2015 级高等代数-2-A-卷参考答案

(2015–2016 学年第 2 学期)　　A 卷

注意: 满分 100 分, 按题号把解答写在答题纸上. 在以下题目中, $\mathbb{F}$ 表示一个数域, $\mathbb{R}$ 表示实数域, $\mathbb{C}$ 表示复数域, $M_n(\mathbb{F})$ 表示 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶矩阵组成的线性空间, $|A|$ 表示矩阵 A 的行列式, A^t 为矩阵 A 的转置, $tr(A)$ 为矩阵 A 的迹.

1. (45 分) 解答下列各题, 并简要说明理由:

(1) (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F})$. 求矩阵 A 的 Jordan 标准形 J_A 及可逆矩阵 $P \in M_3(\mathbb{F})$ 使得 $A = PJ_AP^{-1}$.

<u>解答</u> :

(i) 求解矩阵 A 的特征多项式及特征值:

$$f_A(\lambda) = |\lambda\ E_3 - A| = \lambda(\lambda-1)^2.$$

由此可知 A 的特征值为 $\lambda = 0$ 及 $\lambda = 1$.

(ii) 求矩阵 A 的特征子空间 V_0, V_1 的一个基:

当 $\lambda = 0$ 时, 求解齐次线性方程组 $AX = 0$ 可得 $V_0 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

当 $\lambda = 1$ 时, 求解齐次线性方程组 $(A - E_3)x = 0$ 可得 $V_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(iii) 由特征多项式 $f_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$ 及 $\dim V_0 = 1, \dim V_1 = 1$ 知, 矩阵 A 的 Jordan 标准形 $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(iv) 求过渡矩阵 $P = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ 使得 $A = PJ_AP^{-1}$. 由等式 $AP = PJ_A$ 知, $\epsilon_1 \in V_0, \epsilon_2 \in V_1, (A - E_3)\epsilon_3 = \epsilon_2$. 因此可令

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

求解线性方程组 $(A - E_3)X = \epsilon_2$ 可得 $\epsilon_3 = k\epsilon_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. 因此可取过渡矩阵

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

注记: 过渡矩阵不唯一. 若 Jordan 标准形为 J_A^t, 则过渡矩阵可取为 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

(2) (10 分) 设 $f(\lambda) = (\lambda-1)^4(\lambda-2)^2, m(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2) \in \mathbb{C}[\lambda]$. 试写出所有的以 $f(\lambda)$ 为特征多项式且以 $m(\lambda)$ 为极小多项式的矩阵的 Jordan 阵.

解答:

由 $\deg f(x) = 6$ 知矩阵 J 的阶为 6.

由 $f(\lambda) = (\lambda-1)^4(\lambda-2)^2$ 知 J 中特征值为 1 的 Jordan 块的阶的和为 4, 特征值为 2 的 Jordan 块的阶的和为 2.

由 $m(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ 知 J 中特征值为 1 的 Jordan 块的阶最大为 2, 特征值为 2 的 Jordan 块的阶最大为 1. 令 $J_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 由此可知,

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(1) & 0 \\ 0 & 0 & 2E_2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2E_2 \end{pmatrix},$$

(3) (10 分) 设 $V = M_2(\mathbb{R})$, $(-,-)$ 为 V 上的内积, 其中 $(A,B) = tr(AB^t), A, B \in V$. 记 $U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid \forall a, b \in \mathbb{R}\}$ 为 V 的子空间. 求 U 的正交补 $U^\perp$ 的一个标准正交基及向量 $\begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 6 & 26 \end{pmatrix}$ 在子空间 U 的正交投影.

解答: 设 $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U$, 易知 B_1, B_2 为 U 的一个基. 设 $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in U^\perp$, 则 $(A, B_1) = 0 = (A, B_2)$. 求解线性方程组可得

$$U^\perp = \{\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & d \end{pmatrix} \mid, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

记 $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A_1, A_2 为 $U^\perp$ 的一个基. 直接验证可知 $A_1 \perp A_2$, 从而 A_1, A_2 为 $U^\perp$ 的正交基. 另一方面, $(A_1, A_1) = 2, (A_2, A_2) = 1$. 令

$$C_1 = \frac{A_1}{|A_1|} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \frac{A_2}{|A_2|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 C_1, C_2 为 $U^\perp$ 的一个标准正交基.

