2014级高代-1期末试题评讲

A1. (本题满分20分)解答下列各题:

(1) (10分) 写出一个次数最低的首项系数为1的有理多项式使得$1+\sqrt{2}$为其复根, 并说明理由;

审题: 由于$1+\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, 所以, 所要求的多项式不可能是$\mathbb{Q}$上的一次多项式;

类似于"实系数多项式的虚根成对出现", 考虑:

$$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2\in\mathbb{Q},\ (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1-2=-1\in\mathbb{Q},$$

所以, 由Vieta定理可以考虑多项式: $p(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=x^2-2x-1\in\mathbb{Q}[x]$.

解: 设$p(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=x^2-2x-1\in\mathbb{Q}[x]$, $p(x)$首一且以$1+\sqrt{2}$为一个根.

设$q(x)\in\mathbb{Q}[x]$也满足条件.

由于$p(x)$与$q(x)$有公共根, 且$p(x)$在$\mathbb{Q}$ 上不可约, 所以, $p(x)|q(x)$, 即, $\partial p(x)\le\partial q(x)$,

所以, $p(x)$是满足条件的次数最低的. □

(2) (6分)设$f(x)=x^{2014}+x^{2013}+\cdots+x+1$为有理多项式. 证明:$f(x)$在有理数域$\mathbb{Q}$上可约;

注: 有一个经典的结论: **如果p是素数**, 则$g(x):=x^p+x^{p-1}+\cdots+x+1$在$\mathbb{Q}$上不可约. 可以用Eisenstein判别法证明:

考虑: $x^p-1=(x-1)g(x)$, 从而: $(x+1)^p-1=xg(x+1)$, 对$g(x+1)=\dfrac{(x+1)^p-1}{x}$用Eisenstein判别法(取素数$p$即可).

本题这里$p=2014$不是素数, 并要求证明$f(x)$在$\mathbb{Q}$上**可约**, 所以, 无论如何都用不上Eisenstein判别法.

但是, 可以借鉴上述方法: $(x-1)f(x)=x^{2015}-1=(x^5)^{403}-1$; 把$x^5$看成一个整体.

证明: 由

$(x-1)f(x)=x^{2015}-1=(x^5)^{403}-1=((x^5)-1)((x^5)^{402}+(x^5)^{401}+\cdots+(x^5)+1)$

可知, $f(x)=\dfrac{(x^5)-1}{x-1}\cdot((x^5)^{402}+(x^5)^{401}+\cdots+(x^5)+1)$;

(用了基本公式: $\dfrac{a^n-1}{a-1}=a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1$.)

而$\dfrac{(x^5)-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1\in\mathbb{Q}[x]$, $((x^5)^{402}+(x^5)^{401}+\cdots+(x^5)+1)\in\mathbb{Q}[x]$,

所以$f(x)$在$\mathbb{Q}$上可约. □

(3) (4分)设$a_1,\cdots,a_{2014}$为(2)中多项式$f(x)$的复根,试求$\prod_{i=1}^{2014}(a_i-1)=?$

审题: 虽然$\prod_{i=1}^{2014}(a_i-1)$是$a_1$, a_2, $\cdots$, a_{2014}的对称多项式, 但是, 不适宜于用对称多项式基本定理来求解.

应该想到自变量的平移变换.

解: 令$b_i=a_i-1$, 则$f(b_i+1)=f(a_i-1+1)=f(a_i)=0$, $1\le i\le 2014$; 而$\partial f(x+1)=2014$,

所以, b_1, $\cdots$, b_{2014}是$f(x+1)$的全部复根;

又$f(x+1)=(x+1)^{2014}+\cdots+(x+1)+1=x^{2014}+\cdots+2015$,

所以, 由Vieta定理得: $\prod_{i=1}^{2014}(a_i-1)=\prod_{i=1}^{2014}b_i=(-1)^{2014}2015=2015$.

A2. (本题满分30分)解答下列各题:

(1) (10分) 设$A=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-7x-3\in\mathbb{F}[x]$. 试求$f(A)$并将$A^{-1}$表示为$A$的多项式.

解: $A^2=\begin{pmatrix}16 & 21\\ 28 & 37\end{pmatrix}$, 从而$f(A)=A^2-7A-3E_2=-E_2$.

由$A(A-7E_2)=2E_2$知$A\left(\frac{1}{2}(A-7E_2)\right)=E_2$, 所以, $A^{-1}=\frac{1}{2}A-\frac{7}{2}E_2$.

(2) (8分) 设$A\in M_3(\mathbb{F})$. 已知A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$. 求矩阵$A$及其逆$A^{-1}$.

