情形, 即:

结论: 设从基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 到基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为 A, 则从对偶基 $\xi_1^*,\cdots,\xi_n^*$ 到对偶基 $\eta_1^*,\cdots,\eta_n^*$ 的过渡矩阵为 $(A^{-1})'$.

4. (线性型的核.)

证明: 由于 $f_i\neq 0\in V^*$, 所以它的核 $\ker f_i$ 是 V 的真子空间, $i=1,\ldots,s$. 利用关于子空间的结论: 任意非零的线性空间都不是它的有限多个真子空间的并 (参见 Chapter 4 Ex. 58 中的**命题**): $V\neq\cup_{i=1}^s\ker f_i$, 即, 存在 $\alpha\in V\setminus\cup_{i=1}^s\ker f_i$ 使得对每个 $1\leq i\leq s$ 都有 $\alpha\notin\ker f_i$, 即, $f_i(\alpha)\neq 0$. □

注1: 如果 $V=\mathbb{F}^n$ 是列向量空间, 则任意线性函数 $0\neq f_i\in V^*$ 的核 $\ker f_i$ 是一个由一个方程所组成的其次线性方程组

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=0$$

的解空间. (参见上面的第 **3** 题的 (1).)

注2: 该习题的上述证明中没有用到 f_i 是 V 上的线性型的事实, 而只是用到 $\ker f_i$ 是子空间的事实. 因此, f_i 可以换成是从 V 到另一个线性空间 W 的线性映射, 参见 Chapter 4 Ex. 58 中的**应用**1.

5. (线性空间的基与坐标, 对偶基.)

解: 设 $f=x_n\varepsilon_n^*+x_{n-1}\varepsilon_{n-1}^*+\cdots+x_2\varepsilon_2^*+x_1\varepsilon_1^*$, 即, f 关于 ε_n^*, ε_{n-1}^*, $\cdots$, ε_1^* 的坐标是 $(x_n,x_{n-1},\cdots,x_2,x_1)'$. 由

$$j = f(j) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i^*\right)(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i^*(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} = x_j$$

可得: $x_j = j$,

即, f 关于 $\varepsilon_n^*, \varepsilon_{n-1}^*, \cdots, \varepsilon_1^*$ 的坐标是 $(n, n-1, \cdots, 2, 1)'$. □

注: 此题不必用第 **3** 题中的**结论**去计算, 因为 f 的作用是明显给出了的.

6. (基的扩充定理的应用.)

证明: 设 $\alpha = x - y$. 假设 $\alpha \neq 0$. (为了得到矛盾, 需要构造一个 $f \in V^*$ 使得 $f(\alpha) \neq 0$, 即, $f(x) \neq f(y)$.)

那么, 根据基的存在性定理, 有直和分解: $V = \langle \alpha \rangle \oplus V_1$. 定义函数 f: $V \to \mathbb{F}$ 为: 对任意 $\gamma = k\alpha + \gamma_1$, $k \in \mathbb{F}$, $\gamma_1 \in V_1$, $f(\gamma) = k$. 易见 f 是线性函数: $f \in V^*$. 特别, $f(\alpha) = 1 \neq 0$, 矛盾. □

注1: 这个结论等价于说, 对任意 $0 \neq \alpha \in V$ 都存在 V 上的线性函数 f (与 α 有关) 使得 $f(\alpha) \neq 0$.

注2: 如果 $\dim V = n < \infty$, 则可以用对偶基和基的扩充定理直接证明如下:

设 $\alpha = x - y$. 假设 $\alpha \neq 0$. 把它扩充为 V 的一个基 $\alpha_1 = \alpha$, α_2, $\cdots$, α_n. 则有对偶基: $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_n^*$, 且 $\alpha_1^* \in V^*$ 即满足: $\alpha_1^*(\alpha) = 1 \neq 0$, 从而得到矛盾. □

7. (有限维空间与它的对偶空间是同构的, 本题给出了用基和对偶基构造同构映射的方法.)

证明: 首先证明, 对任意 $\eta = \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i \in V$ 都有 $\eta^* \in V^*$.

对任意 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \in V$, $\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i \in V$ 和任意 $a, b \in \mathbb{F}$ 有:

$$\begin{aligned}\eta^*(a\alpha + b\beta) &= \sum_{i=1}^{n} c_i (a x_i + b y_i) \\ &= a \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + b \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = a\eta^*(\alpha) + b\eta^*(\beta),\end{aligned}$$

此即表明, $\eta^* \in V^*$.

其次, 验证映射: φ: $V \to V^*$: $\eta \mapsto \eta^*$, 是线性的, 即, 要验证: 对任意 $\eta_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varepsilon_i \in V$, $\eta_2 \in \sum\limits_{i=1}^{n} d_i\varepsilon_i \in V$ 和 $k, \ell \in \mathbb{F}$ 有:

$$\varphi(k\eta_1 + \ell\eta_2) = k\varphi(\eta_1) + \ell\varphi(\eta_2), \text{ 即, } (k\eta_1 + \ell\eta_2)^* = a\eta_1^* + \ell\eta_2^*. \qquad ①$$

(要证明①成立, 只需验证左右两边作用在任意 $\gamma \in V$ 都相等.) 对任意 $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i\varepsilon_i$ 有:

$$\begin{aligned}\varphi(k\eta_1 + \ell\eta_2)(\gamma) &= (k\eta_1 + \ell\eta_2)^*(\gamma) = \sum_{i=1}^{n}(kc_i + \ell d_i)z_i \\ &= k\sum_{i=1} c_i z_i + \ell\sum_{i=1}^{n} d_i z_i = k\eta_1^*(\gamma) + \ell\eta_2^*(\gamma) = (k\eta_1^* + \ell\eta_2^*)(\gamma),\end{aligned}$$

所以, ①成立, 即, $\varphi:\ V \to V^*$ 是线性映射.

最后, 有以下两个方法证明 φ 是同构映射:

法一: 由于 $\dim V = \dim V^*$, 所以, 为了证明 φ 是同构映射, 只需证明 φ 是单射.

(回忆线性映射的维数公式: $\dim\ker f + \dim\operatorname{im}(f) = \dim V$, 其中, $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$.)

设 $\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varepsilon_i \in \ker\varphi$, 即, $\varphi(\eta) = \eta^* = 0 \in V^*$.

则对任意 $\delta = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i\varepsilon_i \in V$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i w_i = 0$, 从而, 下述线性方程组

$$(c_1\ c_2\ \cdots\ c_n)X = 0$$

的解空间是整个 $\mathbb{F}^n$. 所以 $(c_1\ c_2\ \cdots\ c_n) = 0$, 即 $\eta = 0$,

从而 φ 是单射. $\square$

法二: 对每个 $1 \le j \le n$, 由于 $\varepsilon_j = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\varepsilon_j$, 其中, $c_i = \delta_{ij}$, 从而由题设有:

$$\varepsilon_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{ij} = a_j,$$

特别, $\varepsilon_j^*(\varepsilon_i) = \delta_{ij}$, 此即表明, $\varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_n^*$ 是 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 的对偶基, 即, 线性映射 φ 满足: $\varphi(\varepsilon_j) = \varepsilon_j^*$, $1 \le j \le n$, 即, φ 把 V 的基映为 V^* 的基, 所以, φ 是同构映射. $\square$

8. (双线性型的定义, trace 的性质.)

证明: 对任意 $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$, $A_1, A_2, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 有:

$$\begin{aligned} f(a_1A_1 + a_2A_2, B) &= \mathrm{tr}((a_1A_1 + a_2A_2)B) = \mathrm{tr}(a_1A_1B + a_2A_2B) \\ &= \mathrm{tr}(a_1A_1B) + \mathrm{tr}(a_2A_2B) = a_1\mathrm{tr}(A_1B) + a_2\mathrm{tr}(A_2B) \\ &= a_1f(A_1, B) + a_2f(A_2, B); \end{aligned}$$

同理可验证: 对任意 $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$, $A, B_1, B_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 有:

$$f(A, b_1B_1 + b_2B_2) = b_1f(A, B_1) + b_2f(A, B_2).$$

综上, $f \in B(\mathrm{M}_n(\mathbb{F}))$. □

注: 本题中的双线性型是整体定义的, 即, 没有用到 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 的基. 事实上, 由于 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, 所以本题中的 f 是一个对称的双线性型.

9. (双线性型的度量阵.)

解:

(1) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的基本向量. 由题设有:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = f((1,0)', (1,0)') = 0;$$
$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = f((1,0)', (0,1)') = 1;$$
$$f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = f((0,1)', (1,0)') = -2;$$
$$f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = f((0,1)', (0,1)') = 1;$$

所以, f 的关于基本向量的度量阵为

$$\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$ □

(由此可见, f 不是对称的.)

(2) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的基本向量. 由题设有:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = f((1,0,0)', (1,0,0)') = 1;$$
$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = f((1,0,0)', (0,1,0)') = -3;$$
$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = f((1,0,0)', (0,0,1)') = 0;$$
$$f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = f((0,1,0)', (1,0,0)') = 1;$$
$$f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = f((0,1,0)', (0,1,0)') = -2;$$
$$f(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = f((0,1,0)', (0,0,1)') = 0;$$

$$f(\varepsilon_3,\varepsilon_1)=f((0,0,1)',(1,0,0)')=0;$$
$$f(\varepsilon_3,\varepsilon_2)=f((0,0,1)',(0,1,0)')=0;$$
$$f(\varepsilon_3,\varepsilon_3)=f((0,0,1)',(0,0,1)')=1;$$

所以, f 的关于基本向量的度量阵为:

$$\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & f(\varepsilon_1,\varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2,\varepsilon_2) & f(\varepsilon_2,\varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_3,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_3,\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3,\varepsilon_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

10. (双线性型、线性型的概念, 双线性型的度量阵, 秩为 1 的矩阵)

解: 不一定. 事实上, 有如下的

断言: 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, f 是 V 上的一个双线性型. 则存在 $f_1,f_2\in V^*$ 使得对任意 $\alpha,\beta\in V$ 都有 $f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta)$ 的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(f)\le 1$.

证明: 任取 V 的一个基 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. 设 f 在这个基下的度量阵是 $A=(f(\alpha_i,\alpha_j))_{1\le i,j\le n}$. 设 $\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*\in V^*$ 是对偶基.

