تمرین چهارم

Transform and Conquer

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر | مهلت تحویل: | طراحی الگوریتم - بهار ۱۴۰۲

استاد: دکتر اسدپور | ۱۴۰۲/۲/۱۰، ساعت ۲۳:۵۹ | طراح تمرین: **ملیکا حیدری دستجردی**

---

۱. می‌خواهیم تعداد عناصر متفاوت در یک آرایه به طول n از اعداد صحیح را بدانیم. دو راه حل پیشنهاد کنید که دومی پیچیدگی زمانی کمتر از $O(n^2)$ داشته باشد. توضیح دهید با چه پیش‌پردازشی به حل بهینه‌تر رسیدید.

پاسخ:

راه اولیه این است که یک بار آرایه را پیمایش کنیم و در این حین به ازای هر عنصر از ابتدای آرایه تا عنصر قبلی‌اش چک کنیم عنصری مساوی با آن وجود دارد یا خیر. در صورت عدم وجود، مقدار یک شمارنده که در نهایت جواب را نشان می‌دهد یک واحد بیشتر کنیم. این راه پیچیدگی $O(n^2)$ دارد.

از طرفی می‌توانیم ابتدا آرایه را با پیچیدگی $O(n\ log\ n)$ مرتب کنیم. در این صورت با یک بار پیمایش آرایه (و چک کردن این که عدد فعلی با قبلی فرق دارد یا خیر) می‌توانیم تعداد عناصر یکتا را به دست بیاوریم که از $O(n)$ است لذا در کل پیچیدگی زمانی از اردر $O(n\ log\ n)$ می‌شود.

۲. یک آرایه به طول n از اعداد صحیح داریم. در هر مرحله می‌توانیم دو عنصر a_i و a_j از آرایه که تفاضل مثبت این دو عنصر از یک بیشتر نباشد و همچنین $i \neq j$ را انتخاب کرده و عنصر کوچکتر را از آرایه حذف کنیم. حال شما بگویید آیا می‌توانیم با انجام این عمل کاری کنیم که نهایتا دقیقا یک عنصر در آرایه باقی بماند؟ چگونه؟

پاسخ:

ابتدا آرایه را با اردر $O(n\ log\ n)$ مرتب می‌کنیم. سپس با شروع از ابتدا، هر بار عنصر i ام را با جفت کردن با عنصر i+1 حذف می‌کنیم. اگر در نهایت فقط یک عنصر بماند به جواب رسیده‌ایم، در غیر این صورت ممکن نیست.

۳. معادله زیر را با استفاده از Gaussian elimination حل کنید.

$7x + 5y - 3z = 16$

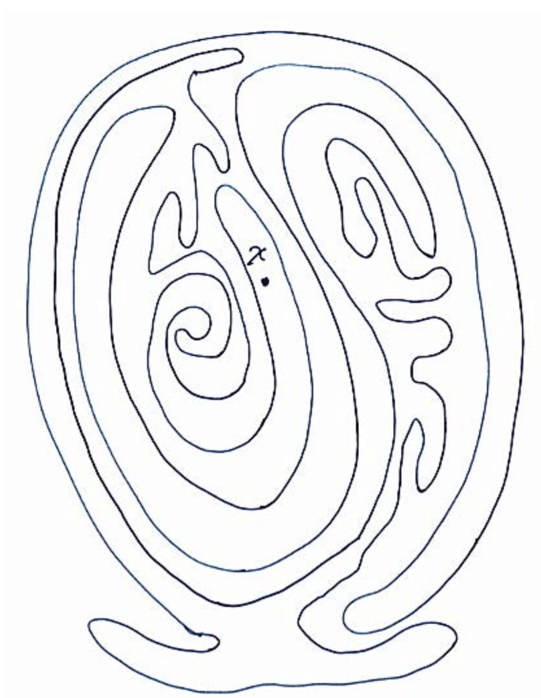
$3x - 5y + 2z = -8$

$5x + 3y - 7z = 0$

پاسخ:

کافیست مشابه الگوریتم مشخص محاسبات را انجام دهید.

۴. خم بسته X در صفحه به شکل زیر داده شده است:



می‌خواهیم ببینیم نقطه دلخواهی در صفحه مثل x، در ناحیه درونی این خم قرار دارد یا در ناحیه بیرونی آن. الگوریتمی طراحی کنید که این موضوع را تعیین کند.

