第五章　线性变换、相似

1. (略)

2. (略)

3. **证明**: 由 $\mathbb{A}^k=0$ 得:

$$(\mathbb{A}-\mathbb{E})(-(\mathbb{E}+\mathbb{A}+\cdots+\mathbb{A}^{k-1}))=\mathbb{E};$$
$$(-(\mathbb{E}+\mathbb{A}+\cdots+\mathbb{A}^{k-1}))(\mathbb{A}-\mathbb{E})=\mathbb{E},$$

所以, $(\mathbb{A}-\mathbb{E})$ 可逆, 且, $(\mathbb{A}-\mathbb{E})^{-1}=-(\mathbb{E}+\mathbb{A}+\cdots+\mathbb{A}^{k-1})$.

注: 这个结论对无穷维线性空间也成立.

4. **证明**: 由 $(f(x),g(x))=1$ 可知, 存在 $u(x),v(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$,

于是, $u(\mathbb{A})f(\mathbb{A})+v(\mathbb{A})g(\mathbb{A})=\mathbb{E}$, 其中, $\mathbb{E}$ 是 V 的恒等变换,

从而, 对任意 $\alpha\in\ker f(\mathbb{A})\cap\ker g(\mathbb{A})$ 有:

$$\alpha=\mathbb{E}\alpha=u(\mathbb{A})f(\mathbb{A})\alpha+v(\mathbb{A})g(\mathbb{A})\alpha=0,$$

即, $\ker f(\mathbb{A})\cap\ker g(\mathbb{A})=0$.

注: 这个结论对无穷维空间上的线性变换也成立.

5. **证明**: 由 $(f(x),g(x))=1$ 可知, 存在 $u(x),v(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1,$$

于是, $u(\mathbb{A})f(\mathbb{A})+v(\mathbb{A})g(\mathbb{A})=\mathbb{E}$, 其中, $\mathbb{E}$ 是 V 的恒等变换,

从而, 对任意 $\alpha\in V$ 有:

$$\alpha=\mathbb{E}\alpha=u(\mathbb{A})f(\mathbb{A})\alpha+v(\mathbb{A})g(\mathbb{A})\alpha.$$

由于

$u(\mathbb{A})f(\mathbb{A})\alpha=f(\mathbb{A})(u(\mathbb{A})\alpha)\in\mathrm{im}(f(\mathbb{A}))$;

$v(\mathbb{A})g(\mathbb{A})\alpha=g(\mathbb{A})(v(\mathbb{A})\alpha)\in\mathrm{im}(g(\mathbb{A}))$,

所以, $\alpha\in\mathrm{im}(f(\mathbb{A}))+\mathrm{im}(g(\mathbb{A}))$, 即, $V\subseteq\mathrm{im}(f(\mathbb{A}))+\mathrm{im}(g(\mathbb{A}))$;

而反包含关系显然成立, 所以, $V=\mathrm{im}(f(\mathbb{A}))+\mathrm{im}(g(\mathbb{A}))$.

6. (1) 由题设, $f(x)=x^2-2x=x(x-2)$ 是 $\mathbb{T}$ 的一个零化多项式, 且 $(x,x-2)=1$, 于是由准素分解定理得到空间直和分解:

$$V=\ker\mathbb{T}\oplus\ker(\mathbb{T}-2\mathbb{E}),\text{ 其中, }\mathbb{E}\text{ 为 }V\text{ 上的恒等变换.}$$

(2) 由 (1), 可以取 $\ker\mathbb{T}$ 的一个基 $\xi_1,\cdots,\xi_r$, 取 $\ker(\mathbb{T}-2\mathbb{T})$ 的一个基 $\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$, 使得 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个基;

由于 $\xi_i\in\mathbb{T}$, 所以, $\mathbb{T}(\xi_i)=0$, $1\le i\le n$;

由于 $\xi_j\in\mathbb{T}-2\mathbb{E}$, 所以, $\mathbb{T}(\xi_j)=2\xi_j$, $r+1\le j\le n$,

所以, $\mathbb{T}$ 在 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$ 下的矩阵为对角阵

$$D=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

由于同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的, 所以, T 相似于上面的对角阵 D.

7. (1) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\in\mathbb{R}^3$ 是基本向量. 于是, 由题设得:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(\varepsilon_1) &= (3,3,4)'=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix};\\ \mathbb{T}(\varepsilon_2) &= (0,0,0)'=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\\ \mathbb{T}(\varepsilon_3) &= (4,0,0)'=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以, $\mathbb{T}$ 关于基本向量的矩阵为: $A=\begin{pmatrix}3&0&4\\3&0&0\\4&0&0\end{pmatrix}$.

(2) 设从 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 $\xi_1=(0,4,-3)'$, $\xi_2=(5,3,4)'$, $\xi_3=(5,-3,-4)'$ 的过渡矩阵为 P, 即, $(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)P$,

易见, $P=\begin{pmatrix}0&5&5\\4&3&-3\\-3&4&-4\end{pmatrix}$,

于是, 由 (1), $\mathbb{T}$ 在 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下的矩阵为:

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 5 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\
&\qquad\text{(可以考虑用伴随矩阵求 } P^{-1}\text{)} \\
&= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -60 & 280 & 120 \\ -60 & 30 & -130 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6/5 & 28/5 & 12/5 \\ -6/5 & 3/5 & -13/5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

8. (略)

9. (1) 直接计算得:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}\alpha &= \mathbb{A}((\eta_1 \ \cdots \ \eta_n)X) \\
&= (\mathbb{A}\eta_1 \ \cdots \ \mathbb{A}\eta_n)X \\
&= ((\eta_1 \ \cdots \ \eta_n)A)X \\
&= (\eta_1 \ \cdots \ \eta_n)(AX),
\end{aligned}$$

此即表明, $\mathbb{A}\alpha$ 在 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的坐标为 AX.

(2) 由于 $(\mathbb{A}\eta_1 \ \cdots \ \mathbb{A}\eta_n) = (\eta_1 \ \cdots \ \eta_n)A$, 而 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 线性无关,

所以, $\operatorname{rank}(\mathbb{A}\alpha_1\cdots\mathbb{A}\alpha_n) = \operatorname{rank}(A)$. ①

由于 $\mathbb{A}\in\operatorname{End}(V)$, 而 $\dim V = n < \infty$, 所以, 由维数公式可知

$\mathbb{A}$ 可逆当且仅当 $\mathbb{A}$ 是满射, 当且仅当 $\operatorname{rank}(\mathbb{A}\alpha_1\cdots\mathbb{A}\alpha_n) = n$;

从而由①可知, $\mathbb{A}$ 可逆当且仅当 $r(A) = n$, 当且仅当 A 可逆.

(3) 用 $\mathbb{A}$ 作用于 $(\mathbb{A}\eta_1 \ \cdots \ \mathbb{A}\eta_n) = (\eta_1 \ \cdots \ \eta_n)A$ 两边得:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}((\mathbb{A}\eta_1 \ \cdots \ \mathbb{A}\eta_n)) &= \mathbb{A}((\eta_1 \ \cdots \ \eta_n)A) \\
&= (\mathbb{A}\eta_1 \ \cdots \ \mathbb{A}\eta_n)A \\
&= ((\eta_1 \ \cdots \ \eta_n)A)A \\
&= (\eta_1 \ \cdots \ \eta_n)A^2;
\end{aligned}$$

即, $(\mathbb{A}^2\eta_1\cdots\mathbb{A}^2\eta_n)=(\eta_1\cdots\eta_n)A^2$, 归纳地, 对任意非负整数 k有:

$$(\mathbb{A}^k\eta_1\ \cdots\ \mathbb{A}^k\eta_n)=(\eta_1\ \cdots\ \eta_n)A^k.$$

($k=0$ 时, 上式是平凡的: $(\eta_1\ \cdots\ \eta_n)=(\eta_1\ \cdots\ \eta_n)A^0$.)

进一步, 对任意 $a_k\in\mathbb{F}$ 有:

$$\begin{aligned}((a_k\mathbb{A}^k)\eta_1\ \cdots\ (a_k\mathbb{A}^k)\eta_n) &= a_k(\eta_1\ \cdots\ \eta_n)A^k\\ &= (\eta_1\ \cdots\ \eta_n)(a_kA^k);\end{aligned}\qquad ②$$

对任意多项式 $f(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_k\lambda^k\in\mathbb{F}[\lambda]$ 有: $f(\mathbb{A})=\sum\limits_{k=0}^{m}a_k\mathbb{A}^k$, 从而对②求和即得:

$$((f(\mathbb{A})\eta_1\ \cdots\ f(\mathbb{A}))\eta_n)=(\eta_1\ \cdots\ \eta_n)f(A),$$

此即表明, $f(\mathbb{A})$ 在 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵就是 A 的多项式 $f(A)$.

特别, 结论对 $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda$ 成立.

(4) 在 (3) 中已经完成.

(5) 由于 $\mathbb{A}$ 在 $\beta_1,\cdots,\beta$ 下的矩阵就是 $X^{-1}AX$, 所以, 由 (4) 可得:

$f(\mathbb{A})$ 在 $\beta_1,\cdots,\beta$ 下的矩阵就是 $f(X^{-1}AX)=X^{-1}f(A)X$.

10. (略)

11. (取定 V 的一个基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$, 则任意 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, 由线性映射的存在唯一性定理, 存在唯一的线性变换 $\mathbb{A}\in\mathrm{End}(V)$, 使得

$$(\mathbb{A}\xi_1\ \cdots\ \mathbb{A}\xi_n)=(\xi_1\ \cdots\ \xi_n)A.$$

本题中, 用 A 表示这个线性变换 $\mathbb{A}$, 并研究它的核与像, 涉及到: 限制映射, 维数公式, 直和分解.)

证明: 由于 $\mathrm{im}(A)$ 是 V 的子空间, 所以, A 在 $\mathrm{im}(A)$ 上有限制映射 (restriction)

$$A|_{\mathrm{im}(A)}\colon \mathrm{im}(A)\to V\colon\ \alpha\mapsto A\alpha,\ \text{任意}\ \alpha\in\mathrm{im}(A).$$

于是, 由维数公式可得:

$$\dim\ker(A|_{\mathrm{im}(A)})+\dim\mathrm{im}(A|_{\mathrm{im}(A)})=\dim\mathrm{im}(A).\qquad ①$$

注意到: $\ker(A|_{\mathrm{im}(A)})=\ker A\cap\mathrm{im}(A)$; ②

(因为: $\alpha\in\ker(A|_{\mathrm{im}(A)})$ 当且仅当 $A\alpha=0$ 且 $\alpha\in\mathrm{im}(A)$: $\mathrm{im}(A)$ 是 $A|_{\mathrm{im}(A)}$ 的“定义域”.)

$$\mathrm{im}(A|_{\mathrm{im}(A)}) = \mathrm{im}(A^2); \qquad ③$$

(因为: 任意 $\alpha \in (A)$, 即, $\alpha = A\beta$, 从而 $A\alpha = A^2\beta \in \mathrm{im}(A^2)$.)

由①②③即得所要证明的等式:

$$\dim(\ker(A) \cap \mathrm{im}(A)) = \dim \mathrm{im}(A) - \dim \mathrm{im}(A^2). \qquad ④$$

(1) 当 $\ker A \subseteq \mathrm{im}(A)$ 时, $\ker A \cap \mathrm{im}(A) = \ker A$, 于是由④得:

$$\dim \ker A = \dim \mathrm{im}(A) - \dim \mathrm{im}(A^2). \qquad ⑤$$

反之, 当⑤成立时, 由④得: $\dim \ker A = \dim(\ker A \cap \mathrm{im}(A))$. 但是, $\ker(A) \cap \mathrm{im}(A)$ 是 $\ker A$ 的子空间,

所以必然有 $\ker A \cap \mathrm{im}(A) = \ker A$, 即 $\ker A \subseteq \mathrm{im}(A)$. □

(2) 与 (1) 类似, 注意到,

$\ker A \cap \mathrm{im}(A) = \mathrm{im}(A)$ 当且仅当 $\mathrm{im}(A) \subseteq \ker A$,

从而由④即得. □

(3) 当 $\mathrm{im}(A) = \ker A$ 时, $\ker A \cap \mathrm{im}(A) = \mathrm{im}(A)$,

由④得 $\dim \mathrm{im}(A^2) = 0$, 从而 $A^2 = 0$,

而 $\dim \ker A = \dim \mathrm{im}(A)$ 显然成立;

反之, 当 $A^2 = 0$ 时,

由④得: $\dim(\ker(A) \cap \mathrm{im}(A)) = \dim \mathrm{im}(A)$,

由此即得 $\mathrm{im}(A) \subseteq \ker A$;

从而由 $\dim \ker A = \dim \mathrm{im}(A)$ 得: $\ker A = \mathrm{im}(A)$. □

(4) 由④即得. □

(5) 必要性: 设 $V = \ker A \oplus \mathrm{im}(A)$.

因此子空间的和 $\ker A + \mathrm{im}(A)$ 是直和, 从而, $\ker \cap \mathrm{im}(A) = 0$,

因此, 由④即得 $\dim \mathrm{im}(A) = \dim \mathrm{im}(A^2)$.

充分性: 设 $\dim \mathrm{im}(A) = \dim \mathrm{im}(A^2)$.

由④得: $\dim(\ker A \cap \mathrm{im}(A)) = 0$,

即, $\ker A \cap \mathrm{im}(A) = 0$,

从而子空间的和 $\ker A + \mathrm{im}(A)$ 是直和;

此时, 由维数公式得:

$$\begin{aligned}\dim(\ker A + \mathrm{im}(A)) \quad &= \quad \dim \ker A + \dim \mathrm{im}(A) - \dim \ker \cap \mathrm{im}(A) \\ &\qquad \text{(子空间的维数公式)}\end{aligned}$$

$$= \quad \dim\ker A + \dim\operatorname{im}(A) = \dim V = n,$$

所以, $V = \ker A + \operatorname{im}(A)$, 从而 $V = \ker A \oplus \operatorname{im}(A)$ 成立. □

12. (矩阵的相似关系不依赖于数域, 即, 如果 A, B 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, $\mathbb{K}$ 是数域且 $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{F}$. 则 A, B 在 $\mathbb{F}$ 上相似当且仅当 A, B 在 $\mathbb{K}$ 上相似. 这个结论可以用行列式因子证明. 本题是这个结论的特殊情况, 可以不用行列式因子而直接证明. **利用行列式构造可逆矩阵**.)

