假设检验问题: 所谓假设检验, 是指先对总体提出某项假设, 然后利用抽样调查的样本值来检验所提出的假设是否合理, 从而做出接受或拒绝的决策.

假设检验 $\begin{cases} \text{参数检验} \\ \text{非参数检验} \end{cases}$

【例 3.1(P_{70})】某厂家向一百货商店长期供应某种货物, 双方根据厂家的传统生产水平, 写出质量标准, 即若次品率超过 3%, 百货商店拒收该批货物. 今有一批货物, 随机抽 43 件检验, 发现有次品 2 件, 问应如何处理这批货物? —— 参数检验问题

【例 3.2(P_{71})】某研究所推出一种感冒特效新药，为证明其疗效，选择 200 名患者为志愿者. 将他们等分为两组，分别不服药或服药，观察三日后痊愈的情况，得出下列数据：

是否痊愈 / 服何种药	痊愈者数	未痊愈者数	合计
未服药者数	48	52	100
服药者数	56	44	100
合计	104	96	200

问新药是否疗效明显？ ——— 非参数检验问题

一、问题的提出

【补例1】设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自 X 的样本，试利用样本检验假设 $H_0: \mu = \mu_0$ 是否可信.

1. 分析:

(1) 检验: $\boxed{H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0}$

(2) 如何决定接受还是拒绝H_0?

$|\bar{X}-\mu_0| > k$ (k待定) $\rightarrow$ $\mu \neq \mu_0$ $\rightarrow$ 拒绝H_0.

$|\bar{X}-\mu_0| \le k$ $\rightarrow$ $\mu = \mu_0$ $\rightarrow$ 接受H_0.

(3) 控制犯错的概率 $\boxed{P\{拒绝H_0 | H_0为真\} \le \alpha}$ 以确定k, 得H_0的拒绝域:

$$P\{拒绝H_0 | H_0为真\} = P\{|\bar{X}-\mu_0| > k | H_0: \mu = \mu_0真\}$$

$$\overset{H_0:\mu=\mu_0真}{\underset{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \alpha \Rightarrow \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}} = u_{1-\alpha/2}$$

$$\Rightarrow H_0的拒绝域: \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > u_{1-\alpha/2}$$

2. 相关概念:

检验假设: $H_0:\mu=\mu_0$—原假设, $H_1:\mu\neq\mu_0$—备择假设

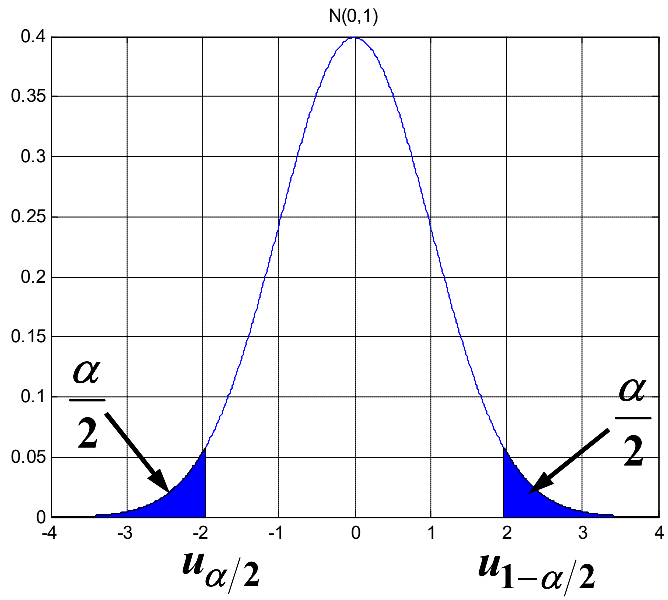
$$\boxed{H_0:\mu=\mu_0\text{的拒绝域为:}\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{1-\alpha/2}}$$

α—显著性水平,

$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$—检验统计量,

$|u|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{1-\alpha/2}$—拒绝域,

$u_{\alpha/2},u_{1-\alpha/2}$—临界点.