解: 由$|A^*|=1$和$AA^*=|A|E_3$得: $|A|=\pm 1$, 所以, $A^{-1}=\pm A^*$;

并由初等行变换可得: $A=(A^{-1})^{-1}=\pm(A^*)^{-1}=\pm\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

(很多人没有取$\pm$.)

(3) (8分) 设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{F})$. 求数域$\mathbb{F}$上的所有的与$A$乘法交换的矩阵;

审题: 如果直接用待定系数法设$X=(x_{ij})$使得$AX=XA$, 则会涉及到9个未知数. 所以, 应该考虑转化.

解: 令$C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 则$A=C+E_3$. 设$X\in M_3(\mathbb{F})$.

则$AX=XA$当且仅当$CX=XC$, 代入计算可得$X=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & c & 0\\ b & 0 & a\end{pmatrix}$, 其中, $a,b,c\in\mathbb{F}$.

(4) (4分) 在(3)的基础上证明: 对任意与A乘法交换的矩阵B, 存在多项式$f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使得$f(A)=B$.

审题: 对于任意与A乘法交换的矩阵B, 要证B是A的多项式, 由于$A=C+E_3$, 所以, 只需证明B是C的多项式! 从而, 考虑, $E_3=C^0$, C^1, C^2, $\cdots$.

证明: 对于(3)中的C, 计算得: $C^2=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$,

从而, 对任意与A乘法交换的矩阵B, 由(3)可以设$B=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & c & 0\\ b & 0 & a\end{pmatrix}$;

计算可得: $B=cE_3+\frac{b}{2}C+\frac{a-c}{4}C^2$ (用待定系数法);

于是, 令$g(x)=c+\frac{b}{2}x+\frac{a-c}{4}x^2$, 则, $B=g(C)=g(A-E_3)$,

所以, 令$f(x)=g(x-1)$则有$B=f(A)$. □

A3. (本题满分20分) 设$\alpha_1=(1,-1,0,4)'$, $\alpha_2=(0,3,7,2)'$, $\alpha_3=(3,0,7,14)'$, $\alpha_4=(1,-1,0,4)'\in\mathbb{F}^4$.

(1) (12分)求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩及一个极大无关子组并将其余向量表示为此极大无关子组的线性组合;

解: 对矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$做初等行变换可得$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 7 & 7 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

由此可得$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_4)=2$且$\alpha_1,\alpha_2$为一个极大无关组(事实上, 除了$\alpha_1,\alpha_4$这一组外, 其余任意两个向量都组成一个极大无关组);

直接计算得: $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1$.

(2) (4分)设非齐次线性方程组$AX=\beta$有无穷多解且其任意解都可以表示为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合, 试问系数矩阵$A$的秩$r(A)$的取值范围, 并说明理由;

注: 这里考查的是**任意的非齐次线性方程组$AX=\beta$的解集**, 根据非齐次线性方程组的解的结构定理, 这个解集的极大无关组包含$n-r(A)+1$个解向量, 其中, n为未知数的个数.

解: 这里, 未知数的个数$n=4$, 所以, $4-r(A)+1\leq r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$ (由(1)的结论), 即, $r(A)\geq 3$;

而$AX=\beta$有无穷多个解, 所以: $r(A)\leq 3$;

综上, $r(A)=3$.

(3) (4分)在(2)的基础上假设α_1为$AX=\beta$的一个解. 证明: 存在$r\in\mathbb{F}$使得$AX=\beta$的解集恰为

$$\{k\alpha_1+l\alpha_2 \mid k-rl=1,\ \text{其中}\ k,l\in\mathbb{F}\}.$$

审题: 仍然是考查非齐次方程组的解的结构定理. 现在已经知道$AX=\beta$的一个特解α_1, 所以只需构造其导出组的一个基础解系. 由(2)知, $AX=0$的任意基础解系都只含一个解向量. 所以, 只需构造出$AX=0$的一个非零解即可; 而这可以由$AX=\beta$的两个不同的解作差得到.

