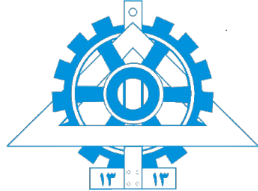


به نام خدا



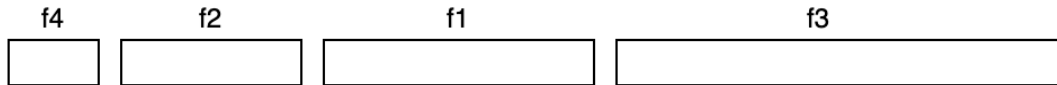
دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی سوم
موعده تحویل: جمعه ۲۲ فروردین ۹۹، ساعت ۲۳:۵۵
طراح: زهرا موسوی موحد، moosavizahra67@yahoo.com

۱. مجموعه ای از فایل‌ها به صورت $F = f_1, f_2, \dots, f_n$ داریم که می‌خواهیم آن‌ها را روی یک نوار صوتی ذخیره کنیم. طول فایل f_i ، b_i بایت است. احتمال دسترسی به فایل f_i به اندازه p_i می‌باشد و بعد از هر بار دسترسی نوار به حالت اول برمی‌گردد پس مدت زمان دسترسی به هر فایل وابسته به فاصله‌ی انتهای فایل از ابتدای نوار می‌باشد. هزینه دسترسی به هر فایل به احتمال دسترسی به فایل و فاصله‌ی انتهای آن از ابتدای نوار بستگی دارد. می‌خواهیم ترتیب ذخیره فایل‌ها روی نوار را طوری تعیین کنیم که هزینه دسترسی به مجموع فایل‌ها به حداقل برسد.
برای مثال اگر داشته باشیم:

$f_1 : b_1 = 300, p_1 = 0.4$
 $f_2 : b_2 = 200, p_2 = 0.35$
 $f_3 : b_3 = 500, p_3 = 0.1$
 $f_4 : b_4 = 100, p_4 = 0.15$

و ترتیب ذخیره‌ی فایل‌ها روی نوار به این صورت باشد:



مجموع هزینه دسترسی به فایل‌ها برابر است با:

$$100 \times 0.15 + 300 \times 0.35 + 600 \times 0.4 + 1100 \times 0.1 = 470$$

(آ) با ذکر یک مثال نشان دهید که چینش فایل‌ها به ترتیب صعودی b_i آنها بهینه نیست.

(ب) با ذکر یک مثال نشان دهید که چینش فایل‌ها به ترتیب صعودی p_i آنها بهینه نیست.

(ج) الگوریتمی برای حل این سوال ارائه دهید. بهینه بودن آن را ثابت کنید و هزینه زمانی الگوریتم خود را محاسبه کنید.

۲. عدد n به شما داده شده است. می‌خواهیم با شروع از عدد ۱ و با استفاده از دو عملیات :

• جمع کردن با عدد ۱

• ۲ برابر کردن عدد

و با حداقل تعداد عملیات به عدد n برسیم. الگوریتمی بهینه برای حل این مسئله ارائه دهید و بهینه بودن آن را اثبات کنید.

۳. فرض کنید تعدادی طناب با طول‌های مختلف داریم. می‌خواهیم با استفاده از این طناب‌ها یک طناب بزرگتر بسازیم. هزینه اتصال دو طناب برابر با مجموع طول آن‌هاست. الگوریتمی با هزینه زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که بوسیله‌ی آن بتوانیم تمام طناب‌ها را با حداقل هزینه به هم وصل کنیم.

۴. شما در یکی از شعب بانکی کار می‌کنید و مراجعینی دارید که می‌خواهند حساب خود را بسته و پول موجود در آن را به صورت نقد از بانک دریافت کنند. موجودی حساب مشتری‌ها می‌تواند هر مقداری باشد اما کوچکترین واحد پولی که در حساب‌ها وجود دارد هزار تومان است. رئیس بانک از شما خواسته که برای دادن پول موجود در حساب‌هایی که بسته می‌شوند به صاحب حساب از حداقل تعداد اسکناس استفاده کنید. شما تصمیم گرفته‌اید که متناسب با موجودی حساب بزرگترین اسکناسی که از موجودی حساب کمتر باشد را انتخاب کنید و سپس برای نقد کردن باقی مانده ی پول همین کار را ادامه دهید. در پایین گزارشی اسکناس‌های موجود در شعبه در دو روز کاری شما آمده است.
به ازای هر کدام از دو روز شنبه و پنجشنبه پاسخ دهید که آیا تصمیم شما درست است؟ در صورت موافقت درستی آن را اثبات و در غیر این صورت مثال نقض بزنید.

• روز پنجشنبه : اسکناس‌های موجودی بانک به صورت ۱۰۰۰ تومانی، ۱۰۰۰۰ تومانی و ۲۵۰۰۰ تومانی (در آن زمان اسکناس‌های ۲۵۰۰۰ تومانی هم به چاپ رسیده اند!!)

• روز شنبه : اسکناس‌های موجودی بانک به صورت ۱۰۰۰ تومانی، ۵۰۰۰ تومانی، ۱۰۰۰۰ تومانی و ۲۵۰۰۰ تومانی است.

۵. یک آرایه به طول n داریم. در هر خانه از آرایه یا یک پلیس وجود دارد یا یک دزد. هر پلیس می‌تواند حداکثر یک دزد را که در خانه‌ای با فاصله‌ی کمتر از k از او قرار دارد دستگیر کند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه دهید که حساب کند بیشترین تعداد دزدی که می‌توانیم دستگیر کنیم چه قدر است.

۶. یکی از افرادی که در قرنطینه‌ی خانگی بسیار کلافه شده و ناراحت است که امثال نتوانسته به سفر بروند تصمیم گرفته تا برای جبران عید امسال از حالا برای تعطیلات سال بعد برنامه بریزد. او در تهران زندگی می‌کند و مقصد سفرش را شیراز در نظر گرفته است. ماشین او به ازای هر یک لیتر بنزین یک کیلومتر راه می‌پیماید و گنجایش باک او c لیتر است. در مسیر تهران تا شیراز n پمپ بنزین وجود دارد که پمپ بنزین i ام در فاصله d_i از تهران قرار دارد و او با کمی جست‌وجو در اینترنت d_i ها را به صورت مرتب شده به دست آورده است. او تصمیم دارد با باک پر سفرش را آغاز کند.

(آ) او می‌خواهد طوری برنامه بریزد که با حداقل تعداد توقف در پمپ بنزین‌ها سفرش از تهران تا شیراز را به انجام برساند. الگوریتمی از مرتبه $O(n)$ ارائه دهید که به او بگوید در کدام پمپ بنزین‌ها باید توقف کند. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

(ب) قیمت هر لیتر بنزین (با فرض ثابت ماندن قیمت‌ها تا سال آینده!) در پمپ بنزین i ام p_i است. او می‌خواهد تا با حداقل هزینه سفرش را از تهران تا شیراز به اتمام برساند. الگوریتمی از مرتبه $O(n)$ ارائه دهید که به او بگوید در هر پمپ بنزین باید چه مقدار بنزین خریداری کند. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.