充分性. 如果 $\operatorname{rank}(f)\le 1$, 即, $\operatorname{rank}(A)\le 1$, 那么 A 必然具有形式:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \ddots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1\ \cdots\ b_n),$$

其中, $a_i,b_j\in\mathbb{F}$. 定义:

$$f_1=\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i^*,\quad f_2=\sum_{j=1}^n b_j\alpha_j^*\in V^*.$$

则对任意 $\alpha=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)X\in V$ 和 $\beta=(\alpha_1\ \cdots\ \beta_n)Y\in V$ 都有

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta)=X'AY&=(X'\begin{pmatrix} a_1 \\ \ddots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1\ \cdots\ b_n)Y) \\ &=((a_1\ \cdots\ a_n)X)'((b_1\ \cdots\ b_n)Y)=f_1(\alpha)f_2(\beta), \end{aligned}$$

正如所需.

必要性. 以上讨论每步可逆. $\square$

注: 相当于考虑二元函数 $f(x,y)$ 能否"可分离变量": $f(x,y)=g(x)h(y)$ 是否成立. 一般地, 多元函数是不能分离变量的. 上面的讨论给出二元的线性函数可分离变量的一个充要条件.

11. (用度量阵计算双线性型的函数值.)

证明: 由题设有: $A(i,j)=(f(\eta_i,\eta_j))$, $1\le i,j\le n$. 所以, 对任意

$$\alpha=(\eta_1\ \cdots\ \eta_n)X \text{ 和 } \beta=(\eta_1\ \cdots\ \eta_n)Y,$$

(其中, $X=(x_1\ \cdots\ x_n)'$, $Y=(y_1\ \cdots\ y_n)'$.) 都有:

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i\eta_i,\ \sum_{j=1}^n y_j\eta_j\right)=\sum_{i,j=1}^n x_iy_jf(\eta_i,\eta_j)\\ &=\sum_{i,j=1}^n x_iA(i,j)y_j=X'AY. \end{aligned}$$

□

注: 由本题的结论可知, 对于有限维空间上的双线性型 f, 如何选取 V 的一个基, 使得 f 在这个基下的度量阵 A 具有简单的形式, 是一个重要的问题.

12. (双线性型的 (非) 退化性, 度量阵的应用.)

注1: 题目中应该加上 $\dim V<\infty$ 的条件.

注2: 回忆教材上的定义 (Definition 7.3, p355): 设 f 是 V 上的一个双线性型. 如果存在 $0\ne\alpha\in V$ 使得 $f(\alpha,\beta)=0$ 对任意 $\beta\in V$ 都成立, 则称 f 是退化的.

这个定义是针对 f 的第一个变量 (或, 左边的变量) 而言的. 所以, 一个自然的问题是, f 的退化性是否可以用 f 的第二个变量 (或, 右边的变量) 来定义. 本题的含义就是, 当 $\dim V<\infty$ 时, 结论是肯定的, 即, 双线性型的退化性 (或, 非退化性) 可以用两个变量中的任意一个变量来定义. (当然, 如果 f 是对称的双线性型, 这是显然的.)

证明: 设 V 上的双线性型 f 是退化的. 任取 V 的一个基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$. 设 f 在这个基下的度量阵为 A. 则 $r(A)<n$. (Theorem 7.6, p355.)

于是, 存在 $0\ne\delta\in\mathbb{F}^n$ 使得 $A\delta=0$.

令 $\beta=(\xi_1\ \cdots\ \xi_n)\delta\in V$. 则 $\beta\ne0$,

且对任意 $\alpha = (\xi_1 \ \cdots \ \xi_n)X \in V$ 有 (参见第 **11** 题):

$$f(\alpha, \beta) = X'A\delta = X'0 = 0. \qquad \square$$

注3: 一般地, 有如下的概念: 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的任意线性空间, f 是 V 的任意双线性型. 定义:

$$\mathrm{rad}_L(f) = \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \text{对任意}\ \beta \in V\ \text{都成立}\};$$

$$\mathrm{rad}_R(f) = \{\beta \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \text{对任意}\ \alpha \in V\ \text{都成立}\}.$$

可直接验证, $\mathrm{rad}_L(f)$ 和 $\mathrm{rad}_R(f)$ 都是 V 的子空间. 称 $\mathrm{rad}_L(f)$ 为 f 的左根, $\mathrm{rad}_R(f)$ 为 f 的右根. 则有如下的

引理: 设 $\dim V = n$, f 是 V 上的一个双线性型. 则

$$\dim \mathrm{rad}_L(f) = \dim \mathrm{rad}_R(f) = n - r(A),$$

特别地, $\mathrm{rad}_L(f) \cong \mathrm{rad}_R(f)$, 且, f 非退化当且仅当 $\mathrm{rad}_L(f) = 0$, 当且仅当 $\mathrm{rad}_R(f) = 0$, 当且仅当 $r(A) = n$.

证明: 任意取定 V 的一个基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$. 设 f 在这个基下的度量阵为 A. 则 $\alpha = (\xi_1 \ \cdots \ \xi_n)X \in \mathrm{rad}_L(f)$

当且仅当, $0 = f(\alpha, \beta) = X'AY$ 对任意 $\beta = (\xi_1 \ \cdots \ \xi_n)Y$ 都成立;

当且仅当 $(X'A)Y = 0$ (关于 Y 的齐次线性方程组) 的解空间是 $\mathbb{F}^n$,

当且仅当 $X'A = 0$, 当且仅当 $A'X = 0$,

当且仅当 X 是齐次线性方程组的解.

所以, 有从 $\mathrm{rad}_L(f)$ 到 $A'X = 0$ 的解空间之间的线性空间同构:

$\alpha \mapsto X$, 从而 $\dim \mathrm{rad}_L(f) = n - r(A)$.

同理可证 $\dim \mathrm{rad}_R(f) = n - r(A)$. $\square$

13. (双线性型的 Gram 矩阵: 是度量阵的推广.)

证明:

(1) (验证左右两边的 (i, j)-元相等.)

由题设有: $f(\varepsilon_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} C(k, i)\eta_k$, $f(\varepsilon_j) = \sum\limits_{\ell=1}^{n} C(\ell, j)\eta_\ell$, 从而, $\triangle$ 的 (i, j)-元为:

$$\begin{aligned}\triangle(i,j) = f(\varepsilon_i,\varepsilon_j) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} C(k,i)\eta_k, \sum_{\ell=1}^{n} C(\ell,j)\eta_\ell\right) \\ &= \sum_{k,\ell=1}^{n} C(k,i)A(k,\ell)C(\ell,j) = \sum_{k,\ell=1}^{n} C'(i,k)A(k,\ell)C(\ell,j) \\ &= (C'AC)(i,j).\end{aligned}$$ □

(2) 由 (1) 可知, 如果 $\triangle$ 可逆, 即, $r(\triangle)=m$, 从而

$$r(C) \geq \mathrm{C'AC} = r(\triangle) = m;$$

而 C 是 $n\times m$ 型矩阵, 所以, $r(C)\leq m$. 于是, $r(C)=m$.

由于 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 线性无关, 所以, 由 Chapter 2, Ex. 26 可知及 $(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_m)=(\eta_1\ \cdots\ \eta_n)C$ 可知, 向量组 $\varepsilon_1,\cdots,\eta_m$ 的秩等于 $r(C)=m$, 从而是线性无关的.

反之不成立. 例如, 当 $f=0$ 时, $\triangle=0$ 是零矩阵.

注: 本题是欧式空间的相应结论的推广, 参见 Chapter 6 Ex. 38.

14. (列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 上的双线性型的一般形式.)

证明: 取 $\mathbb{F}^n$ 的基本向量 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 所构成的基. 令 $a_{ij}=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$, $1\leq i,j\leq n$. 注意到, 任意 $X=(x_1,\cdots,x_n)'\in\mathbb{F}^n$ 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标是 X 本身. 所以, 本题的结论由第 **11** 题立即得到. (当然也可以直接验证.) □

15. (n 维线性空间上的双线性型与方阵之间的一一对应关系.) 略.

16. (双线性型空间 $B(V)$ 与 $L(V,V^*)$ 之间的关系.)

证明: (本题的含义是: 任意 $\phi\in L(V,V^*)$ 都可以确定一个双线性型 f. f 与 ϕ 有关, 所以, 把 f 记为 f_ϕ.)

对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$ 和 $a,b\in\mathbb{F}$, 由定义有:

$$f_\phi(a\alpha+b\beta,\gamma) = \phi(a\alpha+b\beta)(\gamma) = (a\phi(\alpha)+b\phi(\beta))(\gamma)$$

(由于 ϕ 是线性的.)

$$= a\phi(\alpha)(\gamma)+b\phi(\beta)(\gamma) = af_\phi(\alpha,\gamma)+bf_\phi(\beta,\gamma).$$

类似地有: $f_\phi(\alpha,a\beta+b\gamma)=af_\phi(\alpha,\beta)+bf_\phi(\alpha,\gamma)$.

所以我们证明了$f_\phi \in B(V)$. $\square$

注1: 实际上, 本题的结论不需要用到 $\dim V < \infty$.

注2: 在本题的基础上, 有如下的

引理: 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 则

(1) 映射 $\rho:\ L(V, V^*) \to B(V)$: $\phi \mapsto f_\phi$ 是线性映射, 其中, f_ϕ 的定义为:

$$f_\phi(\alpha, \beta) = \phi(\alpha)(\beta), \text{ 任意 } \alpha, \beta \in V.$$

(2) 假设 V是有限维的. 则 ρ 是同构映射.

证明:

(1) 只需验证, 对任意 $\phi_1, \phi_2 \in L(V, V^*)$ 和任意 $a, b \in \mathbb{F}$ 有

$$\rho(a\phi_1 + b\phi_2) = a\rho(\phi_1) + b\rho(\phi_2),$$

而由定义, 这又等价于:

$$f_{a\phi_1+b\phi_2} = af_{\phi_1} + bf_{\phi_2} \in B(V). \tag{*}$$

为了验证 $(*)$, 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 计算

$$\begin{aligned} f_{a\phi_1+b\phi_2}(\alpha, \beta) &= (a\phi_1 + b\phi_2)(\alpha)(\beta) = a\phi_1(\alpha)(\beta) + b\phi_2(\alpha)(\beta) \\ &= af_{\phi_1}(\alpha, \beta) + bf_{\phi_2}(\alpha, \beta) = (af_{\phi_1} + bf_{\phi_2})(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

有此即得 $(*)$. $\square$

(2) 设 $\dim V = n$. 我们知道 $\dim B(V) = \dim L(V, V^*) = n^2$. 所以, 为了证明 ρ 是同构映射, 只需验证 ρ 是单射. 如果

$$\rho(\phi) = f_\phi = 0 \in B(V),$$

那么对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有:

$$f_\phi(\alpha, \beta) = \phi(\alpha)(\beta) = 0,$$

此即表明 $\phi(\alpha) = 0$ 对任意 $\alpha \in V$ 都成立. 所以 $\phi = 0 \in V^*$, 从而 $\ker\rho = 0$, 即, ρ 是单射. $\square$

17. (线性空间 V 上的所有双线性型组成一个线性空间 $B(V)$;

如果 $\dim V = n < \infty$, 则 $\dim B(V) = n^2$.)