证明: 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上相似, 即, 存在可逆的**复矩阵** $C = P + \mathrm{i}Q$ (其中, P, Q 是实方阵) 使得, $C^{-1}AC = B$, 即, $AC = CB$,

从而, 由 $A(P + \mathrm{i}Q) = (P + \mathrm{i}Q)A$ 比较实部与虚部可得:

$$AP = PA, AQ = QA. \qquad ①$$

(要证 A, B 在 $\mathbb{R}$ 上相似, 只需构造可逆的**实方阵** X 使得 $X^{-1}AX = B$; 但是, 虽然 $C = P + \mathrm{i}Q$ 可逆, P, Q 未必可逆. 所以, 需要新的构造.)

考虑 $f(x) = \det(P + xQ)$. 则 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的多项式, 当然也是复数域 $\mathbb{C}$ 上的多项式.

由于 $f(\mathrm{i}) = \det(P + \mathrm{i}Q) \neq 0$ (因为 $C = P + \mathrm{i}Q$ 可逆),

所以, $f(x)$ 不是零多项式, 因此不是 $\mathbb{R}$ 上的零函数, 即, 存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $f(a) = \det(P + aQ) \neq 0$,

(这是关键: 利用行列式函数.)

从而 $X := P + aQ$ 是实可逆矩阵. 进一步, 由①得:

$$AX = A(P + aQ) = AP + aAQ = PA + aQA = (P + aQ)A = XA,$$

即, $X^{-1}AX = B$. □

13. (略)

14. (略)

15. **证明**: 由 Laplace 定理得 $(\lambda E_n - A)(\lambda E_n - A)^* = f(\lambda)E_n$, ①

其中, E_n 为单位阵, 而

$$f(\lambda) = \det(\lambda E_n - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

为 A 的特征多项式, 从而

$$f(\lambda)E_n=\lambda^n E_n+a_1\lambda^{n-1}E_n+\cdots+a_1\lambda E_n+a_0E_n. \qquad ②$$

设 $(\lambda E_n-A)^*$ 的次数为 m, 即, 可以设

$$(\lambda E_n-A)^*=\lambda^m P_m+\lambda^{m-1}P_{m-1}+\cdots+\lambda P_1+P_0, \qquad ③$$

其中, $P_i\in M_n(\mathbb{F})$. 把②③代入①, 比较两边的最高次项的次数即得: $m=n-1$, 且 $P_m=E_n$. □

16. 解: 不一定.

17. 证明: 设 n-阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 可逆, 则, $\det(A(\lambda))\neq 0$, 从而 $r(A(\lambda))=n$.

(λ-矩阵的秩的定义是: 该 λ-矩阵的非零的子式的最高阶数.)

反之, 如果 $r(A(\lambda))=n$, 则, $A(\lambda)$ 不一定可逆,

18. (略)

19. 证明: 注意到

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}=(a+b)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

此即表明, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的属于 $a+b$ 的特征向量, 特别, $a+b$ 是 A 的一个特征值;

由 Vieta 定理, A 的另一个特征值为

$$(a+d)-(a+b)=d-b=a-c.$$

20. (求有限维空间上的线性变换的特征值与特征向量.)

算法: 设 $\mathbb{A}\in\mathrm{End}(V)$, $\dim_{\mathbb{F}}V=n$. 取定 V 的一个基: $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$.

(i) 写出 $\mathbb{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵 A:

$$(\mathbb{A}\varepsilon_1\ \cdots\ \mathbb{A}\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)A.$$

(ii) 求出方阵 A 在 $\mathbb{F}$ 上的全部互不相同的特征值 (必要时指明重数):

$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$, 这些也就是 $\mathbb{A}$ 的全部互不相同的特征值;

(iii) 对每个特征值 λ_i 求出 $(\lambda_iE_n-A)X=0$ 的一个基础解系: $\xi_{i1},\cdots,\xi_{it_i}$;

(iv) 令 $\eta_{ij}=(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)\xi_{ij}$, $1\le j\le t_i$, 则 $\sum\limits_{j=1}^{t_i}k_j\eta_{ij}$ ($k_j\in\mathbb{F}$ 不全为 0) 是 $\mathbb{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量, 即, $\eta_{i1},\cdots,\eta_{it_i}$ 是 $\mathbb{A}$ 的属于 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 的一个基.

(即, A 的特征向量是 $\mathbb{A}$ 的特征向量在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标.)

取基本矩阵 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 为 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 的一个基. 则

$\mathbb{A}$ 在这个基下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

其特征多项式为: $f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$,

所以, A 的全部**实**特征值为 $\lambda = 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, 也就是 $\mathbb{A}$ 的全部特征值.

对于 $\lambda_1 = 1$, 齐次线性方程组 $(\lambda_1 E_4 - A)X = 0$ 的一个基础解系为 $\xi_1 = (0, 0, 0, 1)'$,

令 $\eta_1 = (E_{11}\ E_{12}\ E_{21}\ E_{22})\xi_1 = E_{22}$. 则 $k_1\eta_1 = k_1 E_{22}$ $(k_1 \neq 0)$ 是 $\mathbb{A}$ 的属于 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量;

对于 $\lambda_2 = -1$, 齐次线性方程组 $(\lambda_2 E_4 - A)X = 0$ 的一个基础解系为 $\xi_2 = (-2, 1, 1, 0)'$,

令 $\eta_1 = (E_{11}\ E_{12}\ E_{21}\ E_{22})\xi_2 = -2E_{11} + E_{12} + E_{21}$. 则

$$k_2\eta_2 = k_2(-2E_{11} + E_{12} + E_{21})\ (k_1 \neq 0)$$

是 $\mathbb{A}$ 的属于 $\lambda_2 = -1$ 的全部特征向量;

对于 $\lambda_3 = \sqrt{2}$, 齐次线性方程组 $(\lambda_3 E_4 - A)X = 0$ 的一个基础解系为 $\xi_1 = (\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 1, 0)'$,

令 $\eta_3 = (E_{11}\ E_{12}\ E_{21}\ E_{22})\xi_3$. 则

$$k_3\eta_3 = k_3(\sqrt{2}E_{11} + (2 + \sqrt{2})E_{12} + E_{21})\ (k_3 \neq 0)$$

是 $\mathbb{A}$ 的属于 $\lambda_3 = \sqrt{2}$ 的全部特征向量;

同理, $k_4\eta_4 = k_4(-\sqrt{2}E_{11} + (2 - \sqrt{2})E_{12} + E_{21})$ $(k_4 \neq 0)$

是 $\mathbb{A}$ 的属于 $\lambda_4 = -\sqrt{2}$ 的全部特征向量. □

注: 如果把题目中的 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 换为 $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$, 其余条件不变, 则 $\mathbb{A}$ 只有两个特征值 ± 1 (因为 $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), 从而此时的 $\mathbb{A}$ 不可对角化.

21. (直接用定义.)

注意到: $0 \neq z \in \mathbb{T}$ 的特征向量当且仅当存在 $a \in \mathbb{R}$

使得 $\mathbb{T}(z) = \overline{z} = az$,

利用 z 的实部与虚部即得, $\overline{z} = az$ (注意 $a \in \mathbb{R}$!) 当且仅当 $z \in \mathbb{R}$ (相应的 $a = 1$) 或 z 是纯虚数 (相应的 $a = -1$).

22. 证明: 设 ξ_i 是 A 的属于 λ_i 的特征向量, $1 \leq i \leq s$. 要证 $\xi_1, \cdots, \xi_s$ 线性无关.

法一: (用 Vandermonde 行列式.)

设 $k_1\xi_1 + \cdots + k_s\xi_s = 0$. ①

用 A 左乘①两边得: $A(k_1\xi_1 + \cdots + k_s\xi_s) = A0 = 0$, 即,

$$k_1A\xi_1 + \cdots + k_sA\xi_x = k_1\lambda_1\xi_1 + \cdots + k_s\lambda_s\xi_s = 0. \quad ②$$

用 A 左乘②两边得: $A(k_1\lambda_1\xi_1 + \cdots + k_s\lambda_s\xi_s) = A0 = 0$, 即,

$$k_1\lambda_1A\xi_1 + \cdots + k_s\lambda_sA\xi_x = k_1\lambda_1^2\xi_1 + \cdots + k_s\lambda_s^2\xi_s = 0. \quad ③$$

$\cdots\cdots\cdots,$

重复上述讨论, 可得: $k_1\lambda_1^{s-1}\xi_1 + \cdots + k_s\lambda_s^{s-1}\xi_s = 0$. ④

把上述式子写为: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1\xi_1 \\ k_2\xi_2 \\ \cdots \\ k_s\xi_s \end{pmatrix} = 0.$ ⑤

由于⑤的系数矩阵的行列式是一个不为零的 Vandermonde 行列式, 所以, $k_i\xi_i = 0$; 而 $\xi_i \neq 0$ (特征向量), 所以 $k_i = 0 \ \ (1 \leq i \leq n)$, 即, $\xi_1, \cdots, \xi_s$ 线性无关. □

法二: (用数学归纳法.)

设 $s = 2$. 设 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0$. ①

两边用 A 左乘得: $\lambda_1k_1\xi_1 + \lambda_2k_2\xi_2 = 0$; ②

由①得: $\lambda_1k_1\xi_1 + \lambda_1k_2\xi_2 = 0$; ③

由②③得: $(\lambda_2 - \lambda_1)k_2\xi_2 = 0$;

由于 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$, 所以, $k_2 = 0$, 代入①得: $k_1 = 0$,

即, ξ_1, ξ_2 线性无关, 即, $s = 2$ 时结论成立.

设 $k_1\xi_1 + \cdots + k_{s-1}\xi_{s-1} + k_s\xi_s = 0$; ④

只需证明: $k_1 = \cdots = k_s = 0$. 两边用 A 左乘得:

$$\lambda_1k_1\xi_1 + \lambda_2k_2\xi_2 + \cdots + \lambda_{s-1}k_{s-1}\xi_{s-1} + \lambda_sk_s\xi_s = 0; \quad ⑤$$

由④得: $\lambda_sk_1\xi_1 + \lambda_sk_2\xi_2 + \cdots + \lambda_sk_{s-1}\xi_{s-1} + \lambda_sk_s\xi_s = 0$; ⑥

于是由⑤⑥得:

$(\lambda_1 - \lambda_s)k_1\xi_1 + (\lambda_2 - \lambda_s)k_2\xi_2 + \cdots + (\lambda_s - \lambda_{s-1})k_{s-1}\xi_{s-1} = 0$;

于是由归纳假设得:

$(\lambda_j-\lambda_s)k_j=0,\ 1\leq j\leq s-1;$

但 $\lambda_j-\lambda_s\neq 0,$

所以, $k_j=0,\ 1\leq j\leq s-1$; 代入④得 $k_s=0.$ □

23. (特征值, 特征向量, 方阵的多项式.)

证明: 设 λ 为 A 的任意特征值, 即, 存在 $0\neq\alpha\in\mathbb{F}^n$ 使得 $A\alpha=\lambda\alpha$;

于是, $A^2\alpha=A(A\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$;

但 $A^2=A$, 所以, $\lambda^2\alpha=A^2\alpha=A\alpha=\lambda\alpha$,

而 $\alpha\neq 0$, 所以, $\lambda^2=\lambda$, 即, $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$. □

注1: 事实上, 有如下的

引理: *设 A 有零化多项式 $f(x)$. 则 A 的任意复特征值都是 $f(x)$ 的根. (反之不对: 任意零化多项式的根未必是特征值.)*

证明: 设 λ_0 为 A 的任意复特征值,

即, 存在 $0\neq\alpha\in\mathbb{C}^n$ 使得 $A\alpha=\lambda_0\alpha$;

则, 对任意非负整数 k 有 $A^k\alpha=\lambda_0^k\alpha$,

从而, 对任意 $a_k\in\mathbb{F}$ 有: $a_kA^k\alpha=a_k\lambda_0^k\alpha$.

于是, $0=f(A)\alpha=f(\lambda_0)\alpha$, 而 $\alpha\neq 0$, 所以, $f(\lambda_0)=0$. □

注2: 这个引理对任意有限维线性空间 V 上的任意线性变换 $\mathbb{A}$ 也成立: 利用 $\mathbb{A}$ 在 V 的某个基下的矩阵 A. 注意到 $f(x)$ 零化 $\mathbb{A}$ 当且仅当 $f(x)$ 零化 A.

24. (与第 **23** 题相同. 可以由第 **23** 题的引理直接得到.)

25. (1) 必要性: 设 $\mathbb{A}$ 可逆. 设 λ_0 是 $\mathbb{A}$ 的任意一个特征值, 从而存在 $0\neq\alpha\in V$使得 $\mathbb{A}\alpha=\lambda_0\alpha$. 如果 $\lambda_0=0$, 则 $\mathbb{A}v=0$, 即, $\ker\mathbb{A}\neq 0$, 即, $\mathbb{A}$ 不是单射, 矛盾. 所以, $\lambda_0\neq 0$.

充分性: 注意到 $\dim V<\infty$. 设 $\mathbb{A}$ 没有 0 特征值. 如果 $\mathbb{A}$ 不是可逆的, 则 $\mathbb{A}$ 不是单射,

(由维数公式, 有限维空间上的线性变换 $\mathbb{A}$ 可逆当且仅当 $\mathbb{A}$ 单, 当且仅当 $\mathbb{A}$ 满. 参见 Chapter 4 Ex. 36.)

从而, 存在 $0\neq\alpha\in\ker\mathbb{A}$, 即, $\mathbb{A}\alpha=0=0\alpha$, 即, $\mathbb{A}$ 有 0 特征值,矛盾. 所以, $\mathbb{A}$ 必然是可逆的.

