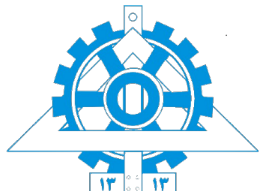


به نام خدا

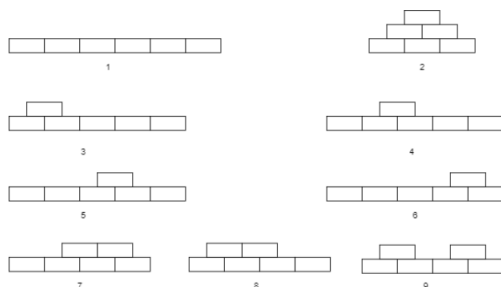


## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی پنجم  
موعده تحویل: یکشنبه ۲۴ اردیبهشت ۱۴۰۲، ساعت ۲۳:۵۹  
طراح: ارشیا ابوالقاسمی arshiabolghasemi@gmail.com

۱. فروت قرار است روز آخر هفته را با برادرش آفیش تنها در خانه سپری کنند و فروت باید از او مراقبت کنند. از آنجا که فروت آخر هفته کلی کار دارد تصمیم می‌گیرد یک سوال سخت به آفیش بدهد تا کل روز او به حل کردن سوال بگذرد. فروت از آفیش می‌خواهد تعداد راه‌های چیدن صد هزار آجر مستطیل شکل کنار هم را به دست بیاورد به طوری که شرط‌های زیر برقرار باشد:

- در ردیف اول همه آجرها کنار هم قرار می‌گیرند
  - در ردیف‌های بالاتر هر آجر باید دقیقاً روی دو آجر دیگر قرار بگیرد (دو آجری‌ای که روی آن‌ها آجر قرار می‌گیرد کاملاً بهم چسبیده‌اند)
  - چون آفیش قد کوتاه می‌باشد ارتفاع آجرها بیشتر از ۳ لایه نمی‌تواند باشد
- به طور مثال ۶ آجر به ۹ صورت زیر می‌توانند کنار هم چیده شوند



آفیش که به تازگی *dynamic programming* را یاد گرفته، می‌خواهد که جواب سوال فروت را هرچه سریعتر پیدا کرده و مانع انجام کار فروت شود. آیا آفیش می‌تواند در  $O(n)$  به مقصود خود برسد؟

۲. فروت اخیراً دستگاهی اختراع کرده که پول را خرد می‌کند. به طور مثال یک ده گیلدری (واحد پول قدیمی هلند) به آن می‌دهیم و یک ۵ گیلدری و یک ۲ گیلدری و ۳ تا یک گیلدری به شما برمی‌گرداند. فروت سعی در بهینه تر کردن این دستگاه دارد. یعنی می‌خواهد با کمترین تعداد پول استفاده شده پول داده شده را خرد کند. به طور مثال اگر قرار باشد یک ده گیلدری را با ۵ گیلدری و ۲ گیلدری و ۱ گیلدری خرد کند، دستگاه ده ۵ گیلدری به شما برمی‌گرداند.

- (آ) واحدهای پولی این دستگاه  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  می‌باشد که از هر کدام به تعداد نامتناهی در اختیار دارد. فروت از شما کمک خواسته تا الگوریتمی ارائه دهید تا یک پول  $s$  گیلدری را در  $O(sn)$  به بهینه‌ترین روش خرد کند؟
- (ب) آیا اردر زمانی الگوریتم شما  $O(sn)$  چند جمله‌ای می‌باشد؟ در مورد پاشختان توضیح دهید.

۳. (آ) فرض کنید یک دنباله با  $n$  عدد صحیح داریم. الگوریتمی ارائه دهید که در  $O(n^2)$  زیربازه‌ای را به ما برگرداند که جمع اعداد داخل آن بین همه زیربازه‌ها بیشینه باشد. (منظور از یک زیربازه از یک دنباله تعدادی عنصر متوالی است)

(ب) برای قسمت قبل الگوریتمی ارائه دهید که مساله را در  $O(n)$  حل کند.

