



به نام خدا

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران

طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها، نیم‌سال اول سال تحصیلی ۹۶-۹۷

تمرین شماره ۶ (نظریه پیچیدگی و NP-Completeness)



### مساله‌ی اول: (۱۲ نمره)

الف) کلاس پیچیدگی  $NP$  را تعریف کنید.

ب) کاهش چندجمله‌ای<sup>۱</sup> را تعریف کنید.

ج) با استفاده از دو قسمت قبل، تعریفی برای مسائل  $NP - Hard$  ارائه دهید.

د) با استفاده از قسمت‌های قبل، تعریفی از مسائل  $NP - Complete$  ارائه دهید.

### مساله‌ی دوم: (۲۰ نمره)

مساله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

مجموعه‌ی  $R$  از اعداد صحیح داده شده است. آیا مجموعه‌ای مانند  $R' \subseteq R$  وجود دارد که مجموع اعضای  $R'$  برابر صفر باشد؟

نشان دهید که مساله‌ی فوق  $NP - Complete$  است.

### مساله‌ی سوم: (۱۳ نمره)

آقا داوود که با کوله‌پشتی خود برای اکتشاف گنج به روستای باستانی داووتی رفته‌است. پس از تلاش فراوان، تعداد  $n$  شیء با وزن‌های  $w_1, w_2, \dots, w_n$  و ارزش‌های  $c_1, c_2, \dots, c_n$  یافته است. از آن جایی که کوله‌پشتی آقا داوود بیش از  $B$  کیلوگرم وزن را تحمل نمی‌کند، او می‌خواهد تعدادی از قطعات باستانی را انتخاب کند به طوری که بیشترین ارزش ممکن را حاصل کند. حال آقا داوود از شما خواسته است که در انتخاب قطعات به او کمک کنید.

الف) مساله را به صورت یک مساله تصمیم‌گیری فرموله کنید.

ب) با توجه به سوال قبل نشان دهید مساله‌ی بخش الف  $NP - Complete$  است.

### مساله‌ی چهارم: (۱۵ نمره)

پس از آن که آقا داوود فهمید تمام آثار باستانی کشف شده توسط او بی‌ارزش بوده، تصمیم گرفته تا خود به شهرهای مختلف سفر کند تا اجناس را به فروش برساند. در کشور داوود  $n$  شهر وجود دارد که فاصله‌ی شهر  $i$ ام با شهر  $j$ ام برابر  $d_{i,j}$  است. آقا داوود می‌خواهد بداند که کمترین طول ممکن که از تمام شهرهای داوود بگذر کرده و در نهایت به داووتی بازگردد چقدر است.

الف) با توجه به تعریف مسائل  $NP - Complete$ ، استدلال کنید که مساله‌ی آقا داوود نمی‌تواند  $NP - Complete$  باشد.

<sup>1</sup> Polynomial-time reduction

ب) بیانی از مساله را ارائه دهید که در کلاس پیچیدگی  $NP - Complete$  قرار گیرد.

ج) نشان دهید که از نظر پیچیدگی، حل مساله‌ی بخش (ب) به سختی حل مساله‌ی اصلی است. (راهنمایی: برای این کار الگوریتمی ارائه دهید که مساله‌ی اصلی را به مساله‌ی بخش ب کاهش دهد).

#### مساله‌ی پنجم: (۲۰ نمره)

گراف غیر جهتدار  $G = (V, E)$  را در نظر بگیرید. یک مجموعه مستقل قوی، زیر مجموعه‌ای از رئوس گراف است به طوری که برای هر دو راس  $u$  و  $v$  در این زیرمجموعه، مسیری به طول کمتر یا مساوی ۲ بین  $u$  و  $v$  وجود نداشته باشد. نشان دهد مساله زیر  $NP - Complete$  است:

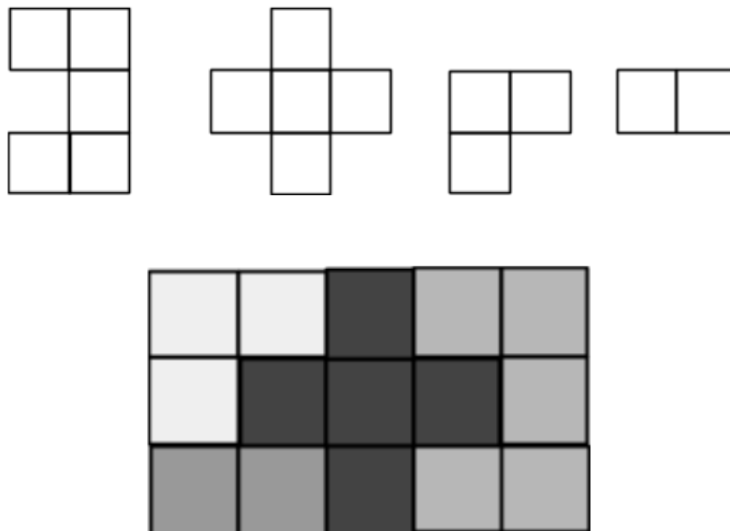
یک گراف غیر جهتدار  $G$  و یک عدد صحیح  $k$  داده شده است. آیا  $G$  مجموعه مستقل قوی به اندازه  $k$  دارد؟

#### مساله‌ی ششم: (۲۰ نمره)

تعدادی قطعه‌ی دوبعدی با اشکال مختلف داده شده است که هر کدام از قطعات، از مربع‌های  $1 \times 1$  تشکیل شده‌اند. می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توان با این قطعات یک صفحه‌ی  $m \times n$  را به طور کامل پوشاند؟

نشان دهید که این مساله  $NP - Complete$  است.

به طور مثال یک نمونه از قطعات و چیدمان به صورت زیر است:



پیروز و سربلند باشید