课堂上已经证明 (利用 $B(V)$ 与 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 之间的同构映射. 略.

18. (线性空间的张量积.)

(Before proceeding we make the following remark on this exercise itself: One should bear in mind that the notion of tensor products is very crucial in mathematics and physics.)

Remark. The standard definition of *tensor products*, which is defined via *quotient spaces*, is different *essentially* from the definition given in this Exercise. In fact, it's the *dual space* $(U \otimes V)^*$ of the usual tensor product $U \otimes V$ that is isomorphic *canonically* to $L(U^*, V)$, not the usual tensor product $U \otimes V$ itself. However, If both U and V are finite dimensional, the space $L(U^*, V)$ *here* shares many similar properties of the usual tensor product (See (2), (3), (4) and (5) below). So, this exercise is basically about the finite-dimensional space $L(U^*, V)$, not the tensor product $U \otimes V$, though the symbol $\otimes$ is temporarily introduced here. $\square$

(1) **证明**: 对任意 $f_1, f_2 \in U^*$ 和 $k, \ell \in \mathbb{F}$ 有:

$$\begin{aligned}(u \otimes v)(kf_1 + \ell f_2) &= (kf_1 + \ell f_2)(u)v = kf_1(u)v + \ell f_2(u)v \\ &= k(u \otimes v)(f_1) + \ell(u \otimes v)(f_2),\end{aligned}$$

此即表明: $u \otimes v$ 是从 U^* 到 V 的线性映射,

即, $u \otimes v \in U \otimes V = L(U^*, V)$. $\square$

(2) **证明**: 验证各等式的左右两边在任意 $f \in U^*$ 上的作用相等即可, 例如,

$$\begin{aligned}((u + u_1) \otimes v)(f) &= f(u + u_1)(v) = f(u)(v) + f(u_1)(v) \\ &= (u \otimes v)(f) + (u_1 \otimes v)(f) = (u \otimes v + u_1 \otimes v)(f).\end{aligned}$$

由 $f \in U^*$ 的任意性得: $(u + u_1) \otimes v = u \otimes v + u_1 \otimes v$. $\square$

(3) **证明**: 要证 $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki} \varepsilon_k \otimes \eta_i \in U \otimes V = L(U^*, V)$, (*)

只需验证 (*) 的左右两边在任意 $\xi \in U^*$ 上的作用相同.

对任意 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i^*$, 由 $f(\varepsilon_i^*) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik} \eta_k$ 得:

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\varepsilon_i^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \eta_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \right) \eta_k; \qquad ①$$

而

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ki}\varepsilon_k\otimes\eta_i\right)(\xi) = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ki}\varepsilon_k\otimes\eta_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\varepsilon_j^*\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ki}(\varepsilon_j^*)(\varepsilon_k)\right)\eta_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{ki}\right)\eta_i$$

(注意到: $\varepsilon_j^*(\varepsilon_k)=\delta_{jk}$; 再交换下标的记号: $i \leftrightarrow k$ 即得:)

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik}\right)\eta_k; \qquad ②$$

比较①②, 由 f 的任意性即得: $f=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ki}\varepsilon_k\otimes\eta_i$ 成立. □

(4) **证明**: 由题设中的定义有: $U\otimes V = L(U^*,V)$. 而 $\dim U^* = \dim U = n$, $\dim V = m$, 所以

$$\dim U\otimes V = \dim L(U^*,V) = mn.$$

由于向量组 $\varepsilon_i\otimes\eta_j \in U\otimes V$ 含有 mn 个向量, 所以只需验证 $\varepsilon_i\otimes\eta_j$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ 线性无关. 设

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i\otimes\eta_j = 0\in U\otimes V,\quad a_{ij}\in\mathbb{F}. \qquad (*)$$

设 $\varepsilon_1^*,\ldots,\varepsilon_m^*\in U^*$ 是 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$ 的对偶基. 由 $(*)$ 可得, 对每个 $1\le k\le m$ 有:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i\otimes\eta_j\right)(\varepsilon_k^*) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_k^*(\varepsilon_i)\eta_j = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\eta_j = 0,$$

此即表明 $a_{kj}=0$, $1\le j\le n$ (因为 $\eta_1,\ldots,\eta_n$ 线性无关). 再让 k 变动即得 $a_{ij}=0$ 对任意$1\le i\le m$, $1\le j\le n$ 都成立. □

(5) (张量积满足“消去律”.)

证明: 假设 $u\neq 0$, 要证 $v=0$. 由第 **6** 题可知, 存在 $f\in U^*$ 使得 $f(u)\neq 0$. 从而

$$0=0(f)=(u\otimes v)(f)=f(u)v,$$

由此即得 $v=0$. □

(6) Prove that there is a *canonical* isomorphism between $U\otimes V$ and $V\otimes U$.

Caution. It sounds reasonable to define a "map" from $U\otimes V$ to $V\otimes U$ by $u\otimes v\mapsto v\otimes u$ for any $u\in U$ and $v\in V$. This is really the case for tensor products. However, by (7) below there is a large gap to show that this is *indeed* a map for $L(U^*, V)$. So we have to restrict ourselves to finite-dimensional case.

If $\dim U = n < \infty$ and $\dim V = m < \infty$ then by (4) we have $\dim(U \otimes V) = mn = \dim(V \otimes U)$, and hence $U \otimes V \cong V \otimes U$. However, this item requires to construct a *canonical* isomorphism, i.e., usage of bases is prohibited.

证明: 这里我们假设 U 和 V 都是有限维的. 从而由对偶定理我们可以分别把 U^{**} 和 U, V^{**} 和 V 等同起来. 定义从 $L(U^*, V)$ 到 $L(V^*, U)$ 的映射 ρ 如下: 对任意 $f \in L(U^*, V)$ 定义 $\rho(f) \in L(V^*, U)$ 为 $\rho(f)(\xi) = u \in U = U^{**}$, 其中 $u \in U = U^{**}$ 由条件 $\eta(u) = u(\eta) = \xi(f(\eta))$ (对任意 $\eta \in U^*$) 唯一确定. 易证 ρ 是线性的: 例如, 对任意 $\xi \in V^*$, $\eta \in U^*$, $f_1, f_2 \in L(U^*, V)$ 有:

$$\begin{aligned}\eta(\rho(f_1 + f_2)(\xi)) &= \xi((f_1 + f_2)(\eta)) = \xi(f_1(\eta) + f_2(\eta)) \\ &= \eta(\rho(f_1)(\xi)) + \eta(\rho(f_2)(\xi)) = \eta(\rho(f_1) + \rho(f_2)(\xi)),\end{aligned}$$

此即表明 $\rho(f_1 + f_2)(\xi) = (\rho(f_1) + \rho(f_2))(\xi)$,

从而 $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$.

完全类似地, 我们可以定义一个从 $L(V^*, U)$ 到 $L(U^*, V)$ 的映射 σ 如下: 对任意 $g \in V^*$, 定义 $\sigma(g)$ 为 $\sigma(g)(\eta) = v$ (任意 $\eta \in U^*$), 其中 v 由条件 $\xi(v) = \xi(v) = \eta(g(\xi))$ 唯一确定 (任意 $\xi \in V^*$).

断言: $\sigma\rho = \mathrm{id}_{L(U^*,V)}$ 和 $\rho\sigma = \mathrm{id}_{L(V^*,U)}$ 成立.

事实上, 对任意 $f \in L(U^*, V)$, $\xi \in V^*$ 和 $\eta \in U^*$ 有

$$\xi(((\sigma\rho)(f))(\eta)) = \xi(\sigma(\rho(f))(\eta)) = \eta(\rho(f)(\xi)) = \xi(f(\eta)),$$

此即表明 $(\sigma\rho)(f)(\eta) = f(\eta)$, 从而 $(\sigma\rho)(f) = f$. 另一个等式类似地可以证明. 所以我们证明了 ρ 是从 $L(U^*, V)$ 到 $L(V^*, U)$ 的一个自然的同构映射. □

(7) **解**: **不成立**, 即, 一般地, 张量积 $U \otimes V$ 中的元未必都能写成 $u \otimes v$ (这种形式的张量称为秩 1 张量) 的形式. 显然, 当 $\dim U \leq 1$, 或者 $\dim V \leq 1$ 成立时, 结论正确.

例如, 假设 $\dim U = 2$ 和 $\dim V = 2$. 设 α_1, α_2 是 U 的基而 β_1, β_2

是 V 的基.

断言: 元素 $\alpha_1 \otimes \beta_1 + \alpha_2 \otimes \beta_2 \in U \otimes V = L(U^*, V)$ 不可能等于 $u \otimes v$, 任意 $u \in U$ 和 $v \in v$.

断言的证明: 否则, 设

$$\begin{aligned}&\alpha_1 \otimes \beta_1 + \alpha_2 \otimes \beta_2 = (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \otimes (b_1\beta_1 + b_2\beta_2)\\ &= a_1b_1(\alpha_1 \otimes \beta_1) + a_1b_2(\alpha_1 \otimes \beta_2) + a_2b_1(\alpha_2 \otimes \beta_1) + a_2b_2(\alpha_2 \otimes \beta_2).\end{aligned}$$

(这里用到了 (2) 的结论). 两边作用于 α_1^*, α_2^* (α_1, α_2 的对偶基), 我们得到

$$a_1b_1 = 1,\ a_1b_2 = 0;\ \ a_2b_1 = 0,\ \ a_2b_2 = 1,$$

这是不可能的, 矛盾. □

19. (线性映射的张量积.) 略.

20. (列向量空间上的双线性型.)

证明:

(1) (由矩阵的运算性质即得) 对任意 $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}^n$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ 有:

$$\begin{aligned}f(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2, \beta) &= (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)'A\beta = a_1\alpha_1'A\beta + a_2\alpha_2'A\beta\\ &= a_1f(\alpha_1, \beta) + a_2f(\alpha_2, \beta),\end{aligned}$$

此即表明 f 关于第一个变量 (左边的变量) 是线性的; 同理可证 f 关于第二个变量 (右边的变量) 是线性的. □

注: 事实上, $\mathbb{R}^n$ 上的任意双线性型都具有这种形式, 参见第 **14**, **15** 题, 且有线性空间同构: $B(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

(2) 直接计算得: f 在 $\mathbb{R}^n$ 的由基本向量所组成的基下的度量阵就是 A 本身. 所以, f 非退化当且仅当 $r(A) = n$ (参见第 **12** 题中的**引理**.) □

(3) 注意到: $A(i, j) = f(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$, 其中, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的基本向量. 所以, 如果 f 是对称的, 则

$$A(i, j) = f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = f(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = A(j, i),$$

即, A 是对称阵;

反之, 如果 A 是对称阵, 则对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 有

$$f(\alpha,\beta)=\alpha'A\beta=(\alpha'A\beta)'=\beta'A'\alpha=\beta'A\alpha=f(\beta,\alpha),$$

即, f 是对称的.