$H_1:\mu\neq\mu_0$

二、假设检验的目的与基本原理

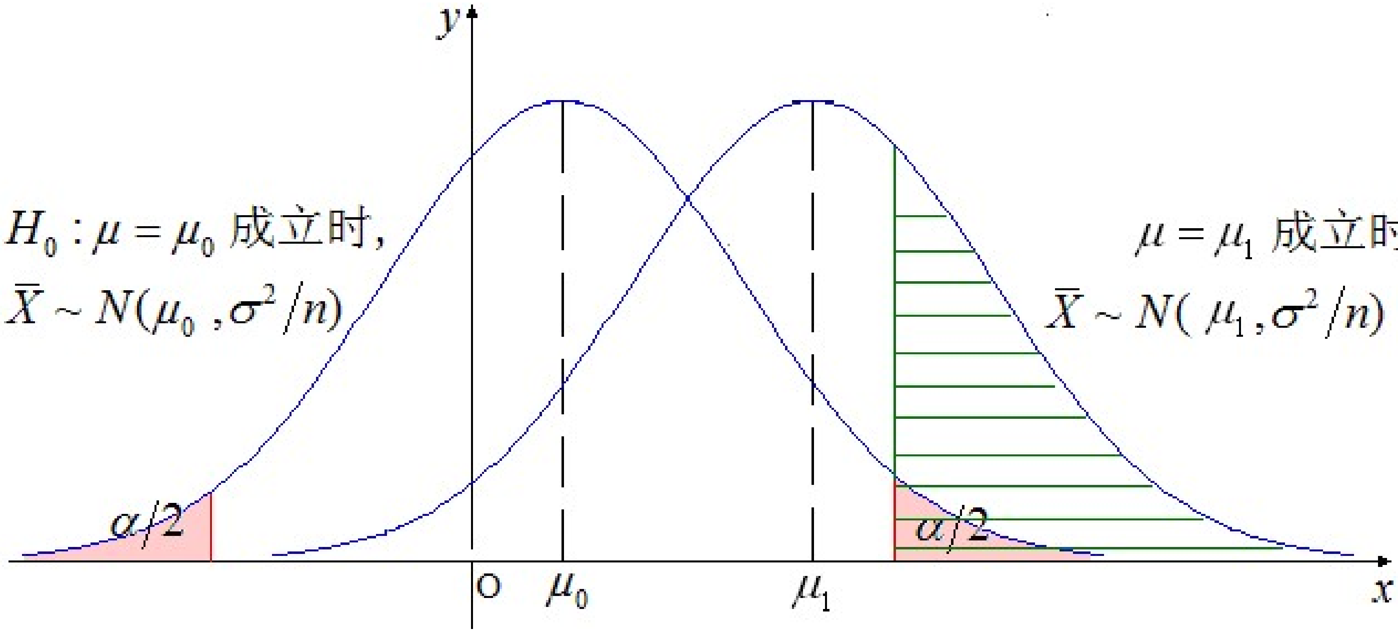
1. 假设检验的目的:

从理论上说是检验原假设的总体与样本抽自的总体是否发生了显著性差异;

从实际上说是因为事先已对原假设产生了怀疑,而为了推翻或拒绝它.

拒绝原假设的理由要充分,而接受原假设只不过是在当前α下没有充分的理由去拒绝.

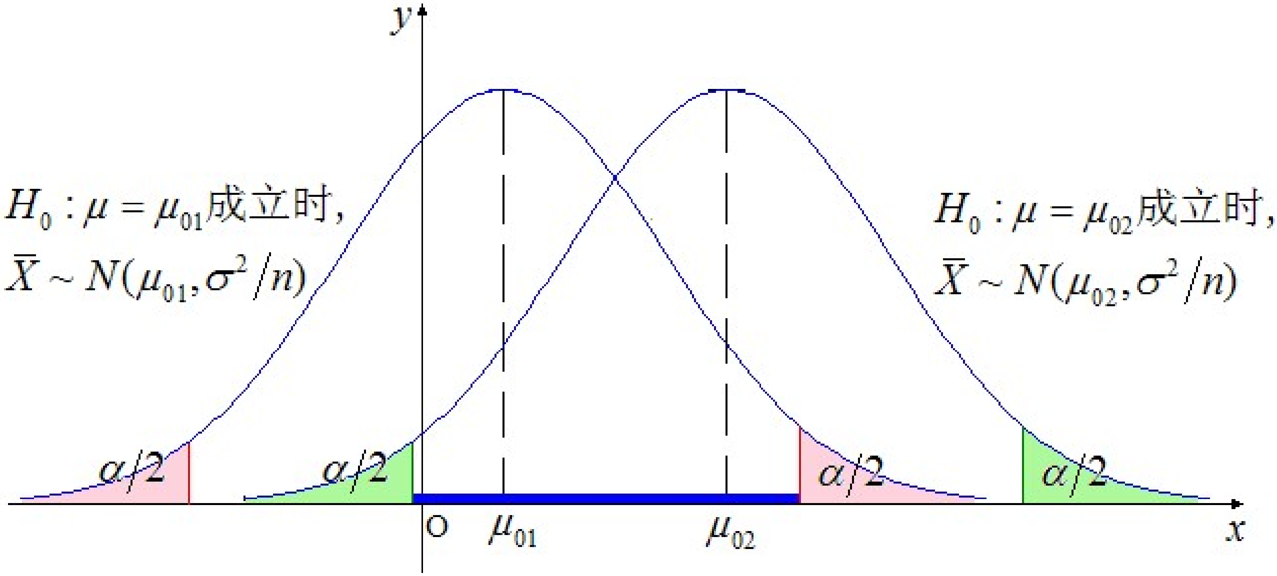
2. 假设检验的基本原理是应用**小概率原理**(或实际推断原理).