分别记 $A_U, A_{U^\perp}$ 表示矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 6 & 26 \end{pmatrix}$ 在 U 及 $U^\perp$ 上的正交投影. 我们有

$$A_{U^\perp}=(A,C_1)C_1+(A,C_2)C_2=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

由此可得 $A_u=A-A_{U^\perp}=\begin{pmatrix} 2016 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) (10 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$ 的矩阵 A 的特征值的和为 1，A 的所有特征值的乘积为 -12. 求 a,b 及 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

解答:

由题意知 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

由 A 的特征值为 1 知 $tr(A)=a=1$.

由 A 的特征值的乘积为 -12 知 $|A|=-12$. 带入计算可得 $b=\pm 2$.

计算矩阵 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -b \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$. 由此可知 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为

$$y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

(5) (5 分) 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 为对称矩阵且 $|A|\neq 0$. 问 A 与 A^{-1} 是否合同？

解答: 方法一：两个实对称矩阵合同当且仅当他们的正惯性指数相等且负惯性指数相等.

由题意知 $\operatorname{rank} A=n$. 注意到矩阵 A^{-1} 为实对称矩阵. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$ 恰为 A^{-1} 的特征值. 显然 $\lambda_k>0$ 当且仅当 $\frac{1}{\lambda_k}>0$, 由此可知 A 与 A^{-1} 具有相同的正惯性指数和负惯性指数.

方法二：因为 A 为对称矩阵且可逆, 显然有 $A^tA^{-1}A=A$, 所以 A 与 A^{-1} 合同.

2. (15 分) 设 V 为欧氏空间，$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 为 V 的一个基且其度量矩阵 $G=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) (10 分) 求 V 的一个标准正交基 (表示为 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 的线性组合)；

(2) (5 分) 设 $\mathbb{A}$ 为 V 上的线性变换且在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的矩阵为 G. 问 $\mathbb{A}$ 是否为 V 上的对称变换, 请说明理由.

解答:

(1) 对向量组 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 作 Schmidt 正交化,

$$\begin{cases}\alpha_1=\epsilon_1;\\ \alpha_2=\epsilon_2-\frac{(\epsilon_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\epsilon_2;\\ \alpha_3=\epsilon_3-\frac{(\epsilon_3,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1-\frac{(\epsilon_3,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=\epsilon_3-\frac{1}{2}\epsilon_1.\end{cases}$$

再作单位化可得：

$$\begin{cases}\eta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon_1;\\ \eta_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\frac{\sqrt{3}}{3}\epsilon_2;\\ \eta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\frac{\sqrt{6}}{3}\epsilon_3-\frac{\sqrt{6}}{6}\epsilon_1.\end{cases}$$

则 η_1,η_2,η_3 为 V 的一个标准正交基.

注记: V 的标准正交基不唯一; 也可以通过求矩阵 P 使得 $P^tGP=E_n$ 寻找标准正交基.

(2) **提示**: 一个线性变换 $\mathbb{A}$ 是对称变换当且仅当对任意的 i,j, $(\mathbb{A}(\epsilon_i),\epsilon_j)=(\epsilon_i,\mathbb{A}(\epsilon_j))$ 当且仅当在任意标准正交基下的矩阵为对称矩阵.

由内积的对称性知 $\mathbb{A}$ 为对称变换当且仅当 $(\mathbb{A}(\epsilon_1),\epsilon_2)=(\epsilon_1,\mathbb{A}(\epsilon_2)),(\mathbb{A}(\epsilon_1),\epsilon_3)=(\epsilon_1,\mathbb{A}(\epsilon_3)),(\mathbb{A}(\epsilon_2),\epsilon_3)=(\epsilon_2,\mathbb{A}(\epsilon_3))$.

直接计算可知上述三个等式成立, 从而 $\mathbb{A}$ 为对称变换.

注记: 也可以利用度量矩阵计算 $(\mathbb{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathbb{A}(\beta))$ 成立.

3. (10 分) 设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, $\mathbb{A}$ 为 V 上的线性变换. 证明: 存在 V 上的线性变换 $\mathbb{B}$ 使得 $\mathbb{B}\circ\mathbb{A}=0$ 且 $V=\operatorname{Im}\mathbb{A}\oplus\operatorname{Im}\mathbb{B}$.

