



طراحی الگوریتم

تمرین سوم - الگوریتم‌های حریصانه

مهدی نوری و امیر مهدی فرزانه

تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۰۹/۰۱

۱. دست گرمی

۱۰ نمره

علی که به تازگی مغازه‌ی خود را بر پا کرده است، با مشکلی جدی رو به رو شده است. او هنگامی که می‌خواهد باقی پول مشتریانش را بدهد، گاهی با این مشکل مواجه می‌شود که نمی‌تواند با سکه‌های دخلش این مقدار از باقی‌مانده را بسازد. الگوریتمی طراحی کنید که اگر علی از هر سکه با ارزش‌های مشخص به میزان نامتناهی داشت، بتواند تمامی ارزش‌ها از ۱ تا C را با آنها بسازد. توجه شود که در اینجا باید کمترین تعداد سکه بکار گرفته شود. اگر مجموعه ارزش سکه‌ها را V در نظر بگیریم الگوریتم شما باید از مرتبه زمانی $\mathcal{O}(|V| \log(|V|))$ باشد.

۲. کدینگ ضعیف

۱۰ نمره

در مرحله‌ای از یک پژوهش نیاز است تا چندین حرف به صورت هافمن کد شوند. جواد از همکار خود خواست تا این کار را برای او انجام دهد. وقتی همکارش نتایج را برای او فرستاد متوجه شد که حرف G را کد نکرده است.

کد هافمن	
۰۰۰	A
۰۰۱	B
۱۱	C
۱۰۰	D
؟؟	G
۱۰۱	E

(الف) (۲ نمره) به او کمک کنید تا کد این حرف را بیابد.

(ب) (۳ نمره) با توجه به جواب قسمت قبل الگوریتمی ارائه دهید که برای n حرف که یکی از آنها کد نشده در زمان خطی این کد را بیابد. ($n \geq 3$)

(ج) (۵ نمره) سوال قبل را برای حالتی که دو حرف بدون کد باشند، حل کنید.

۳. پادشاهی تایوین

۱۵ نمره

در کشور وستروس ما N شهر و M جاده داریم. هر جاده برای اتصال دو شهر به هم استفاده شده است. در این کشور K اژدها تارگرین داریم، که هر کدام با نام D_i شناخته شده و در شهر C_i زندگی می‌کند. هر اژدها در ابتدا S_i سر دارد. هر اژدها به ازای هر سال زنده ماندن به اندازه N_i سر به سرهایش اضافه می‌شود و تا زمانی که حداقل یک سر داشته باشد زنده می‌ماند.

حال تایوین که به دنبال تخت پادشاهی است، با تعدادی از شیرهای لنستر به نبرد اژدهایان می‌رود. این شیرها در ابتدا در یکی از شهرها قرار می‌گیرند. هر شیر در یک سال یا می‌تواند به شهر مجاور برود یا یک سر از یکی از اژدهایان شهرش را جدا کند و ببلعد. حال الگوریتمی ارائه دهید تا تایوین با کمترین شیر به نبرد اژدهایان رود و بتواند در مدت زمان متناهی تمامی این اژدهایان را نابود کند.

۴. جاده‌های کوهستانی

۱۵ نمره

پادشاهی آفتاب در سرزمین کوهستانی حکمرانی می‌کند و تصمیم گرفته تا گنجینه‌های افسانه‌ای را که در مسیرهای پنهان میان شهرهای این سرزمین گم شده‌اند، بازپس گیرد. برای این مأموریت بزرگ، پادشاه تعداد k تیم کاوشگر شجاع در اختیار دارد که هر تیم با یک درشکه جادویی و سرعتی ثابت به جستجوی مسیرها می‌پردازد. در این مسیر کوهستانی پرپیچ‌وخم، ایستگاه‌های توقفگاهی وجود دارد که تیم‌های کاوشگر می‌توانند در آن‌ها استراحت کنند و سپس به مسیر خود ادامه دهند. فاصله بین هر دو ایستگاه مشخص است.

پادشاه می‌خواهد این مأموریت با کمترین زمان و هزینه ممکن انجام شود، به شرط آنکه قوانین زیر رعایت شوند:

- هر بخش از جاده بین دو ایستگاه باید توسط یک تیم، به طور کامل، کاوش شود.
- هر تیم باید مسیر پیوسته‌ای از جاده را کاوش کند و نمی‌تواند چند بخش غیرمتوالی را بررسی کند. به عبارت دیگر، اگر تیمی بین ایستگاه‌های ۳ تا ۴ را کاوش کرد، نمی‌تواند بدون طی کردن فاصله ۴ تا ۵، مستقیماً به ایستگاه ۵ برود.

الگوریتمی طراحی کنید که کمترین زمان لازم برای کاوش کامل مسیر جاده‌های کوهستانی را با استفاده از k تیم کاوشگر محاسبه کند.

۵. سیستم ضعیف ACM

۲۰ نمره

می‌خواهیم سیستم مدیریت فایل انجمن علمی ACM را بهینه‌سازی کنیم تا هزینه‌ی دسترسی به فایل‌ها کمینه شود. در این سیستم، هر فایل با نام f_i و اندازه‌ی b_i مشخص شده است. احتمال دسترسی کاربران به هر فایل p_i بوده و پس از هر بار دسترسی، فایل به موقعیت اولیه بازمی‌گردد. بنابراین، زمان دسترسی به هر فایل با فاصله‌ی موقعیت انتهایی آن از ابتدای حافظه مرتبط است.