注: 以上的结论对任意有限维空间上的双线性型均成立. 进一步, 设 f 是任意有限维空间 V 上的双线性型. 则 f 是对称的当且仅当 f 在 V 的任意基下的度量阵都是对称阵.

21. (子空间的关于某个双线性型的正交补, 是第六章中内积空间的子空间的正交补的推广.)

(1) **证明**: 首先, $W^\perp$ 不是空集, 因为 $f(0,\beta)=0$ 对任意 $\beta\in V$ 都成立, 从而 $0\in W^\perp$;

其次, 对任意 $\alpha_1,\alpha_2\in W^\perp$, $a_1,a_2\in\mathbb{F}$ 和任意的 $\beta\in W$ 有:

$$f(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2,\beta)=a_1f(\alpha_1,\beta)+a_2f(\alpha_2,\beta)=0+0=0,$$

所以, $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2\in W^\perp$. □

注: $W^\perp$ 的定义依赖于实现给定的双线性型 f; 不需要有限维的条件.

(2) 不一定. 如果 f 是欧式空间 V 的内积, 结论成立; 一般地, 不成立.

极端情形是, 如果 f 是反对称的, 即, 对任意 $\alpha,\beta\in V$ 都有 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$, 特别地, $f(\alpha,\alpha)=0$ 对任意 $\alpha\in V$ 都成立. 于是, 对任意一维子空间 $W=L(\alpha)$ 都有 $W^\perp=W$. □

(3) **证明**: 设 f 非退化. 如果 $\alpha\in V^\perp$, 则对任意 $\beta\in V$ 有 $f(\alpha,\beta)=0$ 成立; 但是 f 非退化, 所以, $\alpha=0$, 即, $V^\perp=0$;

反之, 设 $V^\perp=0$. 如果 $\alpha\in V$ 使得 $f(\alpha,\beta)=0$ 对任意 β 都成立, 则 $\alpha\in V^\perp=0$, 从而 $\alpha=0$, 即, f 非退化. □

23. (二次型的矩阵: 二次型的矩阵是对称阵, 因而是唯一的.)

答案:

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(注意不要把 (5) 的矩阵写成二阶方阵了, 因为所给的二次型是一个 5 元二次型.) □

24. (二次型的矩阵.)

答案:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$.

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

25. (二次型的矩阵.)

证明: 对任意二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = X'AX$ (A 未必是对称的), 由于

$$X'AX = (X'AX)' = X'A'X,$$

所以, $X'\left(\dfrac{1}{2}(A+A')X\right) = \dfrac{1}{2}X'AX + \dfrac{1}{2}X'A'X = X'AX$,

而 $B := \dfrac{1}{2}(A+A')$ 是对称阵, 所以 $f(x_1, \cdots, x_n) = X'AX$ 的矩阵是 $B = \dfrac{1}{2}(A+A')$. □

26. (二次型与双线性之间的关系, 是第六章中内积与距离的关系的推广.)

注: 对 $\mathbb{F}^n$ 上的任意双线性型 B 可以构造二次型: $f(X) = B(X, X)$; 反之, 利用极化等式, 由任意二次型 $Q(X)$ 可以构造 $\mathbb{F}^n$ 上的一个双线性型 (这就是本题要证的).

证明: (用矩阵的语言较为简便.)

设二次型 $Q(X)$ 的矩阵为 A, 即, $Q(X) = X'AX$ (A 是对称阵), 则

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \frac{1}{2}(Q(X+Y) - Q(X) - Q(Y)) \\ &= \frac{1}{2}((X+Y)'A(X+Y) - X'AX - Y'AY) \end{aligned}$$

(由于 A 对称, 所以 $X'AY = Y'AX$.)

$$= \frac{1}{2}(X'AX + Y'AY + 2X'AY - X'AX - Y'AY) = X'AY;$$

由矩阵的乘法性质 (或者, 由第 **20** 题) 可知, B 是 $\mathbb{F}^n$ 上的一个双线性型. □

27. (矩阵的合同 (congruence) 关系.)

证明:

法一: (利用同一个双线性型在不同基下的矩阵是合同的.)

考虑 $\mathbb{F}^n$ 上的双线性型: $f(\alpha,\beta) = \alpha' A\beta$. 则 A 是 f 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ (基本向量) 下的度量阵.

于是, f 在基 $\varepsilon_{i_1}, \cdots, \varepsilon_{i_n}$ 下的度量阵是 B. 从而 A 与 B 合同. □

法二: (利用二次型的非退化线性替换.)

考虑二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$, 其矩阵为 A.

则 f 经过非退化线性替换: $\begin{cases} y_1 = x_{i_1} \\ y_2 = x_{i_2} \\ \vdots \\ y_n = x_{i_n} \end{cases}$ 后变为二次型

$$g(y_1, \cdots, y_n) = a_{i_1}y_1^2 + a_{i_2}y_2^2 + \cdots + a_{i_n}y_n^2,$$

其矩阵为 $B = \mathrm{diag}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_n})$. 所以, A 与 B 合同. □

法三: (用合同变换.)

由于任意排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 可以经过若干对换 (k_1, ℓ_1), $\cdots$, (k_s, ℓ_s) 变为自然排列 $12\cdots n$, 所以矩阵 B 可以经过交换第 k_1, ℓ_1 行及第 k_1, ℓ_1 列, $\cdots$, 交换第 k_s, ℓ_s 行及第 k_s, ℓ_s 列变为 A. 由于所做的初等变换为合同变换, 所以 A 与 B 合同. □

注: 以上三种方法具有代表性. 进一步, 利用二次型的规范型, 可以直接得到本题中的 A 与 B 在复数域上是合同的 (因为 $a_1, \cdots, a_n$ 与 a_{i_1}, $\cdots$, a_{i_n} 中的非零数的个数相同); 如果 $a_i \in \mathbb{R}$, 则也可以利用规范型直接得到 A 与 B 在实数域上是相似的 (因为 $a_1, \cdots, a_n$ 与 a_{i_1}, $\cdots$, a_{i_n} 中正数的个数, 负数的个数以及 0 的个数相同.)

28. (用正交变换求实二次型的标准型. 题目要求用正交变换, 因此不能用配方法或合同变换法.)

算法:

Step 1: 写出二次型的矩阵 (必然是实对称矩阵).

Step 2: 求出正交阵 T 使得 $T'AT = T^{-1}AT$ 是对角阵 (对角元必然是 A 的全部特征值), 参见 Chapter 6 Ex. 77 中的**算法**.

Step 3: 结论: 作非退化线性替换 $X = TY$, 则原二次型的标准型为:

$$Y'(T'AT)Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是对角阵 $T'AT$ 的对角元, 也就是 A 的全部特征值 (重根按重数计). □

解:

(1) 原二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$,

其特征多项式为 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & \lambda & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & \lambda \end{vmatrix}$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 (\lambda + 1),$$

(把第二列加到第一列.)

所以, A 的全部互不相同的特征值为 $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ (二重), $\lambda_2 = -1$.

方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为:

$$\xi_{11} = (1, 0, 1)', \ \xi_{12} = (1, 1, 0)';$$

正交化, 单位化后得: $\eta_{11} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)'$, $\eta_{12} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}(1/2, 1, -1/2)$;

方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_{21} = (-1, 1, 1)'$;

单位化后得: $\eta_{21} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 1)'$;

令 $T = (\eta_{11}\ \eta_{12}\ \eta_{21})$. 作正交替换 $X = TY$, 则得到原二次型的标准型: $\dfrac{1}{2}y_1^2 + \dfrac{1}{2}y_2^2 - y_3^2$. □

(2) 原二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$,

其特征多项式为 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-7 & 4 & -4 \\ 4 & \lambda-1 & -8 \\ -4 & -8 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-9)^2(\lambda+9)$,

(把第二列加到第一列.)

所以, A 的全部互不相同的特征值为 $\lambda_1 = 9$ (二重), $\lambda_2 = -9$.

方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为:

$$\xi_{11} = (2,0,1)', \xi_{12} = (-2,1,0)';$$

正交化, 单位化后得: $\eta_{11} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(2,0,1)'$, $\eta_{12} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}(-2/5,1,4/5)$;

方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_{21} = (-1/2,-1,1)'$;

单位化后得: $\eta_{21} = \dfrac{2}{3}(-1/2,-1,1)'$;

令 $T = (\eta_{11}\ \eta_{12}\ \eta_{21})$. 作正交替换 $X = TY$, 则得到原二次型的标准型: $9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$. □

(3) 原二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$,

其特征多项式为 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & \lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & \lambda & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & \lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)$,

(把后面各列加到第一列.)

所以, A 的全部互不相同的特征值为 $\lambda_1 = 0$ (二重), $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为:

$$\xi_{11}=(0,-1,0,1)', \xi_{12}=(-1,0,1,0)';$$

单位化后得 (它们已经是正交的了):

$\eta_{11}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,-1,0,1)'$, $\eta_{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1,0)$;

方程组 $(\lambda_2 E-A)X=0$ 的一个基础解系为: $\xi_{21}=(1,1,1,1)'$;

单位化后得: $\eta_{21}=\dfrac{1}{2}(1,1,1,1)'$;

方程组 $(\lambda_3 E-A)X=0$ 的一个基础解系为: $\xi_{31}=(-1,1,-1,1)$;

单位化后得: $\eta_{31}=\dfrac{1}{2}(-1,1,-1,1)$.

令 $T=(\eta_{11}\ \eta_{12}\ \eta_{21}\ \eta_{31})$. 作正交替换 $X=TY$, 则得到原二次型的标准型: $0y_1^2+0y_2^2+y_3^2-y_4^2=y_3^2-y_4^2$. □

注: 注意到, $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_4)(x_2+x_3)$, 则直接作非退化线性替换: (平方差公式.)

$$\begin{cases} z_3=x_1+x_4 \\ z_4=x_2+x_3 \\ z_3=x_3 \\ z_4=x_4 \end{cases}$$

即可得到原二次型的一个标准型: z_3z_3; 再作非退化线性替换:

$$\begin{cases} z_3=y_3+y_4 \\ z_4=y_3-y_4 \\ z_1=y_1 \\ z_2=y_2 \end{cases}$$

也得到标准型 $y_3^2-y_4^2$.