(2) 由 (1) 的必要性可知, $\lambda_0\neq 0$. 任取 $\mathbb{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量 α: $\mathbb{A}\alpha=\lambda_0\alpha$, 两边用 $\mathbb{A}^{-1}$ 作用即得: $\alpha=\lambda_0\mathbb{A}^{-1}\alpha$, 即, $\mathbb{A}^{-1}\alpha=\lambda_0^{-1}\alpha$, 此即表明, λ_0^{-1} 是 $\mathbb{A}^{-1}$ 的一个特征值. □

注: 这个结论对无穷维空间上的线性变换也成立. (只用到了 (1) 的必要性.)

26. (利用 trace 的性质: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.)

27. (略)

28. (略)

29. (略)

30. 参见第 **23** 题中的**注**1的证明.

31. 参见第 **23** 题中的**注**1的证明.

32. (方阵的多项式的特征值为多项式在方阵特征值的取值.)

33. (方阵的多项式的行列式.)

(1) 由特征多项式的定义即得: $f(a) = |aE - A|$, 特别, $f(0) = |-A| = (-1)^n|A|$.

(2) 由矩阵多项式的行列式即得: $|g(A)| = \Pi_{i}{}^{n}{}_{=1} g(\lambda_i)$, 其中, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部复特征值 (重根按重数计). □

34. (方阵的多项式的行列式.)

35. (方阵的多项式的行列式.)

解: A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 2)$, 所以, A 的全部特征值为 $5, -2$. 所以, $|g(A)| = g(5)g(-2)$. □

36. (AB 与 BA 的特征多项式.)

(1) **证明**: 首先证明对任意的 $0 \neq a \in \mathbb{F}$ 有:

$$|aE_n - AB| = a^{n-m}|aE_m - BA|, \qquad ①$$

成立.

对任意 $0 \neq a \in \mathbb{F}$, 对分块矩阵 $\begin{pmatrix} aE_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}$ 分别作广义初等行变换和广义初等列变换:

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -\frac{1}{a}A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} aE_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aE_m & B \\ 0 & -\frac{1}{a}AB + E_n \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} aE_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aE_m - BA & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix},$$

在上两式两边分别取行列式得: (利用“乘积的行列式等于行列式的乘积”、广义初等矩阵的行列式、准对角阵的行列式.)

$$\begin{vmatrix} aE_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = a^m\left|-\frac{1}{a}AB + E_n\right| = |aE_m - BA|;$$

由行列式的性质得:
$\left|-\frac{1}{a}AB+E_n\right| = \left|\frac{1}{a}(aE_n - AB)\right| = \frac{1}{a^n}\,|aE_n - AB|$,

代入上式, 即得: $|aE_n - AB| = a^{n-m}|aE_m - BA|$. 所以①成立.

其次, 考虑多项式

$$f_1(\lambda) = \lambda^m|\lambda E_n - AB| \text{ 和 } f_2(\lambda) = \lambda^n|\lambda E_m - BA|.$$

于是, 由①可知, $f_1(a) = f_2(a)$ 对任意 $0 \neq a \in \mathbb{F}$ 都成立.

而 $\mathbb{F}$ 是数域, 即, $\mathbb{F}$ 中有无穷多个数,

所以, 作为多项式有: $f_1(\lambda) = f_2(\lambda)$. □

注: 由①可得到如下的 (取 $a = 1$)

推论: 设 $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$, $B \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. 则

$$|E_n - AB| = |E_m - BA|.$$

这个推论可用于计算某些行列式.

(2) **解**: 注意到 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)$.

所以, 由 (1) 得: A 的特征多项式为:

$$f(\lambda E_n - A) = |\lambda E_n - A| = \left|\lambda E_n - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)\right|$$

$$= \lambda^{n-1}\left|\lambda E_1 - (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right| = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \sum_{i=1}^n a_ib_i\right),$$

由此即得, A 的全部复特征值为 0 和 $\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i$. □

37. (AB 与 BA 的特征多项式.)

证明: 由于 A, B 都是 n 阶方阵, 于是由第 **36** 题 (1) 即得. □

38. (trace 的一个应用.)

解: 不存在. 若不然,

$$\mathrm{tr}(E_n) = n = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0,$$

矛盾.

注: 无穷维空间上可能存在线性变换 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ 使得 $\mathbb{AB} - \mathbb{BA} = \mathrm{id}$.

39. 解: 由于 $1, \sin t, \cos t$ 在 $\mathbb{R}$ 上是线性无关的, 而 V 由 $1, \sin t, \cos t$ 生成, 所以, $1, \sin t, \cos t$ 是 V 的一个基;

(若 $k_1 1 + k_2 \sin t + k_3 \cos t = 0$, $k_i \in \mathbb{R}$, 则, 取 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 得: $k_1 + k_2 = 0$; 取 $t = 0$ 得 $k_1 + k_3 = 0$, 由此得到: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.)

由 $\mathbf{T}$ 的定义得:

$$\mathbf{T}1 = 1 = (1 \;\; \sin t \;\; \cos t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{T}\sin t = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t = (1 \;\; \sin t \;\; \cos t)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{T}\cos t = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t = (1 \;\; \sin t \;\; \cos t)\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

所以, $\mathbf{T}$ 在 V 的基 $1, \sin t, \cos t$ 下的矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

由此即得: $\mathrm{tr}(\mathbf{T}) = \mathrm{tr}(T) = 2$; $\det(\mathbf{T}) = \det(T) = 1$, 且

$\mathbf{T}$ 的特征多项式为 $f(\lambda) = \det(\lambda E_3 - T) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$.

40. 解: 与第 **39** 题的方法完全相同.

首先注意到, $e^{2t}, te^{2t}, t^2e^{2t}$ 线性无关, 所以, $e^{2t}, te^{2t}, t^2e^{2t}$ 是 V 的一个基.

(设 $k_1e^{2t} + k_2te^{2t} + k_3t^2e^{2t} = 0$, $k_i \in \mathbb{R}$. 则, $k_1 + k_2t + k_3t^2 = 0$, 左边是一个实数域上的多项式, 所以, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.)

由 $\mathbf{D}$ 的定义得:

$$\mathbf{D}(e^{2t}) = (e^{2t})' = 2e^{2t} = (e^{2t} \;\; te^{2t} \;\; t^2e^{2t})\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}(te^{2t}) = (te^{2t})' = (1 + 2t)e^{2t} = (e^{2t} \;\; te^{2t} \;\; t^2e^{2t})\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}(t^2e^{2t}) = (t^2e^{2t})' = (2t+t^2)e^{2t} = (e^{2t}\ te^{2t}\ t^2e^{2t})\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以, $\mathbf{D}$ 在基 $e^{2t}, te^{2t}, t^2e^{2t}$ 下的矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而, $\mathrm{tr}(\mathbf{D}) = \mathrm{tr}(D) = 5$, $\det(\mathbf{D}) = \det(D) = 4$, 且

$\mathbf{D}$ 的特征多项式为 $f(\lambda) = |\lambda E_3 - D| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. □

注: 可进一步考虑本题中的 $\mathbf{D}$ 和第 **39** 题中的 $\mathbf{T}$ 是否可对角化? 即, V 是否能分解为特征子空间的直和. (等价于, 分别考虑矩阵 D, T 是否可对角化.)

41. (Hamilton-Cayley 定理.)

解: 错因: 对方阵的多项式理解不正确. Hamilton-Cayley 定理说的是:

对任意 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, 设 $f(\lambda) = |\lambda E_n - A| \in \mathbb{F}[\lambda]$ 有 $f(A) = 0$.

即, 对于 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ 有:

$$f(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE_n = 0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}).$$ □

42. (Hamilton-Cayley 定理, 带余除法.)

证明: 作带余除法: $g(x) = f(x)q(x) + r(x)$,

其中, $r(x) = 0$ 或 $\partial r(x) < \partial f(x) = n$.

于是, 由 Hamilton-Cayley 定理得:

$$g(A) = f(A)q(A) + r(A) = 0 + r(A) = r(A).$$ □

注: 原题中应该去掉“唯一的”. 因为, 上述讨论中的特征多项式可以换成 A 的别的零化多项式, 比如 A 的极小多项式.

43. (极小多项式, 带余除法.)

证明: 作带余除法: $g(x) = m(x)q(x) + r(x)$,

其中, $r(x) = 0$ 或 $\partial r(x) < \partial m(x)$, 从而,

$$r(A) = g(A) - m(A)q(A) = 0 - 0 = 0,$$

即, $r(x)$ 也是 A 的一个零化多项式.

假设 $r(x) \neq 0$, 则 $\partial r(x) < \partial m(x)$, 与 $m(x)$ 的极小性矛盾.

特别, 由 Hamilton-Cayley 定理, $m(x) | f_A(x)$. □

44. **解**: 注意到 A_i 的特征多项式都是 $(x-2)^3$. 于是, A_i 的极小多项式形如 $(x-2)^k, 1 \le k \le 3$. 直接验证得: A_1, A_2, A_3 的极小多项式分别是:

$$m_1(x) = (x-2)^3,\ m_2(x) = (x-2)^2,\ m_3(x) = x-1. \qquad \square$$

注: 方阵 A 的极小多项式是一次的当且仅当 A 是数量阵.

45. **证明**: 必要性: 设 $(m_A(\lambda), g(\lambda)) = 1$. 于是, 由辗转除法,
存在 $u(\lambda), v(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ 使得 $u(\lambda)m_A(\lambda) + v(\lambda)g(\lambda) = 1$,

从而, $u(A)m_A(A) + v(A)g(A) = E_n$, 其中, E_n 是单位阵,
即, $v(A)g(A) = E_n$, 从而 $g(A)$ 可逆, 即, $\det(g(A)) \neq 0$.
充分性: 设 $\det(g(A)) \neq 0$. 设 A 的全部复特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$(重根按重数计). 则 $\det(g(A)) = \Pi_i{}^n{}_{=1} g(\lambda_i) \neq 0$,

即, $g(\lambda)$ 与 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 没有公共复根, 而, $m_A(\lambda) | f_A(\lambda)$,所以, $g(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 没有公共复根, 从而 $(g(\lambda), m_A(\lambda)) = 1$. $\square$

注: 本题的结论中, 极小多项式可以换成特征多项式.

46. (1) 对 $\mathbb{A}$ 的任意零化多项式 $f(\lambda)$ 有:

$f(\mathbb{A})\alpha = 0\alpha = 0$, 即, $f(\lambda) \in Z(\alpha)$,
而 $\mathbb{A}$ 一定有非零的零化多项式 (比如 $\mathbb{A}$ 的特征多项式), 所以, $Z(\alpha) \neq 0$.

($Z(\alpha)$ 包含 $\mathbb{A}$ 的零化多项式组成的集合.)

(2) (类似于第 **43** 题.)
对任意 $g(\lambda) \in Z(\alpha)$, 作带余除法: $g(\lambda) = m_\alpha(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$, 则

$$r(\mathbb{A})\alpha = g(\mathbb{A})\alpha - q(\mathbb{A})(m_\alpha(\mathbb{A})\alpha) = 0 - 0 = 0,$$

即, $r(\lambda) \in Z(\alpha)$. 所以, 如果 $r(\lambda) \neq 0$, 则由 $\partial r(\lambda) < \partial m_\alpha(\lambda)$ 可得到与 $m_\alpha(\lambda)$ 的极小性相矛盾的结论.

(3) 由于 $\alpha \in L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$, 所以可以设 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i\alpha_i$, $k_i \in \mathbb{F}$.
设 $g(\lambda) = [m_{\alpha_1}(\lambda), \cdots, m_{\alpha_s}(\lambda)]$. 由 (2), 只需证明: $g(\lambda) \in Z(\alpha)$.

$$\text{设 } h_i(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{m_{\alpha_i}(\lambda)},\ 1 \le i \le s, \text{ 则}$$

$$g(\mathbb{A})\alpha = g(\mathbb{A})\left(\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} k_i g(\mathbb{A})\alpha_i = \sum_{i=1}^{s} k_i h_i(\mathbb{A}) m_{\alpha_i}(\mathbb{A})\alpha_i = \sum_{i=1}^{s} k_i h_i(\mathbb{A})0 = 0,$$

此即表明: $g(\lambda) \in Z(\alpha)$.

(4) $g(\lambda) = [m_{\alpha_1}(\lambda), \cdots, m_{\alpha_n}(\lambda)]$. 要证 $g(\lambda)$ 是 $\mathbb{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)$, 只需证明 $g(\lambda)|m(\lambda)$ 且 $m(\lambda)|g(\lambda)$.

首先, 对任意 α_i, 由于 $m(\mathbb{A}) = 0$, 特别, $m(\mathbb{A})\alpha_i = 0$, 即, $m(\lambda) \in Z(\alpha_i)$, 从而由 (2) 可得: $m_{\alpha_i}(\lambda)|m(\lambda), 1 \le i \le n$, 于是, $g(\lambda)|m(\lambda)$;

(若 $G(x)$ 是 $F_1(x), \cdots, F_s(x)$ 的公倍式, 则 $[F_1(x), \cdots, F_s(x)]|G(x)$)

反之, 要证 $m(\lambda)|g(\lambda)$, 只需证明 $g(\lambda)$ 是 $\mathbb{A}$ 的一个零化多项式即可, (参见第 **43** 题.)

也就是说, 只需证明: 对任意 $\alpha \in V$ 有: $g(\mathbb{A})\alpha = 0$.

对任意 $\alpha \in V$, 由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的基, 所以, 可以设 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} t_i\alpha_i$. 于是 (类似于 (3) 中的计算)

$$\begin{aligned} g(\mathbb{A})\alpha &= g(\mathbb{A})\alpha = g(\mathbb{A})\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i g(\mathbb{A})\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} k_i h_i(\mathbb{A}) m_{\alpha_i}(\mathbb{A})\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} k_i h_i(\mathbb{A})0 = 0, \end{aligned}$$

其中, $h_i(\lambda) = \dfrac{g(\lambda)}{m_{\alpha_i}(\lambda)}, 1 \le i \le n$. □

47. (不变子空间的概念, 不变子空间的运算.)