به‌طور کلی، زمان دسترسی به یک فایل به فاصله‌اش از ابتدای حافظه و احتمال دسترسی کاربر به آن بستگی دارد. از آنجا که فایل‌ها پس از هر دسترسی به جای قبلی خود بازمی‌گردند، ترتیب ذخیره‌سازی آن‌ها تأثیری در فاصله‌ی دیگر فایل‌ها از ابتدای حافظه ندارد. در هر دسترسی، زمان لازم به فاصله از ابتدای حافظه تا فایل و همچنین احتمال دسترسی به فایل وابسته است.

هدف طراحی الگوریتمی است که هزینه‌ی دسترسی مجموع فایل‌ها را به کمترین مقدار ممکن برساند. اثبات بهینگی الگوریتم مورد نظر و همچنین تحلیل مرتبه‌ی زمانی آن نیز لازم است.

۶. پروانه‌ها و گل‌ها

۲۰ نمره

علی یک نقاش حرفه‌ای است که برای تامین مایحتاج زندگی، به سفارش افراد نقاشی طراحی می‌کند و حال تصمیم دارد اثر بعدی خود را با عنوان باغ گل و پروانه نقاشی کند. طبق سفارش مشتری، در این نقاشی باید تعداد برابری گل و پروانه وجود داشته باشد، همچنین اندازه هر گل و پروانه نیز از پیش توسط مشتری تعیین شده است.

مشتری درخواست کرده هر پروانه تنها بر روی یک گل باشد و روی هر گل نیز بیش از یک پروانه نباشد.

علی برای هر گل و پروانه عددی به عنوان اندازه‌ی آن‌ها تعیین می‌کند و باید تلاش کند تا جمع اختلاف اندازه بین پروانه‌ها و گل‌های متناظرشان حداقل شود، تا نقاشی باغ به زیباترین حالت ممکن درآید.

مثال: فرض کنید دو پروانه با اندازه‌های ۱ و ۴ و دو گل با اندازه‌های ۲ و ۵ داریم. باغ در زیباترین حالت خواهد بود اگر پروانه‌ی اول روی گل اول و پروانه‌ی دوم روی گل دوم قرار گیرد.

علی راه‌حلی به ذهنش رسیده است: او پروانه‌ها و گل‌ها را به ترتیب اندازه مرتب می‌کند، سپس پروانه‌ها را به گونه‌ای نقاشی می‌کند که هر پروانه تا جای ممکن با گلی که کمترین اختلاف اندازه را دارد، جفت شود. ابتدا پروانه‌هایی که کاملاً با اندازه گل‌ها مطابقت دارند، نقاشی می‌شوند؛ سپس پروانه‌هایی با اختلاف اندازه‌ی ۱ و سپس با اختلاف ۲، و به همین ترتیب تا تمام پروانه‌ها نقاشی شوند.

- درستی این راه‌حل را بررسی کنید. اگر درست است، آن را اثبات کنید.
- در صورت نادرست بودن، مثال نقض بیاورید و الگوریتمی صحیح ارائه دهید و درستی آن را اثبات کنید.
- در هر حالت، پیچیدگی زمانی راه‌حل خود را محاسبه کنید.

۷. سنگ‌های فضایی

۲۰ نمره

در یک مأموریت ناسا، گروهی از فضانوردان به سیاره‌ای دور دست رسیدند و با مجموعه‌ای از سنگ‌های فضایی با وزن‌های مختلف روبه‌رو شدند. هر سنگ دارای خاصیت منحصر به فردی بود و برای انجام آزمایش‌های تحقیقاتی مختلف باید این سنگ‌ها را به k گروه تقسیم می‌کردند.

به فضانوردان لیستی از وزن سنگ‌ها داده شد و آن‌ها تصمیم گرفتند سنگ‌ها را طبق قوانین زیر گروه‌بندی کنند:

- هیچ گروهی نباید خالی بماند.
- اگر سنگ i ام و سنگ j ام در لیست وزن‌ها در یک گروه باشند، تمام سنگ‌هایی که وزنشان بین این دو قرار دارد نیز باید در همان گروه باشند.

رئیس تیم فضانوردان معیاری برای ارزیابی عملکرد فضانوردان طراحی کرد:

- امتیاز هر گروه برابر است با جمع امتیاز اولین و آخرین سنگ آن گروه.
- امتیاز نهایی هر آزمایش برابر است با جمع امتیازات تمام گروه‌ها.

به رئیس فضانوردان کمک کنید تا اختلاف امتیاز بهترین و بدترین حالت گروه‌بندی را برای آزمایش محاسبه کند.

در نهایت، پیچیدگی زمانی راه‌حل خود را برای محاسبه این اختلاف ارزیابی کنید.

برای درک بیشتر مسئله، به مثال زیر توجه کنید.

مثال: فرض کنید لیست وزن سنگ‌ها به صورت $[1, 2, 3, 5]$ و تعداد گروه‌ها $k = 2$ باشد. در این حالت:

- بیشترین امتیاز زمانی حاصل می‌شود که یک گروه سنگ‌های اول و دوم را شامل شود و گروه دوم شامل سنگ

سوم و چهارم باشد. در این صورت، امتیاز آزمایش برابر خواهد بود با:

$$(3 + 2) + (5 + 1) = 11$$

- کمترین امتیاز زمانی حاصل می‌شود که اولین سنگ در یک گروه و سنگ‌های دوم تا چهارم در گروه دیگری باشند. در این صورت، امتیاز نهایی برابر خواهد بود با:

$$(3 + 3) + (2 + 1) = 9$$

بنابراین، اختلاف امتیاز بین بهترین و بدترین حالت برابر است با 2.