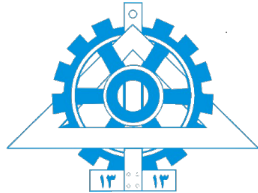




به نام خدا

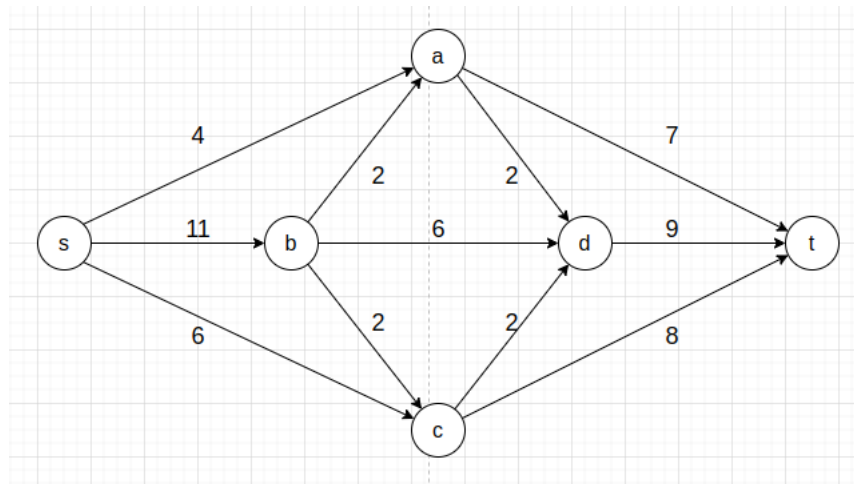


دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی پنجم
موعد تحویل: ۱۵ خرداد ۱۴۰۱، ساعت ۲۳:۵۵
طراح: محمد فرهی (mohammad.farrahi@ut.ac.ir)

توجه ()** در تمامی سوالات، راه حل مرتبط با network-flow مد نظر است. الگوریتم پیدا کردن max-flow را می‌توانید چند جمله ای در نظر بگیرید.

۱. الگوریتم Ford-Fulkerson را بر روی گراف زیر با شروع از راس s و ختم به راس t اجرا کنید. در هر مرحله، مسیر افزایشی و شبکه باقی مانده را رسم کنید. در انتها نیز min-cut گراف را مشخص کنید.



۲. در یک شبکه جریان، یالی که حذف آن باعث بیشترین کاهش در جریان بیشینه در شبکه شود را یال ارزشمند می‌نامیم. موارد زیر را اثبات یا با مثال نقض رد کنید.

- (آ) یک یال ارزشمند یالی است با بیشترین مقدار ظرفیت در شبکه.
- (ب) یک یال ارزشمند یالی است با بیشترین مقدار جریان گذرنده از آن در شبکه
- (ج) یک یال ارزشمند بالی است که جزء یال‌های یک min s-t cut بوده و بیشترین جریان گذرنده را دارد از بین یال‌های cut دارد.
- (د) یالی که متعلق به یک min s-t cut نباشد نمی‌تواند یک یال ارزشمند باشد.
- (ه) یک شبکه می‌تواند چند یال ارزشمند داشته باشد.

۳. فرض کنید M یک جدول $x \times y$ باشد که در هر خانه از جدول یک عدد حقیقی نامنفی وجود دارد به طوری که مجموع اعداد هر سطر و ستون عددی صحیح است. ثابت کنید جدولی $x \times y$ وجود دارد به طوری که در هر خانه از جدول یک عدد صحیح نامنفی وجود دارد و مجموع اعداد هر سطر و ستون آن، همانند جدول M است.

۴. در یک جشن بزرگ و خاص، n نفر به مهمانی دعوت شده‌اند. برای انجام پذیرایی، افراد باید دور میزهای دایره‌ای شکل بنشینند. افرادی که مجاور هم می‌نشینند باید شرایط خاصی داشته باشند. دو نفر تنها در صورتی می‌توانند کنار هم بنشینند که مجموع سن آن‌ها عددی اول باشد. با فرض اینکه تعداد نامحدودی میز دایره‌ای برای استفاده وجود دارد و در هر میز استفاده شده باید حداقل ۳ نفر دور آن نشسته باشند، الگوریتمی چند جمله‌ای ارائه دهید که طرز نشستن مهمانان را مشخص کند یا مشخص کند این کار ممکن نیست.

۵. فرض کنید گراف شبکه $G = (V, E)$ با دو راس $s \in V$ و $t \in V$ و ظرفیت یال c_e برای هر یال $e \in E$ به شما داده شده است. گراف G دارای یال هایی است که به منبع s وارد می شوند. فرض کنید f جریانی در این شبکه باشد که در آن یکی از یال های (v, s) که به منبع وارد می شود دارای جریان $f(v, s) = 1$ باشد.

(آ) ثابت کنید جریان f' برای شبکه G وجود دارد به طوری که $|f'| = |f|$ و $f'(v, s) = 0$

(ب) الگوریتمی با مرتبه زمانی $O(|V| + |E|)$ ارائه دهید که با داشتن f و فرض اینکه ظرفیت همه یال ها یک عدد صحیح است، f' را محاسبه کند.

۶. یک مزرعه مستطیل شکل داریم که می توان به آن همانند جدول نگاه کرد؛ به این شکل که در تعدادی از قسمت های مزرعه (خانه های جدول) درخت کاشته شده است و دیگر قسمت های آن (بقیه خانه های جدول) که خالی هستند، دارای خاک مرطوب مناسب برای کاشت درخت است. قرار است قسمت هایی که در آن ها درخت وجود دارد را از قسمت هایی که خاک دارند با حصار جدا کنیم. هزینه کشیدن حصار بین هر دو خانه مجاور x تومان است. هدف این است که این هزینه کمینه شود. برای رسیدن به این مهم، این قابلیت وجود دارد که درختی در یک خانه خالی کاشته شود یا درختی در یک خانه از مزرعه قطع شود. هزینه کاشت یا قطع درخت در یک خانه از مزرعه برابر y تومان است. الگوریتمی چند جمله ای ارائه دهید که خالی یا دارای درخت بودن هر خانه از مزرعه را طوری تعیین کند که در نهایت مجموع هزینه برای عملیات حصار کشی کمینه شود. دقت کنید که نیازی به حصار کشیدن بین خانه های کناری مزرعه و بیرون مزرعه نیست.