

به نام خدا



## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی دوم با موضوع تقسیم و حل  
موعد تحویل: شنبه ۱۶ اسفندماه ۱۳۹۹، ساعت ۲۳:۵۹  
طراح: مجید دلیری، محمدهادی حجت، majiddl.2099@gmail.com

۱. (10 نمره) در این سوال باید مطابق الگوریتم‌های بیان شده در کلاس ورودی اجرا کنید. دو اندیس  $i$  و  $j$  را در آرایه زیر با روش تقسیم و حل بدست بیارید به شرطی که  $j > i$  و  $a_j - a_i$  بیشترین مقدار ممکن گردد. گام به گام الگوریتم را اجرا کرده و مراحل آن را ذکر کنید.  
 $Input: 9 \ 1 \ 8 \ 6 \ 2 \ 4 \ 10 \ 3 \ 4$   
ورودی و خروجی تابع بازگشتی در هر مرحله را بنویسید.

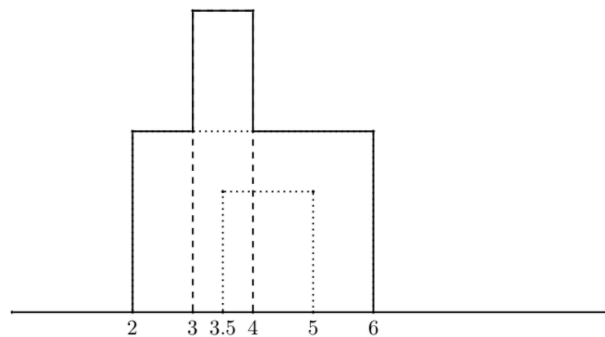
۲. (15 نمره) رئوس یک چند ضلعی محدب در مختصات دکارتی  $(x, y)$  داده شده است. می‌دانیم هیچ دو راس این چند ضلعی مختصات  $x$  یا  $y$  یکسانی ندارند. رئوس چند ضلعی به ترتیب ساعتگرد با شروع از سمت چپ‌ترین راس (راس با کمترین  $x$ ) داده شده‌اند. الگوریتمی با زمان اجرای  $O(\log(n))$  طراحی کنید که بالاترین راس (راس با بیشترین  $y$ ) و سمت راست‌ترین راس (راس با بیشترین  $x$ ) را پیدا کند. (چند ضلعی محدب چندضلعی می‌باشد که اگر هر ضلع آن را امتداد دهیم تمام رئوس در یک سمت آن قرار گیرند.)

۳. (15 نمره) در آرایه  $A[1, 2, \dots, n]$  از اعداد صحیح، عددی که بیشتر از  $\frac{n}{2}$  بار تکرار شده باشد را عدد غالب گوئیم. الگوریتم تقسیم و حل از پیچیدگی  $O(n)$  طراحی کنید که عدد غالب آرایه را در صورت وجود محاسبه کند. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

۴. (20 نمره) دو آرایه مرتب به طول‌های  $n, m$  داریم، الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(\log(m) + \log(n))$  طراحی کنید که میانه‌ی آرایه‌ی حاصل از ادغام این دو آرایه محاسبه کند.

۵. (20 نمره) در آرایه  $A[1, 2, \dots, n]$  از اعداد صحیح و عدد  $k$  به عنوان ورودی داده شده است، هدف پیدا کردن زیرمجموعه‌ای عناصر  $A$  با کمترین تعداد عضو است که جمع اعضای آن بیشتر مساوی عدد  $k$  شود. الگوریتمی با زمان اجرای متوسط  $O(n)$  برای این مساله طراحی کنید و شبه کد آن را بنویسید.

۶. (20 نمره) روی یک صفحه مستطیلی از  $n$  مستطیل سیاه کشیده ایم، ضلع پایینی تمامی مستطیل‌ها روی محور  $x$  (خط  $y = 0$ ) قرار دارند. مستطیل  $i$ ام با سه تایی  $(l_i, r_i, h_i)$  تعریف می‌شود به این معنی که  $l_i$  و  $r_i$  به ترتیب مختصات سمت چپ و راست مستطیل و  $h_i$  ارتفاع آن است. هدف این است که شکل نهایی که از قرار دادن مستطیل‌ها روی صفحه بدست بیاوریم، به بیانی دیگر شکل نهایی حاصل قرار گرفتن این مستطیل‌های سیاه یک شکل پلکانی‌مانند می‌شود، باید الگوریتمی طراحی کنید که خروجی پلکانی‌مانند را تولید کند و برای نقاطی که تغییر ارتفاع صورت می‌گیرد مختصات  $x$  و ارتفاع آن نقطه را چاپ نماید. الگوریتمی با زمان اجرای  $O(n \log n)$  برای این مساله طراحی کنید. (مثال صفحه بعدی)



برای مثال فرض کنید که در ورودی سه مستطیل با سه تایی های  $(2, 6, 3)$  و  $(3.5, 5, 2)$  و  $(3, 4, 5)$  داده شده اند. خروجی نهایی به صورت  $((2, 3), (3, 5), (4, 3), (6, 0))$  خواهد بود چرا که در نقطه  $x = 2$  ارتفاع شکل حاصل 3 سپس در نقطه  $x = 3$  ارتفاع شکل حاصل بخاطر مستطیل سوم ارتفاع 5 و نقطه  $x = 4$  ارتفاع شکل حاصل به 3 کاهش پیدا کرده و در نقطه  $x = 6$  ارتفاع شکل حاصل 0 می گردد.