证明: 设 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_r$ 为 $\operatorname{Im}\mathbb{A}$ 的一个基, 将其扩充为 V 的一个基并记为 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$. 定义线性变换 $\mathbb{B}:V\longrightarrow V$ 使得 $\mathbb{B}(\epsilon_i)=0,\ \forall\ 1\leqslant i\leqslant r$ 且 $\mathbb{B}(\epsilon_j)=\epsilon_j,\ \forall\ r<j\leqslant n$, 则 $\operatorname{Im}\mathbb{B}=\operatorname{span}\{\epsilon_{r+1},\cdots,\epsilon_n\}$.

显然我们有 $V=\operatorname{Im}\mathbb{A}\oplus\operatorname{Im}\mathbb{B}$.

另一方面, 对任意的 $\alpha\in V$, 存在 $k_1,\cdots,k_r\in\mathbb{F}$ 使得 $\mathbb{A}(\alpha)=\sum_{i=1}^r k_i\epsilon_i$. 因此 $\mathbb{B}\circ\mathbb{A}(\alpha)=0$. 特别地, $\mathbb{B}\circ\mathbb{A}=0$.

注记: 上述线性变换 B 不唯一, 特别地, 在 $\operatorname{span}\{\epsilon_{r+1},\cdots,\epsilon_n\}$ 上的限制只需要时可逆的即可.

4. (15 分) 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{A}:M_n(\mathbb{C})\longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ 为线性变换, 其中 $\mathbb{A}(X)=AX,\forall X\in M_n(\mathbb{C})$.

(1) (8 分) 证明: 线性变换 $\mathbb{A}$ 与矩阵 A 具有相同的特征值 (不计重数);

(2) (7 分) 设 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 为矩阵 A 的一个特征值, 记 $V_{\lambda_0,A}$ 表示矩阵 A 的特征值为 λ_0 的特征子空间, $V_{\lambda_0,\mathbb{A}}$ 为线性变换 $\mathbb{A}$ 的特征值 λ_0 的特征子空间. 证明: $\dim_{\mathbb{C}}V_{\lambda_0,\mathbb{A}}=n\dim_{\mathbb{C}}V_{\lambda_0,A}$.

(1) 设 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 为矩阵 A 的特征值, 则存在 $0\neq\alpha\in\mathbb{C}^n$ 使得 $A\alpha=\lambda_0\alpha$.

令 $X_0=(\alpha,\alpha,\cdots,\alpha)\in M_n(\mathbb{C})$, 则 $\mathbb{A}(X_0)=AX_0=\lambda_0X_0$. 注意到 $X_0\neq 0$, 所以 λ_0 为 $\mathbb{A}$ 的一个特征值.

反之, 设 λ_0 是 $\mathbb{A}$ 的特征值, 则存在 $0\neq X_0\in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\mathbb{A}(X_0)=\lambda_0X_0=AX_0$. 设 $X_0=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$, 则由 $\lambda_0X_0=AX_0$ 知 $A\gamma_i=\lambda_0\gamma_i$, $\forall\ 1\leqslant i\leqslant n$. 又 $X_0\neq 0$ 知存在 $\gamma_k\neq 0$, 从而 λ_0 为矩阵 A 的一个特征值.

(2) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{C}^n$ 为矩阵 A 的特征值 λ_0 的特征子空间 $V_{\lambda_0,A}$ 的一个基. 令 $X_{ij}=(0,\cdots,0,\alpha_i,0,\cdots,0)$, 其中 α_i 为矩阵 X_{ij} 的第 j 个列向量.

断言: $X_{11},\cdots,X_{1n},\cdots,X_{rn}$ 为 $V_{\lambda_0,\mathbb{A}}$ 的一个基, 从而 $\dim_{\mathbb{C}}V_{\lambda_0,\mathbb{A}}=n\dim_{\mathbb{C}}V_{\lambda_0,A}$.

(i)$X_{11},\cdots,X_{1n},\cdots,X_{rn}$ 线性无关.

