一、非正态总体参数检验的大样本方法

1. 独立同分布(列维-林德伯格)中心极限定理:

对随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$:

定理条件	X_i 独立	X_i 同分布	$E(X_i)=\mu$	$D(X_i)=\sigma^2>0$
定理结论	$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N\left(E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right], D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right) = N(n\mu, n\sigma^2)$ $\Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N(0,1)$			

2. 中心极限定理的应用:

(1) 总体X~(0-1)分布

问题:总体 $X\sim(0-1)$,且 $P(X=1)=p, p\in(0,1)$,利用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对 p 进行检验:

$$H_0: p=p_0, \qquad H_1: p\neq p_0.$$

(1-精确)选取检验统计量: 由 $\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,p) \xlongequal{H_0\text{为真}} b(n,p_0)}$ 构造拒绝域,

但H_0的拒绝域不太好算.

(2-近似)选取检验统计量: $\boxed{u=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \underset{n\to\infty}{\overset{H_0\text{为真}}{\sim\!\sim\!\sim}} N(0,1)}$

得H_0的拒绝域: $|u|>u_{1-\alpha/2}$.

【★例3.8(P_{88})】(续例3.1)某厂家向一百货商店长期供应某种货物, 双方根据厂家的传统生产水平写出质量标准: 若次品率超过3%, 百货商店拒收该批货物. 今有一批货物, 随机抽43件检验, 发现次品2件, 用假设检验方法, 给出该批商品的验收方案及检验结果(设$\alpha = 0.25$).

解:设 $X=\begin{cases}1, & \text{本产品为次品}\\ 0, & \text{本产品为合格品}\end{cases}$,即 $X\sim b(1,p)$.

(1) 检验假设: $H_0: p\le p_0$, $H_1: p>p_0$ $(p_0=0.03)$

(2) 取检验统计量: $u=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$;

(3) H_0的拒绝域为: $u>u_{1-\alpha}$;

(4) 代入样本: $u=\dfrac{2-43\times0.03}{\sqrt{43\times0.03\times0.97}}=0.6347$, $u_{1-\alpha}=u_{0.75}=0.6745$,

$u>u_{1-\alpha}$不成立,故不拒绝H_0,从而接收该批产品.

(2) 总体$X\sim\pi(\lambda)$

问题: 设总体$X\sim\pi(\lambda)$, 利用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$对λ进行检验:

$$H_0:\lambda=\lambda_0,\qquad H_1:\lambda\neq\lambda_0.$$

(1-精确)选取检验统计量: 由 $\boxed{\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\pi(n\lambda)\overset{H_0\text{为真}}{=\!=\!=\!=\!=}\pi(n\lambda_0)}$ 构造拒绝域.

但H_0的拒绝域不太好算.

(2-近似) 选取检验统计量: $\boxed{u=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}}\;\underset{n\to\infty}{\overset{H_0\text{为真}}{\sim\sim\sim\sim\sim}}\;N(0,1)}$

得H_0的拒绝域: $|u|>u_{1-\alpha/2}$.

【★例 3.9(P_{89})】 下列数据是某十字路口在一分钟内车辆到达的时刻(单位:秒), 假设没有 2 辆以上的车在完全同一时刻到达.

2.7,	5.5,	7.5,	11.4,	14.1,	14.4,	14.8,
15.6,	16.7,	19.6,	20.7,	23.3,	24.5,	24.7,
27.6,	29.9,	31.1,	31.8,	33.7,	36.5,	37.4,
42.2,	44.1,	44.3,	46.6,	46.9,	47.7,	50.2,
50.3,	50.6,	50.9,	52.5,	55.4,	58.4,	58.6.

根据以往统计, 在每天8:00 - 8:01这段时间通过该十字路口的车流量为0.5辆/秒, 试以这些数据(单位:秒)检验以往的结论 (设$\alpha=0.1$).

