高等代数01平时测验03

1. 设 $f(x) = x^6 - x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 5x - 2$. 求 $f(x)$ 的全部复根及多项式 $g(x) := \frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 在实数 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式, 其中 $f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的导数.

   提示： 求 $f(x)$ 的所有复根等价于求 $f(x)$ 在复数上的标准分解式，但是一般多项式在复数上的标准分解式没有办法求。我们只能处理一些特殊多项式在复数上的因式分解. 注意到 $f(x)$ 的系数都是整数，因而可以尝试先求 $f(x)$ 的有理根。

   解答. 由有理根存在的必要条件知, 如果 $f(x)$ 有有理根, 那么其有理根只有可能是 $\pm 1, \pm 2$. 先带入 1 计算可得 $f(1) = 0$. 因此 $x-1$ 整除 $f(x)$, 求得 $f(x) = (x-1)(x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2)$. 令 $g_1(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, 求 $g_1(x)$ 的有理根. 重复上述步骤可得

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2) \\ &= (x-1)(x-1)(x^4 + x^3 - x^2 + x - 2) \\ &= (x-1)^3(x^3 + 2x^2 + x + 2) \\ &= (x-1)^3(x+2)(x^2+1). \end{aligned}$$

   由此可得 $f(x)$ 的复数根为: 1 (3重根), -2, $\pm\sqrt{-1}$.

   提示: 由于我们已经知道了 $f(x)$ 在复数上的标准分解式, 因而可以直接求出 $(f(x), f'(x))$ (不需要用带余除法计算 $f(x), f'(x)$ 的最大公因式).

   由 $f(x) = (x-1)^3(x+2)(x^2+1)$ 可知 $(f(x), f'(x)) = (x-1)^2$. 从而 $g(x) = (x-1)(x+2)(x^2+1)$，该表达式即为 $g(x)$ 在实数 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式.

2. 设 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的标准分解式.

   提示: 注意没有有效的方法求有理数域上的任意多项式的标准分解式. 因此如果能求其标准分解意味着该多项式具有特殊性. 对于有理多项式我们能处理的基本只有如下情形: 求其有理根和利用 Eisenstein 判别法判别某个多项式不可约.

   解答. 先判断多项式 $f(x)$ 是否有有理根. 由有理根存在的必要条件知道: $f(x)$ 的有理根只可能是 ± 1. 带入计算可知 $f(-1) = 0$. 由此可得

$$f(x) = (x+1)(x^3 - 3x - 1)$$

   且 $x^3 - 3x - 1$ 没有有理根. 令 $g(x) = x^3 - 3x - 1$. 考虑 $g(x+1) = x^3 + 3x^2 - 3$. 令 $p = 3$, 由 *Eisenstein* 判别法知 $g(x+1)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 从而 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的标准分解式为

$$f(x) = (x+1)(x^3 - 3x - 1).$$

3. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ 是多项式 $f(x) = x^4 + 5x + 1$ 的全部复根. 求 $\sum_{i=1}^4 \alpha_i^5$.

   提示: 考察对称多项式基本定理.

解答. 注意到 $f(\alpha_i)=\alpha_i^4+5\alpha_i+1=0$. 从而 $\alpha_i^4=-5\alpha_i-1$. 由此可得 $\alpha_i^5=-5\alpha_i^2-\alpha_i$, 带入 $\sum_{i=1}^4\alpha_i^5$ 计算可得

$$\sum_{i=1}^4\alpha_i^5=-5\sum_{i=1}^4\alpha_i^2-\sum_{i=1}^4\alpha_i.$$

利用待定系数法计算可得

$$\sum_{i=1}^4\alpha_i^5=-5(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_1,$$

其中 $\sigma_1,\cdots,\sigma_4$ 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_4$ 的初等对称多项式. 由 *Vieta* 定理知 $\sigma_1=0=\sigma_2$. 由此可得

$$\sum_{i=1}^4\alpha_i^5=0.$$

4. 证明: 数域 $\mathbb{F}$ 上的任意 n 元对称多项式都可以表示 n 元 Newton 多项式的多项式, 其中 Newton 多项式为 $s_k=x_1^k+\cdots+x_n^k$, $k\geqslant 0$.

<u>**提示:**</u> 由对称多项式基本定义可知任意的对称多项式都可以表示为初等对称多项式的多项式. 因此我们只需要证明初等对称多项式可以表示为 Newton 多项式的多项式即可.

证明. 由于任意的对称多项式都可以表示为一些齐次对称多项式的和, 因此我们只需要对任意的齐次对称多项式证明该结论即可.

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的任意的一个 m 次齐次对称多项式. 由对称多项式基本定理知存在多项式 $g(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{F}[y_1,\cdots,y_n]$ 使得 $f(x_1,\cdots,x_n)=g(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$, 其中 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 为 $y_1,\cdots,y_n$ 的初等对称多项式.

由作业 72 题知初等对称多项式 σ_k 可以表示为 Newton 多项式的多项式带入 $g(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 中可知结论成立. □

5. 设 n 是正整数. 证明: x^4+n 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上可约当且仅当 $n=4k^4$.

证明. 由 n 为正整数易知 x^4+n 没有有理根. 如果 x^4+n 在$\mathbb{Q}$ 上可约, 那么 x^4+n 只能分解为两个 2 次不可约多项式的乘积. 由此可设

$$x^4+n=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(bc+ad)x+bd,$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. 由多项式相等的定义可得

$$a+c=0,b+d+ac=0,bc+ad=0,bd=n. \tag{0.i}$$

若 $a=0$, 则 $c=0$. 带入计算可得 $x^4+n=(x^2+b)(x^2+d)=x^4+(b+d)x^2+bd$，从而 $b=-d,n=-b^2$ 与 n 为正整数矛盾. 因此 $a\neq 0$. 从而等式由 0.i 可得

$$a=-c,b=d,2b=a^2,n=b^2.$$

由 $2b=a^2$ 知 $2|a$, 从而存在整数 t 满足 $a=2t$, 带入 $2b=a^2$ 计算可得 $b=2t^2$. 同理可知存在整数 s 满足 $b=2s$ 且 $s=t^2$, 带入 $n=b^2$ 可知 $n=4s^2=4t^4$.

反之若 $n=4k^4$, 直接验证 $x^4+4k^4=(x^2+2kx+2k^2)(x^2-2kx+2k^2)$, 从而 x^4+4k^4 在 $\mathbb{Q}$ 上可约. □