



## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی سوم  
مoodle تحویل: یکشنبه ۴ اردیبهشت ۱۴۰۱، ساعت ۲۳:۵۹  
طراح: محمدطاها فخاریان، taha.fakharian@gmail.com

در این تمرین، فقط برای سوالاتی که اثبات خواسته شده است، لازم است که راه‌حل خود را به صورت ریاضی و دقیق اثبات کنید.

۱. (۱۵ نمره)  $n$  گاو داریم که هر کدام از آنها، زوری به اندازه  $S_i$  دارند. می‌خواهیم که این گاوها را به جفت‌هایی تقسیم کنیم تا بتوانند گاواهن را بکشند. در صورتی که گاو  $i$  و  $j$  در یک گروه باشند، باید  $S_i + S_j \geq P$  باشد تا بتوانند گاواهن را بکشند ( $P$  برابر با وزن گاواهن است). الگوریتمی حریصانه از مرتبه زمانی  $O(n \log n)$  برای بیشینه کردن تعداد گروه‌ها ارائه دهید و درستی آن را اثبات کنید.

۲. (۲۰ نمره) شما در حال مراقبت از  $n$  کودک هستید و  $m > n$  شیرینی دارید که می‌خواهید بین آنها تقسیم کنید. شما باید به هر کودک دقیقاً یک شیرینی بدهید (واضحاً یک شیرینی نیز نباید به دو کودک داده شود). هر کودک یک درجه اشتها  $a_i, 1 \leq i \leq n$  دارد که برابر با حداقل اندازه شیرینی‌ای است که برای آن کودک رضایت بخش خواهد بود. هر شیرینی یک سایز  $s_j, 1 \leq j \leq m$  دارد. هدف شما این است که تعداد کودکان راضی را بیشینه کنید (طبق توضیحات بالا، کودک  $i$  با شیرینی  $j$  راضی خواهد بود اگر  $s_j \geq a_i$ ). الگوریتمی بهینه برای این مسئله ارائه دهید و درستی آن را اثبات کنید. همچنین یک پیاده‌سازی (شبه کد) برای الگوریتم ارائه دهید.

۳. (۲۰ نمره) دارا برای مسافرت قصد دارد از تهران به یاسوج سفر کند. ماشین او به ازای هر لیتر بنزین، یک کیلومتر می‌پیماید. همچنین ظرفیت باک ماشین او نیز  $C$  لیتر است. در مسیر تهران به یاسوج، مجموعاً  $n$  پمپ بنزین وجود دارد که پمپ بنزین  $i$ ام در فاصله  $d_i$  از تهران قرار دارد. دارا با باک پر مسافرت خود را آغاز می‌کند. همچنین  $d_i$ ها نیز به صورت مرتب شده به شما داده می‌شود.

(آ) دارا می‌خواهد که با کمترین توقف به مقصد برسد. الگوریتمی از مرتبه  $O(n)$  ارائه دهید که برای این هدف، به دارا نشان دهد در کدام پمپ بنزین‌ها توقف کند و درستی آن را اثبات کنید.

(ب) فرض کنید قیمت هر لیتر بنزین در پمپ بنزین  $i$ ام برابر با  $t_i$  باشد. در صورتی که دارا بخواهد با کمترین هزینه به مقصد برسد، الگوریتمی از مرتبه  $O(n)$  ارائه دهید که برای این هدف، به دارا نشان دهد در کدام پمپ بنزین‌ها توقف کند و درستی آن را اثبات کنید.

۴. (۲۵ نمره) قرار است از کتیبه جدید کشف شده در موزه شهر رونمایی شود. به این منظور، کتیبه قرار است در روز شنبه در بازه زمانی  $[a, b]$  در موزه قرار داده شود. از آنجایی که این کتیبه بسیار باارزش است، لازم است که در هر لحظه از زمان، حداقل یک محافظ در نزدیکی آن حضور داشته باشد. محافظ  $i$ ام می‌تواند در بازه  $[a_i, b_i]$  در محل یاد شده حضور داشته باشد. در صورتی که  $n$  محافظ داشته باشیم، الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(n \log n)$  ارائه دهید که کمترین تعداد محافظ لازم را برای محافظت از کتیبه محاسبه کند و درستی آن را اثبات کنید.

۵. (۲۰ نمره) قرار است به شما  $n$  کار محول شود و لازم است که شما تمامی این کارها را انجام دهید. شما نمی‌توانید دو کار را باهم انجام دهید. انجام کار  $i$ ام،  $d_i$  روز وقت می‌گیرد.

(آ) فرض کنید تمامی کارها از ابتدا به شما داده شوند. ترتیبی برای انجام دادن کارها پیدا کنید که میانگین زمانی که صاحبان کارها منتظر انجام کارشان بودند، کمینه شود و پیچیدگی الگوریتم خود را نیز محاسبه کنید.

(ب) با این فرض که کار  $i$ ام، در روز  $s_i$  به شما داده شود و تا قبل از آن روز، قادر به انجام آن کار نباشید، این مسئله را پاسخ دهید (فرض کنید می‌توانید یک کار را نیمه‌تمام رها کنید و به سراغ کار دیگری بروید). در هر دو حالت، نیازی به اثبات درستی الگوریتم نیست. همچنین میانگین زمانی که صاحبان کار منتظر انجام کارشان هستند، برابر است با:  $\frac{\sum_{i=0}^n (f_i - s_i)}{n}$ .

(در عبارت بالا،  $f_i$  روزی است که کار  $i$ ام را تحویل می‌دهید و  $s_i$  روزی است که کار  $i$ ام به شما داده می‌شود که در قسمت اول مسئله، برای تمامی کارها برابر با یک است)