四川大学期期末考试试题（A 卷）(闭卷)

（2014—2015 学年第一学期）

课程号 201048050 课序号：1, 2 课程名称：数学分析-1 任课教师：付晓玉、刘建军 成绩：

适用专业年级：数学 2014 级 学生人数： 印题份数： 学号： 姓名：

考试须知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各级各类考试，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》。有考试违纪作弊行为的，一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理。

四川大学各级各类考试的监考人员，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》、《四川大学监考人员职责》。有违反学校有关规定的，严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理。

注意

答案一律写在答题纸上，否则不计分！交卷时将试题纸一并上交。

一、（20 分）计算下列各题，每题 5 分：

1. 设 $f'(a)$ 存在，且 $f(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

2. 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上可导. 对固定的 $\lambda>0$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\lambda f(x)+f'(x)\right]=2$. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3. 选取 a，使函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ ax^2, & x\geq 1\end{cases}$ 成为处处连续的函数.

4. 设 $y=f(\ln f(x))$ 为可导函数，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

二、(12 分) 思考题，每题 6 分. 下面的断言若正确，请证明，若不正确，请给出反例.

1. 若 $f(x)$ 于区间 I_1,I_2 上均一致连续，则于 $I_1\cup I_2$ 上也一致连续.

2. 设 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数，则不存在 $F(x)$，使得 $F'(x)=D(x)$.

三、(13分) 设 $f(0)=0$，$f'(0)$ 存在且有限，令 $x_n=f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(\dfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)$.

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{f'(0)}{2}$. 并利用此结果计算：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$，其中 $\prod\limits_{k=1}^{n}$ 表示 n 个数连乘.

四、（10分）设 $f(x)$ 于点 x_0 连续,且在 x_0 的某去心邻域内有导数，又若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$,则

$f'(x_0)=A$.

五、（10分）设 $f:R\to R$ 上二阶可导，$|f(x)|\le 1$，且 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$．证明：存在

$\xi\in(-2,2)$，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

六、（10分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可导，且在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$|f(x)|\le M_0$ 以及 $|f''(x)|\le M_2$

(1) 写出 $f(x+h)$，$f(x-h)$ 的带Lagrange余项的Taylor公式;

(2)证明：对任何 $h>0$，有 $|f'(x)|\le\frac{M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2$;

(3) 求证：$|f'(x)|\le\sqrt{2M_0M_2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

七、（20分）讨论函数 $f(x)=xe^{-x^2}$ 的最值，极值，单调区间，拐点和所有渐近线，并画出函数图像.