解: 根据题设, $AX=\beta$的任意解都是α_1, α_2的非零线性组合;

设$\gamma_1=a\alpha_1+b\alpha_2$ 为方程组$Ax=\beta$的一个与α_1线性无关的解, 则$b\neq 0$;

记$\gamma=\dfrac{1}{b}(\gamma_1-\alpha_1)$, 则$\gamma$构成$Ax=0$ 的一个基础解系;

从而, $Ax=\beta$的解集恰为$\left\{\dfrac{k(a-1)+b}{b}\alpha_1+k\alpha_2 \;\middle|\; k\in\mathbb{F}\right\}$;

令$r=\dfrac{a-1}{b}\in\mathbb{F}$, 则$\left\{\dfrac{k(a-1)+b}{b}\alpha_1+k\alpha_2 \;\middle|\; k\in\mathbb{F}\right\}=\left\{k\alpha_1+l\alpha_2 \mid k-rl=1,\ \text{其中}\ k,l\in\mathbb{F}\right\}$.

A4. (本题满分10分)设A为数域$\mathbb{F}$上的$m\times n$阶矩阵, B为数域$\mathbb{F}$上的$n\times m$阶矩阵, $m\leq n$. 若AB为可逆矩阵, 求BA的秩, 并说明理由.

证明: 注意到$AB\in M_m(\mathbb{F}),BA\in M_n(\mathbb{F})$;

由AB 为可逆矩阵知, $m=r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}\leq m$, 因此$r(A)=r(B)=m$;

由A满行秩知, 存在n阶可逆矩阵P使得$AP=(E_m,0)$;

由B满列秩知存在n阶可逆矩阵Q使得$QB=\begin{pmatrix}E_m\\0\end{pmatrix}$;

从而: $r(BA)=r(QBAP)=m$. □

A5. (本题满分10分)设$\eta_1,\cdots,\eta_r$为齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系, γ_0为非齐次线性方程组$AX=\beta$的一个解. 令$B=(A,\beta)$, 利用$\gamma_0,\eta_1,\cdots,\eta_r$求线性方程组$BY=0$的一个基础解系并说明理由.

审题: 考查线性方程组和分块矩阵. 关键是注意到:

由$A\eta_i=0$得: $(A,\beta)\begin{pmatrix}\eta_i\\0\end{pmatrix}=0+0=0,\ 1\leq i\leq r$;

由$A\gamma_0=\beta$得: $(A,\beta)\begin{pmatrix}\gamma_0\\-1\end{pmatrix}=\beta-\beta=0$.

证明: 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 则$B \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{F})$;

由$r(B) = r(A,\beta) = r(A) = n - r$ (因为非齐次方程组$AX = \beta$有解)得:

$BY = 0$的基础解系应该含有$(n+1) - r(B) = (n+1) - (n-r) = r+1$个线性无关的解向量;

由$A\eta_i = 0$得: $(A,\beta)\begin{pmatrix} \eta_i \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0$, $1 \le i \le r$;

由$A\gamma_0 = \beta$得: $(A,\beta)\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta - \beta = 0$;

所以, $\xi_i := \begin{pmatrix} \eta_i \\ 0 \end{pmatrix}$, $1 \le i \le r$和$\xi_{r+1} := \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ -1 \end{pmatrix}$是$BY = 0$的解;

由于$\eta_1, \cdots, \eta_r, \gamma_0$线性无关, 所以它们的伸长组$\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}$也线性无关;

综上, $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}$构成$BY = 0$的一个基础解系. □

A6. (本题满分10分) 设A为数域$\mathbb{F}$上的n阶方阵, $p(x)$为数域$\mathbb{F}$上的次数大于1的不可约多项式且满足$p(A) = 0$. 证明: 对任意的$a \in \mathbb{F}$, $|A - aE_n| \neq 0$.

注: 主要考查不可约多项式、矩阵的运算、方阵的多项式、可逆矩阵、行列式、齐次线性方程组.

证明:

法一: 对任意的$a \in \mathbb{F}$, 考虑线性方程组$(A - aE_n)X = 0$;

若$|A - aE_n| = 0$, 则$(A - aE_n)X = 0$有非零解ξ, 即, $A\xi = a\xi$; 从而由$p(A) = 0$得: $0 = 0\xi = p(A)\alpha = p(a)\xi$;

由于$p(x)$在$\mathbb{F}$上不可约且$\partial p(x) > 1$, 所以, $p(x)$在$\mathbb{F}$上没有根, 即, $p(a) \neq 0$;

所以, $\xi = 0$, 矛盾. □

法二: 由$p(x)$在$\mathbb{F}$上不可约且$\partial p(x) > 1$知, 对任意的$a \in \mathbb{F}$, $p(x)$与多项式$x - a$互素;

从而存在多项式$u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$使得$u(x)p(x) + v(x)(x - a) = 1$;

代入矩阵A, 并由$p(A) = 0$可得$v(A)(A - aE_n) = E_n$, 因此$A - aE_n$可逆, 特别地, $|A - aE_n| \neq 0$. □

B1. (20分) 解答下列各题.