(3) 总体X~exp(θ)

问题: 设总体$X\sim\exp(\theta)$, 其概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, 利

用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$对参数θ进行检验:

$$H_0:\theta=\theta_0,\qquad H_1:\theta\ne\theta_0.$$

(1-精确) 选取检验统计量: $\boxed{\chi^2=2\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{H_0为真}{\sim\sim\sim\sim\sim} \chi^2(2n)}$

得H_0的拒绝域: $\chi^2>\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)$或$\chi^2<\chi^2_{\alpha/2}(2n)$.

(2-近似) 选取检验统计量: $\boxed{W=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0^2}} \underset{n\to\infty}{\overset{H_0为真}{\sim\sim\sim\sim\sim}} N(0,1)}$

得H_0的拒绝域: $|u|>u_{1-\alpha/2}$.

【★例3.10(P_{90})】一般地每相邻两辆车到达路口的时间间隔服从指数分布且相互独立，其中λ为平均每秒的车流量，用例3.9的数据及指数总体参数检验方法检验是否有$\lambda=\lambda_0=0.5$ $(\alpha=0.1)$.

2.7,	5.5,	7.5,	11.4,	14.1,	14.4,	14.8,
15.6,	16.7,	19.6,	20.7,	23.3,	24.5,	24.7,
27.6,	29.9,	31.1,	31.8,	33.7,	36.5,	37.4,
42.2,	44.1,	44.3,	46.6,	46.9,	47.7,	50.2,
50.3,	50.6,	50.9,	52.5,	55.4,	58.4,	58.6.

说明：例3.9与例3.10用了同一批数据，得到不同总体的不同样本，但检验的是同一个参数问题.

补充:总体参数的单边检验

一、正态总体: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2已知

(1) 检验: $\boxed{H_0:\mu \le \mu_0,\ H_1:\mu > \mu_0}$

(2) 如何决定接受还是拒绝H_0?

启发: $E(\bar{X})=\mu$, 且$\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

$H_0:\mu \le \mu_0$　　　μ_0　　　$H_1:\mu > \mu_0$

$\bar{X} > k$ (k待定) $\longrightarrow$ $\mu > \mu_0$ $\longrightarrow$ 拒绝H_0.

$\bar{X} \le k$ $\longrightarrow$ $\mu \le \mu_0$ $\longrightarrow$ 接受H_0.

(3) 控制犯I类错误的概率 $\boxed{P\{拒绝H_0 | H_0为真\} \le \alpha}$ 以确定k，得H_0的拒绝域：

$$P\{拒绝H_0 | H_0为真\} = P\{\bar{X} > k | H_0 : \mu \le \mu_0 真\}$$

$$= P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| H_0 : \mu \le \mu_0 真\right\}$$

$$\underset{是u的减函数}{\overset{g(u)=\frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\le}} P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \alpha$$

$$\xRightarrow{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)} \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = u_{1-\alpha} \Rightarrow k = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow H_0的拒绝域: \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha}$$

二、非正态总体

中心极限定理: 对随机变量序列$X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$, 若:

- X_i独立,
- 同分布,
- $E(X_i)=\mu,\ D(X_i)=\sigma^2>0$,

则有

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N\left(E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right], D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right)=N(n\mu, n\sigma^2)$$

或 $$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N(0,1).$$

(一) $X \sim (0-1) = b(1, p)$

(1) 检验: $H_0 : p \le p_0,\ H_1 : p > p_0$

(2) 如何决定接受还是拒绝H_0?

启发: $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N\left(np, np(1-p)\right) \Rightarrow E(\bar{X}) = p$, 且$\bar{X} \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$H_0 : p \le p_0$ $\quad p_0 \quad$ $H_1 : p > p_0$

$\bar{X} > k$ $(0 < k < 1$待定$)$ → $p > p_0$ → 拒绝H_0.

$\bar{X} \le k$ → $p \le p_0$ → 接受H_0.

