四川大学期末考试试题 A 卷参考答案

(2016–2017 学年下期)

课程号: **201098050** 课序号: **01,02** 课程名称: **高等代数-2** 任课教师: **付昌建　谭友军**　成绩:

适用专业年级: **2016 级数学学院各专业** 学生人数: 300 印题分数: **320**　　学号:　　　姓名:

1. (**本题满分** 25 **分**) **设** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x_1, x_2, x_3) = X'AX$, **其中** $X = (x_1, x_2, x_3)'$.

   (1) (10 **分**) **利用正交替换将** $f(x_1, x_2, x_3)$ **化为标准型**;

   (2) (5 **分**) **设** V_1 **是** A **的特征值** 2 **的特征子空间**, $\alpha = (1, 2, -1)' \in \mathbb{R}^3$, **求向量** α **在** V_1 **上的正交投影**;

   (3) (5 **分**) **设** $C(A) = \{B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \ AB = BA\}$. **求** $\dim_{\mathbb{R}} C(A)$;

   (4) (5 **分**) **设** A^* **是** A **的伴随矩阵**. **问** A^* **与** A **在** $\mathbb{R}$ **上是否合同**, **说明理由**.

解答. *(1)*　计算矩阵 A 的特征多项式可得 $f_A(\lambda) = |\lambda E_3 - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$.

令 $\lambda = 4$, 求解齐次线性方程组 $(4E_3 - A)X = 0$ 可得 $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是特征值 4 的特征子空间的一个基;

令 $\lambda = 2$, 求解齐次线性方程组 $(2E_3 - A)X = 0$ 可得 $\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是特征值 2 的特征子空间的一个基.

记 $\eta_1 = \frac{\epsilon_1}{|\epsilon_1|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. 对 ϵ_2, ϵ_3 做 *Gram-Schmidt* 正交单位化得 $\eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 易知 P 为正交矩阵. 考虑正交替换 $X = PY$, 其中 $Y = (y_1, y_2, y_3)'$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = X'AX = Y'P'APY = 4y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$ 为 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准型.

(2)　由 (1) 知 V_1 的一个标准正交基为 η_2, η_3, 则向量 α 在 V_1 中的正交投影 β 为

$$\beta = (\alpha, \eta_2)\eta_2 + (\alpha, \eta_3)\eta_3 = \alpha - (\alpha, \eta_1)\eta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(3) 由 (1) 知 $P'AP = \mathrm{diag}\{4,2,2\}$. 记 $B = \mathrm{diag}\{4,2,2\}$, 则 $\dim_{\mathbb{R}} C(A) = \dim_{\mathbb{R}} C(B)$.

直接计算可得

$$C(B) = \{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{R}\}.$$

或者直接计算

$$C(A) = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & -c \\ d & -d & e \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{R}\}.$$

由此可知 $\dim_{\mathbb{R}} C(A) = \dim_{\mathbb{R}} C(B) = 5$.

(4) 合同.

理由如下: 两个同阶的实对称矩阵合同当且仅当它们具有相同的正惯性指数及负惯性指数. 易知 A^* 为实对称矩阵且 $A^* = |A|A^{-1} = 16A^{-1}$. 另一方面, A^{-1} 的特征值为矩阵 A 的特征值的逆. 由此可知 A^* 的特征值也全大于零, 从而 A^* 与 A 合同.

另也可直接求出 A^*, 然后计算 A^* 的特征值.

2. (**本题满分** 35 **分**) **设** V **为实线性空间且** $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ **是** V **的一个基. 设** $\mathbb{A}$ **为** V **上的线性变换且满足** $\mathbb{A}(\epsilon_1) = -\epsilon_2 - 2\epsilon_3, \mathbb{A}(\epsilon_2) = \epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 3\epsilon_3, \mathbb{A}(\epsilon_3) = -\epsilon_3$.

(1) (10 **分**) **求线性变换** $\mathbb{A}$ **的特征子空间**;

(2) (10 **分**) **设** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **问是否存在** V **的一个基** η_1,η_2,η_3 **使得** $\mathbb{A}$ **在基** η_1,η_2,η_3 **下的矩阵为** B, **说明理由**;

(3) (5 **分**) **求线性变换** $\mathbb{A}$ **的包含** ϵ_1 **的最小的不变子空间**;

(4) (5 **分**) **是否存在** V **的一个基使得线性变换** $\mathbb{A}$ **在此基下的矩阵为对称矩阵, 说明理由**;

(5) (5 **分**) **进一步假设** V **是欧氏空间. 问线性变换** $\mathbb{A}$ **是否为正交变换, 说明理由**.