两个概率: $\xrightarrow{\text{若}H_0:\mu=\mu_0\text{为真}}$

$$\begin{cases} P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\le u_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha & \text{(大概率)} \\ P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|> u_{1-\alpha/2}\right\}=\alpha & \text{(小概率)} \end{cases}$$

3. 原假设H_0与备选假设H_1的地位是不对等的. 由于一般α较小，故检验推断是"偏向"H_0而"歧视"H_1的，从而造成对同一问题，不同的假设可能有完全不同的结论. 因此H_0与H_1的位置不能随意更换.

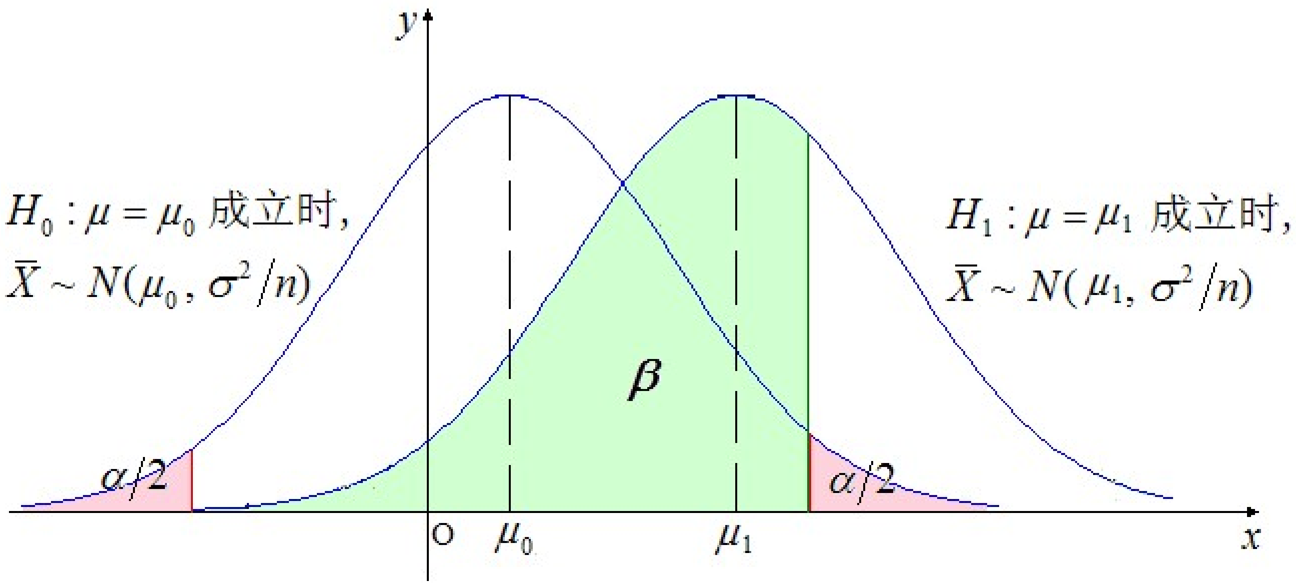


如无特殊背景，通常把想要得到的新结论设成H_1，而把已有的结论设成H_0.

4. 两类错误：

$P\{$第I类错误(弃真错误)$\} = P\{$拒绝$H_0 \mid H_0$为真$\} \triangleq \alpha$;

$P\{$第II类错误(纳伪错误)$\} = P\{$接受$H_0 \mid H_0$为假$\} \triangleq \beta$.



显著性检验——只控制α而不考虑β的检验，称为显著性检验.

三、假设检验的步骤

【★例3.4(P_{76})】一台包装机装洗衣粉，额定标准重量为500g, 据以往经验, 包装机的实际装袋重量服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, 其中$\sigma=15$g恒定, 为检验包装机工作是否正常, 随机抽取9袋, 称得洗衣粉净重数据如下:

497 506 518 524 488 517 510 515 516

若取显著性水平$\alpha=0.01$, 问这包装机工作是否正常?

解: (1) 检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\neq\mu_0$ $(\mu_0=500)$

(2) 由于σ已知, 故选取检验统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$,

(3) H_0的拒绝域为 $|u|>u_{1-\alpha/2}$,

(4) 代入样本值检验:

$\bar{x} = 510.1,\ \mu_0 = 500,\ \sigma = 15,\ n = 9 \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{510.1 - 500}{15/\sqrt{9}} = 2.02,$

$\alpha = 0.01 \quad \Rightarrow \quad u_{1-\alpha/2} = u_{0.995} = 2.57,$

可见$|u| > u_{1-\alpha/2}$不成立,从而不拒绝H_0,即认为机器工作正常.

假设检验的步骤:

(1)提出H_0和H_1;

(2)构造检验统计量;

(3)对于α,确定H_0的拒绝域;

(4)代入样本值$(x_1,\cdots,x_n)$进行检验.

注意 2: 正确提出H_0和H_1是首要步骤,

关键步骤是确定检验统计量,该统计量至少应该满足在H_0成立的情况下,其抽样分布易于计算(查找).