به نام او

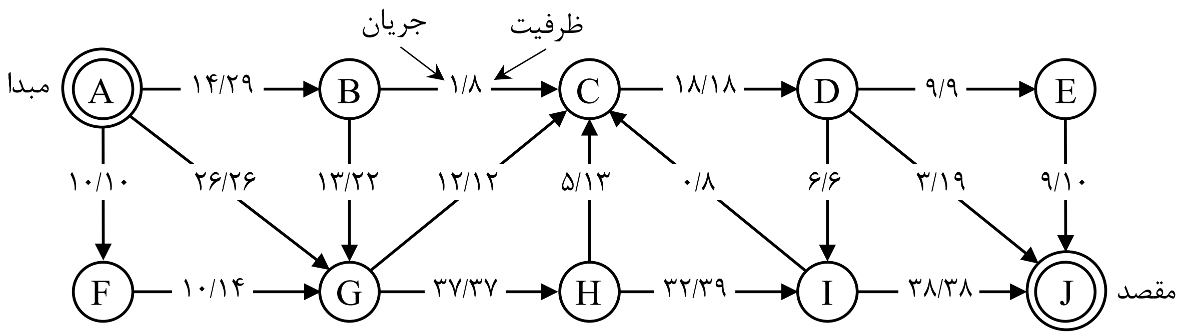
امتحان سوم درس طراحی الگوریتم (بهار ۱۴۰۱)

تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۴/۵ **مدت امتحان:** ۲ ساعت

توجه

- در مدت امتحان وسایل هوشمند خود (نظیر گوشی همراه، ساعت هوشمند و لپتاپ) را خاموش کنید و آن‌ها را در کیف خود قرار دهید. در غیر اینصورت مشمول قوانین تقلب درس خواهید شد.
- لطفا فقط از حاصل تلاش خود برای حل سوالات استفاده کنید و هیچ‌گونه کمکی به دانشجویان دیگر نکنید.
- در ابتدای اولین صفحه‌ی پاسخ‌نامه، متن زیر را با خط خود نوشته و امضا نمایید:

۱- (۳۰ نمره) فرض کنید شبکه جریان زیر و جریان ممکن f داده شده است.



الف) اندازه‌ی جریان f در گراف بالا چقدر است؟

ب) ظرفیت برش (cut) $\{A, F, G\}$ چقدر است؟ برش $\{A, F, G\}$، برشی است که رئوس A، F و G در یک طرف برش قرار گرفته و باقی رئوس در طرف دیگر قرار گیرند.

ج) (۱۰ نمره) از جریان f در گراف بالا شروع کرده و یک مرحله از الگوریتم فورد-فالکرسون را روی آن اجرا کنید. رئوس روی مسیر تجمیعی (augmenting path) را از A به J به ترتیب ذکر کنید. جریان جدید را در گراف نشان دهید.

د) (۲ نمره) اندازه‌ی ظرفیت گلوگاه روی مسیر تجمیعی چقدر است؟

ه) (۲ نمره) اندازه‌ی جریان بیشینه (maximum flow) در این گراف چقدر است؟

و) (۱۰ نمره) برش کمینه (min-cut) را در این گراف نشان داده و لیست رئوس سمت A و نیز رئوس سمت J را ذکر کنید.

ز) (۲ نمره) ظرفیت برش کمینه در این گراف چقدر است؟

نکته: نیازی به نوشتن الگوریتم در مراحل بالا نیست.