(4) 原二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

其特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-7 & 4 & -4 \\ 4 & \lambda-1 & -8 \\ -4 & -8 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$$=(\lambda-7)^2(\lambda+2),$$

(把第二列加到第一列.)

所以, A 的全部互不相同的特征值为 $\lambda_1=7$ (二重), $\lambda_2=-2$.

方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为:

$$\xi_{11} = (-1, 0, 2)', \ \xi_{12} = (1, 1, 0)';$$

正交化, 单位化后得: $\eta_{11} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0)'$, $\eta_{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(-1/2, 1/2, 2)$;

方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_{21} = (2, -2, 1)'$;

单位化后得: $\eta_{21} = \dfrac{1}{3}(2, -2, 1)'$;

令 $T = (\eta_{11}\ \eta_{12}\ \eta_{21})$. 作正交替换 $X = TY$, 则得到原二次型的标准型: $7y_1^2 + 7y_2^2 - 2y_3^2$. □

29. (求二次型的标准型.)

注: 求二次型的标准型的常用方法:

(1) 合同变换法: 对二次型的矩阵作合同变换, 变为对角阵.

(2) 配方法.

(3) 如果是在实数域上求二次型的标准型, 还可以用正交变换.

解:

(1) (平方差公式.) 作 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 + y_4 \\ x_4 = y_3 - y_4 \end{cases}$,

即, $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} Y$,

即可得到原二次型的一个标准型 $4y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2 - 4y_4^2$. □

(2) (用合同变换较简.)

原二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

对矩阵 $(A \vdots E)$ 作合同变换:

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19/5 & 4 & 4/7 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(把第1行的4/7倍加到第2行, 再把第1列的4/7倍加到第2列)

$$\to \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19/5 & 0 & 4/7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -23/19 & -80/133 & -20/19 & 1 \end{pmatrix},$$

(把第2行的$-20/19$倍加到第3行, 再把第2列的$-20/19$倍加到第3列)

令 $C = \begin{pmatrix} 1 & 4/7 & -80/133 \\ 0 & 1 & -20/19 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

则, 在非退化线性替换 $X = CY$ 下

得到原二次型的一个标准型: $7y_1^2 + \dfrac{19}{5}y_2^2 - \dfrac{23}{19}y_3^2$. □

(4) 注意到: 原二次型的矩阵可以分块为: $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$,

其中, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

对 $(B \vdots E_2)$ 作合同变换:

$(B \vdots E) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

令 $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

则 $C_1'BC_1 = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{pmatrix}$ 是二阶对角阵. ①

令 $C = \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix}$. 则

$$\begin{aligned} C'AC &= \begin{pmatrix} 0 & C_1' \\ C_1' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & C_1'BC_1 \\ C_1'BC_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad ②$$

由①②得: 在非退化线性替换 $X=CY$ 下, 原二次型变为:

$$Y'\begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix}Y = Y'\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15/4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}Y$$

$$= 8y_1y_3 + 15/2y_2y_4. \qquad ③$$

对二次型③作非退化线性替换 (平方差公式):

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_3 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_4 \\ y_4 = z_2 - z_4 \end{cases}, \text{即},$$

$$Y = PZ, \text{其中}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则③变为:

$$8(z_1^2 - z_3^2) + 15/2(z_2^2 - z_4^2) = 8z_1^2 + 15/2z_2^2 - 8z_3^2 - 15/2z_4^2, \qquad ④$$

即, 原二次型在非退化线性替换 $X = CY = C(PZ) = (CP)Z$ 下变为标准型④. □

注: 虽然二次型的标准型不是唯一的, 但是要得到一个标准型, 可能会涉及到复杂的计算, 特别是在要求写出具体的非退化线性替换的情况下, 运算量较大. 特别注意, 利用合同变换可以直接得到非退化的矩阵; 如果是只求一个实二次型的标准型而不要求写出非退化替换, 则只需求出该实二次型的矩阵的全部特征值 (重根按重数计) 即可.

30. (实二次型与 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积, 实对称阵的正交对角化, 正交变换.)

证明: 不失一般性我们可以设 A 是对称的 (否则考虑 $\dfrac{1}{2}(A+A^T)$). 从而存在正交矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 是 A 的全部特征值 (重根按重数计).

设 $c := \max_{1\le i\le n}|\lambda_i| > 0$. (如果 A 的特征值全为 0, 那么对任意 $X \in \mathbb{R}^n$ 都有 $X^T AX = 0$, 从而可以取 c 为任意正数.)

对任意 $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

设 $P^{-1}X = P^T X = (y_1 \ \cdots \ y_n)^T \in \mathbb{R}^n$. 由于 P 是正交阵, 所以

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = X^T X = (X^T P)(P^T X) = (P^{-1}X)^T (P^{-1}X) = \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

从而有

$$\begin{aligned}
|X^T AX| &= |X^T (P\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P^{-1})X| \\
&= |(P^{-1}X)^T \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)(P^{-1}X)| \\
&= |\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2| \le \sum_{i=1}^n |\lambda_i| y_i^2 \le c\sum_i y_i^n = c\sum_i x_i^2 = c|X^T X|.
\end{aligned}$$

□

31. (实二次型的惯性定理 (Sylvester), 二次型的等价.)

证明: 由题设存在非退化线性替换 $X = CY$使得

$$\begin{aligned}
& x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 \\
\xlongequal{X=CY}\ & y_1^2 + \cdots + y_{p'}^2 - y_{p'+1}^2 - \cdots - y_{r'}^2, \quad (\star)
\end{aligned}$$

其中 $C = (c_{ij})$ 是可逆的 n 阶实矩阵. 要证明 $p = p'$. 用反证法.

假设 $p < p'$. (想法: 把 $(\star)$ 左右两边看成实数域上的 n 元函数. 可以通过取 x_i, y_j 的特殊值使 $(\star)$ 左右两边具有符号不同的取值来构造矛盾. 例如, 我们考察是否存在特殊的 $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)^t$ 和 $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n)^t$ 使得 $\tilde{X} = C\tilde{Y}$, $\tilde{x}_1 = \cdots = \tilde{x}_p = 0$ 而 $\tilde{y}_{p'+1} = \cdots = \tilde{y}_n = 0$ 且至少有一个$\tilde{y}_j \neq 0$, $1 \le j \le p'$. 则 $(\star)$ 的左边在点 $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)^t$ 处的函数值 ≤ 0, 而 $(\star)$ 的右边在 $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n)^t$ 处的函数值 > 0, 从而得到矛盾.)

我们考虑如下的关于 $y_1, \cdots, y_n$ 的齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n = 0 \\ \hfill \cdots \\ x_p = c_{p1}y_1 + \cdots + c_{pn}y_n = 0 \\ \hfill y_{p'+1} = 0 \\ \hfill \cdots \\ \hfill y_n = 0 \end{cases}$$

由于该方程组的方程个数为 $p + (n - p') = n - (p' - p) < n$, 所以它必有非零解

$$\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n)^t = (\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_{p'}, 0, \cdots, 0)^t,$$

其中, 至少有一个 $\tilde{y}_j \neq 0$, $1 \leq j \leq p'$. 令 $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)^t = C\tilde{Y}$. 则 $\tilde{x}_1 = \cdots = \tilde{x}_p = 0$, 从而, $(\star)$ 的左边在 $\tilde{X}$ 处的函数值 ≤ 0, 而 $(\star)$ 的右边在 $\tilde{Y}$ 处的函数值 > 0, 矛盾. 所以 $p \geq p'$. 同理可证 $p' \geq p$. □

注: 这个结论说明实二次型的规范型是唯一的, 因此可以定义实二次型的正 (负) 惯性指数.

32. (由线性函数的平方和给出的二次型.)

证明: 设 $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^T$. 则

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(X) = (AX)^T(AX) = X^T(A^TA)X.$$

由于 A^TA 是对称的, 所以二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 的矩阵正好是 A^TA. 从而

$$\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(A^TA) = \operatorname{rank}(A).$$

这里用了一个结论: 对任意实矩阵 A 有 $\operatorname{rank}(A^TA) = \operatorname{rank}(A)$. □

33. (求实对称矩阵或二次型的正、负惯性指数和符号差.)

法一: 对实对称矩阵作合同变换, 变为对角阵. 则, 正 (负) 对角元的个数就是正 (负) 惯性指数;

法二: 求出实对称阵的全部特征值 (重根按重数计). 则, 正 (负) 特征值的个数就是正 (负) 惯性指数.

(1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ 1 & -2 & -2\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

法一: (用合同变换.) 对 $(A\vdots E)$ 作合同变换后得:

$$(A\vdots E)\xrightarrow{\text{合同变换}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 36 & -8 & -5 & 1\end{pmatrix},$$

即, A 合同于对角阵 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 36\end{pmatrix}$,

所以, A 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2. □

法二: (用特征值.) A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 3\\ -1 & \lambda+2 & 2\\ 3 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda^2-2\lambda-12),$$

(把后面各列加到第一列.)

由此即得 A 有两个负特征值 $-3, 1-\sqrt{13}$ 和一个正特征值 $1+\sqrt{13}$,

所以, A 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2. □

(2) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 7 & -4\\ 1 & -4 & 7\end{pmatrix}$.

法一: (用合同变换.) 对 $(A\vdots E)$ 作合同变换后得:

$$(A\vdots E)\xrightarrow{\text{合同变换}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 13/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 44/13 & -11/13 & 19/3 & 1\end{pmatrix},$$

即, A 合同于对角阵 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 13/2 & 0\\ 0 & 0 & 44/13\end{pmatrix}$,

所以, A 的正惯性指数为 3, 负惯性指数为 0. □

法二: (用特征值.) A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-7 & 4 \\ -1 & 4 & \lambda-7 \end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-11),$$

(把后面各列加到第一列.)

由此即得 A 有三个正特征值 $4,1,11$,

所以, A 的正惯性指数为 3, 负惯性指数为 0. □

34. (n 阶实对称阵合同当且仅当它们的正、负特征值的个数相等, 当且仅当它们的正、负惯性指数相等.)

解: 直接用合同变换求出:

A 的正惯性指数为 3, 负惯性指数为 1;

B 的正惯性指数为 2, 负惯性指数为 2;

C 的正惯性指数为 3, 负惯性指数为 1;

所以, A 与 C 合同, 而不与 B 合同. □

注: 因为不要求写出非退化线性替换, 所以在作合同变换时, 不需要拼上右边的单位阵, 这样可以节约运算时间.

35. (n 元实二次型等价当且仅当它们的矩阵合同.)