考虑 $\sum_{1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant n}k_{ij}X_{ij}=0$. 由 X_{ij} 的定义知

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant n}k_{ij}X_{ij}=(k_{11}\alpha_1+k_{21}\alpha_2+\cdots+k_{r1}\alpha_r,\cdots,k_{1n}\alpha_1+\cdots+k_{rn}\alpha_r)=0.$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关知 $k_{ij}=0$, 特别地, $X_{11},\cdots,X_{1n},\cdots,X_{rn}$ 线性无关.

(ii) 任意 $X\in V_{\lambda_0,\mathbb{A}}$ 可由 $X_{11},\cdots,X_{1n},\cdots,X_{rn}$ 线性表出. 设 $X_0=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\in V_{\lambda_0,\mathbb{A}}$, 由 (1) 知 $\gamma_i\in V_{\lambda_0,A}$. 因此存在 $k_{1i},\cdots,k_{ri}\in\mathbb{C}$ 使得

$$\gamma_i=k_{1i}\alpha_1+\cdots+k_{ri}\alpha_r.$$

由此可知 $X_0=\sum_{1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant n}k_{ij}X_{ij}$.

5. (15 分) 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 为首一多项式且次数 n 大于 1.

(1) (5 分) 证明: 存在矩阵 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 使得 A 的特征多项式 $f_A(x)=f(x)$;

(2) (5 分) 证明: 若 $f(x)$ 为不可约多项式, 则任意以 $f(x)$ 为特征多项式的两个矩阵都相似;

(3) (5 分) 问 $f(x)$ 为不可约多项式是否为上述命题 (2) 成立的充要条件? 若不是, 请问 $f(x)$ 应满足什么条件, 请说明理由.

(1) 若 $f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$, 则矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&0&\cdots&-a_2\\&\cdots&&\cdots&\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}$$

的特征多项式为 $f(\lambda)$.

(2) 设 A,B 的特征多项式都是 $f(\lambda)$. 由矩阵的初等因子的乘积为特征多项式知 A,B 的初等因子都是 $f(\lambda)$, 从而 A 与 B 相似.

(3) 不是. 上述命题成立的充要条件为 $f(\lambda)$ 没有重因式.

设 $f(\lambda)=p_1(\lambda)\cdots p_r(\lambda)$, 其中 $p_i(\lambda)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的首一不可约多项式且 $p_i(\lambda)$ 与 $p_j(\lambda)$ 互素. 设 $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ 使得 A,B 的特征多项式为 $f(\lambda)$. 设 $d_1(A),\cdots,d_n(A)$ 为矩阵 A 的不变因子, $d_1(B),\cdots,\cdots,d_b(B)$ 为矩阵 B 的不变因

子, 则 $d_i(A)|d_{i+1}(A), d_i(B)|d_{i+1}(B), \forall 1 \leqslant i \leqslant n-1$ 且 $f(\lambda) = d_1(A)\cdots d_n(A) = d_1(B)\cdots d_n(B)$. 由此可知 $d_1(A) = \cdots d_{n-1}(A) = d_1(B) = \cdots = d_{n-1}(B) = 1, d_n(A) = d_n(B) = f(\lambda)$. 从而 A, B 有相同的不变因子, 因此相似.

反之, 假设任意以 $f(\lambda)$ 为特征多项式的矩阵都相似. 假设 $f(\lambda)$ 有重因式, 不妨设 $f(\lambda) = p^2(\lambda)q(\lambda)$, 其中 $p(\lambda)$ 为不可约首一多项式. 设 $\deg p(\lambda) = t$, 由 (1) 知存在矩阵 $A_1 \in M_t(\mathbb{F})$ 使得 A_1 的不变因子为 $1, 1, \cdots, 1, p(\lambda)$. 同理存在矩阵 $A_2 \in M_{2t}(\mathbb{F})$ 使得 A_2 的不变因子为 $1, \cdots, 1, p^2(\lambda)$, 存在 $A_3 \in M_{n-2t}(\mathbb{F})$ 使得矩阵 A_3 的不变因子为 $1, \cdots, 1, q(\lambda)$.

令 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$. 由准对角矩阵的初等因子为每个对角子矩阵的初等因子的并知 A 与 B 具有不同的初等因子, 从而不相似但 A, B 具有相同的特征多项式 $f(\lambda)$, 矛盾. 所有 $f(\lambda)$ 没有重因式.