پاسخ:

یک نقطه خارج از خم در نظر گرفته و آن را m می‌نامیم. از m به x پاره‌خطی می‌کشیم. اگر دقت کنیم هر بار این پاره‌خط با منحنی برخورد می‌کند، اگر تا قبل از آن در ناحیه خارج منحنی بوده، وارد آن شده و اگر داخل آن بوده از آن خارج شده‌است. لذا با توجه به اینکه در ابتدا m خارج از خم قرار دارد، زوجیت تعداد این برخوردها وضعیت قرارگیری x را نسبت به خم مشخص می‌کند. (اگر فرد باشد داخل وگرنه خارج خم است.)

۵. یک چندجمله‌ای با جملاتی از درجه فرد به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$P_{2n+1}(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x$$

الگوریتم هورنر را برای این حالت خاص بازسازی کنید.

پاسخ:

کاملا مشابه الگوریتم هرنر ($P <- xP + a_{n-1}$) با این تفاوت که در هر مرحله بایستی حاصل فعلی را در x^2 ضرب کنیم و شروع محاسبه هم از a_1x باشد.

۶. الگوریتمی ارائه دهید که تعیین کند آرایه ورودی $H[1..n]$ می‌تواند نشانگر یک heap باشد یا نه. آن را از لحاظ پیچیدگی زمانی و حافظه‌ای بررسی کنید. سعی کنید الگوریتمتان تا جایی که می‌توانید بهینه باشد.

پاسخ:

با $O(n)$ و یک بار پیمایش آرایه این کار امکان‌پذیر است. کافیست به ازای هر H_i، فرزندان آن شرایط یک heap را رعایت کنند.

یعنی:

$$h_{2*i} <= h_i \ , h_{2*i+1} >= h_i$$

(فرزند راست بزرگتر و فرزند چپ کوچکتر)

۷. یک کارگاه تولیدی لباس سه محصول پیراهن، دامن و شلوار تولید می‌کند. این کارگاه به ازای فروش هر پیراهن ۶ دلار، دامن ۴ دلار و شلوار ۸ دلار سود می‌کند. هر سه محصول برای نهایی شدن سه مرحله طراحی، برش و دوخت را باید طی کنند. واحد طراحی ۱۲ ساعت، واحد برش ۱۴ ساعت و واحد دوخت ۱۶ ساعت در روز کار می‌کنند. هر ۱۰۰ عدد محصول برای نهایی شدن طبق جدول زیر در هر مرحله زمان نیاز دارد:

	ساعت به ازای تولید ۱۰۰ عدد محصول		
	طراحی	برش	دوخت
پیراهن	۳	۱	۲
دامن	۲	۲	۳
شلوار	۲	۳	۴

یک مسئله خطی با هدف بیشینه کردن سود این کارگاه بنویسید.

پاسخ:

تعداد پیراهن‌های فروشی در یک ماه را a، دامن‌ها را b و شلوارها را c می‌گیریم.

بنابراین می‌توان نوشت عبارت 6a + 2b+ 8c سود ماهانه کارگاه را نشان می‌دهد و ماکسیمم آن بیشترین سود ممکن را نشان می‌دهد. (که محاسبه آن هدف ما نیست.)

با توجه به اطلاعات سوال از زمان فعالیت سه واحد دوخت، طراحی و برش، این سه متغیر محدودیت‌هایی دارند.

مثلا تولید a پیراهن در یک ماه، $3 \times \frac{a}{100}$ ساعت زمان می‌برد. تولید b دامن و c شلوار نیز به ترتیب $2 \times \frac{b}{100}$ و $2 \times \frac{c}{100}$ ساعت زمان می‌برد و از طرفی واحد طراحی در روز ۱۲ ساعت کار می‌کند. لذا داریم:

$$\frac{a}{100} \times 3 + \frac{b}{100} \times 2 + \frac{c}{100} \times 2 <= 12\,hours$$

مشابه این معادله در مورد واحدهای برش و دوخت نیز باید قید شود.

۸. توضیح دهید چرا A^k که A ماتریس مجاورت گرافی ساده و بدون جهت است، تعداد مسیرهای دو به دوی به طول k را نشان می‌دهد.

پاسخ:

از استقرا استفاده می‌کنیم.

پایه: A^1 مسیرهای به طول ۱ یا همان یالها را نشان می‌دهد.

فرض: A^{k-1} تعداد مسیرهای به طول k را نشان دهد.

گام: هر مسیر به طول k بین دو راس u و v، از یک مسیر به طول k-1 از u تا یکی از همسایه‌های v و از آن همسایه توسط یال متصل به v تشکیل شده است. بنابراین اگر تعداد مسیرهای به طول k-1 تا همسایه‌های v که از u می‌آیند را جمع کنیم، تعداد مسیرهای uv به طول k مشخص می‌شود. این مقدار حاصل ضرب سطر مربوط به راس u در A^{k-1} در ستون مربوط به v در A است. لذا $A^k = A^{k-1} \times A$ و حکم ثابت می‌شود.