

به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها



تمرین کتبی اول
موعد تحویل: شنبه ۳ اسفند ۹۸، ساعت ۹:۰۰
طراح: سینا کجویی
sina95kacheoi@gmail.com

تمرین تقسیم و غلبه:

برای حل تمرین تقسیم و غلبه پیشنهاد می‌کنیم به دنبال مساله تکراری بگردید! تقسیم و غلبه به صورت کلی به معنای حل یک سوال با استفاده از زیر مساله ای است که در واقع همان سوال در اسکیل کوچک تر (با ورودی های کوچک تر) است. در این گونه مسائل شما کفایت این سوال تکراری را پیدا کنید. برای حل مسائل باید دو مرحله تقسیم و غلبه را بنویسید. در مرحله تقسیم باید زیر مساله های ایجاد شده را توضیح دهید و در مرحله غلبه باید نحوه حل سوال با ادغام این زیر مساله ها را بیان کنید. (زیر مساله ها را merge کنید) به یاد داشته باشید در مرحله آخر برای تحلیل زمانی الگوریتم خود ابتدا فرمول بازگشتی الگوریتمتان را بدست می آورید و سپس اردر کلی مساله را بدست می آورید (می توانید از مهارت های درس ساختمان داده استفاده کنید اما معمولاً به سادگی قابل حدس هستند)

۱. سوال یک. منجسترسیتی
 n تیم در لیگ جزیره شرکت می‌کنند. پس از پایان رقابت های لیگ ، در مجموع مسابقات هر تیم تعدادی گل به ثمر رسانده و تعدادی گل نیز دریافت کرده است. تیم‌هایی را «برتر» می‌نامیم که هیچ تیمی در لیگ وجود نداشته باشد که از آن‌ها بیشتر گل زده و کمتر گل خورده باشد. با این فرض که تعداد گل های خورده و گل های زده هیچ دو تیمی برابر نیست، الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که تمامی تیم‌های برتر لیگ جزیره را پیدا کند.

۲. سوال دوم. اورست
ماتریس دو بعدی A از اعداد طبیعی با m سطر و n ستون در اختیار داریم . «قله»ی ماتریس خانه ای مانند i, j است که از چهار خانه‌ی مجاورش نا کوچکتر باشد. به عبارتی دیگر قله در شرایط زیر خواهیم داشت:

$$A[i, j] \geq A[i+1, j] A[i, j] \geq A[i, j+1] A[i, j] \geq A[i-1, j] A[i, j] \geq A[i, j-1]$$

الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log m)$ ارائه دهید که یکی از قله های ماتریس را پیدا کند. دقت کنید هر ماتریس حداقل یک قله دارد (کافی است عدد بیشینه در ماتریس را در نظر بگیرید). برای حل مشکل وجود نداشتن درایه‌های همسایه ها، فرض کنید که حاشیه ماتریس با مقادیر $-\infty$ پر شده است.

۳. سوال سوم. کمینه‌ی تابع
دنباله‌ی a_1, a_2, \dots, a_n از اعداد صحیح در نظر بگیرید. تابع f را برای هر i, j ($1 \leq i < j \leq n$) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(i, j) = (i - j)^2 + (a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j)^2$$

الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log n)$ ارائه دهید که کمینه مقدار f را محاسبه کند .

۴. سوال چهارم. رنگ آمیزی درست حسابی
فرض کنید n نقطه روی محور اعداد حقیقی داده شده است. می خواهیم این n نقطه را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که به ازای هر بازه $[a, b]$ روی محور اعداد حقیقی ، از بین نقاطی که در این بازه قرار گرفته‌اند ، حداقل یک نقطه وجود داشته باشد که رنگ آن با رنگ بقیه نقاط داخل بازه متفاوت باشد. نشان دهید با $\lceil \log n \rceil$ رنگ قابل انجام است و الگوریتمی برای این امر ارائه دهید.

۵. سوال پنجم. شلم n تا ورق بازی داریم که روی هر کدام یک عدد نوشته شده است. در هر گام می‌توانیم دو ورق انتخاب کرده و صرفاً عدد روی آن‌ها را مقایسه کنیم و تنها متوجه آن می‌شویم که دو کارت برابر اند یا خیر. در نهایت هدف فهمیدن آن است که آیا بیشتر از نیمی از ورق‌ها عدد یکسانی دارند یا خیر.

(آ) الگوریتمی بر مبنای تقسیم و حل ارائه دهید که با انجام $O(n \log n)$ این کار را انجام دهد.

(ب) الگوریتمی ارائه دهید که این کار را با $O(n)$ انجام دهد.

۶. سوال ششم. زیرآرایه‌ی بیشینه
آرایه‌ای از اعداد داده شده است. الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی $O(n)$ آرایه دهید تا زیرآرایه‌ای از اعداد پشت سر هم را پیدا کند که مجموع اعداد آن بیشینه شود. شبه کد الگوریتم خود را بنویسید.

۷. سوال هفتم. میانه‌ی وزن‌دار
در یک آرایه‌ی معمولی عضو میانه عضو $[n/2]$ است. اما اگر هر کدام از اعضای آرایه یعنی x_i ها یک وزن w_i هم داشته باشند که $\sum_{i=(1,n)} w_i = 1$ میانه‌ی وزن دار چنین آرایه‌ای را اینگونه تعریف می‌کنیم:
آخرین اندیس i در حالت تعریف شده به طوری که داشته باشیم:

$$\sum_{i=(1,n)} w_i \leq 1/2$$

حال فرض کنید الگوریتمی داریم که میانه یک آرایه بدون وزن را در $O(n)$ محاسبه کند. با استفاده از این الگوریتم میانه وزن‌دار آرایه داده شده را در $O(n)$ بدست آورید.