解: 直接计算各个二次型的正、负惯性指数如下:

f 的正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1; (对其矩阵作合同变换.)

g 的正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1; (对其矩阵作合同变换.)

h 的正惯性指数为 3, 负惯性指数为 0; (用顺序主子式得 h 正定.)

u 的正惯性指数为 3, 负惯性指数为 0; (用顺序主子式得 u 正定.)

所以, 在 $\mathbb{R}$ 上 f 与 g 等价, h 与 u 等价. □

36. (n 阶实对称矩阵在合同意义下的分类, n 阶复对称矩阵在合同意义下的分类.)

解: 由于 n 阶实对称阵合同当且仅当它们的正、负惯性指数相同, 而正、负惯性指数的和等于矩阵的秩, 所以, 在合同意义下 n 阶实对称矩阵先按秩进行分类, 再按正惯性指数进行分类:

当秩为 r 时有 $r+1$ 类 (因为正惯性指数只可能是 $0, 1, \cdots, r$);

而秩 r 可以是 $0, 1, \cdots, n$;

所以, 共有 $1+2+\cdots+(n+1)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 类.

由于 n 阶复对称阵合同当且仅当它们的秩相等, 所以, 在合同意义下有 $n+1$ 类. □

注: 矩阵的合同分类问题是困难的问题. 实数域上的**对称**矩阵或复数域上的**对称**矩阵的分类是清楚的.

37. (注意与第 **10** 题中双线性型的区别, 非退化线性替换.)

证明: (因为题目中涉及到符号差的概念, 所以, 考虑的二次型必然是实二次型.)

必要性: 设

$$f(x_1, \cdots, x_n)=(a_1x+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots+b_nx_n). \qquad ①$$

设 $\alpha_1 := (a_1, \cdots, a_n)', \alpha_2 := (b_1, \cdots, b_n)' \in \mathbb{R}^n$ 都是非零向量.

如果 α_1, α_2 线性无关, 则可以把 α_1, α_2 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一个基

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n.$$

令 $C=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$. 则 $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆, 从而有非退化线性替换:

$$Y=CX, \text{其中}, Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)', X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)',$$

使得:

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) &\xlongequal{X=C^{-1}Y} g(y_1, \cdots, y_n)=y_1y_2 \\ &=\frac{1}{4}(y_1+y_2)^2-\frac{1}{4}(y_1-y_2)^2, \end{aligned}$$

此即表明 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的秩为 2, 且正惯性指数和负惯性指数都为 1 (符号差为 0);

如果 α_1, α_2 线性相关, 不妨设 $\alpha_2=k\alpha_1$, $0 \neq k \in \mathbb{F}$, 于是,

$$f(x_1, \cdots, x_n)=k(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^2.$$

此时, 类似地, 把 α_1 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一个基, 从而得到一个以 α_1 为第一列的可逆实矩阵 D, 由此作非退化线性替换, 使得

$$f(x_1,\cdots,x_n) \xlongequal{X=D^{-1}Z} h(z_1,\cdots,z_n)=kz_1^2,$$

此即表明 f 的秩为 1, 且正惯性指数为 1 当且仅当 $k>0$.

综上, 必要性得证.

反之, 假设 f 的秩为 2 且符号差为 0, 或者 f 的秩为 1.

如果 f 的秩为 2 且符号差为 0, 则 f 的标准型形如: $y_1^2-y_2^2$, 即, 存在非退化线性替换 $X=PY$ 使得

$$f(x_1,\cdots,x_n) \xlongequal{X=PY} g(y_1,\cdots,y_n)=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2),$$

而 y_1,y_2 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性函数, 所以, 此时, $f(x_1,\cdots,x_n)$ 能够分解为两个线性函数的乘积;

如果 f 的秩为 1, 则 f 的标准型形如: $\pm z_1^2$, (正负号取决于正惯性指数是否是 1.) 即, 存在非退化线性替换 $X=QZ$ 使得

$$f(x_1,\cdots,x_n) \xlongequal{X=QZ} g(y_1,\cdots,y_n)=\pm z_1^2,$$

而 z_1 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性函数, 所以, 此时, $f(x_1,\cdots,x_n)$ 能够写为一个线性函数的平方.

综上, 充分性得证. $\square$

注: 由①, $f(x_1,\cdots,x_n)$ 可以写成矩阵乘积的形式:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1\ \cdots\ x_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1\ \cdots\ b_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

即,

$$f(x_1,\cdots,x_n)=X'BX,$$

其中, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1\ \cdots\ b_n)$.

显然, $r(B)\le 1$ (参见第 **10** 题: **双线性型** $X'BY$ 的矩阵为 B, 其秩不超过 1); **但是**, B 未必是对称的, 所以, 未必是**二次型** $f(x_1,\cdots,x_n)=X'BX$ 的矩阵 $A=\dfrac{1}{2}(B+B')$. 因此, 本题中的必要性可以用矩阵的语言叙述为:

设 B 是 n 阶实方阵. 设 $A = \dfrac{1}{2}(B + B')$. 如果 $r(B) \leq 1$, 则 $r(A) \leq 2$.

38. (欧式空间的内积在任意基下的度量阵都是正定阵.) 略.

39. (n 阶实方阵 A 是正定阵当且仅当 A 是某个欧式空间的内积在某个基下的度量阵.)

证明: 由定义, 对任意 $\alpha = (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)X \in V$ 和 $\beta = (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)Y \in V$ 有 $(\alpha, \beta) = X'AY$.

假设 A 正定. 那么对任意 $\alpha = (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)X \in V$ 有 $(\alpha, \alpha) = X'AX \geq 0$ 且 $(\alpha, \alpha) = 0$ 当且仅当 $X = 0$, 从而 $\alpha = 0$. 于是 $(-, -)$ 是一个内积.

反之, 假设 A 是内积 $(-, -)$ 的度量阵. 首先, A 必然是实对称阵, 其次, 对任意 $X \in \mathbb{R}^n$, 考虑以 X 为坐标的 $\alpha \in V$. 则 $0 \leq (\alpha, \alpha) = X'AX$, 且 $X'AX = 0 = (\alpha, \alpha)$ 当且仅当 $\alpha = 0$, 当且仅当, $X = 0$, 所以, A 是正定阵. $\square$

注: 这个结论可以用于验证一个矩阵是否正定. 下面是一个例子. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}.$$

则 A 是正定的, 可以证明如下. 设 $V = \mathbb{R}[x]_{n+1}$. 考虑 V 上的如下的内积 $(-, -)$:

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 (f(x)g(x))dx \quad \text{任意 } f(x), g(x) \in V.$$

由于

$$(x^i, x^j) = \int_0^1 x^{i+j} dx = \frac{1}{i+j+1},$$

所以 A 正好是 V 的这个内积在基 $1, x, x^2, \ldots, x^n$ 下的度量矩阵, 从而必然是一个正定阵. $\square$

40. (正定阵的一个刻画.)

证明: A 正定当且仅当 A 合同于单位阵 E_n, 即, 当且仅当存在可逆的 n 阶实方阵 B 使得 $A = B'E_nB = B'B$. □

41. 就是前面的第 **39** 题. 略.

42. (正定阵可以开平方. 题目只要求证明存在性, 实际上唯一性也是成立的.)

证明: 存在性. 存在正交矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值 (重根按重数计). 由于 A 是正定的, 所以 $\lambda_i > 0$, $1 \le i \le n$, 从而对角阵 $D_1 = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ 满足

$$A = PDP^{-1} = PD_1^2P^{-1} = (PD_1P^{-1})(PD_1P^{-1}).$$

令 $B := PD_1P^{-1}$. 则 $A = B^2$ 且 B 也是正定的 (因为 B 与 D 相似, 从而特征值全大于 0.)

唯一性. 设 $A = B_1^2 = B_2^2$, 其中 B_1, B_2 都是正定阵, 要证明 $B_1 = B_2$.

我们断言 B_1 和 B_2 有公共的特征值和特征向量.

事实上, 对 B_1 的任意特征值 μ 和相应的特征向量 ξ_1: $B_1\xi_1 = \mu_1\xi_1$, 都有

$$B_2^2\xi_1 = B_1^2\xi_1 = \mu_1^2\xi_1,$$

即,

$$(B_2 + \mu_1E_n)(B_2 - \mu_1E_n)\xi_1 = 0,$$

其中E_n是单位阵. 由于 B_1 是正定的, 所以 $\mu_1 > 0$. 又由于 B_2 是正定的, 所以 B_2 的特征值也都是正的. 从而 $B_2 + \mu_1E_n$ 是可逆的, 于是 $(B_2 - \mu_1E_n)\xi_1 = 0$, 即 μ_1 也是 B_2 的特征值, ξ_1 是相应的特征向量. 同理, B_2 的特征值和特征向量都是 B_1 的特征值和特征向量.

所以存在正交阵 Q 使得 $Q^{-1}B_1Q = Q^{-1}B_2Q$ 是对角阵 (即, B_1, B_2 能够同时正交对角化), 从而 $B_1 = B_2$. □

43. (正定阵的性质.)

证明: 由于 A 正定, 所以 A 的特征值全大于 0, 而 $|A|$ 等于 A 的全部特征值 (重根按重数计) 的积, 所以 $|A|>0$, 从而 A 可逆.

(或者, 由于 A 正定, 所以 A 合同于单位阵, 即, 存在可逆实方阵 B 使得 $A=B'E_nB=B'B$, 从而 $|A|=|B|^2>0$, 所以 A 可逆.)

(或者, 用反证法: 若不然, 存在 $0\neq X\in\mathbb{R}^n$ 使得 $AX=0$, 从而 $X'AX=0$, 与 A 是正定阵矛盾.)

注: 对于 n 阶实方阵 A, A 可逆只是 A 正定的必要条件.

设 A,B 为 n 阶正定矩阵. 则对任意 $X\in\mathbb{R}^n$ 有:

$$X'(A+B)X=X'AX+X'BX\geq 0.$$

如果 $X'(A+B)X=X'AX+X'BX=0$,

则由 $X'AX\geq 0$ 和 $X'BX\geq 0$ 知, $X'AX=0$, 但 A 正定, 所以必然有 $X=0$.

综上, $A+B$ 正定.

注: 不能用 A, B 的特征值去证明 $A+B$ 的特征值大于 0 (因为 $A+B$ 的特征值与 A, B 的特征值没有直接的联系); 也不能用 A, B 合同于单位阵直接推出 $A+B$ 合同于单位阵 (因为, A, B 未必能同时合同于单位阵, 即, 未必存在公共的可逆实矩阵 P 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 都是单位阵.)

44. (特征值, 正定阵.)