解答. *(1)* 令矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 由题意可知 $\mathbb{A}(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3) = (\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)A$. 利用矩阵 A 计算线性变换 $\mathbb{A}$ 的特征多项式可得

$$f_{\mathbb{A}}(\lambda) = |\lambda E_3 - A| = (\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

令 $\lambda = 1$, 求解线性方程组 $(E_3 - A)X = 0$ 可得 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为矩阵 A 的特征值 1 的特征子空间的一个基;

令 $\lambda = -1$, 求解线性方程组 $(-E_3 - A)X = 0$ 可得 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为矩阵 A 的特征值 -1 的特征子空间的一个基.

由此可知线性变换 $\mathbb{A}$ 的特征值 1 的特征子空间 $V_1 = L(2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + \epsilon_3)$, 特征值 -1 的特征子空间 $V_{-1} = L(\epsilon_3)$.

(2) 存在.

由 (1) 知矩阵 A 的 *Jordan* 标准型为 $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 易知存在基 η_1, η_2, η_3 使得 $\mathbb{A}$ 在此基下的矩阵为 B 当且仅当 A 与 B 相似.

计算 B 的初等因子可得 $(\lambda-1)^2, (\lambda+1)$ (或求矩阵 B 的特征子空间), 从而矩阵 B 的 *Jordan* 标准型也等于 J_A. 特别地, A 与 B 相似.

(3) 设 W 是 $\mathbb{A}$ 的包含 ϵ_1 的最小的不变子空间.

由不变子空间的定义可得 $\mathbb{A}(\epsilon_1) = -\epsilon_2 - 2\epsilon_3 \in W$.

进一步地, $\mathbb{A}^2(\epsilon_1) = -\epsilon_1 - 2\epsilon_2 - \epsilon_3 \in W$ 且 $\epsilon_1 + \mathbb{A}^2(\epsilon_1) = -2\epsilon_2 - \epsilon_3 \in W$.

由 $-\epsilon_2 - 2\epsilon_3 \in W$ 及 $2\epsilon_2 - \epsilon_3 \in W$ 可得 $\epsilon_2, \epsilon_3 \in W$, 从而 $W = V$.

(4) 不存在.

假设存在基使得 $\mathbb{A}$ 在此基下的矩阵为对称矩阵 C, 则 A 在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似于对称矩阵 C. 由实对称矩阵一定可对角化, 由此可知 A 在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似于对角矩阵. 但由 (1) 知矩阵 A 不可对角化, 矛盾. 因此不存在 V 的基使得 $\mathbb{A}$ 在此基下的矩阵为对称矩阵.

(5) 不是.

否则, 若 $\mathbb{A}$ 是正交变换, 则由正交变换与正交矩阵的关系知, 矩阵 A 在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似于正交矩阵 P. 由相似矩阵具有相同的特征值可知 P 的特征值为 $1, 1, -1$. 由正交矩阵 P 的特征值全为实数可得 P 在 $\mathbb{R}$ 上相似于 $\mathrm{diag}\{1, 1, -1\}$. 特别地, 矩阵 A 可对角化, 矛盾, 从而假设不成立.

3. (**本题满分** 10 **分**) **设** A **为** n **阶实对称矩阵**, B **为** m **阶实对称矩阵**. **设** A **与** B **的正惯性指数分别为** p_A, p_B.

(1) (5 **分**) **证明**: **矩阵** $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ **的正惯性指数为** $p_A + p_B$;

(2) (5 **分**) **设** W **是** $\mathbb{R}^n$ **的** p **维子空间且满足** $\forall 0 \neq \alpha \in W, \alpha' A \alpha > 0$ **成立**. **证明**: $p_A \geqslant p$.

证明.

(1) 注意到实对称矩阵的正惯性指数等于该矩阵的大于零的特征值的个数. 记 a 表示矩阵 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的正惯性指数, 则 a 等于 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 大于零的特征值的个数.

另一方面, 准对角矩阵 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的特征值为矩阵 A 的特征值与矩阵 B 的特征值的并. 由此可知 $a = p_A + p_B$.

<u>注</u>: 也可以对矩阵进行分块合同变换.

(2) 设 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_p$ 是 W 的一个基, 将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一个基 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_p,\cdots,\epsilon_n$. 令 $C = (\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 则 C 为可逆矩阵. 考虑 $C'AC = (\epsilon_i'A\epsilon_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $A_{11}\in M_{p\times p}(\mathbb{R})$. 注意到 $C'AC$ 为对称矩阵, 因此 $A_{11}' = A_{11}, A_{22}' = A_{22}, A_{12}' = A_{21}$. 由题意 $0\neq\alpha\in W, \alpha'A\alpha > 0$ 可知 A_{11} 为正定矩阵.