(3) 控制犯I类错误概率$P\{$拒绝$H_0 | H_0$为真$\} \le \alpha$以确定k, 得H_0的拒绝域:

$$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = P\{\bar{X} > k \mid H_0: p \le p_0真\}$$

$$= P\left\{\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} > \frac{k-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \,\middle|\, H_0: p \le p_0真\right\}$$

$$\overset{g(p)=\frac{k-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\text{是}p\text{的减函数}}{\le} P\left\{\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} > \frac{k-p_0}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right\} = \alpha$$

$$\xRightarrow{\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)} \frac{k-p_0}{\sqrt{p(1-p)/n}} = u_{1-\alpha} \Rightarrow k = p_0 + u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

$$\Rightarrow H_0的拒绝域: \frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p(1-p)/n}} > u_{1-\alpha} \quad 或 \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > u_{1-\alpha}$$

附：求证$g(p) = \dfrac{k-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$是$p$的减函数.

证明：$g'(p) = \dfrac{\sqrt{n}}{2} \cdot \dfrac{2kp-k-p}{[p(1-p)]^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{n}}{2} \cdot \dfrac{k(p-1)+p(k-1)}{[p(1-p)]^{3/2}} \le 0$，得证.

(二) $X \sim \pi(\lambda)$

(1) 检验: $H_0: \lambda \le \lambda_0,\ H_1: \lambda > \lambda_0$

(2) 如何决定接受还是拒绝H_0?

启发: $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N\left(n\lambda, n\lambda^2\right) \Rightarrow E(\bar{X}) = \lambda$, 且$\bar{X} \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$

$H_0: \lambda \le \lambda_0$　　λ_0　　$H_1: \lambda > \lambda_0$

$\bar{X} > k$ ($k > 0$待定) $\rightarrow$ $\lambda > \lambda_0$ $\rightarrow$ 拒绝H_0.

$\bar{X} \le k$ $\rightarrow$ $\lambda \le \lambda_0$ $\rightarrow$ 接受H_0.

(3) 控制犯I类错误概率$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} \le \alpha$以确定k, 得$H_0$的拒绝域:

$$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = P\{\bar{X} > k \mid H_0:\lambda \le \lambda_0真\}$$

$$= P\left\{\frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}} > \frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \,\middle|\, H_0:\lambda \le \lambda_0真\right\}$$

$$\overset{g(\lambda)=\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}}}{\underset{是\lambda的减函数}{\le}} P\left\{\frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}} > \frac{k-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}}\right\} = \alpha$$

$$\xRightarrow{\frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)} \frac{k-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} = u_{1-\alpha} \Rightarrow k = \lambda_0 + \sqrt{\frac{\lambda_0}{n}} \cdot u_{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow H_0的拒绝域:\frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} > u_{1-\alpha} \quad 或 \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}} > u_{1-\alpha}$$

附:$g(\theta) = \dfrac{k-\theta}{\theta/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\dfrac{k}{\theta}-1\right)$显然是$\theta$的减函数.

(三) $X \sim \exp(\theta)$

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} \quad (\theta>0)$

(1) 检验: $H_0:\theta\le\theta_0,\ H_1:\theta>\theta_0$

(2) 如何决定接受还是拒绝H₀?

启发: $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\sim} N\left(n\theta, n\theta^2\right) \Rightarrow E(\bar{X})=\theta$, 且 $\bar{X} \overset{n\to\infty}{\sim} N\left(\theta, \dfrac{\theta^2}{n}\right)$

$H_0:\theta\le\theta_0$ $\quad\theta_0\quad$ $H_1:\theta>\theta_0$

$\bar{X}>k$ ($k>0$待定) ➡ $\theta>\theta_0$ ➡ 拒绝H₀.

$\bar{X}\le k$ ➡ $\theta\le\theta_0$ ➡ 接受H₀.

