

# 四川大学期末考試試題 (閉卷) (A)

(2012—2013 學年第 2 學期)

課程號: 201098050 課序號: 01, 02 課程名稱: 高等代數-2 任課教師: 彭國華 譚友軍 付昌建 張璐 洪劍勇 成績:  
適用專業年級: 數學學院 2012 級各專業 學生人數: 271 印題份數: 300 學號: ~~2012010101~~ 姓名: ~~張璐~~

## 考試須知

四川大學學生參加由學校組織或由學校承辦的各類考試, 必須嚴格執行《四川大學考試工作管理辦法》和《四川大學考場規則》。有考試違紀作弊行為的, 一律按照《四川大學學生考試違紀作弊處罰條例》進行處理。  
四川大學各類考試的監考人員, 必須嚴格執行《四川大學考試工作管理辦法》、《四川大學考場規則》和《四川大學監考人員職責》。有違反學校有關規定的, 嚴格按照《四川大學教學事故認定及處理辦法》進行處理。

1. 設  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  是線性空間  $V$  上的線性變換  $f$  在  $V$  的某個基下的矩陣。

(1) (10 分) 分別求  $f$  的核  $\ker(f)$  和像  $\operatorname{im}(f)$  的維數, 並分別寫出它們的一個基。

(2) (5 分) 問:  $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$  是否成立? 說明理由。

(3) (5 分) 設  $m$  是任意正整數,  $B$  是  $f^m$  在  $V$  的某個基下的矩陣。證明:  $B$  相似於一個對角陣。

2. 設  $A$  是  $n$  階實對稱矩陣。

(1) (5 分) 設矩陣  $B$  在實數域上與  $A$  合同。證明:  $B$  在實數域上相似於對角陣。

(2) (5 分) 證明: 存在無窮多實數  $x$  使得  $xE_n + A$  是正定矩陣, 其中,  $E_n$  是  $n$  階單位陣。

(3) (5 分) 問: 在什麼條件下  $A$  是正交陣? 說明理由。

(4) (5 分) 設  $k$  是任意正整數。問: 在什麼條件下存在實矩陣  $C$  使得  $A = C^k$ ? 說明理由。

$$P^T A P = (P^T C P)^k$$

3. 設  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(1) (10 分) 求  $A$  的 Jordan 標準型。

(2) (10 分) 設  $V$  是數域  $\mathbb{F}$  上所有與  $A$  可交換的矩陣組成的線性空間。求  $V$  的維數。

4. (15 分) 利用正交變換求二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$  的標準型。

5. (5 分) 寫出特徵多項式為  $f(\lambda) = (\lambda - 1)^4$  的所有 Jordan 陣。

6. (10 分) 設  $V$  是數域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  維線性空間,  $W$  是  $V$  的  $r$  維子空間,  $B(V)$  是  $V$  上的雙線性型組成的線性空間。設  $U = \{f \in B(V) \mid f(\alpha, \beta) = 0, \text{ 任意 } \alpha, \beta \in W\}$ 。求  $U$  的維數並寫出它的一個基。

7. (10 分) 設  $A$  是  $n$  階實矩陣。證明:  $A$  的特徵值全為實數的充分必要條件是存在正交陣  $T$  使得  $T^{-1}AT$  是上三角陣。

注: 1 試題字跡務必清晰, 書寫工整。

2 題間不留空, 一般應題卷分開

3 務必用 A4 紙打印

教務處試題編號: