به نام خدا

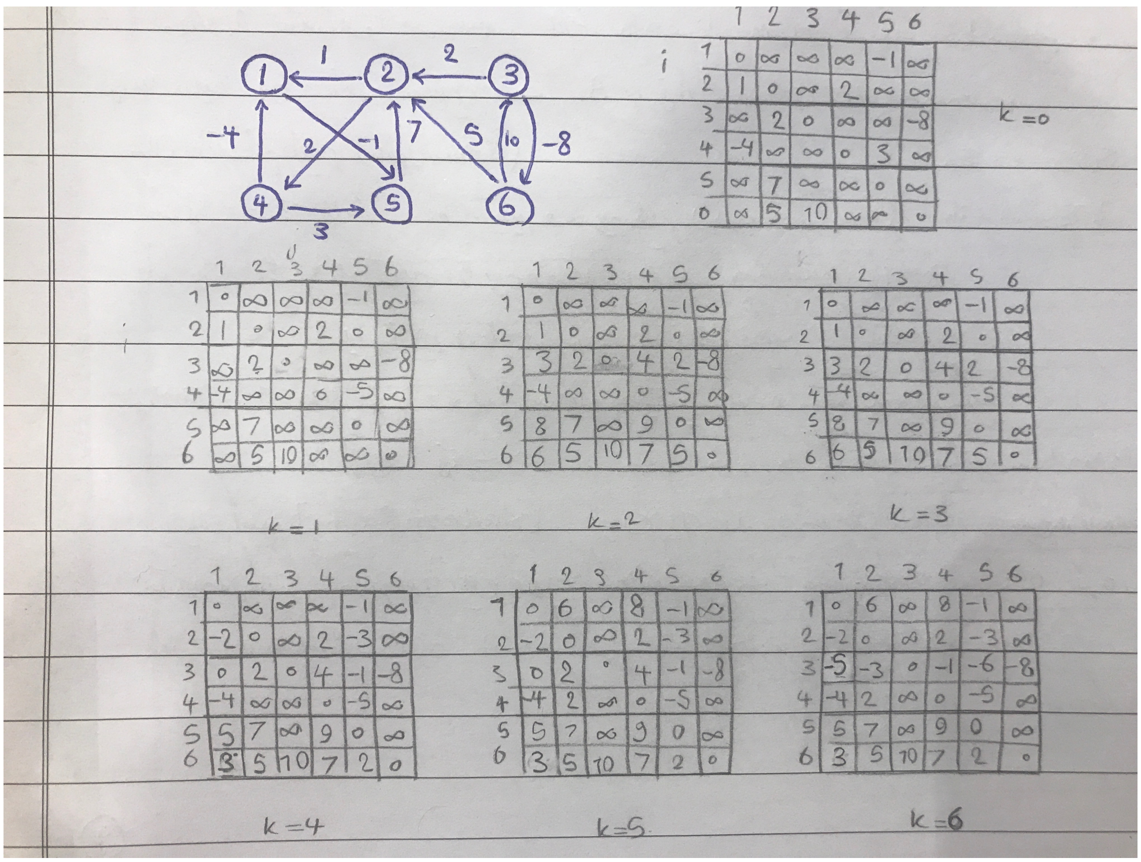
دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

پاسخ‌نامه تمرین کتبی چهارم

طراح: امیرمحمد رنجبر پازکی، iamirranjbar@gmail.com

---

۱. ماتریس‌ها در شکل زیر قابل مشاهده می‌باشند.



۲. در این مسئله باید قطر درخت را پیدا کنیم. قطر درخت بلند ترین مسیر درون درخت است. از یک راس دلخواه BFS می زنیم و دورترین راس به آن راس را پیدا می کنیم .(v) راس v قطعا یک سر یک بلندترین مسیر درون درخت خواهد بود. حال از v یک BFS دیگر میزنیم و دورترین راس را به v پیدا میکنیم(u). مسیر بین u و v بلند ترین مسیر در درخت خواهد بود. هزینه اجرای این الگوریتم برابر اجرای دوبار BFS است.

۳. یک گراف جهت دار تشکیل می دهیم که رئوس آن حروف هستند و اگر بتوان حرف x را به حرف y با هزینه c تبدیل کرد، یک یال جهت‌دار از راس x به راس y با وزن c می‌کشیم. حال کافیست برای هر جایگاه در دو رشته (فرض کنید حرف اول رشته اول p و حرف اول رشته دوم q باشد) کوتاه ترین مسیر را بین آن ها پیدا کنیم (کوتاه ترین مسیر از p به q) و این کار را برای تمامی جفت حرف ها در دو رشته تکرار میکنیم. هزینه برابر جمع هزینه این کوتاه ترین مسیر ها خواهدبود. هزینه الگوریتم برابر اجرای یک بار الگوریتم floyd warshal است که تمام کوتاه‌ترین مسیرها بین همه رئوس را به ما می‌دهد. ($\theta(n^3)$)

۴. لم : راس v در جنگل عمق اول گراف G نواده راس u است اگر و تنها اگر : $u.d < v.d < v.f < u.f$

(آ) اگر داشته باشیم $u.d < v.d < v.f < u.f$، مطابق لم بالا راس v یا مستقیما فرزند u است که در این حالت (u،v) یال درخت و یا نواده آن است که در این حالت یال جلویی است.

(ب) بر عکس حالت الف.

(ج) اگر هیچ کدام از حالت های بالا نباشد، یال ضربدری خواهیم داشت که برای آن این حالات وجود دارد:

- $u.d < v.d < u.f < v.f$ که امکان ندارد زیرا اگر بعد از u وارد v شده باشیم، امکان ندارد قبل از v از u خارج شویم.
- $v.d < v.f < u.d < u.f$ که همان حالت صورت مساله است.

۵. برای حل مسئله گرافی ا به این صورت می‌سازیم. راس ها را واحدهای پولی و وزن یال x y ضریب تبدیل واحد پول x به واحد پول y می باشد و یال ها جهتدارند. چرخه ای سود آور است که ضرب یال های این دور از ۱ بزرگتر شود. حال برای تبدیل ضرب به جمع، یال ها را لگاریتم مقدار قبلشان در نظر می‌گیریم. پس هدف ما پیدا کردن تمام دور های مثبت در گراف جدید است.
$1 < w(a) \times w(b) \times w(c)$
$0 < log(w(a)) + log(w(b)) + log(w(c))$
چون دور های منفی را می‌توان با bellman ford تشخیص داد، تمام یال ها را قرینه می‌کنیم و بدنبال دور های منفی میگردیم. برای پیدا کردن دور منفی یک بار bellman ford می‌زنیم. در این شرایط تمام راس ها مقدار نهایی خود را می‌گیرند. سپس یک بار دیگر این الگوریتم را اجرا می‌کنیم و اگر مقدار راسی تغییر کرد یا در دور منفی قرار داشته است و یا در مسیر دور منفی. نکته ی قابل توجه این است که برای اینکه از راس شروع به تمام راس ها مسیر باشد، از آن راس شروع به تمامی رئوس با یال صفر وصل می‌شویم.

۶. گراف G را به صورت مقابل می‌سازیم. به ازای هر متغیر یک راس در نظر می‌گیریم. به ازای هر نامساوی $x_i - x_j \leq b_k$، یال جهت‌داری از v_j به v_i با وزن b_k قرار می‌دهیم. یک راس v_0 نیز قرار می‌دهیم و از آن به تمامی رئوس یالی با وزن ۰ وصل می‌کنیم. روی گراف G الگوریتم bellman ford را اجرا می‌کنیم. در صورتی که گراف دور منفی داشت، این مجموعه تفاضلی جواب ندارد. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $c =< v_1, v_2, ..., v_k >$ دور منفی گراف باشد به صورتی‌که است. این دور معادل نامساوی‌های زیر است.

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 &\leq w(\nu_1, \nu_2)\ , \\
x_3 - x_2 &\leq w(\nu_2, \nu_3)\ , \\
&\vdots \\
x_{k-1} - x_{k-2} &\leq w(\nu_{k-2}, \nu_{k-1})\ , \\
x_k - x_{k-1} &\leq w(\nu_{k-1}, \nu_k)\ .
\end{aligned}$$

حال فرض خلف می‌کنیم که جواب عملی برای این مجموعه وجود دارد. اگر همه این نامساوی‌ها را با هم جمع بزنیم، باز هم جواب در نامعادله حاصل صدق می‌کند. اگر سمت راست معادله‌ها را ببینیم، هر متغیر یک بار جمع و یک بار کم شده‌است($x_1 = x_k$). پس، حاصل برابر صفر است. جمع سمت راست هزینه دور را می‌دهد.پس، داریم: $0 \leq w_c$ و چون دور منفی است، داریم: $w_c < 0$ و این تناقض است. پس، فرض ابتدایی اشتباه بوده‌است و جواب عملی برای این مجموعه تفاضلی وجود ندارد.
در صورتی که گراف دور منفی نداشته‌باشد، مجموعه جواب زیر برای متغیرها وجود دارد.

$$x = (\delta(\nu_0, \nu_1), \delta(\nu_0, \nu_2), \delta(\nu_0, \nu_3), \ldots, \delta(\nu_0, \nu_n))$$

یک یال (v_i, v_j) را درنظر بگیرید. طبق نامساوی مثلثی، خواهیم داشت: $\delta(v_0, v_j) \leq \delta(v_0, v_i) + w(v_i, v_j)$ یا به طور معادل: $\delta(v_0, v_j) - \delta(v_0, v_i) \leq w(v_i, v_j)$ که این ساختار نامعادله‌های سیستم است. پس جواب‌ها به صورت مقابل است: $x_i = \delta(v_0, v_i)$