(3) 控制犯I类错误概率 $P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\}\le\alpha$ 以确定k, 得H₀的拒绝域:

$$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = P\{\bar{X} > k \mid H_0: \theta \le \theta_0真\}$$

$$= P\left\{ \frac{\bar{X}-\theta}{\theta/\sqrt{n}} > \frac{k-\theta}{\theta/\sqrt{n}} \,\middle|\, H_0: \theta \le \theta_0真 \right\}$$

$$\underset{是\theta的减函数}{\overset{g(\theta)=\frac{k-\theta}{\theta/\sqrt{n}}}{\le}} P\left\{ \frac{\bar{X}-\theta}{\theta/\sqrt{n}} > \frac{k-\theta_0}{\theta_0/\sqrt{n}} \right\} = \alpha$$

$$\xRightarrow{\frac{\bar{X}-\theta}{\theta/\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)} \frac{k-\theta_0}{\theta_0/\sqrt{n}} = u_{1-\alpha} \Rightarrow k = \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow H_0的拒绝域: \frac{\bar{X}-\theta_0}{\theta_0/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha} \quad 或 \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta_0}{\sqrt{n}\cdot\theta_0} > u_{1-\alpha}$$

附: $g(\theta) = \frac{k-\theta}{\theta/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{k}{\theta} - 1\right)$ 显然是θ的减函数.

2. $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\quad(\lambda>0)$

(1) 检验: $H_0:\lambda\le\lambda_0,\ H_1:\lambda>\lambda_0$

(2) 如何决定接受还是拒绝H_0?

启发: $\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N\left(\frac{n}{\lambda},\frac{n}{\lambda^2}\right) \Rightarrow E(\bar{X})=\frac{1}{\lambda}$, 且$\bar{X}\overset{n\to\infty}{\sim\sim\sim} N\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{n\lambda^2}\right)$

$H_1:\frac{1}{\lambda}<\frac{1}{\lambda_0}$ $\qquad \frac{1}{\lambda_0} \qquad$ $H_0:\frac{1}{\lambda}\ge\frac{1}{\lambda_0}$

$\bar{X}<k\ (k>0$待定$)$ → $\lambda>\lambda_0$ → 拒绝H_0.（方向相反）

$\bar{X}\ge k$ → $\lambda\le\lambda_0$ → 接受H_0.

(3) 控制犯I类错误概率$P\{$拒绝$H_0|H_0$为真$\}\le\alpha$以确定k, 得H_0的拒绝域:

$$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = P\{\bar{X} < k \mid H_0: \lambda \le \lambda_0真\}$$

$$= P\left\{ \frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{1/\sqrt{n\lambda^2}} < \frac{k - \frac{1}{\lambda}}{1/\sqrt{n\lambda^2}} \,\middle|\, H_0: \lambda \le \lambda_0真 \right\}$$

$$\overset{g(\theta) = \frac{k - \frac{1}{\lambda}}{1/\sqrt{n\lambda^2}}}{\le} \quad P\left\{ \frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{1/\sqrt{n\lambda^2}} < \frac{k - \frac{1}{\lambda_0}}{1/\sqrt{n\lambda_0^2}} \right\} = \alpha$$

是λ的增函数

$$\xrightarrow{\frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{1/\sqrt{n\lambda^2}} \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)} \frac{k - \frac{1}{\lambda_0}}{1/\sqrt{n\lambda_0^2}} = u_\alpha \Rightarrow k = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2}} u_\alpha$$

$$\Rightarrow H_0的拒绝域: \frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda_0}}{1/\sqrt{n\lambda_0^2}} < u_\alpha \quad 或 \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{\lambda_0}}{\sqrt{n}/\lambda_0} < u_\alpha$$

附：$g(\lambda) = \dfrac{k - 1/\lambda}{1/\sqrt{n\lambda^2}} = \sqrt{n}(\lambda k - 1)$显然是$\lambda$的增函数.

可以考虑瑞利分布等。