



به نام خدا

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

طراحی و تحلیل الگوریتم ها - نیمسال اول سال تحصیلی ۱۳۹۷-۱۳۹۸

تمرین ششم

---

مساله اول : به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) کلاس پیچیدگی  $NP$  را تعریف کنید.

ب) کاهش چندجمله ای را تعریف کنید.

پ) با استفاده از قسمت الف و ب تعریفی برای مسائل  $NP - Hard$  ارائه دهید.

ت) با استفاده از قسمت الف و ب تعریفی برای مسائل  $NP - Complete$  ارائه دهید.

مساله دوم : درستی یا نادرستی سوالات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) اگر یک مساله  $NP - Complete$  در زمان خطی حل شود، تمام مسائل  $NP - Complete$  را می توان در زمان خطی حل کرد.

ب) اگر یک مساله  $NP$  در زمان چندجمله ای حل شود، تمام مسائل  $NP$  را می توان در زمان چندجمله ای حل کرد.

مساله سوم : فرض کنید می دانیم مساله  $A$  در کلاس پیچیدگی  $NP - Complete$  قرار می گیرد. ثابت کنید مساله  $B$  نیز در کلاس پیچیدگی  $NP - Complete$  قرار می گیرد.

مساله  $A$  : یک ماتریس  $n * n$  با درایه های  $0$  و  $1$  داده شده است. می خواهیم بردار  $X$  به طول  $n$  با درایه های  $0$  و  $1$  را پیدا کنیم به طوریکه داشته باشیم  $AX = 1$ .

مساله  $B$  : مجموعه  $A$  از اعداد طبیعی و عدد  $K$  داده شده است. آیا زیرمجموعه ای از  $A$  وجود دارد که مجموع اعضای آن برابر با  $K$  باشد یا خیر ؟

مساله چهارم : دو مساله زیر را در نظر بگیرید و با توجه به آن ها به سوالات الف و ب پاسخ دهید.

مساله  $A$  : گراف  $G$  و تعدادی مهره روی بعضی رئوس آن داده شده است. می خواهیم مهره ها را روی یال ها به گونه ای حرکت دهیم که زیرگراف القایی رئوسی که شامل حداقل یک مهره اند همبند شده و مجموع حرکات مهره ها نیز کمینه باشد.

مساله  $B$  : گراف دو بخشی  $H$  که مجموعه رئوس بخش های آن  $X$  و  $Y$  هستند داده شده است. می خواهیم کوچکترین زیر مجموعه از  $X$  مانند  $S$  را پیدا کنیم به گونه ای که  $N(S) = Y$  مجموعه همسایه های رئوس مجموعه  $S$  است).

الف) ثابت کنید اگر برای مساله  $A$  الگوریتم در زمان چندجمله ای وجود داشته باشد، برای مساله  $B$  نیز الگوریتم در زمان چندجمله ای وجود دارد.

ب) ثابت کنید مساله  $A$  یک مساله  $NP - Complete$  است.

مساله پنجم : ثابت کنید مساله زیر در کلاس پیچیدگی  $NP - Complete$  قرار دارد.

گراف جهتدار و وزن دار  $G$  داده شده است به طوری که وزن یال های آن اعداد صحیح هستند. آیا این گراف دوری دارد که مجموع وزن یال های آن برابر با صفر شود ؟

مساله ششم : ثابت کنید مساله زیر در کلاس پیچیدگی  $NP - Complete$  قرار دارد.

گراف ساده  $G$  و عدد  $K$  داده شده است. آیا زیرمجموعه ای از رئوس  $G$  مانند  $V$  با اندازه  $K$  وجود دارد که هر راس از  $G$  که در  $V$  نیست با حداقل یکی از رئوس  $V$  مجاور باشد ؟

مساله هفتم (امتیازی) :  $Richard Karp$  در مقاله ای نشان داد ۲۱ مساله که به  $Karp's 21 Problems$  مشهور است،  $NP - Complete$  هستند. در مورد این مسائل تحقیق کرده و به دلخواه یکی از مسائلی که در کلاس درس و تمرین ارائه نشده است را انتخاب کرده و ثابت کنید در کلاس پیچیدگی  $NP - Complete$  قرار می گیرد.

$P=NP?$

*I know  $NP - Complete$  jokes but once you've heard one you've heard them all.*