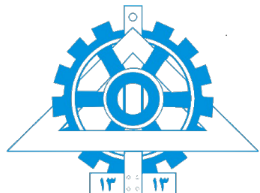


به نام خدا



## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی دوم  
موعد تحویل: شنبه ۱۸ آبان ۹۸، سر کلاس درس  
zhivarsourati@gmail.com

به نکات زیر توجه فرمایید:

- الگوریتم خود برای هر سوال را به طور کامل توضیح دهید، اگر در صورت سوال خواسته نشده باشد، نیازی به نوشتن شبه کد نیست.
- سعی کنید هر سوال را با بهینه‌ترین پیچیدگی زمانی و حافظه حل کنید و همینطور آن‌ها را در راه حل خود نیز ذکر کنید.

۱. یک رشته به شما داده شده است، الگوریتمی با هزینه‌ی زمانی  $O(n^2)$  ارائه دهید تا با حذف کمترین تعداد کاراکتر از رشته، رشته خروجی، palindrome شود. (به رشته‌ای palindrome گویند که متقارن باشد به بیان دیگر اگر آن را از ابتدا یا انتها نگاه کنیم تفاوتی نداشته باشند)

۲. یک آرایه از اعداد طبیعی داریم. از عنصر اول آرایه شروع می‌کنیم و اجازه داریم در هر مرحله، روی هر عنصر که قرار داریم، پرشی به طول ماکزیمم عددی که روی آن عنصر است، انجام دهیم. به طور مثال اگر عنصری که روی آن هستیم مقدار ۳ داشته باشد، می‌توانیم پرش‌هایی به طول ۱ یا ۲ یا ۳ انجام دهیم. الگوریتمی با هزینه‌ی زمانی  $O(n^2)$  ارائه دهید که کمترین تعداد پرش‌ها را برای رسیدن به عنصر آخر آرایه با شروع از عنصر اول آرایه پیدا کند.  
راه حل خود را به صورت شبه کد نیز بنویسید.

۳. آرایه‌ای از اعداد صحیح داریم. می‌خواهیم بزرگ‌ترین زیر دنباله صعودی این آرایه را پیدا کنیم.  
عناصر آرایه خروجی به شکل زیر هستند:

$$A_i \in A, A_j \in A; \quad \text{if } i < j \rightarrow A_i < A_j$$

- برای حل آن الگوریتمی با هزینه‌ی زمانی  $O(n^2)$  ارائه دهید.
- برای حل آن الگوریتمی با هزینه‌ی زمانی  $O(n \lg n)$  ارائه دهید. (امتیازی)

۴. تعداد  $n$  کارگر وجود دارند و هر تعدادی از کارگرها یک میزان بازدهی مشخص دارند. به عنوان مثال اگر  $k$  کارگر داشته باشیم  $A_k$  مقدار بازدهی آن‌ها خواهد بود که این  $A_k$ ‌ها در یک آرایه به شما داده شده است و برای هر  $k$  تا کارگری که انتخاب کنیم، این مقدار برابر همان  $A_k$  خواهد بود. الگوریتمی با هزینه‌ی زمانی  $O(n^2)$  ارائه دهید تا ماکزیمم مقدار بازدهی که می‌توان از گروه‌بندی این کارگرها به تعداد گروه دلخواه کسب کرد را محاسبه کند.

۵. قیمت یک سهم بورس در هر روز به صورت یک آرایه داده شده است. الگوریتمی با هزینه‌ی زمانی  $O(n^2)$  ارائه دهید تا بیشترین مقدار سودی که میتوان با خرید و فروش این سهم در روزهای مختلف بدست آورد را محاسبه کند.

توجه داشته باشید تنها یک سهم را می‌توانید خرید و فروش کنید به بیان بهتر اگر یک سهم را خریده‌اید دیگر نمی‌توانید به مقدار بیشتر از آن بخرید و همینطور مانند مثال داده شده می‌توانید چند بار سهم را بخرید و بفروشید.

به عنوان مثال اگر آرایه داده شده به صورت زیر باشد:

$\{90, 150, 290, 300, 60, 500, 700\}$

ماکزیمم سود حاصل از خرید و فروش این سهم به وسیله خرید سهم در روز ۰، فروش آن در روز ۳، خرید آن در روز ۴، و فروش آن در روز ۶ بدست خواهد آمد.

۶. در هر خانه از خانه‌های شطرنجی به ابعاد  $m \times n$  عددی مثبت یا منفی قرار گرفته است. ما از خانه پایین سمت چپ جدول شروع کرده و در آن حرکت می‌کنیم. در هر مرحله می‌توانیم به یکی از خانه‌های مجاور که مجاز به ورود به آن هستیم، وارد شویم. (هر خانه ماکزیموم ۸ خانه مجاور دارد) به هر خانه که می‌رسیم معادل عدد داخل آن خانه امتیاز دریافت می‌کنیم. حال می‌خواهیم حداکثر امتیازی که می‌توانیم جمع کنیم را پیدا کنیم. مساله را برای دو حالت ذکر شده حل کنید، همینطور شبه کد الگوریتم های خود را نیز بنویسید. (همچنین در نظر بگیرید نمی‌توان از یک خانه دو بار عبور کرد)

- مساله را برای حالتی حل کنید که فقط به خانه بالایی یا خانه بالا سمت راست یا خانه بالا سمت چپ می‌توانیم برویم.  $O(mn)$
- مساله را در حالتی حل کنید که علاوه بر خانه‌های قسمت قبل به خانه‌های راست و چپ هم می‌توانیم حرکت کنیم (تنها حرکت به خانه‌های پایینی غیر مجاز است)  $O(mn^2)$  (امتیازی)