证明: 对任意 $\alpha_1 + \alpha_2 \in W_1 + W_2$, 其中, $\alpha_i \in W_i$, 由于 W_i 是 $\mathbb{A}$-子空间, 所以, $\mathbb{A}\alpha_i \in W_i$, 从而,

$$\mathbb{A}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathbb{A}\alpha_1 + \mathbb{A}\alpha_2 \in W_1 + W_2,$$

此即表明, $W_1 + W_2$ 是 $\mathbb{A}$-子空间.

对任意 $\beta \in W_1 \cap W_2$, 由于 W_i 是 $\mathbb{A}$-子空间, 所以, $\mathbb{A}\alpha_i \in W_i$, 从而,

$$\mathbb{A}\beta \in W_1 \cap W_2,$$

此即表明, $W_1 + W_2$ 是 $\mathbb{A}$-子空间.

48. (不变子空间的概念, 可交换的线性变换.)

证明: 对任意 $\alpha \in \ker \mathbb{B}$, 只需证明 $\mathbb{A}\alpha \in \ker \mathbb{B}$.

事实上, $\mathbb{B}(\mathbb{A}\alpha) = (\mathbb{B}\mathbb{A})\alpha = (\mathbb{A}\mathbb{B})\alpha = \mathbb{A}(\mathbb{B}\alpha) = \mathbb{A}0 = 0$.

对任意 $\gamma \in \mathrm{im}(\mathbb{B})$, 只需证明 $\mathbb{A}\gamma \in \mathrm{im}(\mathbb{B})$.

事实上, 设 $\gamma = \mathbb{B}\beta$, 则

$$\mathbb{A}\gamma = \mathbb{A}(\mathbb{B}\beta) = (\mathbb{A}\mathbb{B})\beta = (\mathbb{B}\mathbb{A})\beta = \mathbb{B}(\mathbb{A}\beta) \in \operatorname{im}(\mathbb{B}).$$ □

注: 该结论对无穷维空间上的线性变换也成立. 这是一个非常有用的结论: 通常用于不变子空间的构造. 例如, 设 $\mathbb{A} \in \operatorname{End}(V)$. 则对任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 由于 $\mathbb{A}$ 与 $f(\mathbb{A})$ 可交换, 所以, $\ker f(\mathbb{A})$ 是 $\mathbb{A}$-子空间. 特别, 设 λ_0 是 $\mathbb{A}$ 的一个特征值, 则 $\mathbb{A}$ 的属于 λ_0 的特征子空间是 $\mathbb{A}$-子空间.

49. **证明**: 对任意 $\alpha \in W$, 由于 W 是 $\mathbb{B}$-子空间, 所以, $\mathbb{B}\alpha \in W$;

又由于 W 是 $\mathbb{A}$-子空间, 所以, $W \ni \mathbb{A}(\mathbb{B}\alpha) = (\mathbb{A}\mathbb{B})\alpha$,

此即表明, W 是 $\mathbb{A}\mathbb{B}$-子空间.

对任意 $\alpha \in W$, 由于 W 既是 $\mathbb{A}$-子空间, 又是 $\mathbb{B}$-子空间, 即, $\mathbb{A}\alpha \in W$ 且 $\mathbb{B}\alpha \in W$, 从而

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})(\alpha) = \mathbb{A}\alpha + \mathbb{B}\alpha \in W,$$

此即表明, W 是 $\mathbb{A} + \mathbb{B}$-子空间. □

50. (1) 对任意 $(x, 0, 0) \in W_1$ 有 $\mathbb{A}(x, 0, 0) = (x, 0, 0) \in W_1$, 所以, W_1 是 $\mathbb{A}$-子空间.

(事实上, $\mathbb{A}$ 在 W_1 上的限制 $\mathbb{A}|_{W_1}$ 是 W_1 上的恒等变换.)

(2) 对任意 $(x, -x, x) \in W_2$ 有 $\mathbb{A}(x, -x, x) = (0, 2x, 0)$. 取 $x = 1$, 即得 $\mathbb{A}(1, -1, 1) = (0, 2, 0) \notin W_2$, 所以, W_2 不是 $\mathbb{A}$-子空间.

(3) 对任意 $(x, y, 0) \in W_3$ 有 $\mathbb{A}(x, y, 0) = (x, y, 0) \in W_3$, 所以, W_3 是 $\mathbb{A}$-子空间.

(事实上, $\mathbb{A}$ 在 W_3 上的限制 $\mathbb{A}|_{W_3}$ 是 W_3 上的恒等变换.)

51. (不变子空间的定义, 用特征向量构造.)

解: 首先, $\mathbb{A}$ 有平凡的不变子空间 0, $\mathbb{R}^2$.

现在考虑 $\mathbb{A}$ 的非平凡子空间. 由于 $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, 所以, $\mathbb{R}^2$ 的任意非平凡子空间必然是一维的.

注意到 $\mathbb{R}^2$ 的一维子空间 $W = L(\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$ 是 $\mathbb{A}$-子空间当且仅当 $\mathbb{A}\alpha \in L(\alpha)$, 当且仅当存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha = a\alpha$, 当且仅当 α 是 $\mathbb{A}$ 的一个特征向量.

所以, 只需求 $\mathbb{A}$ 的线性无关的特征向量.

由题设, $\mathbb{A}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的基本向量 $\varepsilon_1 = (1, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1)$ 下的矩阵为:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

所以, A 的全部实特征值 (这里的数域是 $\mathbb{R}$) 为:

$$\lambda_1=2+\sqrt{5},\ \lambda_2=2-\sqrt{5}.$$

由 $(\lambda_1 E_2-A)X=0$ 得 A 的属于 λ_1 的线性无关的特征向量为 $\xi_1=(1+\sqrt{5},2)$;

由 $(\lambda_2 E_2-A)X=0$ 得 A 的属于 λ_2 的线性无关的特征向量为 $\xi_2=(1+\sqrt{5},-2)$.

由于取的 $\mathbb{R}^2$ 的基为基本向量所组成的基, 所以, 上式 ξ_i 也是 $\mathbb{A}$ 的属于 λ_i 的特征向量;

因此, $\mathbb{A}$ 的所有一维不变子空间为 $L(\xi_1)$, $L(\xi_2)$.

综上, $\mathbb{A}$ 的全部不变子空间为: 0, $\mathbb{R}^2$, $L(\xi_1)$, $L(\xi_2)$. □

注: 一般地, 求任意线性变换的所有不变子空间是很困难的. 由线性变换 $\mathbb{A}$ 的特征向量生成的子空间一定是 $\mathbb{A}$-子空间 (特别, 特征子空间 V_{λ_0} 是 $\mathbb{A}$-子空间); 但是, $\mathbb{A}$-子空间未必一定是由特征向量生成的. (例如, 参见下面的第 **54** 题.)

52. (用线性变换的多项式的核与像构造不变子空间.)

证明: 由第 **48** 题即得, 因为 $f(\mathbb{A})$ 与 $\mathbb{A}$ 可交换. □

53. (Jordan 块的基本性质.)

证明: 由 $(\mathbb{A}\eta_1\ \cdots\ \mathbb{A}\eta_n)=(\eta_1\ \cdots\ \eta_n)\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0\end{pmatrix}$ 得:

$$\mathbb{A}\eta_n=\lambda_0\eta_n,\ \mathbb{A}\eta_i=\lambda_0\eta_i+\eta_{i+1},\ 1\le i\le n-1. \quad ①$$

(1) 设 W 是 $\mathbb{A}$-子空间且 $\eta_1\in W$, 即, $\mathbb{A}\eta_1\in W$. 于是由①得: $\eta_2=\mathbb{A}\eta_1-\lambda_0\eta_1\in W$, 于是, $\mathbb{A}\eta_2\in W$,

从而, $\eta_3=\mathbb{A}\eta_2-\lambda_0\eta_2\in W$;

递归地, $\eta_k\in W$, $1\le k\le n$. 而 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一个基, 所以, $W=V$. □

(2) 设 W 是非零的 $\mathbb{A}$-子空间. 任取非零的 $\alpha \in W$, 设 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\eta_i$, 其中, $k_i \in \mathbb{F}$ 不全为 0.

设 k_j 是 $k_1, \cdots, k_n$ 中的第一个不为 0 的系数,

即, $\alpha = k_j\eta_j + \cdots + k_n\eta_n$. ②

用 $\mathbb{A}$ 作用于②的两边得:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\alpha &= k_j(\lambda_0\eta_j + \eta_{j+1}) + \cdots + k_{n-1}(\lambda_0\eta_{n-1} + k_n)\eta_n + k_n\lambda_n\eta_n \\ &= \lambda_0(k_j\eta_j + \cdots + k_n\eta_n) + k_j\eta_{j+1} + \cdots + k_{n-1}\eta_n \\ &= \lambda_0\alpha + k_j\eta_{j+1} + \cdots + k_{n-1}\eta_n,\end{aligned}$$

于是, 由 $\mathbb{A}\alpha \in W$ 和 $\lambda_0\alpha \in W$ 可知: $\alpha_1 := k_j\eta_{j+1} + k_n\eta_n \in W$.

对 α_1 重复上述讨论可得: $\alpha_2 := k_j\eta_{j+2} + \cdots + k_n\eta_n \in W$;

递归地, 可得: $\alpha_{n-j} := k_j\eta_n \in W$, 而, $k_j \neq 0$, 所以, $\eta_n \in W$. □

(3) 若不然, 设 $V = W_1 \oplus W_2$, 其中, $W_i \neq 0$, 且 W_i 都是 $\mathbb{A}$-子空间, $i = 1, 2$. 则由 (2) 可得: $\eta_n \in W_1$, $\eta_n \in W_2$, 即, $W_1 \cap W_2 \neq 0$, 矛盾. □

注: 此题的含义是: Jordan 块不能相似于非平凡的准对角阵, 表明 Jordan 块是不可分解的. 这个结论也可以用后面的初等因子直接得到. 上述解法的意义在于帮助熟悉概念. 特别注意, 多次用线性变换作用这种技巧.

54. (不变子空间的计算.)

(1) **证明**: 设 $g(x) = a_m x^m + \cdots$, $a_m \neq 0$. 则由 W 是 $\mathbb{D}$-子空间和 $g(x) \in W$ 可得:

$\mathbb{D}^k(g(x)) = g^{(k)}(x) \in W$, $0 \le k \le m$, 其中, $\mathbb{D}^0(g(x)) = g(x)$, ①

且 $\mathbb{D}^k(g(x))$ 的次数不超过 m, $0 \le k \le m$. ②

法一: 由①②我们可以写:

$$\begin{aligned}&(g(x)\ \mathbb{D}(g(x))\ \mathbb{D}^2(g(x))\ \cdots\ \mathbb{D}^m(g(x))) \\ =\ &(x^m\ x^{m-1}\ \cdots\ x\ 1)D, \text{ 其中,}\end{aligned} \quad ③$$

$$D = \begin{pmatrix} a_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & ma_m & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots & (m-1)!a_m & 0 \\ * & * & \cdots & * & m!a_m \end{pmatrix},$$

由于 D 是对角元非零的下三角阵, 所以 D 可逆, 于是, 由③得:

$$(x^m\ x^{m-1}\ \cdots\ x\ 1)$$
$$= (g(x)\ \mathbb{D}(g(x))\ \mathbb{D}^2(g(x))\ \cdots\ \mathbb{D}^m(g(x)))D^{-1},$$

此即表明,

$x^k\ (0 \le k \le m)$ 可以由 $g(x), \mathbb{D}(g(x)), \mathbb{D}^2(g(x)), \cdots, \mathbb{D}^m(g(x))$ 线性表出, 从而由①得: $x^k \in W\ (0 \le k \le m)$. □

法二: 由于 $\mathbb{D}^k(g(x))\ (0 \le k \le m)$ 的次数互不相同, 所以, 它们线性无关;

又 $\mathbb{D}^k(g(x)) \in \mathbb{R}[x]_{m+1}$, 而 $\dim \mathbb{R}[x]_{m+1} = m+1$,

所以, $g(x), \mathbb{D}(g(x)), \mathbb{D}^2(g(x)), \cdots, \mathbb{D}^m(g(x))$ 是 $\dim \mathbb{R}[x]_{m+1}$ 的一个基,

而 $x^m \in \mathbb{R}[x]_{m+1}$, 所以, 存在 $k_j \in \mathbb{R}$ 使得

$$x^m = k_0 g(x) + k_1 \mathbb{D}(g(x)) + k_2 \mathbb{D}^2(g(x)) + \cdots + k_m \mathbb{D}^m(g(x)).$$

由①②即得: $x^m \in W$.

注: 上面的两个方法本质上是相同的: 都是去证明 x^k 可以由 $g(x), \mathbb{D}(g(x)), \mathbb{D}^2(g(x)), \cdots, \mathbb{D}^m(g(x))$ 线性表出.

(2) 假设 W 是 $\mathbb{D}$ 的一个非零的不变子空间, 设 $g(x) \in W$ 是 W 中一个次数最高的多项式, 且 $\partial g(x) = m$. 于是, 由 (1) 的证明可知, $1, x, x^2, \cdots, x^m \in W$, 从而 $\dim W \ge m+1$. 但由于 $g(x)$ 是 W 中次数最高的, 所以, $\dim W \le m+1$, 从而, $\dim W = m+1$, 且, $1, x, \cdots, x^m$ 是它的一个基, 即, $W = \mathbb{R}[x]_m$.

所以, $\mathbb{D}$ 的所有不变子空间为: 0, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[x]_1$, $\cdots$, $\mathbb{R}[x]_n$. □

55. (不变子空间, 特征向量.)

证明: 由假设 $\mathbf{T}$ 有 $n = \dim V$ 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 由于属于不同特征值的特征向量必然线性无关 (参见第 **22** 题), 而每个特征值至少有一个线性无关的特征向量 (方程组 $(\lambda_i E_n - A)X = 0$ 总是有非零解), 所以, 属于每个特征值 λ_i 的线性无关的特征向量的个数恰好是 1.