۴. یک مستطیل  $n \times n$  به ما داده شده است که در هر خانه آن یک عدد صحیح نوشته شده است. الگوریتمی ارائه دهید که در  $O(n^3)$  بتواند زیر مستطیلی را پیدا کند که جمع اعداد داخل آن بیشینه است

۵. فروت اخیرا یک بازی جدید به اسم *cashy bits* ابداع کرده است. بازی به این گونه است که یک جدول  $m \times n$  در اختیار داریم و در هر خانه آن تعدادی صفر و یک قرار دارد (تعداد دقیق صفر و یک‌های هر خانه را میدانیم) حال باید از خانه سمت چپ بالای جدول حرکت کنیم و به خانه سمت راست پایین جدول برویم. فقط هم می‌توانیم به راست یا پایین حرکت کنیم. در مسیر نیز همه بیت‌هایی که در آن خانه است را نیز بر میداریم. در انتها نیز به ازای هر بیت یک، یک گالیون طلایی دریافت کرده و به ازای هر بیت صفر باید یک گالیون طلایی پرداخت کنیم. افیش می‌خواهد این بازی را افتتاح کند و همچنین بیشتر گالیون طلایی ممکن را از فروت دریافت کند. الگوریتمی به افیش ارائه دهید که در  $O(mn)$  بتواند راهی پیدا کند که بتواند بیشترین گالیون را دریافت کند

۶. وزارت جادو اخیرا بودجه هاگوارتز را کاهش داده است، به همین دلیل هاگوارتز برای تشکیل کلاس‌هایش به مشکل خورده است. دامبلدور که دیگر پیر شده است و توانایی حل کردن این مسائل را ندارد از پروفیسور سوروس کمک گرفته تا فکری به حال این مشکل بکند. سوروس در تصمیم عجیب می‌خواهد مشکل مالی هاگوارتز را با سخت گرفتن به دانش‌آموز های مهاجر حل کند. او برای هر درس شهریه‌ای تعیین کرده است که دانش‌آموز های مهاجر ملزم به پرداخت آن در صورت برداشتن درس هستند. همچنین دانش‌آموزان مهاجر باید در هر سال تحصیلی یا یک درس بردارند یا همه درس‌هایی که در آن سال تحصیلی ارائه می‌شوند را بردارند. در غیر اینصورت درسی در آن سال نمی‌توانند انتخاب کنند. پروفیسور سوروس نیز اینترنت هاگوارتز را در پاسخ به اعتراضات دانش‌آموزان به این موضوع قطع کرده است به همین دلیل افیش نمی‌تواند از خانواده خود درخواست پول کند به همین دلیل مجبور است با همین پولی که دارد انتخاب واحد کند. فرض کنید که افیش  $S$  پوند پول همراه خودش دارد و قرار است  $N$  سال دیگر در هاگوارتز تحصیل کند. شهریه درس  $i$  ام سال تحصیلی  $i$  ام نیز برابر  $c_{ij}$  می‌باشد. از آنجا که مدت انتخاب واحد در حال تمام شدن است به افیش کمک کنید که بتواند با الگوریتمی پایان‌پذیر بتواند بیشترین درس ممکن را با پولی که دارد انتخاب کند.

۷. فرض کنید دو رشته از حروف به شما داده شده است.

(آ) شبه کدی بنویسید که طول طولانی‌ترین زیر رشته مشترک این دو رشته را بدست آورد

(ب) شبه کدتان را به گونه‌ای تغییر دهید که طولانی ترین زیررشته مشترک این دو رشته را نیز چاپ کند

( به طور مثال طولانی‌ترین زیر رشته مشترک دو رشته *katan* و *yektaneh* ، *ktan* می‌باشد )

۸. والدرمورت قصد برگزاری یک مهمانی بزرگ را دارد. که در آن قصد دارد سران وزارت جادو را دعوت کند. همه سران وزارت جادو نیز علاقه به شرکت در این مهمانی را دارند ولی از آنجا که مهمانی، مهمانی والدرمورت است، اگر رئیس مستقیم آن‌ها به این مهمانی دعوت شده باشد آن‌ها دیگر به این مهمانی نخواهند رفت. اخیرا نیز صمیمیت سران وزارت جادو با والدرمورت بیشتر شده است و مقدار صمیمیت مسئولیت  $i$  ام با  $c_i$  نشان می‌دهیم از آنجا که این مهمانی بزرگترین مهمانی چند وقت والدرمورت هست می‌خواهد مهمانی پر صمیمیتی نیز باشد یعنی جمع صمیمیت افراد حاضر در مهمانی بیستین مقدار ممکن باشد. الگوریتمی به کمک برنامه‌نویسی پویا ارائه دهید که والدرمورت به هدف خود برسد.

۹. (آ) الگوریتمی ارائه دهید که  $n$  امین جمله فیبوناچی را در  $O(\log(n))$  بدست آورد. (راهنمایی: یکی از روش‌های اثبات استفاده از ضرب ماتریس ها می‌باشد، سعی کنید با استفاده از یک ماتریس کمکی جملات فیبوناچی را تولید کنید)
- (ب) با استفاده از ایده ضرب ماتریس سوال قبل الگوریتمی برای پیدا کردن جمله  $n$  ام دنباله زیر ارائه دهید. همچنین اردر زمانی الگوریتم را نیز بیابید.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \dots + f_{n-k}$$