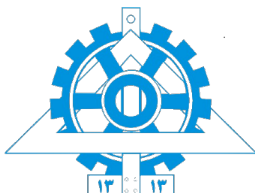


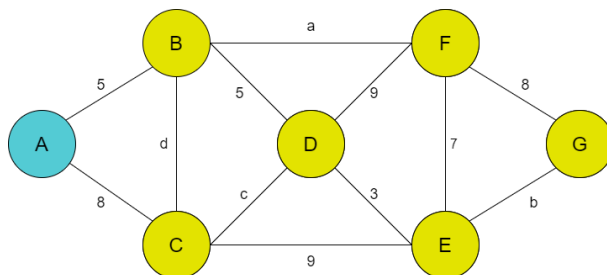


# دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم ها



تمرین کتبی چهارم  
موعد تحویل: دوشنبه ۲۰ اردیبهشت ۱۴۰۰، ساعت ۲۳:۵۵  
طراح: امیرحسین علیزاد، aalizad79@gmail.com

۱. گراف زیر و شماره دانشجویی خود را به صورت  $abcd81019$  در نظر بگیرید:



- آ. به وسیله الگوریتم **دایکسترا** درخت کوتاه ترین مسیر با شروع از راس مشخص شده را به دست آورید. (در این درخت، پدر هر راس، راسی است که آن را به مجموعه دایکسترا اضافه میکند) (۶ نمره)
- ب. به کمک الگوریتم پریم درخت پوشای کمینه را به دست آورید. (۶ نمره)
- ج. آیا درخت حاصل از اجرا دو الگوریتم با یکدیگر یکسان است؟ تفاوت دو درخت ایجاد شده را در حالت کلی بیان کنید. (۳ نمره)

۲. گراف وزن دار  $G$  و ماتریس  $D$  که ماتریس کوتاه ترین مسیر بین دو راس در گراف  $G$  است که  $D[u, v]$  به معنای کوتاه ترین مسیر از راس  $u$  به راس  $v$  است. فرض کنید وزن یالی با نام  $e$  را از  $w_e$  به  $w'_e$  کاهش داده شود، الگوریتمی طراحی کنید که با توجه به تغییر داده شده ماتریس  $D$  را با مرتبه زمانی  $O(n^2)$  به روزرسانی کند. (۱۵ نمره)

۳. دو رشته به طول یکسان ( $n$ ) در اختیار داریم. می‌خواهیم با کمترین هزینه ممکن و با حرکات مجاز، رشته‌ها را یکسان سازی کنیم. حرکات مجاز و هزینه هر حرکت در اختیار ما قرار گرفته شده است. هر حرکت مجاز با  $3$  تایی  $(a_i, b_i, w_i)$  تعریف میشود که به این معنی است که حرف  $a_i$  با هزینه  $w_i$  به کاراکتر  $b_i$  تبدیل میشود. با داشتن حرکات مجاز و هزینه آنها الگوریتمی بهینه ارائه دهید که با کمترین هزینه ممکن رشته‌ها را برابر کند. هزینه زمانی الگوریتم خود را محاسبه کنید (۱۵ نمره)

۴. گراف بی جهت و وزن دار  $G$  با  $n$  راس و  $q$  یال در اختیار ما قرار داده شده است. به ما یک  $3$  تایی به صورت  $(u, v, l)$  داده میشود که  $u$  و  $v$  هر کدام راس هایی در گراف و  $l$  یک عدد مثبت است. به یال  $e$  "جذاب" میگوییم در صورتی که مسیری وجود داشته باشد که:

آ.  $u$  و  $v$  دو نقطه شروع و پایان این مسیر باشد.

ب.  $e$  یکی از یال های موجود در این مسیر باشد.

ج. مجموع وزن تمام یال های موجود در این مسیر از  $l$  بیشتر نشود.

الگوریتمی بهینه ارائه دهید که با وجود شرایط بالا و  $3$  تایی  $(u, v, l)$  تعداد یال های جذاب بین  $u$  و  $v$  را بیابید. هزینه زمانی الگوریتم خود را بیابید. (در گراف دور وجود ندارد) (۲۰ نمره)

۵. امیر و حسین باهم بازی میکنند. در این بازی امیر یک آرایه  $n$  تایی در نظر گرفته است. سپس به حسین  $m$  راهنمایی می دهد که هر کدام به شکل  $a - b > c$  یا  $a - b < c$  است که به این معنی است که جمع بازه  $a$  تا  $b$  کمتر یا بیشتر از  $c$  است. به حسین کمک کنید تا آرایه را حدس بزند یا بگوید اطلاعات امیر غلط است و چنین آرایه ای وجود ندارد. (راهنمایی: ابتدا از ایده Partial Sum استفاده کنید تا به رابطه ساده تری برسید. گرافی بسازید که با چک کردن وجود یک شرط در آن بتوان تشخیص داد که چنین دنباله ای وجود دارد یا خیر و در صورت وجود آن را بسازید) (۲۰ نمره)

---

۶. درمورد الگوریتم های [Kosaraju](#) و [Tarjan](#) مطالعه کنید و به دلخواه یکی از الگوریتم ها را برای پیدا کردن مولفه های قویا همبند در گراف  $G$  توضیح دهید و پیچیدگی زمانی الگوریتم را محاسبه کنید. (یک گراف قویا همبند گرافی است که بین هر دو راس  $u$  و  $v$  مسیری وجود دارد. مولفه ی قویا همبند یک زیر مجموعه ی بیشینه از راس های موجود در گراف است.) (۱۵ نمره)