



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی دوم (برنامه‌نویسی پویا)

موعد تحویل: دوشنبه ۱۶ فروردین ۱۴۰۰، ساعت ۲۳:۵۹

طراح: دانشور امراللهی (amrollahi.daneshvar@gmail.com)

لطفاً در تمامی سوالات تعریف آرایه/ماتریس DP خود، مقداردهی اولیه آن، نحوه آپدیت شدن آن از دیگر مقادیر آرایه/ماتریس و نحوه محاسبه جواب نهایی مسئله از روی آن را بنویسید

۱. طولانی‌ترین زیر دنباله مشترک رشته‌های $ABACAAC$ و $BACBAAC$ را با استفاده از روش برنامه‌نویسی پویا به دست آورید. جدول d که $d_{i,j}$ نشان دهنده طول جواب به ازای i حرف اول رشته اول و j حرف اول رشته دوم است و همچنین جدول par که $par_{i,j}$ نشان می‌دهد $d_{i,j}$ از روی چه خانه‌ای آپدیت شده را نمایش دهید و به کمک par خود رشته جواب را نیز بنویسید. (۱۰ نمره)

۲. به یک رشته متقارن می‌گوییم اگر با برعکس خودش برابر باشد. برای مثال رشته $madam$ یک رشته متقارن است. یک رشته به طول n به شما داده می‌شود. شما بایستی طول طولانی‌ترین زیررشته (تعدادی حرف متوالی در رشته) متقارن رشته ورودی را با پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ به دست آورید. (۱۰ نمره)

۳. یک جدول $2 \times n$ از اعداد حقیقی به شما داده شده است. می‌خواهیم تعدادی خانه دو به دو نامجاور انتخاب کنیم به طوری که مجموع اعداد آن‌ها بیشینه شود. راه حلی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه دهید تا این بیشترین حاصل جمع دست‌یافتنی را خروجی دهد. (شبه‌کد را با روش بازگشتی حافظه‌دار (memoization) بنویسید) (۱۰ نمره)

۴. به دنباله a_1, a_2, \dots, a_l زیبا می‌گوییم اگر:

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_l \leq n$$

$$\bullet \text{ به ازای هر } i \text{ که } 1 \leq i \leq n-1 \text{ داشته باشیم: } a_i | a_{i+1}$$

به عبارتی هر دنباله غیرنزولی از اعداد ۱ تا n به طوری که هر عدد بر عدد قبلی خود بخشپذیر باشد را زیبا می‌نامیم.

تعداد دنباله‌های زیبا به طول k با استفاده از اعداد ۱ تا n را با پیچیدگی زمانی‌های

$$(A) \quad O(nk\sqrt{n}) \quad (۵ \text{ نمره})$$

$$(B) \quad O(nk \log(n)) \quad (۱۰ \text{ نمره})$$

به دست آورید (برای بخش ب شبه‌کد بنویسید)

۵. به شما رشته‌ای از حروف به طول n داده می‌شود. حداقل تعداد کاراکترهایی که باید به این رشته اضافه کنید (اضافه کردن حرف جدید به هر جایی از رشته مجاز است) تا این رشته متقارن (باهمان تعریف سوال ۲) شود را با پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ به دست آورید. (در این سوال پیچیدگی حافظه شما باید از $O(n)$ باشد) (۱۵ نمره)

۶. تعداد n توپ در یک ردیف کنار هم چیده شده‌اند. توپ i م رنگ c_i دارد که $0 \leq c_i \leq m$. رنگ‌ها از ۱ تا m شماره‌گذاری می‌شوند و

$c_i = 0$ به معنای رنگ نشده بودن توپ i است. برای این که توپ رنگ نشده i را به رنگ j دریاوریم باید $p_{i,j}$ واحد هزینه کنیم.

زیبایی یک دنباله از توپ‌ها را تعریف می‌کنیم: حداقل تعداد گروه‌های متوالی از توپ‌ها که بتوان همه n توپ را به آن افزاز کرد به طوری که اعضای هر گروه هم‌رنگ باشد. برای مثال اگر دنباله رنگ‌ها به شکل $1, 1, 1, 2, 2, 7, 1$ باشد زیبایی این دنباله برابر با ۴ است زیرا حداقل تعداد گروه‌ها به شکل رو به رو است: $[1, 1, 1]$, $[2, 2]$, $[7]$, $[1]$.

اگر بخواهیم توپ‌های رنگ نشده را رنگ کنیم به طوری که زیبایی دنباله نهایی دقیقاً برابر k باشد، راه حلی با پیچیدگی زمانی $O(nkm^2)$ ارائه دهید تا کمترین هزینه را پیدا کند. (۲۰ نمره)

۷. در یک رستوران n نوع غذا موجود است. اریک می‌خواهد دقیقاً m تا از غذاها را بخورد که $m \leq n$ (از هر نوع غذا حداکثر ۱ بار می‌تواند بخورد). اریک می‌داند غذای i م به خوشحالی او اندازه a_i واحد اضافه می‌کند همچنین k قانون به این فرم وجود دارد که: اگر غذای x_i را دقیقاً قبل از y_i بخورد (بین این دو وعده نباید غذای دیگری بخورد)، آنگاه خوشحالی او به اندازه c_i واحد علاوه بر مقدار اشاره شده در بالا، اضافه خواهد شد. راه حلی با پیچیدگی زمانی $O(2^n n^2)$ پیدا کنید تا حداکثر خوشحالی که اریک می‌تواند به دست آورد را محاسبه کند. (راهنمایی: برای حل این سوال می‌توانید از ایده DP Bitmask استفاده کنید. برای آشنایی با این ایده [اینجا](#) کلیک کنید) (۲۰ نمره)