证明: 首先, λE_n+A 是实对称矩阵. 其次, 考虑 λE_n+A 的特征多项式:

$$f(x)=|xE_n-(\lambda E_n+A)|=|(x-\lambda)E_n-A|=g(x-\lambda),$$

其中, $g(x)$ 为 A 的特征多项式. 由此即得: 如果 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值 (重根按重数计), 则 $\lambda+\lambda_1$, $\lambda+\lambda_2$, $\cdots$, $\lambda+\lambda_n$ 为 $\lambda E+A$ 的全部特征值 (重根按重数计).

(也可以由 Chapter 5 Ex. 31 的**推论**直接得到.)

于是, 任取充分大的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $\lambda + \lambda_i > 0$ $(1 \le i \le n)$ 即可以使 $\lambda E_n + A$ 是正定阵. □

45. (二阶正定阵. 此时用顺序主子式较为简便.)

解: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 的顺序主子式为 a, $ac - b^2$,

所以, A 正定当且仅当 $a > 0$ 且 $ac - b^2 > 0$. □

46. (正定二次型的判定, 此时用顺序主子式较为简便.)

解: $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

其顺序主子式为:

$$1; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2; |A| = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -5\lambda^2 + 4\lambda,$$

所以, A 正定, 也就是原二次型正定, 当且仅当 $0 < \lambda < \dfrac{4}{5}$. □

47. (负定二次型, 半负定二次型.)

证明:

(1) 由 $X'AX = -X'(-A)X$ 即得. □

(2) 设 $f(x_1, \cdots, x_n) = X'AX$ $(A' = A)$ 的标准型为:

$$g(y_1, \cdots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值 (重根按重数计), 即, 存在正交变换 $X = PY$ 使得

$$f(X) = X'AX \xlongequal{X=PY} g(y_1, \cdots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \qquad ①$$

考虑负定的情形.

必要性: 设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 负定. 假设第 i 个特征值 $\lambda_i \ge 0$. 令 $X_i = P\varepsilon_i$, 其中, ε_i 为 $\mathbb{R}^n$ 中的第 i 个基本向量. 则

$$0 > f(X_i) = X_i'AX_i = \lambda_i \ge 0,$$

矛盾. 所以, A 的特征值全部为负数.

充分性: 设 A 的全部特征值都是负数. 则对任意 $X \in \mathbb{R}^n$, 由①得:

$$f(X) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leq 0; \qquad ②$$

且, 如果 $f(X) = 0$, 则由②得: $y_1 = \cdots = y_n = 0$, 从而 $X = PY = P0 = 0$,

所以 f 是负定的.

半负定的情形类似地可得. □

(3) 由 (2) 可知, f 负定当且仅当 A 的全部特征值 (重根按重数计) 都是负数, 而负惯性指数等于负特征值的个数. 所以, 结论成立. □

(4) 由 (2) 可知, f 半负定当且仅当 A 的全部特征值 (重根按重数计) 都是非正的, 而正惯性指数等于正特征值的个数. 所以, 结论成立. □

48. (正定、负定阵的定义, 实对称阵的正交对角化.)

证明: 设 A 是任意的 n 阶实对称阵. 则存在正交阵 T 使得

$$A = T\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)T^{-1},$$

其中, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值 (重根按重数计).

对每个 $1 \leq i \leq n$, 取 $a_i > 0, b_i < 0$ 使得 $\lambda_i = a_i + b_i$, 并令

$$B = T\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)T^{-1}, \ C = T\mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n)T^{-1}.$$

则, B 是正定的, C 是负定, 且 $A = B + C$. □

49. (不定二次型, 标准型的应用, 正交对角化.)

证明: 由题设可知, $f(X) = X'AX$ $(A' = A)$ 不是正定的和半正定的, 也不是负定和半负定的, 因此 A 既有正特征值, 又有负特征值.

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值 (重根按重数计). 不妨设 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

由于 A 是实对称阵, 所以存在正交阵 P 使得:

$$f(X) = X'AX \xlongequal{X=PY} g(y_1, \cdots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \qquad ①$$

令 $Y_0=(1/\sqrt{\lambda_1},1/\sqrt{-\lambda_2},0,\cdots,0)'\in\mathbb{R}^n$, $X_3=PY_0\in\mathbb{R}^n$, 则由①得:

$$f(X_3)=\lambda_1\cdot\frac{1}{\lambda_1}+\lambda_2\cdot(-\frac{1}{\lambda_2})=1-1=0. \qquad \square$$

注: 与线性型 (或, 线性函数) 的零点集 (齐次线性方程组的解集) 不同的是, 一般地, 二次型 $X'AX$ $(A'=A)$ 的零点集不是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间.

50. (正定二次型的判定: 用顺序主子式较为简便.)

解:

(1) 原二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$,

其顺序主子式为 $2>0$; $\begin{vmatrix}2&-2\\-2&1\end{vmatrix}<0$,

所以, 原二次型是不定型. $\square$

(2) 原二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$,

其顺序主子式为:

$$2>0;\ \begin{vmatrix}2&2\\2&5\end{vmatrix}=6>0,\ |A|=\begin{vmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{vmatrix}=5>0,$$

所以, 原二次型是正定的. $\square$

(3) 完全类似, 略.

(4) 完全类似. 略.

51. (半正定二次型的定义, C-B 不等式.)

证明: 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积 $(-,-)$. 则对 $\alpha=(\frac{1}{n}\ \cdots\ \frac{1}{n})'\in\mathbb{R}^n$ 和任意 $\beta=(x_1\ \cdots\ x_n)'\in\mathbb{R}^n$, 由 Cauchy-Buniyakowski 不等式可得

$$\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}x_i\right)^2=(\alpha,\beta)^2\le(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)=\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right),\text{ 此即表明, } f(x_1,\ldots,x_n)\ge 0. \qquad \square$$

52. 略.

53. 略.

The followings are some classical exercises.

A1. Assume that A, B are positive definite $n \times n$ matrices. Prove that AB is positive definite if and only if $AB = BA$.

证明: **必要性**. 假设 AB 正定. 则 AB 当然是对称的, 从而

$$AB = (AB)' = B'A' = BA.$$

充分性. 假设 $AB = BA$. 则 AB 是对称的, 所以只需证明 AB 的特征值全是正的.

为此, 我们证明 A 和 B 可以同时对角化. 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 是 A 的全部互不相同的特征值.

于是存在正交矩阵P使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}$$

是对角阵, 其中 E_{r_i} 是 r_i 阶单位阵. 注意到

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = P^{-1}(AB)P = P^{-1}(BA)P = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP),$$

即, $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 可交换. 把 $P^{-1}BP$ 按 $P^{-1}AP$ 的分块方式进行分块:

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix},$$

有此即得 $B_{ij} = 0\ (i \neq j)$. 所以

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}.$$

对每个 $1 \leq i \leq s$, 由于 B_{ii} 是实对称矩阵, 所以存在正交阵 Q_i 使得 $Q^{-1}B_{ii}Q$ 是对角阵. 令

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_s \end{pmatrix}.$$

则 Q 是正交阵. 令 $T = PQ$. 则

$$T^{-1}BT = Q^{-1}(P^{-1}BP)Q = \begin{pmatrix} \mu_1 E_{r_1} & & & \\ & \mu_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_s E_{r_s} \end{pmatrix}$$

和

$$
\begin{aligned}
T^{-1}AT &= Q^{-1}(P^{-1}AP)Q \\
&= \begin{pmatrix} Q_1^{-1} & & & \\ & Q_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Q_1^{-1}\lambda_1 E_{r_1} Q_1 & & & \\ & Q_2^{-1}\lambda_2 E_{r_2} Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_s^{-1}\lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

都是对角阵. 特别,

$$
T^{-1}(AB)T = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2\mu_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s\mu_s E_{r_s} \end{pmatrix},
$$

即, AB 的任意特征值都具有 $\lambda_i\mu_i > 0$ 的形式, 从而 AB 是正定的. □

注: 关于充分性有如下的简单证明, 不涉及到 AB 的特征值.

充分性的另一个证明. 由于 $AB = BA$, 所以 AB 是实对称矩阵. 所以只需证明 AB 合同于一个正定矩阵. 事实上, 由于 A 和 B 都是正定的, 所以存在实可逆矩阵 P, Q 使得 $A = P'P$, $B = Q'Q$, 从而

$$
AB = P'PQ'Q = P'(PQ'QP^{-1})P,
$$

此即表明, AB 合同于 $PQ'QP^{-1}$, 而 $PQ'QP^{-1}$ 与 $Q'Q$ 相似, 从而有相同的特征值. 但是 $Q'Q$ 是正定的, 所以其特征值全大于 0. 于是 $PQ'QP^{-1}$ 的特征值全大于 0, 从而是正定的. □

A2. Assume that A is a real $n\times n$ symmetric matrix, B is a positive definite $n\times n$ matrix. Prove that there exists an invertible real matrix C such that both $C'AC$ and $C'BC$ are diagonal.

证明: 由于 B 正定, 所以存在实可逆矩阵 C_1 使得 $C_1'BC_1 = E_n$ 是单位阵. 对于实对称矩阵 $C_1'AC_1$ 存在正交矩阵 C_2 使得 $C_2'(C_1'AC_1)C_2$ 是对角阵. 设 $C = C_1C_2$. 则 $C'AC$ 是对角阵且

$$C'BC = C_2'(C_1'BC_1)C_2 = C_2'C_2 = E_n$$

也是对角阵. □

A3. Assume that $0 \neq A$ is positive semidefinite $n\times n$ matrix, while S is an $n\times n$ positive definite matrix. Prove that $\det(A+S) > \det(A)$ and $\det(A+S) > \det(S)$.

证明: 由 **A2** 知存在可逆实矩阵 C 使得 $C'AC = \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)$ 和 $C'SC = \mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n)$ 都是对角阵. 由于 $0 \neq A$ 是半正定的, 所以 $a_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$, $a_k > 0$ (对某些 k); 由于 S 是正定的, 所以 $b_j > 0 (1 \leq j \leq n)$. 于是

$$(\det C)^2\det(A+S) = \Pi_{i=1}^n(a_i+b_i) > \Pi_{i=1}^n a_i = (\det C)^2\det(A),$$

此即表明 $\det(A+S) > \det(A)$. □

A4. Let $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$ be an $n\times n$ positive definite matrix, where A is an $r\times r$ $(r<n)$ matrix. Prove that $A, D, D - B'A^{-1}B$ are positive definite.