因此, 我们可以设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 分别是 $\mathbf{T}$ 的属于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的特征向量. 于是, 任取 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 的一个子组 $\xi_{j_1}, \cdots, \xi_{j_r}$, 令

$$W_{j_1 \cdots j_r} = L(\xi_{j_1}, \cdots, \xi_{j_r}), \qquad ①$$

则, $W_{j_1 \cdots j_r}$ 是 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间, 这样的不变子空间的个数为:

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

另一方面, 由于 $V = L(\xi_1) \oplus L(\xi_2) \oplus \cdots \oplus L(\xi_n)$, 而 $L(\xi_i) = V_{\lambda_i}$ 是 $\mathbf{T}$ 的属于特征值 λ_i 的特征子空间, 所以, 由下面的引理可知, 对任意 $\mathbf{T}$-子空间 W 有:

$$W = (W \cap L(\xi_1)) \oplus (W \cap L(\xi_2)) \oplus \cdots \oplus (W \cap L(\xi_n)).$$

由于 $\dim L(\xi_i) = 1$, 所以, $\dim(W \cap L(\xi_1)) \leq 1$, 且, $\dim(W \cap L(\xi_1)) = 1$ 当且仅当 $\xi_i \in W$. 于是, 必然存在 $j_1, \cdots, j_r$ 使得 $W = L(\xi_{j_1}, \cdots, \xi_{j_r})$, 即, W 具有①的形式.

综上, 结论成立. $\square$

引理: 设 $\mathbb{T} \in \mathrm{End}(V)$, $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$ 是 $\mathbb{T}$ 的特征子空间的直和 (即, $\mathbb{T}$ 可对角化). 则对任意 $\mathbb{T}$-子空间 W 有:

$$W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus (M \cap V_{\lambda_2}) \oplus \cdots \oplus (M \cap V_{\lambda_s}). \qquad ②$$

注: 这里的 V 可以是无穷维的. 由于子空间的和与交不满足分配律, 所以, ②**不能**由

$$W = W \cap V = W \cap (V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s})$$

用分配律而得到, 因此②不是显然的. 由于 W 是 $\mathbb{T}$-子空间, 所以, ②的含义是: 如果 $\mathbb{T}$ 是可对角化的, 那么 $\mathbb{T}$ 在 W 上的限制 $\mathbb{T}|_W$ 也是可对角化的, 即, W 可以分解为 $\mathbb{T}|_W$ 的特征子空间的直和. 这是一个很有用的结论.

引理的证明: (Vandermonde 行列式的一个应用.)

由于子空间的和 $(W \cap V_{\lambda_1}) \oplus (M \cap V_{\lambda_2}) \oplus \cdots \oplus (M \cap V_{\lambda_s})$ 是直和, 所以, 只需证明: $W = (W \cap V_{\lambda_1}) + (M \cap V_{\lambda_2}) + \cdots + (M \cap V_{\lambda_s})$. ③

对于任意 $\alpha \in W \subseteq V$, 由于 $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$, 所以, 存在唯一的 $\alpha_i \in V_{\lambda_i}$ 使得

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s. \qquad ④$$

所以, 只需证明 $\alpha_i \in W$ (从而 $\alpha_i \in W \cap V_{\lambda_i}$, 由此即得③).

用 $\mathbb{T}$ 在④的两边连续作用 $s-1$ 次, 得到如下的 s 个等式 (由 $\alpha_i \in V_{\lambda_i}$ 可得: $\mathbb{T}\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$):

$$\begin{cases} \alpha & = & \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s \\ \mathbb{T}\alpha & = & \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s \\ \mathbb{T}^2\alpha & = & \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s^2\alpha_s \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{T}^{s-1}\alpha & = & \lambda_1^{s-1}\alpha_1 + \lambda_2^{s-1}\alpha_2 + \cdots + \lambda_s^{s-1}\alpha_s \end{cases} \qquad ⑤$$

我们可以把⑤写成矩阵形式: $\begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbb{T}\alpha \\ \mathbb{T}^2\alpha \\ \cdots \\ \mathbb{T}^{s-1}\alpha \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}$, 其中,

$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}$, 其行列式是一个 Vandermonde 行列式. 由于 λ_i 互不相同, 所以 V 可逆, 从而

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbb{T}\alpha \\ \mathbb{T}^2\alpha \\ \cdots \\ \mathbb{T}^{s-1}\alpha \end{pmatrix},$$

此即表明, 每个 α_i 都可以由 $\alpha, \mathbb{T}\alpha, \mathbb{T}^2\alpha, \cdots, \mathbb{T}^{s-1}\alpha$ 线性表出, 而 $\mathbb{T}^i\alpha \in W$, 所以 $\alpha_i \in W$, 正如所需. □

56. (略)

57. (略)

58. (略)

59. (准对角阵与不变子空间直和分解.)

证明: 由于 $L = L_1 \oplus L_2$, 所以, 任取 L_1 的一个基 $\xi_1, \cdots, \xi_r$ 和 L_2 的一个基 $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$, 即可得到 L 的一个基:

$$\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n.$$

对于 $i = 1, 2$, 由于 L_i 是 $\mathbb{A}$-子空间, 所以有 $\mathbb{A}$ 在 L_i 上的限制:

$$\mathbb{A}|_{L_i} \in \mathrm{End}(L_i),$$

从而有 $\mathbb{A}|_{L_1}$ 在 L_1 的基 $\xi_1, \cdots, \xi_r$ 下的矩阵 A_1, 以及 $\mathbb{A}|_{L_2}$ 在 L_2 的基 $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$ 下的矩阵 A_2, 即,

$$(\mathbb{A}|_{L_1}\xi_1 \ \cdots \ \mathbb{A}|_{L_1}\xi_r) = (\xi_1 \ \cdots \ \xi_r)A_1;$$

$$(\mathbb{A}|_{L_2}\xi_{r+1} \ \cdots \ \mathbb{A}|_{L_2}\xi_n) = (\xi_{r+1} \ \cdots \ \xi_n)A_2,$$

由于对任意 $\alpha \in L_i$ 有 $\mathbb{A}|_{L_i}\alpha = \mathbb{A}\alpha$, $i = 1, 2$,

(线性变换的“限制”的含义.)

所以,

$$(\mathbb{A}\xi_1\ \cdots\ \mathbb{A}\xi_r\ \mathbb{A}\xi_{r+1}\ \cdots\ \mathbb{A}\xi_n)=(\xi_1\ \cdots\ \xi_r\ \xi_{r+1}\ \cdots\ \xi_n)\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},$$

即, $\mathbb{A}$ 在基 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$,

从而, $\mathbb{A}$ 的特征多项式为

$$f_{\mathbb{A}}(\lambda)=|\lambda E_n-A|=\begin{vmatrix}\lambda E_r-A_1 & 0\\ 0 & \lambda E_{n-r}-A_2\end{vmatrix}$$

(有限维线性空间上的线性变换的特征多项式的定义.)

$$=|\lambda E_r-A_1||\lambda E_{n-r}-A_2|=f_{\mathbb{A}|_{L_1}}(\lambda)f_{\mathbb{A}|_{L_2}}(\lambda).$$

($\mathbb{A}|_{L_i}$ 的特征多项式 $f_{\mathbb{A}|_{L_i}}(\lambda)$ 就是 A_i 的特征多项式.)

注: 从上面的证明过程可以得到如下的

引理: 设 $\mathbb{A}\in\mathrm{End}(V)$, $\dim V<\infty$. 则, 存在 V 的一个基使得 $\mathbb{A}$ 在这个基下的矩阵为准对角阵当且仅当 V 可以分解为 $\mathbb{A}$-子空间的直和.

60. (线性变换的不变子空间.)

证明: 由 Hamilton-Cayley 定理, $\mathbb{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 $\mathbb{A}$ 的一个非零的零化多项式: $f(\mathbb{A})=0$. 由题设, $f(\lambda)=g(\lambda)h(\lambda)$, $(g,h)=1$, 从而由准素分解定理有空间直和分解:

$$V=\ker g(\mathbb{A})\oplus\ker h(\mathbb{A}).\qquad ①$$

由于 $\ker g(\mathbb{A})$ 和 $\ker h(\mathbb{A})$ 都是 $\mathbb{A}$-子空间, 所以有限制变换:

$$\mathbb{A}_1:=\mathbb{A}|_{\ker g(\mathbb{A})}\in\mathrm{End}(\ker g(\mathbb{A}));$$

$$\mathbb{A}_2:=\mathbb{A}|_{\ker h(\mathbb{A})}\in\mathrm{End}(\ker h(\mathbb{A})).$$

设 $\mathbb{A}_i$ 的特征多项式为 $f_i(\lambda)$, $i=1,2$, 从而由①得:

$$g(\lambda)h(\lambda)=f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda).\qquad ②$$

要求证明: $g(\lambda)=f_1(\lambda)$ 和 $h(\lambda)=f_2(\lambda)$.

由于对任意 $\alpha\in\ker g(\mathbb{A})$ 有 $g(\mathbb{A})\alpha=0$, 从而

$$g(\mathbb{A}_1)\alpha=g(\mathbb{A})\alpha=0,$$ ($\mathbb{A}_1$ 是 $\mathbb{A}$ 在 $\ker g(\mathbb{A})$ 上的限制.)

由 α 的任意性得: $g(\mathbb{A}_1)=0$, 即, $g(\lambda)$ 是 $\mathbb{A}_1$ 的一个零化多项式,

而 $f_1(\lambda)$ 是 $\mathbb{A}_1$ 的特征多项式, 所以由 $f_1(\lambda)$ 的任意复根都是 $g(\lambda)$ 的根;

同理, $f_2(\lambda)$ 的任意复根都是 $h(\lambda)$ 的根,

又由于 $(g(\lambda), h(\lambda)) = 1$, f, g, f_1, f_2 首一, 所以, 由下面的引理可知, 必然有 $f_(\lambda) = g(\lambda)$, $f_2(\lambda) = h(\lambda)$. $\square$

引理: 设 $f(x), g(x), f_1(x), g_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ 首一且 $(f, g) = 1$, $f_1(x)$ 的复根都是 $f(x)$ 的复根, $f_2(x)$ 的复根都是 $g(x)$ 的复根. 如果 $f(x)g(x) = f_1(x)g_1(x)$, 则 $f(x) = f_1(x)$, $g(x) = g_1(x)$.

(参见 Chapter 1 Ex. 48.)

61. (准素分解定理.)

证明: 对 s 作归纳.

$s = 2$ 时, 由题设, $f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda)$, $(f_1, f_2) = 1$, f_1, f_2 首一,

从而由第 **60** 题可知, $\mathbb{A}|_{\ker f_i(\mathbb{A})}$ 的特征多项式就是 $f_i(\lambda)$, $i = 1, 2$.

而任意有限维线性空间上的线性变换的特征多项式的次数就是这个空间的维数, 所以

$$\dim \ker f_i(\mathbb{A}) = \deg f_i(\lambda),\ i = 1, 2,$$

即, $s = 2$ 时结论成立.

对于 $f(\lambda) = f_1(\lambda) \cdots f_s(\lambda)$, 令 $g(\lambda) = f_2(\lambda) \cdots f_s(\lambda)$.

于是, $(f_1(\lambda), g(\lambda)) = 1$, $f(\lambda) = f_1(\lambda) g(\lambda)$, 从而由 $s = 2$ 的结论可知,

$$V = \ker f_1(\mathbb{A}) \oplus \ker g(\mathbb{A}),$$

且, $\dim \ker f_1(\lambda) = \deg f_1(\lambda)$, $\dim \ker g(\mathbb{A}) = \deg g(\lambda)$.

注意到 $\mathbb{A}|_{\ker g(\mathbb{A})}$ 的特征多项式就是 $g(\lambda) = f_2(\lambda) \cdots f_s(\lambda)$,

从而由归纳假设即得:

$\ker g(\mathbb{A}) = \ker f_2(\mathbb{A}) \oplus \cdots \oplus \ker f_s(\mathbb{A})$,

且 $\dim \ker f_i(\mathbb{A}) = \deg f_i(\lambda)$, $2 \le i \le s$. $\square$

62. (特征值的几何重数不超过其代数重数.)

注: 对 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 的任意特征值 $\lambda_0 \in \mathbb{F}$, 其代数重数为 λ_0 作为 A 的特征多项式的根的重数; 而几何重数是特征子空间

$$V_{\lambda_0} = \{\alpha \in \mathbb{F}^n |\ A\alpha = \lambda_0 \alpha\}$$

的维数.

证明: (本题结论对任意数域上的方阵的特征值都成立.)

设 $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ 为 A 的任意特征值. 任意取定其特征子空间 V_{λ_0} 的一个基:

$$\xi_1, \cdots, \xi_r,\ r = \dim V_{\lambda_0} \text{ 是 } \lambda_0 \text{ 的几何重数.}$$

把 $\xi_1, \cdots, \xi_r$ 扩充为 V 的一个基:

$$\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n.$$

由于 $A\xi_i = \lambda_0\xi_i$, $1 \le i \le r$, 所以, A 在这个基下的矩阵是形如

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 E_r & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

的准上三角阵.

从而 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda-\lambda_0)E_r & * \\ 0 & \lambda E_{n-r} - A_1 \end{vmatrix} = (\lambda-\lambda_0)^r f_{A_1}(\lambda),$$

其中, $f_{A_1}(\lambda)$ 为 A_1 的特征多项式.

由此即得, λ_0 的代数重数 $\ge r = \dim V_{\lambda_0}$. □

63. (线性变换的极小多项式.)

证明: 设 $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}|_{V_i}, 1 \le i \le s$.

设 $m(x)$ 是 $\mathbb{A}$ 的极小多项式, 设 $m_i(x)$ 是 $\mathbb{A}_i$ 的极小多项式, $1 \le i \le s$.

