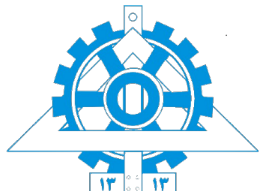


به نام خدا

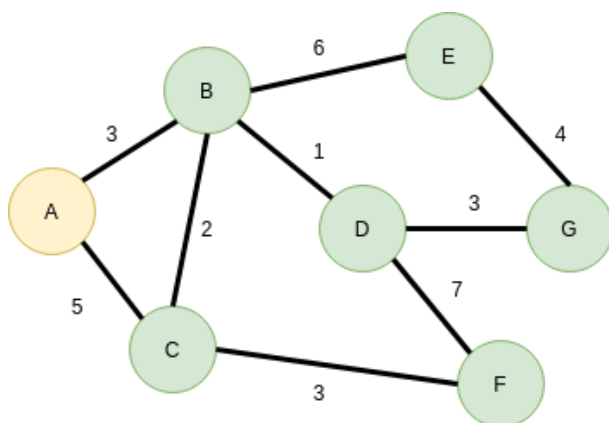


دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی چهارم
موعد تحویل: دوشنبه ۱۵ اردیبهشت ۹۹، ساعت ۲۳:۵۵
طراح: علیرضا سالمی، alirezasalemi7@gmail.com

سوالات اختیاری نیازی به پاسخ ندارند.

۱. گراف زیر را در نظر بگیرید:



(آ) به وسیله الگوریتم دایکسترا درخت کوتاه‌ترین مسیر با شروع از راس مشخص شده را به دست آورید. (۸ نمره)

(ب) به کمک الگوریتم پریم درخت پوشای کمینه را به دست آورید. (۸ نمره)

(ج) آیا درخت حاصل از اجرا دو الگوریتم با یکدیگر یکسان است؟ تفاوت دو درخت ایجاد شده را در حالت کلی بیان کنید. (۴ نمره)

۲. (آ) درخت پوشای کمینه گراف G را در نظر بگیرید. اگر وزن فقط یکی از یال‌های گراف G را کاهش دهیم، روشی با هزینه $O(n)$ بیان کنید که درخت پوشای کمینه برای گراف جدید به کمک درخت قبلی محاسبه شود. (۱۵ نمره)

(ب) (اختیاری) در یک معدن زیر زمینی، چندین اتاقک وجود دارد که به وسیله تونل‌هایی به هم وصل شده‌اند. اگر در اثر ریزش، تمامی تونل‌ها بسته شود، روشی بیان کنید که با کمترین هزینه ممکن بتوان تمامی اتاقک‌ها را دوباره به هم متصل کرد. فرض کنید هزینه بازگشایی هر تونل مشخص است و نیازی نیست حتماً تونل‌های مجاور به ترتیب بازگشایی شوند. الگوریتم شما باید بهینه باشد و هزینه این الگوریتم را نیز محاسبه کنید.

۳. (آ) (اختیاری) در الگوریتم فلوید وارshall چگونه می‌توان بدون اجرای دوباره الگوریتم، متوجه وجود دور منفی در گراف شد؟ دلیل خود را ثابت کنید.

(ب) ماتریس D ماتریس کوتاه‌ترین فاصله بین هر دو راس دلخواه در گراف G است. اگر وزن یال دلخواه uv را کاهش دهیم، روشی بیان کنید که با هزینه کمینه، بتوان ماتریس کوتاه‌ترین فاصله برای گراف جدید محاسبه کرد و هزینه الگوریتم را ذکر کنید. (۱۵ نمره)

۴. در دنیای جادوگری، عمل آپارات^۱ عملی جادویی است که یک شخص در صورتی که در مقابل بخاری دیواری قرار بگیرد، می تواند به وسیله یک مسیر یک طرفه به بخاری دیواری دیگری در مکان دیگر منتقل شود. وزارت جادو شبکه ای از لینک های یک طرفه ارتباطی عمل آپارات را بین بخاری های مختلفی در سطح کشور ایجاد کرده است. اگر خانم آمبرینج در مقابل بخاری دیواری اتاق خود قرار گرفته باشد و بخواهد به بخاری موجود در دفتر وزیر جادو برود، روشی بیان کنید که مشخص کند وزارت جادو باید حداقل جهت چند لینک را تغییر دهد تا خانم آمبرینج به مقصد خود برسد. هزینه این الگوریتم حداکثر $O(E \log V)$ باشد. (۱۵ نمره)

۵. در مدرسه جادوگری بوباتونز، در طول هر سال تحصیلی تعداد n کلاس مختلف برگزار می شود که هر کلاس یک تاریخ شروع a_i و یک تاریخ پایان b_i مشخص دارد و در پایان کلاس، تعداد w_i بطری معجون فلیکس فلیسیس (معجون خوش شانسی) به هر کس که در کلاس شرکت کند تعلق می گیرد. هیچ دانش آموزی اجازه ندارد تا زمانی که در یک کلاس شرکت می کند، در کلاس دیگری شرکت نماید. روشی بیان کنید که یک دانش آموز بتواند بیشترین تعداد معجون را با شرکت در کلاس ها در یک سال تحصیلی به دست آورد و هزینه آن را محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

۶. در کلاس معجون سازی پروفیسور اسلاگهورن، مواد جادویی با شماره های ۱ تا m در اختیار لونا قرار داده شده است که قیمت هر یک از آن ها w_i است. دو لیست با طول یکسان و حداکثر n از مواد جادویی داریم که می دانیم مواد در اندیس یکسان با یکدیگر برابر هستند و برابری مواد، خاصیت تعدی (اگر ماده اول با دومی برابر باشد و دومی با سومی برابر باشد، انگاه اولی با سومی برابر است) دارد. همچنین موادی که نامشان در لیست نیامده باشد، فقط با خودشان برابر هستند. حال برای تهیه یک معجون مشخص که مواد مورد نیاز آن در لیستی دیگر به طول n آمده است، از شما می خواهیم که لیستی معادل با لیست قبلی برای کمینه شدن هزینه بیابید. هزینه الگوریتم شما باید از مرتبه $O(n \log m)$ باشد. (۲۰ نمره)

۷. (امتیازی) در یک صرافی ماگل ها، برای تبدیل هر سکه از یک نوع به سکه از نوع دیگر یک ضریب تبدیل وجود دارد. این ضریب تبدیل به گونه ای است که اگر یک گالیون معادل ۱۰ دلار باشد، لزوماً ضریب تبدیل دلار به گالیون برابر $\frac{1}{10}$ نیست. با توجه به نرخ تبدیل ها گاهی این امکان وجود خواهد داشت که با معامله سکه های مختلف، به حالتی رسید که یک شخص بتواند سود بینهایت کسب کند. مثلاً اگر هر گالیون معادل ۱۰ دلار و هر دلار معادل ۲ نات باشد و هر ۵ نات معادل یک گالوین باشد، با شروع به وسیله یک گالیون و تبدیل سکه ها به یکدیگر میتوان به بینهایت سکه گالیون دست پیدا کرد. آقای فلچر تمایل دارد که دریابد آیا چرخه ای در این صرافی وجود دارد که او را به سود بینهایت برساند یا خیر. الگوریتمی برای اینکار پیشنهاد دهید و هزینه آن را محاسبه کنید. الگوریتم شما باید بهینه باشد. (۲۰ نمره)

^۱apparition