一、检验结果的实际意义（见§1 假设检验思想概述）

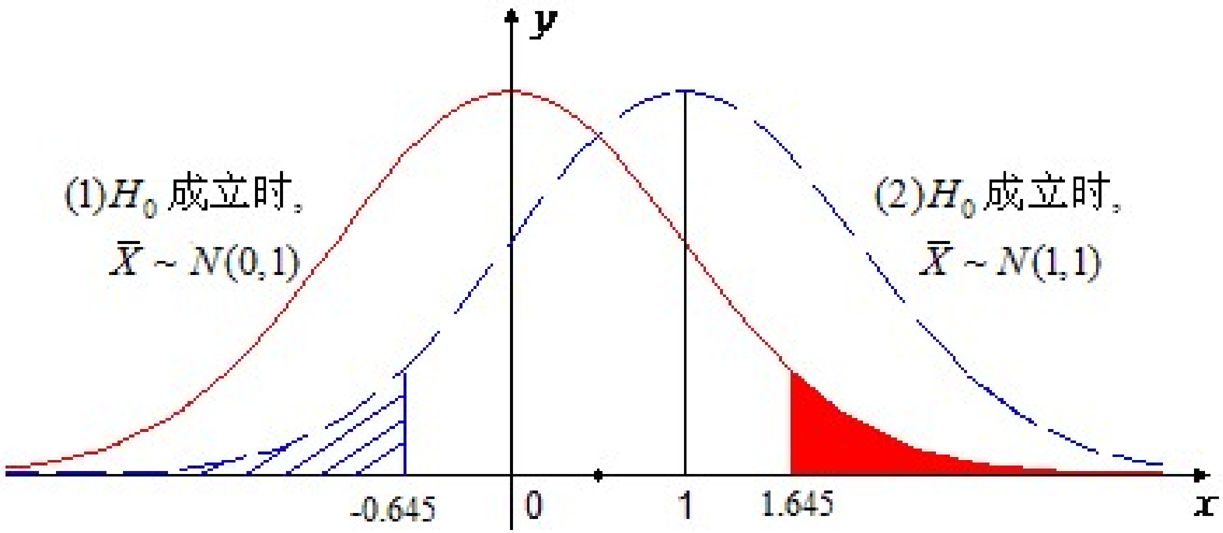
注意: 原假设H_0与备选假设H_1的地位是不对等的, 不能随意交换.

【例3.11(P_{92})】设总体$X \sim N(\mu,1)$，样本均值$\bar{x} = x_1 = 0.5$，样本容量n=1, 取$\alpha = 0.05$, 欲检验$\mu = 0$, 还是$\mu = 1$.

这里提出两种假设, 分别是:

(1) $H_0: \mu = 0;\quad H_1: \mu = 1$　　　(2) $H_0: \mu = 1;\quad H_1: \mu = 0$

注意: 拒绝域的构造.



二、检验中的两类错误

1. 两类错误概率的定义:

第I类错误 (弃真错误): P(拒绝$H_0 \mid H_0$为真)$=P(V \mid H_0)=\alpha$

第II类错误 (纳伪错误): P(接受$H_0 \mid H_0$为假)$=P(\Re - V \mid H_1)=\beta$

其中, V表示H_0的拒绝域, $\Re - V$表示H_0的接受域.

2. 两类错误概率的关系:

【例3.12(P_{94})】设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2已知, 样本容量为n, 求对问题

$$H_0:\mu=\mu_0;\quad H_1:\mu=\mu_1>\mu_0$$

的u检验的两类错误的概率.

解: 由$\bar{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$, 得$H_0:\mu=\mu_0$的拒绝域为

$$V=\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>u_{1-\alpha}\right\}=\left\{\bar{X}>\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\right\}.$$

$$(1)\ \alpha = P(V \mid H_0 : \mu = \mu_0\text{为真}) = P\left\{ \bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \,\middle|\, \bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}) \right\}$$

$$(2)\ \beta = P(\Re - V \mid H_1 : \mu = \mu_1\text{为真}) = P\left\{ \bar{X} \le \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \,\middle|\, \bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}) \right\}$$

$$= P\left\{ \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{(\mu_0 + \sigma/\sqrt{n} \cdot u_{1-\alpha}) - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \right\} = \Phi\left(u_{1-\alpha} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \qquad (3.10)$$