令 $M(x) = [m_1(x), \cdots, m_s(x)]$. 只需证明 $m(x) = M(x)$.

设 $M(x) = m_i(x)n_i(x)$. 则对任意 $\alpha \in V$, 由于 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$, 所以, 存在唯一的 $\alpha_i \in V_i$ 使得 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i$, 于是,

$$\mathbb{A}\alpha_i = \mathbb{A}_i\alpha_i, \text{ (}\mathbb{A}_i \text{ 是 } \mathbb{A} \text{ 在 } V_i \text{ 上的限制!)}$$

从而,

$$\begin{aligned} M(\mathbb{A})\alpha &= \sum_{i=1}^{s} M(\mathbb{A})\alpha_i = \sum_{i=1}^{s} n_i(\mathbb{A})m_i(\mathbb{A})\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{s} n_i(\mathbb{A})m_i(\mathbb{A}_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^{s} n_i(\mathbb{A})0 = 0, \end{aligned}$$

由 α 的任意性, $M(\mathbb{A}) = 0$ 是 V 上的零变换, 即, $M(x)$ 是 $\mathbb{A}$ 的零化多项式, 所以, $m(x)|M(x)$.

反之, 对每个 $1 \le i \le n$ 和任意 $\alpha_i \in V_i$, 由于

$$m(\mathbb{A}_i)\alpha_i = m(\mathbb{A})\alpha_i = 0\alpha_i = 0,$$

即, $m(\mathbb{A}_i)$ 是 V_i 上的零变换, 从而, $m(x)$ 是 $\mathbb{A}_i$ 的一个零化多项式, 于是, $m_i(x)|m(x)$, 从而 $M(x)|m(x)$. □

64. (λ-矩阵的可逆的条件, λ-矩阵的标准型.)

证明: 设 $A(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 型 λ-矩阵.

必要性: 设 $A(\lambda)$ 可逆, 则 $0 \neq \det(A(\lambda)) \in \mathbb{F}$, 从而 $A(\lambda)$ 的标准型是单位阵 E_n, 即, A 与 E_n 相抵;

充分性: 由于 $A(\lambda)$ 与 E_n 相抵, 而 λ-矩阵的初等变换只改变行列式的非零数倍, 所以, $0 \neq \det(A(\lambda)) \in \mathbb{F}$, 所以, $A(\lambda)$ 可逆.

或者, 由 $A(\lambda)$ 与 E_n 相抵可知, 存在若干初等 λ-阵 $P_1(\lambda), \cdots, P_r(\lambda)$ 和 $Q_1(\lambda), \cdots, Q_s(\lambda)$ 使得

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= P_1(\lambda) \cdots P_r(\lambda) E_n Q_1(\lambda) \cdots Q_s(\lambda) \\ &= P_1(\lambda) \cdots P_r(\lambda) Q_1(\lambda) \cdots Q_s(\lambda), \end{aligned}$$

而初等 λ-阵是可逆的, 所以,

$$A(\lambda)(Q_s^{-1}(\lambda) \cdots Q_1^{-1}(\lambda) P_r^{-1}(\lambda) \cdots P_1^{-1}(\lambda)) = E_n,$$

此即表明, $A(\lambda)$ 可逆. □

注: 对 λ-矩阵而言, 可逆与满秩不是等价的, 所以, 这里不能用秩去证明. 本题的结论表明:

推论: n-阶 λ-阵可逆当且仅当它可以写为若干初等 λ-阵的乘积, 从而两个 λ-阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵当且仅当存在可逆的 $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda)$ 使得 $A(\lambda) = P(\lambda)B(\lambda)Q(\lambda)$. □

65. (λ-阵的相抵的概念是数字矩阵的相抵的概念的推广.)

法一: (利用: λ-阵的初等变换不改变 λ-阵的秩, 见第 **66** 题.)

证明: 由于 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 作为 λ-阵相抵, 所以 A, B 的作为 λ-矩阵的秩相等; 而 λ-阵的秩是非零子式的最大阶数, 所以, A, B 的非零子式的最大阶数相同; 而 A, B 作为 $\mathbb{F}$ 上的矩阵的秩也分别等于 A, B 的非零子式的最大阶数 (Chapter 3 中的定理), 所以, 作为 $\mathbb{F}$ 上的矩阵有 $r(A) = r(B)$, 从而, 作为 $\mathbb{F}$ 上的矩阵有 A 与 B 相抵. □

法二: (利用 λ-阵的多项式表达式.)

(要证明 A, B 作为 $\mathbb{F}$ 上的矩阵相抵, 只需证明存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆阵 P_0, Q_0 使得 $A = P_0 B Q_0$.)

由于 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 作为 λ-阵相抵, 所以存在可逆的 λ-矩阵 $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda)$ 使得 $A(\lambda)=P(\lambda)BQ(\lambda)$. 设

$P(\lambda)=\lambda^r P_r+\cdots+\lambda P_1+P_0$, $Q(\lambda)=\lambda^s Q_s+\cdots+\lambda Q_1+Q_0$,

其中, P_i,Q_j 是 $\mathbb{F}$ 上的矩阵. 由下面的引理可知, P_0,Q_0 可逆, 从而由 $A(\lambda)=P(\lambda)BQ(\lambda)$ 得:

$$\begin{aligned}A&=(\lambda^r P_r+\cdots+\lambda P_1+P_0)B(\lambda^s Q_s+\cdots+\lambda Q_1+Q_0)\\&=\cdots+P_0BQ_0,\end{aligned}$$

比较两边的次数即得: $A=P_0BQ_0$. □

引理: 如果 n 阶 λ-矩阵 $M(\lambda)=\lambda^m M_m+\cdots+\lambda M_1+M_0$ (其中, M_i 是数字矩阵) 可逆, 则 M_0 可逆.

证明: 设 $M(\lambda)^{-1}=\lambda^{m'}N_{m'}+\cdots+\lambda N_1+N_0$, 其中, N_i 是数字矩阵. 代入 $M(\lambda)M(\lambda)^{-1}=E_n$ 并比较两边的“常数项”即得 $M_0N_0=E_n$. □

66. (λ-阵的初等变换不改变 λ-阵的秩.)

证明: λ-矩阵的初等变换不改变行列式因子, 所以, 不改变非零子式的最大阶数, 即, 不改变 λ-矩阵的秩. □

67. (λ-阵的标准型的定义及其计算.)

求标准型 (或不变因子) 的方法:

法一: 直接用 λ-阵的初等变换 (一般地, 设法让西北角的元的次数尽可能小) ;

法二: 利用行列式因子;

法三: 利用初等因子.

68. (λ-矩阵的行列式因子, 多项式的最大公因式.)

求行列式因子的方法:

法一: 直接用行列式因子的定义. 由行列式因子的性质 $(D_i(\lambda)|D_{i+1}(\lambda))$, 一般先考虑较高阶的行列式因子.

法二: 用初等因子.

法三: 用不变因子.

69. (略)

70. (略)

71. (略)

72. (利用初等因子求不变因子.)

即, $A(\lambda)$ 的不变因子为:

$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1;$

$d_3(\lambda) = \lambda + 1;$

$d_4(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3);$

$d_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 2)^3(\lambda + 1)^2(\lambda - 3)(\lambda - 1).$

73. 不相抵.

74. (略)

75. (略)

76. (λ-矩阵的多项式展开式, 待定系数法.)

解: 结论成立当且仅当 A 可逆.

设 $U(\lambda) = \lambda^\ell U_\ell + \cdots + \lambda U_1 + V_0$, $P_i, V_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$,

$Q(\lambda) = \lambda^{\ell-1} U_{\ell-1} + \cdots + \lambda Q_1 + Q_0$, $Q_j \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

代入 $U(\lambda) = (A\lambda + B)Q(\lambda) + U_0$, 并比较两边的系数得:

$$\begin{cases} AQ_{\ell-1} = U_\ell, \\ AQ_{\ell-2} + BQ_{\ell-1} = U_{\ell-1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ AQ_0 + BQ_1 = U_1, \\ BQ_0 + U_0 = V_0. \end{cases} \qquad ①$$

由此可得:

如果 A 可逆, 则由①可递推地求出 Q_j 和 U_0; 反之, 由于①对任意 $U(\lambda)$ 成立, 即, $AQ_{\ell-1} = U_\ell$ 对任意 U_ℓ 有解, 所以必然有: A 可逆. □

77. (λ-矩阵的多项式展开式, 待定系数法.)

解: 设 $P(\lambda) = \lambda^n P_n + \cdots + \lambda P_1 + P_0$, $P_i \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

则: 结论成立当且仅当 P_n 可逆. 证明与第 **76** 题类似. □

78. (矩阵相似的充要条件的应用.)

证明: A 的特征阵 $\lambda E_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$ 的行列式因子为:

$D_1(\lambda) = 1$, $D_2(\lambda) = \lambda - 2$, $D_3(\lambda) = |\lambda E_3 - A| = (\lambda - 2)^3$.

B 的特征阵 $\lambda E_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$ 的行列式因子为:

$D_1(\lambda)=1,\ D_2(\lambda)=1,\ D_3(\lambda)=|\lambda E_3-A|=(\lambda-2)^3.$

所以, A 与 B 的行列式因子不同, 从而不相似. $\square$

79. (矩阵相似的充要条件的应用.)

(首先检查 A, B 有相同的 trace, 行列式, 因此, "有可能"是相似的.)

解: A 的特征阵 $\lambda E_3-A=\begin{pmatrix}\lambda-3 & -2 & -2\\ -4 & \lambda-2 & -6\\ -2 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$ 的行列式因子为:

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1,\ D_3(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+4\lambda-12;$$

B 的特征阵 $\lambda E_3-B=\begin{pmatrix}\lambda-36 & 1 & -11\\ 42 & \lambda & 12\\ 98 & -1 & \lambda+29\end{pmatrix}$ 的行列式因子为:

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1,\ D_3(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+4\lambda-12,$$

因此, A, B 有相同的行列式因子, 所以, A 与 B 是相似的. $\square$

80. (略)

81. (矩阵相似的充要条件的应用, 特征多项式与极小多项式.)

解: 必要性正确: 如果 $A=P^{-1}BP$, 则对任意多项式 $f(x)$ 有 $f(A)=P^{-1}f(B)P$, 从而 $f(A)=0$ 当且仅当 $f(B)=0$, 因此, A,B 有相同的极小多项式. 进一步, $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$, 所以它们的特征多项式也相同.

充分性不成立. 例如:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},$$

则 A, B 的特征多项式都等于 $(\lambda-2)^4$, 极小多项式都为 $(\lambda-2)^2$;

但是由于它们的初等因子不同, 所以不相似. $\square$

82. (矩阵相似的充要条件的应用, Jordan 块与有理块之间的关系.)

证明: A 的特征阵为 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & b_t\\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & b_{t-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & b_2\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+b_1\end{pmatrix}$,

其行列式因子为:

$D_1(\lambda) = \cdots = D_{t-1}(\lambda) = 1,$

$D_t(\lambda) = g(\lambda) = \lambda^t + b_1 t^{t-1} + \cdots + b_{t-1}\lambda + b_t;$

(参见 Chapter 3 Ex. 84 (4).)

B 的特征阵为 $\lambda E - B = \begin{pmatrix} \lambda - k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda - k \end{pmatrix}$,

其行列式因子为:

$D_1(\lambda) = \cdots = D_{t-1}(\lambda) = 1$, $D_t(\lambda) = (\lambda - k)^t = g(\lambda)$;

所以, A, B 的特征多项式相同, 从而相似. □

注: 对任意一次多项式的幂 $(\lambda - k)^t$, 以它为初等因子的矩阵都相似于本题中的 Jordan 块 B 和有理块 A.

83. (求 Jordan 标准型.)

算法: (设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. 判断 A 在 $\mathbb{F}$ 上是否有 Jordan 标准型, 如果有, 求其 Jordan 标准型.)

Step 1: 求出 A 的在 $\mathbb{F}$ 上的全部初等因子. (常用方法: 用 λ-阵的初等变换把 $\lambda E - A$ 化为对角阵 (不必要化为标准型), 然后分解正次数的对角元得到初等因子; 或者用行列式因子求出不变因子从而得到初等因子.) (由于 A 的全部初等因子的乘积等于 A 的特征多项式, 所以, A

在 $\mathbb{F}$ 上有 Jordan 标准型当且仅当 A 的特征多项式在 $\mathbb{F}$ 上是一次因式的幂, 此时, A 的 Jordan 标准型的对角元是 A 的特征值.)

Step 2: 判断: 如果 A 的上述初等因子中出现次数大于 1 的因式的幂,

则 A 在 $\mathbb{F}$ 上没有 Jordan 标准型; 否则, 即, A 的上述所有初等因子都是一次因式的幂, 则 A 在 $\mathbb{F}$ 上有 Jordan 标准型.

Step 3: 设 A 在 $\mathbb{F}$ 上的全部初等因子为: $(\lambda - a_i)^{m_{ij}}$, $a_i \in \mathbb{F}$ 互不相同, $m_{ij} \geq 1$, $1 \leq j \leq t_i$, $1 \leq i \leq s$, 则 A 在 $\mathbb{F}$上的 Jordan 标准型为: (每个初等因子 $(\lambda - a_i)^{m_{ij}}$ 给出一个对角元为 a_i, 阶数为 m_{ij} 的 Jordan 块 $J_{ij}(a_i)$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq t_i$, t_i 是对角元为 a_i 的 Jordan 块的个数)

$$A \sim J = \operatorname{diag}(J_{11}(a_1), \cdots, J_{1t_1}(a_1), \cdots, J_{s1}(a_s) \cdots, J_{st_s}(a_s))$$

$$
= \begin{pmatrix} J_{11}(a_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{1t_1}(a_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J_{s1}(a_s) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{st_s}(a_s) \end{pmatrix},
$$

其中, $(\lambda - a_i)^{m_{ij}}$ 对应的 Jordan 块为: (对角元为 a_i 的 m_{ij} 阶 Jordan 块)

$$
J_{ij}(a_i) = \begin{pmatrix} a_i & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_i \end{pmatrix}_{m_{ij} \times m_{ij}}.
$$

由 Jordan 标准型理论得到如下的

推论: 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. 则 A 在 $\mathbb{F}$ 上相似于一个对角阵当且仅当 A 在 $\mathbb{F}$ 上的全部初等因子都是一次因式.

具体求解略.

84. (利用 Jordan 标准型对矩阵进行分类, 全部初等因子的乘积等于特征多项式.)

结论: 设 $f(x) = (x - a_1)^{r_1} \cdots (x - a_s)^{r_s}$, 其中, $a_i \in \mathbb{F}$ 互不相同, $r_1 + \cdots + r_s = n$. 则在相似意义下, 以 $f(x)$ 为特征多项式的 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵有 $p(r_1)p(r_2)\cdots p(r_s)$ 类, 其中, $p(r_i)$ 为 r_i 的划分的个数.

(因为: 满足条件的方阵在 $\mathbb{F}$ 上有 Jordan 标准型; 而在相似意义下的 Jordan 阵的个数等于所有可能的初等因子的组合数 (每个组合的乘积等于 $f(x)$).)

证明: 由于 $f(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, 而 $p(3) = 3$ $(3 = 3; 3 = 2+1, 3 = 1+1+1)$, 所以, 以 $(\lambda - 1)^3$ 为特征多项式的 Jordan 标准型有 3 个,

且, 由于极小多项式是特征多项式的因式, 且有相同的根, 所以, 极小多项式的可能性也只有 3 种:

(i) $\lambda - 1$, 对应的 Jordan 阵为 $\mathrm{diag}(J_1(1), J_1(1), J_1(1)) = E_3$; (初等因子为: $\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1$.)

(ii) $(\lambda-1)^2$, 对应的 Jordan 阵为 $\operatorname{diag}(J_2(1), J_1(1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(初等因子为: $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)$.)

(iii) $(\lambda-1)^3$, 对应的 Jordan 矩阵为 $J_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (初等因子为: $(\lambda-1)^3$.)

85. (特征多项式, 极小多项式, 准对角阵的极小多项式, Jordan 标准型的应用.)

(1) 由于 $p(4) = 5$, $(4 = 4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1)$, 所以, Jordan 标准型有 5 种可能;

对于 $J_4(1)$ (初等因子为: $(\lambda-1)^4$), 极小多项式为 $(\lambda-1)^4$;

对于 $\operatorname{diag}(J_3(1), J_1(1))$ (初等因子为: $(\lambda-1)^3$, $(\lambda-1)$), 极小多项式为 $(\lambda-1)^3$;

对于 $\operatorname{diag}(J_2(1), J_2(1))$ (初等因子为: $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$), 极小多项式为 $(\lambda-1)^2$;

对于 $\operatorname{diag}(J_2(1), J_1(1), J_1(1))$ (初等因子为: $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)$, $(\lambda-1)$), 极小多项式为 $(\lambda-1)^2$;

对于 $\operatorname{diag}(J_1(1), J_1(1), J_1(1), J_1(1))$ (初等因子为: $(\lambda-1)$, $(\lambda-1)$, $(\lambda-1)$, $(\lambda-1)$), 极小多项式为 $(\lambda-1)$.

所以, 极小多项式的可能性有 4 种. □

(2) (题目的意思是, 一般地, 仅由特征多项式和极小多项式是不能决定 Jordan 标准型的 (由初等因子决定), 特征多项式和极小多项式都相同推不出相似, 所以, 在仅知道特征多项式和极小多项式的情况下, 要确定相似意义下的分类, 还需要加条件. 在本题的情况下, 只需再考虑 $r(E-A)$ 就可以了.)

由 (1) 可知, 只有当极小多项式是 $(\lambda-1)^2$ 时, 才有两种可能: $\operatorname{diag}(J_2(1), J_2(1))$ 和 $\operatorname{diag}(J_2(1), J_1(1), J_1(1))$.

当 $A \sim \operatorname{diag}(J_2(1), J_2(1))$ 时,

$$r(E-A) = r(E - \operatorname{diag}(J_2(1), J_2(1))) = 2;$$

当 $A \sim \operatorname{diag}(J_2(1), J_1(1), J_1(1))$ 时,

$$r(E-A) = r(E - \operatorname{diag}(J_2(1), J_1(1), J_1(1))) = 1.$$

所以, 结论成立.

86. (Jordan 标准型的应用, 矩阵的秩.)

注1: 定义: n 阶方阵 A 的 nullity 为 $n-r(A)$, 就是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间的维数.

注2: 若 $A\sim B$, 则 $r(A)=r(B)$, $r(aE-A)=r(aE-B)$, 任意 $a\in\mathbb{F}$.

注3: 对任意 Jordan 块 $J_r(a)$ 有:

$$r(bE_r-J_r(a))=\begin{cases} r, & b\neq a,\\ r-1, & b=a,\end{cases} \text{ 且,}$$

$$r((aE_r-J_r(a))^k)=r-k,\ 1\leq k\leq r.$$

解:

(1) 由 $S-E$ 的 nullity 为 1,

即, $5-r(S-E)=1$, 得 $r(S-E)=4$, 从而, S 的以 1 为对角元的 Jordan 块只有一个, 且必然是一阶的: $J_1(1)$;

设 S 的由特征值 2 的 Jordan 块组成的子矩阵为 S_1,

从而 $S-2E_5=\begin{pmatrix} S_1-2E_4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. ①

由于 $(S-2E)^2$ 的 nullity 为 4, 即, $r((S-2E)^2)=1$, 所以由① 得: $r((S_1-2E)^2)=0$, 即, $(S_1-2E)^2=0$, 所以,

S_1 只可能是 $\mathrm{diag}(J_2(2),J_2(2))$ 或 $\mathrm{diag}(J_2(2),J_1(2),J_1(2))$; ②

由于 $(S-2E)$ 的 nullity 为 2, 即, $r(S-2E)=3$,

所以由①得: $r(S_1-2E)=2$, 所以, 由②得: S_1 只能是 $\mathrm{diag}(J_2(2),J_2(2))$.

综上, $S=\mathrm{diag}(J_2(2),J_2(2),J_1(1))=\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & 1 & 2 & \\ & & & & 1\end{pmatrix}$. □

(2) 由题设得: $r((T-3E))^4=0$, $r((T-3E))^3=1$, $r((T-3E))^2=2$, $r(T-3E)=3$.

由 $r(T-3E)=3$ 可知, T 不能只有一个 Jordan 块. (否则, 因为 T 是 5 阶, 应该有 $r(T-3E)=4$, 矛盾.)

假设 T 的 Jordan 块的最大阶数为 3, 则应该有 $r((T-3E))^3=0$, 与 $r((T-3E))^3=1$ 矛盾;

假设 T 的 Jordan 块的最大阶数为 2, 则应该有 $r((T-3E))^2=0$, 与 $r((T-3E))^3=2$ 矛盾;

假设 T 的 Jordan 块的最大阶数为 1 (即, $T=3E$), 则应该有 $r(T-3E)=0$, 与 $r(T-3E)=3$ 矛盾;

所以, T 的 Jordan 块的最大阶数必然为 4; 但 T 是 5 阶, 所以,

$$T=\mathrm{diag}(J_4(3),J_1(3))=\begin{pmatrix}3&&&&\\1&3&&&\\&1&3&&\\&&1&3&\\&&&&3\end{pmatrix}.\qquad\square$$

87. (Jordan 标准型的分类.)

解: 由于特征多项式为 $f(x)=(x-1)^2(x+2)^2$, 所以, 可能的 Jordan 标准型有: $p(2)p(2)=4$ 个:

(i) $\mathrm{diag}(J_2(1),J_2(-2))$, 相应的初等因子为: $(x-1)^2$, $(x+2)^2$;

(ii) $\mathrm{diag}(J_2(1),J_1(-2),J_1(-2))$,

相应的初等因子为: $(x-1)^2,(x+2),(x+2)$;

(iii) $\mathrm{diag}(J_1(1),J_1(1),J_2(-2))$,

相应的初等因子为: $(x-1),(x-1),(x-2)^2$;

(iv) $\mathrm{diag}(J_1(1),J_1(1),J_1(-2),J_1(-2))$,

相应的初等因子为 $(x-1),(x-1),(x-2),(x-2)$. $\square$

88. (循环矩阵, 矩阵的相似的应用, Vandermonde 行列式, 方阵乘积的行列式.)

证明: 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_ix^i$, $\varepsilon_0=1,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 为 x^n-1 的全部复根. (由于 x^n-1 没有重根, 所以, 这些 $\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 互不相同.)

于是, $(f(x),x^n-1)=1$ 当且仅当 $f(\varepsilon_i)\neq 0$, $0\le i\le n-1$. ①

设 $P=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&\varepsilon_1&\cdots&\varepsilon_{n-2}&\varepsilon_{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&\varepsilon_1^{n-1}&\cdots&\varepsilon_{n-2}^{n-1}&\varepsilon_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix}$. 则 $|P|$ 是一个 Vandermonde

行列式, 且由 $\varepsilon_0=1,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 互不相同可知, $|P|\neq 0$. ②

设所给的循环矩阵为 A. 则

$$AP = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(1) & f(\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_{n-1}) \\ f(1) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \cdots & \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(1) & \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} f(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_1) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

两边取行列式, 并由②得: $|A| = f(1)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1})$, ③

从而由①得证. □

89. (Jordan 块的个数, 分块矩阵, 矩阵的秩, Jordan 块的秩, 准对角阵的秩.)

证明: 设 A 的 Jordan 标准型为 $J = \mathrm{diag}(J_{r_1}(\lambda_0), \cdots, J_{r_t}(\lambda_0), J')$,

其中, $J_{r_i}(\lambda_0)$ 是对角元为 λ_0 的 r_i 阶 Jordan 块, $1 \le i \le t$, 即, J 的以 λ_0 为对角元的 Jordan 块的个数为 t, 而 J' 是由对角元不是 λ_0 的 Jordan 块拼成的准对角阵.

设 J' 的阶数是 s. 由于

$$r(\lambda_0 E_{r_i} - J_{r_i}(\lambda_0)) = r_i - 1,\ r(\lambda_0 E_s - J') = J'\text{的阶数} = s, \quad ①$$

所以,

$r(\lambda_0 E - J) = (r_1 - 1) + \cdots + (r_t - 1) + s = (r_1 + \cdots + r_t) - t + s;$

但是, $r_1 + \cdots + r_t + s = n$, 所以上式为: $r(\lambda_0 E - J) = n - t$. ②

由于 $A \sim J$, 所以, $r(\lambda_0 E - A) = r(\lambda_0 E - J) = n - t$, ③

于是, 齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的解空间的维数为:

$$n - (n - t) = t. \quad □$$

90. (用待定系数法过渡矩阵.)

解: 先用 A 的初等因子求出 A 的 Jordan 标准型 $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & 0 \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

设 $P = (\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4)$ 是 P 的列向量形式. 则由 $AP = PJ$ 得:

$$(A\xi_1\ A\xi_2\ A\xi_3\ A\xi_4) = (\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4)\begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & 0 \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

得: $$\begin{cases} A\xi_1 = 2\xi_1 + \xi_2, \\ A\xi_2 = 2\xi_2, \\ A\xi_3 = 3\xi_3 + \xi_4, \\ A\xi_4 = 3\xi_4. \end{cases}$$

此即表明: ξ_2, ξ_4 分别是 A 的属于特征值 2, 3 的特征向量.

因此, 通过求特征向量, 可以得到 ξ_2, ξ_4. 在此基础上, 分别求非齐次线性方程组 $AX = 2X + \xi_2$ 和 $AX = 3X + \xi_4$ 的解, 即可分别得到 ξ_1, ξ_3. 最后需要检验得到的 P 是可逆的. □

91. (求 Jordan 标准型.)

解: (用行列式因子较为简便.)

对于 A 的特征阵 $\lambda E_3 - A$, 易见 $D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = 1$, 而

$$D_3(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-5 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-6)^2,$$

所以, A 的不变因子为: $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1$, $d_3(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-6)^2$,

从而 A 的初等因子为: $\lambda - 3$, $(\lambda-6)^2$,

所以, A 的 Jordan 标准型为: $\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 6 & \\ & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

其余的计算略. □

92. (有限维线性空间上的线性变换的 Jordan 标准型: 等价于求方阵的 Jordan 标准型.)

解: $\mathbf{T}$ 在基本向量下的矩阵为 $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

对 T 的特征阵 $\lambda E_3 - T = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 6 \\ -1 & \lambda & 3 \\ -1 & -1 & \lambda+4 \end{pmatrix}$ 作 λ-阵的初等变换得:

$$\lambda E_3 - T \to \begin{pmatrix} \lambda-1 & -8 & 6 \\ -1 & \lambda-3 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

由此即得行列式因子为: $D_1(\lambda) = 1$, $D_2(\lambda) = \lambda + 1$, $D_3(\lambda) = (\lambda+1)^3$;

所以, T 的不变因子为 $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = \lambda+1$, $d_3(\lambda) = (\lambda+1)^2$;

从而, T 的初等因子为: $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$,

所以, T 的 Jordan 标准型为: $J = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

其余的计算略. □

93. (任意方阵在复数域都相似于一个上三角阵, 如一个 Jordan 阵，略.)

94. (复线性空间上的线性变换, 线性变换在不同基下的矩阵.)

证明: 设 $\mathbf{T}$ 在 V 的一个基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 下的矩阵为 A, 即,

$$(\mathbf{T}\xi_1 \ \cdots \ \mathbf{T}\xi_n) = (\xi_1 \ \cdots \ \xi_n)A.$$

由第 **31** 题的结论 (或第 **93** 题) 可知, A 在复数域 $\mathbb{C}$ 上相似于一个上三角阵 B, 即, 存在可逆的 P 使得 $P^{-1}AP = B$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个上三角阵.