因此存在可逆矩阵 $C_1\in M_{p\times p}(\mathbb{R})$ 使得 $C_1'A_{11}C_1 = E_p$. 对矩阵 $C'AC$ 做合同变换可得

$$\begin{pmatrix} C_1' & 0 \\ 0 & E_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & E_{n-p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & C_1'A_{12} \\ A_{21}C_1 & A_{22}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ -A_{21}C_1 & E_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_p & C_1'A_{12} \\ A_{21}C_1 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_p & -C_1'A_{12} \\ 0 & E_{n-p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}C_1C_1'A_{12}\end{pmatrix}.$$

显然矩阵 $\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}C_1C_1'A_{12}\end{pmatrix}$ 的正惯性指数大于或等于 p. 注意到正惯性指数在合同变换下不变, 由此可知 $p_A\geqslant p$.

4. (**本题满分** 10 **分**) **设** $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \beta\in\mathbb{R}^m$. **证明**: **方程组** $AX=\beta$ **有解当且仅当** β **与** $A'Y=0$ **的解空间正交**.

证明. 记 U 是线性方程组 $A'Y=0$ 的解空间, $A=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$, 其中 $\gamma_i\in\mathbb{R}^m$.

必要性: 设 γ 是线性方程组 $A\gamma=\beta$ 的解, 特别地, $A\gamma=\beta$. 对任意的 $\delta\in U$, $\beta'\delta=(A\gamma)'\delta=0$, 因此 $\beta\perp U$.

充分性: 设 $\beta\perp U$, 则 $\beta\in U^\perp$. 由 U 的定义可知 $U^\perp = L(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\subseteq\mathbb{R}^m$. 因此 $r(A)=r(A\ \beta)$. 由线性方程组的解的存在性可知 $AX=\beta$ 有解.

5. (**本题满分** 10 **分**) **设实矩阵** A **的所有初等因子为** $(\lambda+1),(\lambda-1)^2$.

(1) (5 **分**) **求矩阵** A **的行列式** $|A|$;

(2) (5 **分**) **问是否存在实矩阵** B **使得** $A=B^3$, **说明理由**.

解答. *(1)* 矩阵的所有的初等因子的乘积等于矩阵的特征多项式, 由此可得 $f_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$. 另一方面, 矩阵的行列式等于所有的特征值的乘积. 因此, $|A|=-1\times1\times1=-1$.

(2) 存在.

由 (1) 知 A 相似于 $J=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 因此存在矩阵 B 使得 $A=B^3$ 当且仅当存在矩阵 C 使得 $J=C^3$.

不妨假设 $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1\end{pmatrix}$, 则 $C^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$. 特别地, $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$ 满足 $C^3=J$ 成立.

6. (**本题满分** 10 **分**) **设** V **为有限维复线性空间**, $\mathbb{A}$ **是** V **上的线性变换且** $\mathbb{A}$ **恰有** 4 **个不变子空间**. **求** $\mathbb{A}$ **的所有可能的** Jordan **标准型**. (**注**: **线性变换的** Jordan **标准型就是它在某个基下的矩阵的** Jordan **标准型**.)

解答. 注意到 $\mathbb{A}$ 的任意的特征向量可以张成一个一维不变子空间. 因此若 $\mathbb{A}$ 只有有限个不变子空间, 则 $\mathbb{A}$ 的任意的特征子空间都是一维的. 显然 $\dim_{\mathbb{C}} V \geqslant 1$. 由 $\mathbb{A}$ 只有 4 个不变子空间知 $\mathbb{A}$ 恰有两个非平凡不变子空间, 从而 $\mathbb{A}$ 至多有两个不同的特征子空间.

<u>情形一</u>*:* $\mathbb{A}$ 恰有一个特征子空间且该特征子空间维数为 1. 因此线性变换 $\mathbb{A}$ 的 *Jordan* 标准型只有一个 *Jordan* 块. 注意到若该 *Jordan* 块的阶为 r, 则 $\mathbb{A}$ 有 $r-1$ 个非平凡不变子空间. 由此可得 $\dim_{\mathbb{C}} V = 3$ 且 $\mathbb{A}$ 的 *Jordan* 标准型为 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$.

<u>情形二</u>*:* $\mathbb{A}$ 有两个不同的特征子空间. 此时 $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ 且 $\mathbb{A}$ 的 *Jordan* 标准型为 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$.