(1) (6分) $f(x) = x^{11} + 11x + 21$在有理数域上是否可约? 说明理由.

提示: 对$f(x+1)$用Eisenstein判别法(取$p = 11$).

(2) (8分) 解方程: $x^5 + x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2x - 2 = 0$.

提示: 分解因式: 先考查它的有理根.

(3) (6分) 设c_1, c_2, c_3, c_4, c_5是多项式$f(x) = x^5 + x - 1$的全部复根. 求$\sum\limits_{i=1}^{5} c_i^5$的值.

提示: 注意到$c_i^5 = -c_i + 1$, $1 \le i \le 5$.

B2. (30分) 解答下列各题.

(1) (10分) 求方程组$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$的一个基础解系.

提示: 按步骤直接计算.

(2) (5分) 设A是$\mathbb{F}$上的$m \times n$型矩阵. 证明: 如果对任意列向量$\beta \in \mathbb{F}^m$, 方程组$AX = \beta$都有解, 则$m \le n$.

提示: 由题设可得: $\mathbb{F}^n$的全部m个基本向量都可以由A的列向量线性表出, 所以, $m \le r(A) \le n$;

或者: 由题设可知, 从$\mathbb{F}^n$到$\mathbb{F}^m$的线性映射$X \mapsto AX$是满射, 所以, $n \ge m$.

(3) (5分) 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \mathbb{F}^n$线性无关, A是$\mathbb{F}$上的$s \times t$型矩阵, 令$(\beta_1 \cdots \beta_t) = (\alpha_1 \cdots \alpha_s)A$. 证明: 向量组$\beta_1, \cdots, \beta_t$的秩等于$A$的秩$r(A)$.

注: 这是一个基本结论, 也是书上的原题, 课堂上也评讲过.

(4) (10分) 设$AX = \beta$是4元线性方程组, A的秩$r(A) = 2$. 已知$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$是它的四个解, 且:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 + \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad 2\gamma_3 - \gamma_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

求$AX = \beta$的一般解(通解).

提示: 首先由$A(2\gamma_3 - \gamma_4) = 2\beta - \beta$得到$\beta \ne 0$, 所以$AX = \beta$是非齐次线性方程组. 反复利用$A\gamma_i = \beta$构造$AX = 0$的一个基础解系.

B3. (20分) 解答下列各题.

(1) (10分) 设A, B, C都是$\mathbb{F}$上的n阶方阵. 证明: $\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$, 并利用这个结论证明行列式的乘法性质: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

注: 这是教材上的原题.

(2) (10分) 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 6x + 6$. 计算$f(A)$并把A^{-1}表示为A的多项式.

提示: 直接计算. 利用$f(A)$的结果求出A^{-1}, 而不必求出A^{-1}的具体结果.

B4. (10分) 设α是$\mathbb{F}$上的n维非零列向量, A是$\mathbb{F}$上的非零n阶方阵.

(1) (5分) 设存在正整数k使得$A^{k-1}\alpha \ne 0$但$A^k\alpha = 0$. 证明: $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$线性无关.

提示: 利用线性无关的定义: 设$t_0\alpha + t_1 A\alpha + \cdots + t_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0$,
两边用A^{k-1}左乘即得$t_0 = 0$. 类似地, 可以得到$t_1 = \cdots = t_{k-1} = 0$.

(2) (5分) 是否存在次数不超过n的非零多项式$h(x) \in \mathbb{F}[x]$使得$h(A)\alpha = 0$? 说明理由.

提示: 注意到: $\alpha, A\alpha, \cdots, A^n\alpha$必然线性相关.

B5. (10分) 设A为$\mathbb{F}$上的n阶方阵. 证明: A的秩$r(A) = r$当且仅当存在n阶可逆矩阵P使得PAP^{-1}的前r行线性无关且后$n - r$行全为0行.

提示: 利用分块矩阵.

B6. (10分) 设A是$\mathbb{F}$上的n阶方阵, $\lambda_1, \cdots, \lambda_t \in \mathbb{F}$互不相同, 且对每个$1 \le i \le t$, 存在线性无关的列向量$\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{is_i} \in \mathbb{F}^n$使得$A\alpha_{ij} = \lambda_i\alpha_{ij}$, $1 \le j \le s_i$. 证明: 向量组$\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s_1}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2s_2}, \cdots, \alpha_{t1}, \cdots, \alpha_{ts_t}$线性无关.

提示: 用线性无关的定义和Vandermonde行列式; 或者, 对t做归纳.