



به نکات زیر توجه فرمایید:

- الگوریتم خود را به طور کامل توضیح دهید؛ اگر در صورت سؤال خواسته نشده باشد، نوشتن شبه‌کد نیازی نیست.
- در هر سؤال باید پیچیدگی زمانی و پیچیدگی مصرفی الگوریتم خود را نیز محاسبه کنید.
- سعی کنید بهینه‌ترین الگوریتم را ارائه دهید.

۱. عدد پنج را می‌توان به ۶ شکل به صورت جمع اعداد کوچک‌تر از خود نوشت.

$$1+1+1+1+1$$

$$1+1+1+2$$

$$1+2+2$$

$$2+3$$

$$1+1+3$$

$$1+4$$

عدد  $n$  را به چند شکل می‌توان به صورت جمع اعداد کوچک‌تر از خود نوشت؟  $O(n^2)$

۲. تعداد زوجی سکه با ارزش‌های متفاوت در یک ردیف قرار دارند. در یک بازی دو نفره، هر کس یک سکه را از انتها یا ابتدای ردیف برمی‌دارد و نوبت را به نفر دیگر می‌دهد. بازی تا جایی ادامه پیدا می‌کند که همه‌ی سکه‌ها برداشته شوند. الگوریتمی ارائه دهید که بیش‌ترین مقدار پولی که ممکن است نفر اول کسب کند حساب کند و همچنین شبه‌کد آن را با دو روش جداگانه برنامه‌نویسی پویا و بازگشتی حافظه دار بنویسید.  $O(n^2)$

۳. رُندی یک عدد برابر تعداد صفرهایی است که به آن ختم می‌شود و همچنین رُندی یک مجموعه برابر با مقدار رُندی ضرب همه‌ی اعضای مجموعه است. آرایه‌ای با  $n$  عدد طبیعی مفروض است. الگوریتمی ارائه دهید که بیش‌ترین مقدار رُندی در بین تمام مجموعه‌های  $k$  عضوی از آرایه را بدست آورد. ( $k \leq n$ ) اعداد در بازه ۱ تا  $a$  قرار دارند و سخت‌افزار محاسبه‌گر، اعداد بیش‌تر از  $n \times a$  را نمی‌تواند ذخیره کند پس در هیچ جای الگوریتم نباید حاصل محاسبه‌ای بیش‌تر از  $n \times a$  شود.  $O(n^2 \log(a))$

۴. رشته‌ای از حروف به طول  $n$  وجود دارد. اگر در رشته، زیررشته‌ای شامل "OK" باشد، رشته ناپسند نامیده می‌شود. برای آنکه رشته به رشته‌ای پسندیده تبدیل شود (یعنی دارای زیررشته "OK" نباشد)، در هر گام می‌توان دو حرف مجاور را جا به جا کرد. الگوریتمی ارائه دهید که حداقل تعداد حرکت مورد نیاز برای تبدیل رشته ناپسند به رشته پسندیده را محاسبه کند.  $O(n^4)$

۵. یک palindrome واژه‌ای است که از هر دو طرف به یک صورت نوشته می‌شود. مثلاً واژه hannah یک palindrome است. هر رشته از حروف را می‌توان به صورت دنباله‌ای از palindrome ها نشان داد. به طور مثال رشته hannahseesbob به صورت‌های مختلف نمایش داده می‌شود:

$$\text{"hannahseesbob"} = \text{"hannah"} + \text{"sees"} + \text{"bob"}$$

$$\text{"hannahseesbob"} = \text{"hannah"} + \text{"s"} + \text{"ee"} + \text{"s"} + \text{"bob"}$$

$$\text{"hannahseesbob"} = \text{"h"} + \text{"a"} + \text{"nn"} + \text{"a"} + \text{"h"} + \text{"sees"} + \text{"b"} + \text{"o"} + \text{"b"}$$

$$\text{"hannahseesbob"} = \dots$$

اگر رشته را  $S$  بنامیم، الگوریتمی ارائه دهید که کمترین تعداد palindrome هایی را که می‌توان  $S$  را به آن‌ها ساخت حساب کند. برای مثال این مقدار برای مثال فوق ۳ است.  $O(n^2)$

۶. پرسش ۵ اینگونه تغییر کرده است : در هر مرحله زیررشته palindrome از رشته حذف می‌شود و دو رشته باقی‌مانده به یکدیگر چسبیده می‌شوند. هدف خالی شدن رشته اولیه است. الگوریتمی ارائه دهید که کمترین تعداد palindrome حذف شده را حساب کند. به عنوان مثال رشته ی 1442321 را در نظر بگیرید بعد از حذف 44 به رشته ی 12321 می‌رسیم پس بعد از ۲ گام رشته خالی می‌شود.  $O(n^3)$