

四川大学期末考试试题（闭卷）

(2016–2017学年第 1 学期) A卷

课程号: **201097050** 课序号: **01,02** 课程名称: 高等代数-1(双语) 任课教师: 付昌建 谭友军

成绩:

适用专业年级: **2016**级数学学院各专业 学生人数: **270** 印题份数: **300**

学号:

姓名:

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

- 1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
- 2、不带手机进入考场；
- 3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名:

注意：满分**100**分，按题号把解答写在答题纸上。在以下题目中， \mathbb{F} 表示一个数域， \mathbb{Q} , \mathbb{C} 分别表示有理数域和复数域。

1. (本题满分25分) 解答下列各题:

- (1) (7分) 设 $f(x) = x^5 + 5x^2 - 1$. 判断 $f(x)$ 是否有重因式, 并说明理由;
- (2) (10分) 设 $g(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$. 在 \mathbb{Q} 上将 $g(x)$ 分解为不可约多项式的乘积;
- (3) (8分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ 为 (2) 中多项式 $g(x)$ 的根, 求 $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 + \alpha_4^4$ 的值.

2. (本题满分25分) 解答下列各题并简要说明理由:

(1) (10分) 求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$
 的通解.

(2) (10分) 设 \mathbb{F} 上的非零方阵 A 的每个列向量都是方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
 的解. 求 a 的值和 A 的行列式.

- (3) (5分) 设 A 为 \mathbb{F} 上的 n 阶方阵 ($n > 1$) 且其伴随矩阵 $A^* \neq 0$. 设 $\beta, \gamma_1 \neq \gamma_2 \in \mathbb{F}^n$, 且向量 γ_1, γ_2 为非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的两个解. 试求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

3. (本题满分15分) 设 A, B 为 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵且满足 $A - B = AB$.

- (1) (8分) 证明: $E + A$ 可逆;

(2) (7分) 若 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A .

4. (本题满分20分) 设 A 为 \mathbb{F} 上的 n 阶方阵.

- (1) (10分) 证明: 对任意的非零向量 $\alpha \in \mathbb{F}^n$, 存在唯一的首一多项式 $d_\alpha(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使得 $d_\alpha(A)\alpha = 0$ 且对任意的满足 $f(A)\alpha = 0$ 的多项式 $f(x)$ 都有 $d_\alpha(x) \mid f(x)$;
- (2) (5分) 设 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{n-1}\alpha$ 线性无关, 证明: $d_\alpha(x)$ 的次数为 n ;
- (3) (5分) 设 $\alpha \in \mathbb{F}^n$ 满足 (2) 中条件, 问 $d_\alpha(A) = 0$ 是否成立? 简要说明理由.

5. (本题满分15分) 设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^3$ 且 $\alpha \neq 0$. 设 A 为有理数域 \mathbb{Q} 上的三阶方阵且满足 $A\alpha = \beta, A\beta = \gamma, A\gamma = \alpha + \beta$.

- (1) (10分) 证明: α, β, γ 线性无关;
- (2) (5分) 求 A 的行列式.