

# 四川大学期末考试试题 (A 卷)

闭卷

(2011 — 2012 学年第二学期)

课程号: 201049050 课序号: 002 课程名称: 数学分析-2 任课教师: 徐冰、杜正东 成绩:  
运用专业年级: 数学 2011 年级 学生人数: 240 印题份数: 280 学号: 姓名:

## 考试须知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各级各类考试, 必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》。有考试违纪作弊行为的, 一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理。

四川大学各级各类考试的监考人员, 必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》、《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》。有违反学校有关规定的, 严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理。

## 注意

答案一律写在答题纸上, 否则不计分! 交卷时将试题纸一并上交。

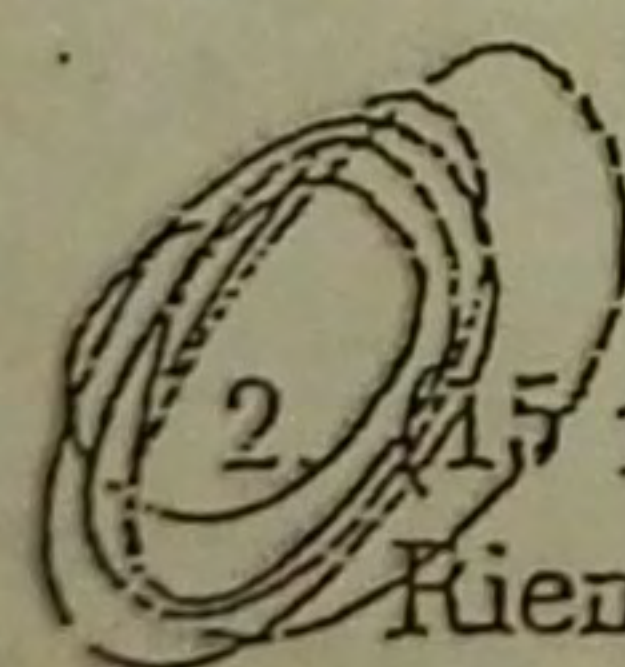
1. (20 分) 计算下列积分, 每题 5 分:

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\alpha + \sin x)(\beta + \sin x)} \quad (\beta > \alpha > 1),$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2} dx,$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^2 dx,$$

$$(4) \int_0^1 x(x+1)^n dx \quad (n \text{ 为正整数}).$$



2. (15 分) 设区间  $[a, b]$  上函数  $f(x)$  有唯一的不连续点  $c$  且  $c \in (a, b)$ , 用 Riemann 积分存在的条件证明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积。

3. (15 分) 设  $p, q \in \mathbb{R}$ , 讨论积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$$

的收敛性。

4. (20 分) 设  $f(t), g(t)$  是区间  $[\alpha, \beta]$  上的连续函数,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . 区间  $[\alpha, \beta]$  上的函数序列  $\{x_n(t)\}$  定义如下:  $x_0(t) \equiv \gamma$ , 当  $n \geq 1$  时,

$$x_n(t) = \gamma + \int_{\alpha}^t (f(\tau)x_{n-1}(\tau) + g(\tau)) d\tau.$$



(1) 用数学归纳法证明存在常数  $M > 0$  使得对  $n \geq 1$  和  $t \in [\alpha, \beta]$  有:

可用 (1)  $|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq (|\gamma| + 1) \frac{M^n}{n!} (t - \alpha)^n.$

(2) 用 (1) 的结果证明函数序列  $\{x_n(t)\}$  在区间  $\alpha \leq t \leq \beta$  上一致收敛于某函数  $x(t)$ .

(3) 证明该极限函数  $x(t)$  是区间  $[\alpha, \beta]$  上的连续函数且满足等式:

$$x(t) = \gamma + \int_{\alpha}^t (f(\tau)x(\tau) + g(\tau)) d\tau.$$

5. (15 分) 将下列函数在  $x = 0$  处展开为幂级数并求其收敛范围:

$$f(x) = \ln \left( \frac{1+x^2}{1-x^2} \right)$$

6. (15 分) 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

的二次极限和二重极限. (4分)