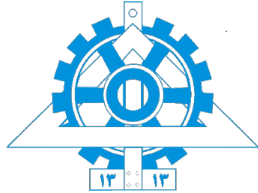


به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها



تمرین کتبی چهارم

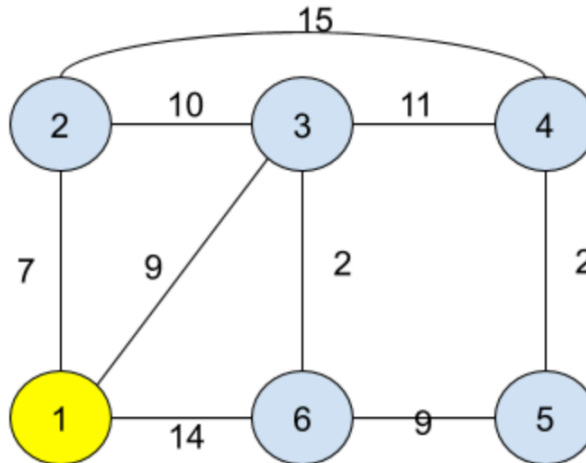
موعد تحویل: دوشنبه ۲۵ آذر ۹۸، ساعت ۹:۰۰

طراحان:

سینا کجویی sina95kachoei@gmail.com

زهرا موسوی موحد moosavizahra67@yahoo.com

۱. (آ) با استفاده از الگوریتم دایکسترا کوتاه‌ترین مسیر را از راس شماره ۱ به سایر راس‌ها به دست آورید. در هر مرحله محتوای تمام خانه‌های آرایه d و محتوای مجموعه S را نشان دهید.



(ب) همانطور که می‌دانیم الگوریتم دایکسترا برای گراف‌هایی با یال منفی به درستی عمل نمی‌کند. یک گراف (بدون دور منفی) با حداقل تعداد رأس نشان دهید که در آن به علت وجود یال منفی الگوریتم دایکسترا به درستی عمل نمی‌کند. علت نتیجه‌ی غلط این الگوریتم را ارائه دهید.

(ج) فرض کنید می‌خواهیم با زیاد کردن وزن یال‌های گراف به اندازه‌ی کوچکترین وزن منفی، گرافی با وزن یال‌های منفی را به گرافی با وزن یال‌های مثبت تبدیل کنیم و سپس برای به دست آوردن کوتاه‌ترین مسیر، الگوریتم دایکسترا را روی این گراف اعمال کنیم. آیا این الگوریتم به درستی عمل می‌کند؟ در صورت موافقت درستی الگوریتم را اثبات کنید و در غیر این صورت یک مثال نقض بزنید و علت اشتباه عمل کردن الگوریتم را توضیح دهید.

۲. گراف وزن دار بدون جهت G را فرض کنید. یک جنگل، گرافی است که هیچ دوری ندارد (و ممکن است همبند هم نباشد). F زیرگرافی از G است که جنگل است. کم هزینه‌ترین درخت پوشا را بیابید که شامل F هم بشود.

۳. فرض کنید لیست دانشجو‌های این ترم درس طراحی الگوریتم به صورت $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ به رویه‌ی F در مجموعه‌ی $\{(f_{i1}, f_{j1}), \dots, (f_{im}, f_{jm})\}$ هر زوج (f_{ia}, f_{ja}) نشان دهنده‌ی دو نفر است که در امتحان میان ترم از آن‌ها باهم تقلب گرفته شده است. برای برگزاری امتحان پایان ترم درس دو کلاس در اختیار داریم و می‌خواهیم جوری دانشجو‌ها را به دو گروه تقسیم کنیم که هیچ دو نفری از افرادی که در میان ترم باهم تقلب کرده بودند در یک کلاس قرار نگیرند. الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی $O(m+n)$ ارائه دهید که دانشجو‌ها را طبق شرایط بالا به دو گروه تقسیم کند و اگر این کار غیر ممکن بود اعلام کند.

۴. الگوریتمی ارائه دهید که قطر درخت را محاسبه کند و زمان اجرای الگوریتم خود را بیابید. (قطر درخت بلندترین مسیر درون درخت است)

۵. علی در شهر نمک‌آباد در کشور نمکستان که n شهر دارد گیر افتاده است. بین هر دو شهر این کشور یک جاده یک طرفه یا دو طرفه وجود دارد. او در هر مرحله یکی از جاده‌ها را انتخاب کرده و از این سمت جاده به آن سمت جاده برود و مقدار هزینه‌ای که علی باید بپردازد تا از شهر i به شهر j برود را $S(i,j)$ می‌نامیم. در یک سری از شهرها (به جز نمک‌آباد) بانک وجود دارد که علی با مراجعه با آن‌ها، یک واحد به پول‌هایش اضافه می‌شود. در یک سری از جاده‌ها هم صرافی‌هایی وجود دارد که علی با مراجعه با آن‌ها می‌تواند ۲ واحد به پول‌هایش اضافه کند. الگوریتمی ارائه دهید که تعیین کند علی می‌تواند از نمک‌آباد شروع کرده و دوباره با مقدار پول بیشتری از آنچه سفرش را با آن آغاز کرده بود به نمک‌آباد برگردد؟ مرتبه‌ی زمانی الگوریتم شما باید با حاصلضرب تعداد جاده‌ها و تعداد شهرها متناسب باشد.

۶. گراف جهت‌داری به شما داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که مینیموم تعداد یال‌هایی را پیدا کند که برای داشتن حداقل یک مسیر از S به T باید reverse شوند. هزینه‌ی زمانی الگوریتم خود را محاسبه کنید.