证明: 考虑由 M 给出的二次型:

$$f(X) = f(x_1,\dots,x_r,x_{r+1},\dots,x_n) = X'MX.$$

则由假设可知 $f(X)$ 是正定的. 考虑如下的二次型

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\ldots,x_r) &= f(x_1,\ldots,x_r,0,\ldots,0) \\ &= (x_1 \ \cdots \ x_r)A(x_1 \ \cdots \ x_r)^T, \\ f_2(x_{r+1},\ldots,x_n) &= f(0,\ldots,0,x_{r+1},\ldots,x_n) \\ &= (x_{r+1} \ \cdots \ x_n)D(x_{r+1} \ \cdots \ x_n)^T. \end{aligned}$$

则 f_1 和 f_2 都是正定的, 从而 A, D 都是正定矩阵.

注意到

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -B'A^{-1} & E_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -B'A^{-1} & E_{n-r} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-B'A^{-1}B \end{pmatrix},$$

其中 E_r, E_{n-r} 是单位阵. 所以 M 合同于 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-B'A^{-1}B \end{pmatrix}$. 由于 M 正定, 所以 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-B'A^{-1}B \end{pmatrix}$ 也是正定的, 从而由前段的讨论可知 $D-B'A^{-1}B$ 是正定的. □

A5. Assume that $\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$ is positive definite, where A, D are square matrices. Prove that

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix} \le \det(A)\det(D),$$

and the equality holds if and only if $B = 0$.

证明: 与 **A4** 中的证明一样, 我们有如下的等式:

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -B'A^{-1} & E_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -B'A^{-1} & E_{n-r} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-B'A^{-1}B \end{pmatrix},$$

其中 E_r, E_{n-r} 是单位阵. 取行列式即得

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - B'A^{-1}B). \tag{*}$$

对任意 $X \in \mathbb{R}^n$, 其中 n 是 $\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$ 的阶数.

由于 A 和 A^{-1} 都是正定的, 所以

$$X'(B'A^{-1}B)X = (BX)'A^{-1}(BX) \geq 0, \tag{**}$$

此即表明 $B'A^{-1}B$ 是正定的. 又利用 **A4** 可得 $D - B'A^{-1}B$ 是正定的. 所以由 **A3** 可得: 如果 $B'A^{-1}B \neq 0$ 那么

$$\det(D) = \det((D - B'A^{-1}B) + B'A^{-1}B) > \det(D - B'A^{-1}B),$$

从而, 由(*)可得 (注意到 $\det(A) > 0$):

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix} < \det(A)\det(D).$$

如果 $B'A^{-1}B = 0$, 那么, 由于 A^{-1} 正定, 从而由 (**) 可知, 对任意 $X \in \mathbb{R}^n$ 有 $BX = 0$, 于是 $B = 0$, 进而有

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

其余结论是显然的. □

A6. Let A be any invertible real matrix. Prove that there exist an orthogonal matrix T and positive definite matrices S_1, S_2 such that $A = TS_1 = S_2T$. Moreover, such decompositions are unique.

证明: 存在性. 由于 A 是可逆实矩阵, 所以 AA' 是正定矩阵. 于是存在正定矩阵 B 使得 $AA' = B^2 = A'A$ (参见前面的第 **42** 题). 设 $T = BA'^{-1}$. 则

$$TT' = (BA'^{-1})(A^{-1}B') = B(AA')^{-1}B' = BB^{-2}B = E_n,$$

其中 E_n 是单位阵. 从而 T 是正交阵, 而且 $A = T'B$ 是所求的分解. 类似地可以得到另一个分解.

<u>唯一性</u>. 假设 $A = T_1B_1 = T_2B_2$, 其中 T_1, T_2 是正交阵, B_1, B_2 是正定阵. 则

$$B_2B_1^{-1} = T_2T_1^{-1}$$

是正交阵, 从而

$$E_n = (B_2B_1^{-1})(B_2B_1^{-1})' = B_2(B_1^2)^{-1}B_2,$$

即, $B_1^2 = B_2^2$. 由于 B_1, B_2 都是正定阵, 所以由前面的第 **42** 题可知, $B_1 = B_2$, 从而 $T_1 = T_2$. □

A7. Prove the following statements.

(1) Let A be an $n \times n$ positive matrix and α a nonzero column vector in $\mathbb{R}^n$. Then

$$\det \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & 0 \end{pmatrix} < 0.$$

证明: 与 **A4** 中的证明相同, 我们有:

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha' A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha' A^{-1} & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -\alpha' A^{-1}\alpha \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

其中 E_{n-1} 是单位阵. 由于 $\alpha \neq 0$ 和 A^{-1} 是正定阵, 所以 $-\alpha' A\alpha < 0$, 从而, 通过在 $(*)$ 两边取行列式我们得到:

$$\det \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & 0 \end{pmatrix} = \det(A)(-\alpha' A\alpha) < 0.$$ □

(2) Let $A = (a_{ij})_{n\times n}$ be positive definite. Then

$$\det(A) \leq a_{nn}\det(A_{n-1}),$$

where A_{n-1} is the $(n-1)$-th principal sub-matrix of A.

证明: 对正定阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \beta' & a_{nn} \end{pmatrix}$$

运用 **A5** 的结果即得. □

(3) (Again we obtain the following *Hadamard inequality*: 参见 Chapter 6 Ex. 41). Let $C = (c_{ij})_{n\times n}$ be any invertible matrix. Then

$$(\det(C))^2 \le \Pi_{j=1}^n (c_{1j}^2 + \cdots + c_{nj}^2).$$

证明: 由 (2) 我们得到如下的:

断言: 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是正定矩阵. 那么 $\det(A) \le \Pi_{i=1}^n a_{ii}$.

事实上, 由于对每个 $1 \le j \le n$, 第 j 个主子阵 A_j 是正定的, 所以由 (2) 可知:

$\det(A) \le a_{nn}\det(A_{n-1}) \le a_{nn}a_{n-1,n-1}\det(A_{n-2}) \le \cdots \le a_{nn}a_{n-1,n-1}\cdots a_{11}$,

从而**断言**得证.

现在, 对任意可逆实矩阵 C 有 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} := C'C$ 是正定的, 从而

$$(\det(C))^2 = \det(C'C) = \det(A) \le \Pi_{i=1}^n a_{ii},$$

其中, $a_{ii} = c_{1j}^2 + \cdots + c_{nj}^2$, $1 \le i \le n$. □

注: 上面的**断言**已经在 Chapter 6 中得到了. 由前面的第 **39** 题可知, 任意正定矩阵 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 也是欧式空间的内积 $(-,-)$ 关于某个基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的度量阵, 而且 $a_{ii} = (\alpha_i, \alpha_i)$. □

The results in the following exercises generalize some properties of orthogonal complementary subspaces in Euclidean spaces.

A8. Let V be a finite dimensional linear space over a number field $\mathbb{F}$. Let f be a symmetric *non-degenerate* bilinear form on V. Let W be a *proper* subspace of V. Set

$$W^\perp = \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0 \text{ for any } \beta \in W\}.$$

Prove the following statements.

(1) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

(2) $(W^\perp)^\perp = W$.

证明:

(1) 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 是 W 的一个基.

把它扩充为 V 的一个基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$, 并设 f 在这个基下的度量矩阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

设 $\varepsilon_i = (0\ \cdots 0\ 1\ 0 \cdots\ 0)^T \in \mathbb{F}^n$ 是基本向量 $(1 \leq i \leq n)$, 即, ε_i 也是 α_i 关于基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ 的坐标. 从而对任意 $\alpha = (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_r\ \alpha_{r+1}\ \cdots\ \alpha_n)X \in V$ 有

$$\begin{aligned}
\alpha \in W^{\perp} \quad &\Leftrightarrow \quad f(\alpha_i, \alpha) = 0: \qquad 1 \leq i \leq r \\
&\Leftrightarrow \quad \varepsilon_i^T AX = 0: \qquad 1 \leq i \leq r \\
&\Leftrightarrow \quad X \text{ 是如下的齐次线性方程组的解:} \\
&\quad\ \left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \qquad (*)
\end{aligned}$$

另一方面, 由于 f 非退化, 所以 A 是满秩的, 从而 $(*)$ 的系数矩阵的秩为 r, 所以 $(*)$ 的解空间的维数是 $n-r$, 进而 ,$W^{\perp}$ 的维数也是 $n-r$, 即, $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$, 正如所需.

(2) 注意到$W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$.

由 (1) 可得 $\dim W = \dim (W^{\perp})^{\perp}$, 从而 $W = (W^{\perp})^{\perp}$. □

注: 一般情况下 (1) 并不意味着 $W + W^{\perp} = V$, 更谈不上 $W \oplus W^{\perp} = V$ (在欧式空间情形下是正确的). 但是, 我们有下一个练习中给出的结论. □

22. Let V be a finite dimensional linear space over a number field $\mathbb{F}$. Let f be a symmetric bilinear form on V. Let W be a *proper* subspace of V. Prove that, $V = W \oplus W^{\perp}$ if and only if the restriction of f to W is *non-degenerate*.

证明: 设 $f_1 = f|_W$ 是 f 在 W 上的限制. 注意到 f_1 是 W 上的对称双线性型.

必要性. 假设 $V = W \oplus W^{\perp}$. 假设 f_1 是退化的. 那么存在非零的 $\alpha \in W \cap W^{\perp}$, 矛盾.

充分性. 假设 f_1 是非退化的. 于是存在 W 的一个基 $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ 使得 $f_1(\gamma_i, \gamma_j) = \delta_{ij} d_i$, 其中, $d_i \neq 0$ 对任意 $1 \leq i \leq r$ 都成立(对称矩阵合同于对角阵), 即, f_1 的关于 $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ 的度量阵是可逆的对角阵. 从而对任意 $\beta \in V$ 我们可以定义

$$\gamma := \beta - \sum_{i=1}^{r} \frac{f(\beta, \gamma_i)}{f(\gamma_i, \gamma_i)} \gamma_i.$$

易见, 对任意$1 \leq j \leq r$有

$$f(\gamma, \gamma_j) = f(\beta, \gamma_j) - \frac{f(\beta, \gamma_j)}{f(\gamma_j, \gamma_j)} f(\gamma_j, \gamma_j) = 0,$$

此即表明, $\gamma \in W^{\perp}$, 从而

$$\beta = \gamma + \sum_{i=1}^{r} \frac{f(\beta, \gamma_i)}{f(\gamma_i, \gamma_i)} \gamma_i \in W + W^{\perp}.$$

所以我们证明了 $V = W + W^{\perp}$.

另一方面, 如果 $\alpha \in W \cap W^{\perp}$ 那么对任意 $\alpha' \in W$ 都有 $f_1(\alpha, \alpha') = 0$, 此即表明 $\alpha = 0$ (因为 f_1 非退化). 所以 $W \cap W^{\perp} = 0$.

综上我们证明了 $V = W \oplus W^{\perp}$. □