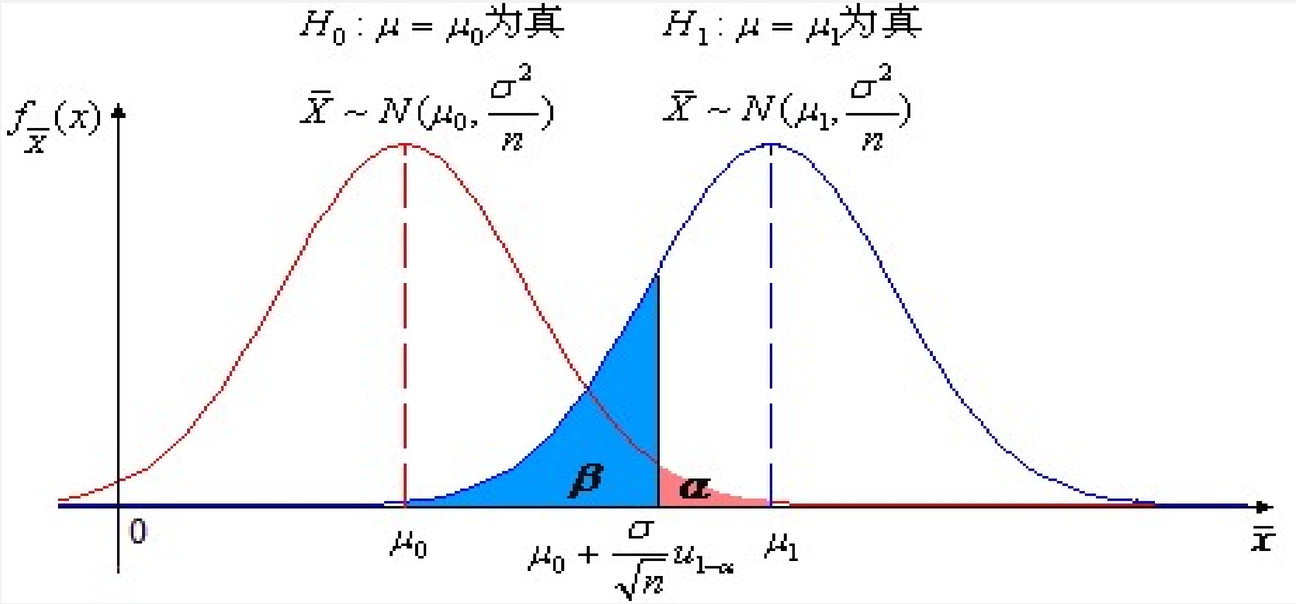


图3-5

结论1:

(1)当样本容量n固定时, α变小, 则β变大;

(2)如果固定α而要使β尽可能小, 则样本容量n应足够大.

3. 评价检验最优的标准:

当样本容量n固定时, 要使α与β都达到最小是不可能的. 故在设计检验时, 一般先控制α的取值, 再在n固定的条件下, 使β尽可能小, 并以此来建立评价检验是否最优的标准.

【习题3.9(P132)】设总体$X\sim N(\mu,4)$, $X_1,\cdots,X_{16}$为其样本. 考虑如下检验问题: $H_0:\mu=0$; $H_1:\mu=-1$.

(i)试证下述三个检验(否定域)犯第I类错误的概率同为$\alpha=0.05$:

$$V_1=\{2\bar{X}\le -1.645\}$$

$$V_2=\{1.50\le 2\bar{X}\le 2.125\}$$

$$V_3=\{2\bar{X}\le -1.96 \text{ 或 } 2\bar{X}\ge 1.96\}$$

(ii)通过计算它们犯第II类错误的概率, 说明哪个检验最好?

三、样本容量确定问题（不讲）

本节任务: 确定一个最小的样本容量n, 使得检验的两类错误概率分别不超过α与β.

1. 对于正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2已知, 考虑u检验问题:

$$H_0:\mu=\mu_0;\quad H_1:\mu=\mu_1>\mu_0.$$

结论2: 由$\Phi\left(u_{1-\alpha}-\dfrac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\le\beta \Rightarrow n>\left[\dfrac{\sigma(u_{1-\alpha}-u_\beta)}{\mu_1-\mu_0}\right]^2.$

2. 对于正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ未知, 考虑χ^2检验问题:

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2;\quad H_1:\sigma^2=\sigma_1^2>\sigma_0^2.$$

结论3: 由$F_{\chi^2(n-1)}\left(\dfrac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right)\le\beta\Rightarrow\chi^2_\beta(n-1)\ge\dfrac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{1-\alpha}(n-1).$

【例3.13(P_{97})】一门炮弹需要通过发射试验来进行精度验收，假设命中误差是纯随机的，又横向 (或纵向) 误差允许的标准差为σ_0. 制造方要求采用的检验方法要求保证：如果产品合格而被拒绝的概率应不大于5%；使用方要求保证，若产品不合格且标准差超过$\sqrt{2}\sigma_0$而被接受的概率小于10%，试问至少应发射多少发炮弹进行试验，才能满足双方的要求.