



به نام خداوند بخشنده مهربان

پاسخ تمرین شماره ۵

۳ دی ۱۳۹۷

۱. گراف دوبخشی G را به صورت زیر ایجاد میکنیم: هر فرد را یک راس (p_i) و هر شب را نیز یک راس در نظر میگیریم (n_i) . سپس هر p_i را به مجموعه شب هایی که میتواند در آنها آشپزی کند متصل میکنیم. حال با اجرای الگوریتم $matching$ روی گراف G ، یک برنامه ریزی قابل قبول به دست می آید.

۲. ابتدا با استفاده از الگوریتم $ford - fulkerson$ ، تمام مسیرهای مجزا از s به t را می یابیم. چون ظرفیت همه یال ها برابر 1 است، پس جریان گذرنده از هر یک از این مسیرها برابر 1 است و همچنین ماکزیمم جریان گذرنده از این گراف (f) برابر با تعداد این مسیرهاست. حال از هر یک از این مسیرها، یک یال را به دلخواه حذف میکنیم. در نهایت به گرافی با کمترین مقدار جریان خواهیم رسید. (اگر $k \geq f$ باشد، آنگاه ماکزیمم جریان پس از حذف یال ها به روش گفته شده، برابر 0 خواهد بود)

۳. فرض کنید وزن تمام یال ها در گراف G ، 1 باشد. با توجه به فرض، k مسیر متمایز بین u و v و همچنین بین v و w وجود دارد. بنابراین، یک جریان به اندازه k بین u و v و یک جریان به اندازه k بین v و w وجود دارد. فرض کنید جریان ورودی راس v برابر $k + e$ باشد (که جریان k از راس u می آید). طبق قانون پایستگی جریان (جریان ورودی با جریان خروجی از یک راس برابرند)، جریان $k + e$ از v خارج میشود که با استفاده از فرض دوم، میدانیم به اندازه k ، جریان از v به w میرود. حال، تمام مسیرهای $w - \dots - v - \dots - u$ را در نظر بگیرید. یک جریان به اندازه k از u به w وجود دارد و از آنجایی که وزن تمام یال ها برابر 1 میباشد، k مسیر متمایز بین u و w وجود خواهد داشت.

۴. به ازای هر ویژگی i ($0 < i < n$)، راس p_i و به ازای هر بال j ($0 < j < m$)، راس b_j را در نظر میگیریم. سپس به ازای هر i و j ، در صورتی که بال b_j میتواند ویژگی p_i را اندازه گیری کند، یالی با ظرفیت 1 از p_i به b_j اضافه میکنیم. 2 راس s و t را نیز اضافه میکنیم و راس s را با ظرفیت k به همه ی p_i ها و راس t را با ظرفیت 2 به همه ی b_j ها متصل میکنیم. حال با در نظر گرفتن راس s به عنوان راس شروع و راس t به عنوان راس پایان، الگوریتم $ford - fulkerson$ را روی گراف به دست آمده اجرا میکنیم. در نهایت بررسی میکنیم که آیا از همه یال های خروجی از s جریانی برابر با ظرفیت آنها (k) میگذرد یا خیر. اگر بگذرد، در اینصورت، هر بال حداکثر 2 ویژگی را اندازه گیری کرده است و همچنین هر ویژگی دقیقاً توسط k بال اندازه گیری شده است. در غیر اینصورت، پاسخی با شرایط گفته شده وجود نخواهد داشت.

۵. گراف قسمت قبل را در نظر بگیرید. تغییرات زیر را روی آن اعمال میکنیم: ابتدا همه یال های بین رئوس p_i و b_j را حذف میکنیم. سپس به ازای هر $3 p_i$ راس M_{i1} و M_{i2} و M_{i3} را به گراف اضافه میکنیم. از هر راس p_i به هر 3 راس اضافه شده با ظرفیت $k - 1$ یالی اضافه میکنیم و از هر بالن b_j به راس های مربوط به شرکت سازنده آن یالی با ظرفیت 1 متصل میکنیم. سایر قسمت های گراف را تغییر نمی دهیم. در نهایت بر روی این گراف الگوریتم $ford - fulkerson$ را اجرا میکنیم. در صورتی که از همه یال های خروجی s جریانی برابر با ظرفیت آنها (k) بگذرد، آنگاه پاسخ مطلوب به دست آمده است. در غیر اینصورت، پاسخی برای مسئله گفته شده وجود نخواهد داشت.

۶. گرافی با $2 + m + n$ راس را به صورت زیر ایجاد میکنیم: راس s به تمام رئوس یک ها (n راس) با وزنی برابر با قیمت آن کیک، متصل میشود. هر کیک (c_i) به مواد اولیه مورد نیاز برای تولید خودش، با وزن بینهایت متصل میشود. هر ماده اولیه، به راس t با وزنی برابر با هزینه خرید آن ماده اولیه، متصل میشود. حال، الگوریتم $ford - fulkerson$ را روی این گراف از راس s به راس t اجرا میکنیم. حال، $mincut$ گراف گفته شده را در نظر بگیرید. این $mincut$ تمام مواد اولیه مورد نیاز و همچنین تمام کیک هایی که پخته نمیشوند، را داراست. در نتیجه، پاسخ این مسئله برابر است با: قیمت تمامی کیک ها منهای $mincut$ گراف مورد نظر.