令 $(\eta_1 \ \cdots \ \eta_n) = (\xi_1 \ \cdots \ \xi_n)P$. 由于 P 可逆, 所以, $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是 V 的一个基, 且 $\mathbf{T}$ 在这个基下的矩阵就是 $P^{-1}AP = B$. □

95. (略)

96. (略)

97. (利用相似关系计算 trace.)

解: 首先, 由第 **31** 题的**引理**可知, 任意方阵的 trace 等于其全部复特征值的和.

其次, A 的全部复特征值为 -2, 1, 1, 所以, 由第 **31** 题的**推论**得: A^k 的全部复特征值为 $(-2)^k$, 1^k, 1^k;

从而 $\mathrm{tr}(A^k) = (-2)^k + 1 + 1 = 2 + (-2)^k$. □

注: 此题不需要计算 A 的 Jordan 标准型.

98. (线性变换的极小多项式.)

结论: n 阶方阵 (或, n 维线性空间上的线性变换) 的极小多项式就是它的最后一个不变因子 $d_n(x)$.

解: $\mathbf{D}$ 在 $\mathbb{R}[x]_n$ 的基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 下的矩阵为:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其行列式因子为: $D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = \cdots = D_{n-1}(\lambda) = 1$, $D_n(\lambda) = \lambda^n$,

所以, 其不变因子为: $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1$, $d_n(\lambda) = \lambda^n$,

从而 $\mathbf{D}$ (也就是 D) 的极小多项式为 $m(\lambda) = \lambda^n$.

注1: 也可以直接用导数的定义求得:

首先, 注意到 $\mathbf{D}(f) = f'$, $f \in \mathbb{R}[x]_n$, 则, 由于 $\partial(f) \leq n-1$, 所以, $\mathbf{D}^n(f) = f^{(n)} = 0$,

即, $\mathbf{D}^n = 0$, 即, λ^n 是 $\mathbf{D}$ 的一个零化多项式;

从而, $\mathbf{D}$ 的极小多项式必然形如 λ^k, $1 \leq k \leq n$. 如果 $k < n$, 则由

$\mathbf{D}^k(x^k) = k! \neq 0$

可知, $\mathbf{D}^k$ 不是零变换. 所以, $\mathbf{D}$ 的极小多项式是 λ^n.

注2: 如果把 $\mathbf{D}$ 看成由光滑函数组成的线性空间 (无穷维) 上的线性变换, 则 $\mathbf{D}$ 没有极小多项式.

99. (特征多项式与极小多项式之间的关系.)

证明: 就是前面的第 **23** 题中**注**1中的**引理**的证明.

100. (可对角化的充要条件.)

命题: 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. 则 A 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化当且仅当 A 在 $\mathbb{F}^n$ 中有 n 个线性无关的特征向量; 当且仅当 A 的极小多项式在 $\mathbb{F}$ 上可以分解为互不相同的一次因式的乘积; 当且仅当 A 的初等因子全是 $\mathbb{F}$ 上的一次因式; 当且仅当 $\mathbb{F}^n$ 能分解为 A 的特征子空间的直和; 当且仅当 A 的每个特征值都属于 $\mathbb{F}$ 且每个特征值的几何重数等于代数重数.

推论: 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. 设 $f(A) = 0$ 且 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上可以分解为互不相同的一次因式的乘积, 则 A 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化.

注1: 方阵的对角化问题依赖于数域, 即, 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{K}$ 是包含 $\mathbb{F}$ 的数域. 则有可能 A 在 $\mathbb{F}$ 上不能对角化, 但在 $\mathbb{K}$ 上可对角化.

注2: 要注意方阵的 Jordan 标准型与可对角化问题的区别.

证明: 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 的 n 个特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都属于 $\mathbb{F}$ 且互不相同. 对每个 i, 取 $\xi_i \in \mathbb{F}^n$ 为 A 的属于 λ_i 的特征向量, 则 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 线性无关. □

注3: 显然本题给出的是方阵可对角化的一个**充分而不必要**的条件.

101. (利用方阵的零化多项式判断是否可对角化.)

证明:

(1) 由题设, $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \in \mathbb{Q}[x]$ 是 A 的一个零化多项式. 所以, A 在 $\mathbb{Q}$ 上可对角化.

由于 A 的特征值只能是 $\lambda_1 = 3$ (a 重), $\lambda_2 = -1$ (b 重), 其中, $a, b \geq 0$,

所以, 在 $\mathbb{Q}$ 上 A 相似于对角阵 $\begin{pmatrix} 3E_a & 0 \\ 0 & -E_b \end{pmatrix}$, 其中, E_a, E_b 分别是 a 阶, b 阶单位阵. (若 $a = 0$, E_a 理解为空.) □

(2) 由于多项式 $g(x) = x + 2$ 满足 $(f, g) = 1$,

所以, $g(A) = A + 2E$ 可逆. □

102. (略)

103. (可对角化.)

证明: 由于 $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s}$ 是直和,

所以, $\dim(V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_s})=\dim V_{\lambda_1}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}$

$$=n_1+\cdots+n_s=n=\dim V,$$

从而, $V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$, 从而 $\mathbb{A}$ 可对角化. □

104 (在 $\mathbb{F}$ 上可对角化当且仅当每个特征值都属于 $\mathbb{F}$ 且每个特征值的代数重数等于几何重数.)

证明: 必要性: 设 A 可对角化, 即, $\mathbb{F}^n=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$.

设 $\dim V_{\lambda_i}=g_i$. 只需证明 $g_i=n_i$, $1\le i\le s$.

对每个 $1\le i\le s$, 取 V_{λ_i} 的一个基 $\xi_{i1},\cdots,\xi_{ig_i}$,

则, $\xi_{11},\cdots,\xi_{1g_1},\cdots,\xi_{s1},\cdots,\xi_{sg_s}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个基.

令 $P=(\xi_{11}\ \cdots\ \xi_{1g_1}\ \cdots\ \xi_{s1}\ \cdots\ \xi_{sg_s})$, 则 P 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵

且 $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{g_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2E_{g_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_sE_{g_s}\end{pmatrix}$ 是对角阵,

从而 A 的特征多项式等于 D 的特征多项式:

$$(x-\lambda_1)^{g_1}(x-\lambda_2)^{g_2}\cdots(x-\lambda_s)^{g_s};$$

但由题设 A 的特征多项式为 $(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_s)^{n_s}$,

由于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同, 所以由因式分解的唯一性得: $g_i=n_i$.

充分性: 此时 A 有 $n_1+\cdots+n_s=n$ 个线性无关的特征向量, 所以 A 可对角化. □

105 (可对角化问题.)

解: 在 Ex. 91, Ex. 92 中, 由于 A 的 Jordan 标准型不是对角阵, 所以不可对角化. □

106. **算法**: 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, 判断 A 在 $\mathbb{F}$ 上是否可对角化; 如果可对角化, 求 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵.

Step 1: 求 A 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$. 如果 A 的特征值不都属于 $\mathbb{F}$, 则 A 在 $\mathbb{F}$ 上不可对角化, 停止; 否则, 转入

Step 2: 对 A 的每个特征值 λ_i, 求 A 的属于 λ_i 的线性无关的特征向量: 即, 求齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)X=0$ 的一个基础解系 $\xi_{i1},\cdots,\xi_{ig_i}$, ($g_i$ 就是 λ_i 的几何重数: $\dim V_{\lambda_i}$).

Step 3: 判断: 如果 $g_1+\cdots+g_s<n$, 则 A 在 $\mathbb{F}$ 上不可对角化; 否则, 转入

Step 4: 令 $P=(\xi_{11}\ \cdots\ \xi_{1g_1}\ \cdots\ \xi_{s1}\ \cdots\ \xi_{sg_s})$, 则 P 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵且 $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix} \lambda_1E_{g_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2E_{g_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_sE_{g_s} \end{pmatrix}$ 是对角阵.

注: 本题没有指明数域. 但是, 考虑到所给的矩阵都是 $\mathbb{Q}$ 上的矩阵, 所以, 可以默认在 $\mathbb{Q}$ 上作.

解:

(1) A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-9 & 20 \\ -4 & \lambda+9 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)$,

所以, A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$.

(A 的特征值都属于 $\mathbb{Q}$ 且互不相同, 至此可以肯定 A 在 $\mathbb{Q}$ 上可对角化.)

对 $\lambda_1=1$ 求得 $(E-A)X=0$ 的一个基础解系: $\xi_1=(5,2)'$;

对 $\lambda_1=-1$ 求得 $(-E-A)X=0$ 的一个基础解系: $\xi_2=(2,1)'$,

即, A 有两个线性无关的特征向量, 所以, A 在 $\mathbb{Q}$ 上可对角化.

令 $P=(\xi_1\ \xi_2)=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$. □

(2) A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 6 & 3 \\ 0 & \lambda+5 & 3 \\ 0 & -6 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

即, A 的特征值为 $\lambda_1=1$ (二重), $\lambda_2=-2$.

(A 的特征值全属于 $\mathbb{Q}$, 但是并不是互不相同的, 所以需要进一步讨论.)

对 $\lambda_1=1$ 求得 $(\lambda_1E-A)X=(E-A)X=0$ 的一个基础解系: $\xi_{11}=(1,0,0)'$, $\xi_{12}=(0,-1,2)'$;

对 $\lambda_2=-2$ 求得 $(\lambda_2E-A)X=(-2E-A)X=0$ 的一个基础解系: $\xi_{21}=(-1,-1,1)'$,

即, A 有三个线性无关的特征向量, 所以, A 在 $\mathbb{Q}$ 上可对角化.

令 $P=(\xi_{11}\ \xi_{12}\ \xi_{21})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$. □

(3) A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1),$$

即, A 的特征值为 $\lambda_1=0$ (二重), $\lambda_2=1$.

对 $\lambda_1=0$ 求得 $(\lambda_1E-A)X=-AX=0$ 的一个基础解系: $\xi_{11}=(0,0,1)'$;

即, λ_1 的几何重数小于其代数重数,

所以 A 在 $\mathbb{Q}$ 上不可对角化. □

(事实上, A 在任意数域上都不可对角化, 因为在任意数域上都有 λ_1 的几何重数小于其代数重数. 但是 A 在 $\mathbb{Q}$ 上有 Jordan 标准型.)

注: 上述各题中 P 的取法显然不唯一.

107. (可对角化的应用, 用第 **106** 题中的算法.)

(1) A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2\\ -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)$,

所以, A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$.

对 $\lambda_1=1$ 求得 $(\lambda_1E-A)X=(E-A)X=0$ 的一个基础解系: $\xi_1=(2,1)'$;

对 $\lambda_1=-2$ 求得 $(\lambda_2E-A)X=(-2E-A)X=0$ 的一个基础解系: $\xi_2=(1,2)'$,

令 $P=(\xi_1\ \xi_2)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & \\ & -2\end{pmatrix}$,

即, $A=P\begin{pmatrix}1 & \\ & -2\end{pmatrix}P^{-1}$, 从而,

$$\begin{aligned}A^k&=P\begin{pmatrix}1 & \\ & (-2)^k\end{pmatrix}P^{-1}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & (-2)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4-(-2)^k & (-2)+2(-2)^k\\ 2+(-2)^{k+1} & -1+4(-2)^k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

(2) A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 1\\ 2 & \lambda+2 & -2\\ -3 & -6 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4),$$

(把第 3 列加到第 1 列.)

即, A 的特征值为 $\lambda_1=2$ (二重), $\lambda_2=-4$.

对 $\lambda_1=2$ 求得 $(\lambda_1E-A)X=(2E-A)X=0$ 的一个基础解系: $\xi_{11}=(1,0,1)'$, $\xi_{12}=(-2,1,0)'$;

对 $\lambda_2=-4$ 求得 $(\lambda_2E-A)X=(-4E-A)X=0$ 的一个基础解系: $\xi_{21}=(1,-2,3)'$,

(分别把 $-4E-A$ 的第 3 行的 -2 倍, 1 倍加到第 1 行, 第 2 行, 运算较简.)

令 $P=(\xi_{11}\ \xi_{12}\ \xi_{21})=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$,

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -4\end{pmatrix}$, 即, $A=P\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -4\end{pmatrix}P^{-1}$,

从而,

$$A^k=P\begin{pmatrix}2^k & & \\ & 2^k & \\ & & (-4)^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k & & \\ & 2^k & \\ & & (-4)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6 & 3\\ -2 & 2 & 2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}7\cdot 2^k-(-4)^k & 4\cdot 2^k-2(-4)^k & 2^k+(-4)^k\\ -2^{k+1}+2(-4)^k & 2^{k+1}-4^{k+1} & 2^{k+1}-2(-4)^k\\ 3\cdot 2^k-3(-4)^k & 6\cdot 2^k-6(-4)^k & 3\cdot 2^k+3(-4)^k\end{pmatrix}. \qquad \square$$

108. (用 Hamilton-Cayley 定理和带余除法计算方阵的多项式.)

(1) 由第 **107** 题可知, A 的特征多项式为: $f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)$.

作带余除法: $\lambda^k=f(\lambda)q(\lambda)+a\lambda+b$,

令 $\lambda=1$ 得: $1=a+b$; 令 $\lambda=-2$ 得: $(-2)^k=-2a+b$,

所以, $\lambda^k=f(\lambda)q(\lambda)+\dfrac{1}{3}(1-(-2)^k)\lambda+\dfrac{1}{3}(2+(-2)^k)$,

从而, 由 Hamilton-Cayley 定理得:

$$A^k=\frac{1}{3}(1-(-2)^k)A+\frac{1}{3}(2+(-2)^k)E.$$ □

(2) 由第 **107** 题可知, A 的特征多项式为: $f(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$.

作带余除法: $\lambda^k=f(\lambda)q(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$. ①

令 $\lambda=2$ 得: $2^k=4a+2b+c$;

令 $\lambda=-4$ 得: $(-4)^k=16a-4b+c$;

在①两边对 λ 求导后, 再令 $\lambda=2$ 得: $k\cdot 2^{k-1}=4a+b$.

略. □

109. (利用初等因子写有理标准型, 略.)

110. (写出线性变换的矩阵, 求出初等因子, 即可得到有理标准型.)