



## به نام خداوند بخشنده مهربان

تحلیل و طراحی الگوریتم ها، نیم سال اول سال تحصیلی ۹۸-۹۷

تمرین چهارم

۳ آذر ۱۳۹۷

- اگر از الگوریتم هایی که در کلاس بحث شده است استفاده میکنید، لازم نیست درستی آنها را اثبات کنید.
- سعی کنید الگوریتم با کمترین پیچیدگی زمانی را بدست آورید.

۱. یک درخت ریشه دار با  $m$  راس داریم که روی هر یال آن، یک عدد 32 بیتی وجود دارد (فرض کنید  $m$  کمتر از  $2^{32}$  است). فاصله دو راس  $u$  و  $v$  با یکدیگر برابر با  $xor$  یال های مسیر بین  $(u, v)$  میباشد. میخواهیم فاصله  $n$  جفت راس دلخواه را بیابیم. الگوریتمی با هزینه زمانی  $O(m + n)$  ارائه دهید که این فواصل را بیابد.

۲. گراف جهت دار و بدون وزن  $G$  با  $n$  راس و  $m$  یال را در نظر بگیرید. همه رئوس از 1 تا  $n$  شماره گذاری شده اند. این گراف دارای خاصیت ویژه ای است. همه ی یال های گراف با پیمایش هر یال، تغییر جهت میدهند. در واقع، در صورت وجود یال از راس دلخواه  $u$  به راس دلخواه  $v$ ، به ازای هر پیمایش یک یال دلخواه، جهت یال گفته شده از  $v$  به  $u$  تغییر خواهد کرد. در ابتدا، زمان 0 میباشد و به ازای پیمایش هر یال در این گراف، یک واحد به زمان اضافه میشود. فرض کنید قرار است از راس 1 به راس  $n$  حرکت کنیم به گونه ای که کوتاهترین مسیر ممکن را پیموده باشیم. الگوریتمی با هزینه زمانی  $O(m + n)$  ارائه دهید که کوتاهترین مسیر ممکن را بیابد.

۳. گراف دو بخشی، گرافی است که راس های آن را میتوان به 2 بخش تقسیم کرد به طوری که داخل هر بخش، یالی وجود نداشته باشد. الگوریتمی در زمان  $O(V + E)$  ارائه دهید که مشخص کند آیا گراف داده شده 2 بخشی است یا خیر. بررسی کنید که آیا الگوریتم شما برای تشخیص گراف  $n$  بخشی قابل استفاده است یا خیر.

۴. در کشوری که رضا در آن زندگی میکند،  $n$  شهر وجود دارد که بین برخی از آنها، جاده های یک طرفه یا دو طرفه وجود دارد. رضا در ابتدا در یک بالن قرار دارد و میتواند هر کدام از شهرها را برای شروع حرکت خود انتخاب کند. او در هر مرحله میتواند در صورت وجود جاده، به شهر دیگری برود و هزینه پیمایش مسافت بین دو شهر  $i$  و  $j$  برابر با  $s(i, j)$  خواهد بود.

در برخی از جاده ها، یک *rare chest* وجود دارد که رضا میتواند با عبور از آن جاده ها و مراجعه به آن، 1 واحد به پولهایش اضافه کند. همچنین، در برخی دیگر از جاده ها، یک *epic chest* وجود دارند که رضا میتواند با مراجعه به آنها، 2 واحد پولی دریافت کند. حال رضا قصد دارد تا به گونه ای شهرها را پیمایش کند تا در نهایت، با پول بیشتری نسبت به روز اول به شهر اولیه خود بازگردد. الگوریتمی ارائه دهید که بررسی کند آیا پیمایشی با شرایط گفته شده وجود دارد یا خیر. هزینه زمانی الگوریتم شما باید متناسب با حاصلضرب تعداد شهرها و تعداد جاده ها باشد.

۵. با در نظر گرفتن  $n$  رشته ورودی، الگوریتمی ارائه دهید که بیان کند آیا دوری با اتصال تمامی رشته ها به یکدیگر وجود دارد یا خیر. در واقع، برای وجود یک پیوند از رشته  $i$  به  $j$ ، باید حرف آخر رشته  $i$  با حرف اول رشته  $j$  یکسان باشد.

۶. یک عدد  $n$  به عنوان ورودی داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که کوچکترین مضرب ممکن این عدد را بیابد به گونه ای که این عدد تنها از ارقام 0 و 1 ساخته شده باشد (به این گونه اعداد که تنها از ارقام 0 و 1 ساخته شده اند، اعداد طلایی می گوییم). به عنوان مثال، به ازای  $n = 2$ ، این عدد برابر با 10 است.