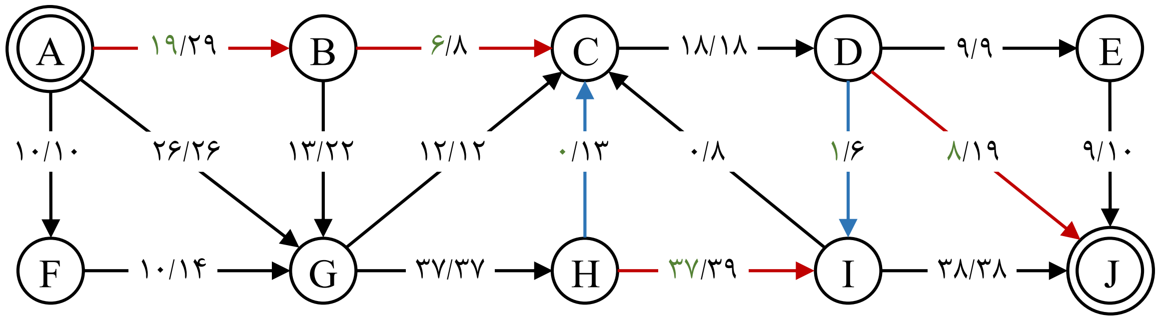
پاسخ:

الف) (۲ نمره) ۱۰+۲۶+۱۴=۵۰

ب) (۲ نمره) ۲۹+۱۲+۳۷=۷۸

ج) (۱۰ نمره) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow D \rightarrow J$

در شکل زیر، جریان‌هایی که تغییر کرده‌اند، با رنگ سبز نشان داده شده‌اند. یال‌های مستقیم (forward) و معکوس (backward) در مسیر تجمیعی به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نمایش داده شده‌اند.

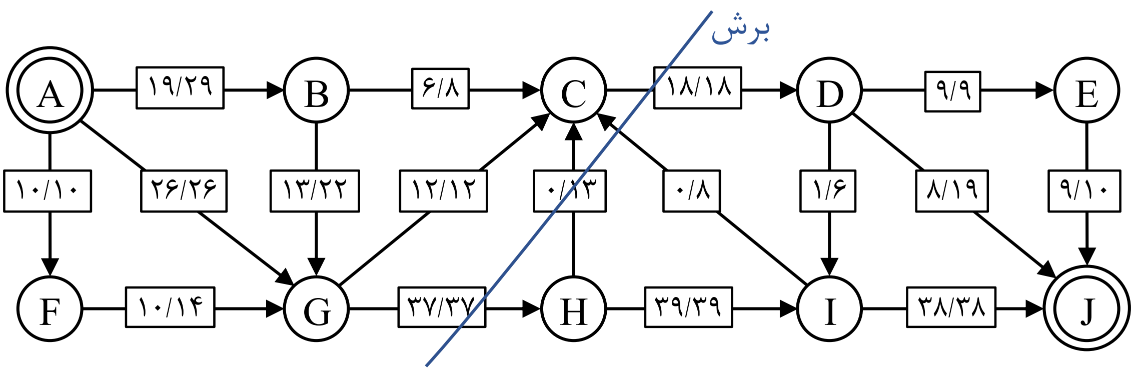


د) (۲ نمره) ۵

ه) (۲ نمره) ۱۹+۲۶+۱۰ =۵۵. پس از اجرای مرحله ج، می‌بینیم که دیگر مسیر تجمیعی از A به J وجود ندارد. پس جریان بدست آمده جریان بیشینه است.

و) (۱۰ نمره) رئوس سمت A: A، B، C، G و F

رئوس سمت J: J، D، E، H، I



ز) (۲ نمره) ۵۵ (مشابه جریان بیشینه)

۲– (۳۰ نمره) با توجه به استقبال از برگزاری کلاس‌های حضوری، دانشکده تصمیم گرفته m درس را برای n دانشجوی کارشناسی علاقه‌مند در طول تابستان ارائه دهد. از دانشجویان خواسته شده همه‌ی درس‌ها را با توجه به میزان علاقه

به ترتیب از بیشترین علاقه تا کمترین علاقه مرتب کنند. متاسفانه با توجه ادامه‌ی همه‌گیری کرونا، هر کلاس درسی، حداکثر می‌تواند p نفر ظرفیت داشته باشد. معاون آموزشی از شما خواسته الگوریتم کارآمدی به کمک شبکه جریان ارائه دهید تا مشخص کند آیا می‌توان درس‌ها را به دانشجویان طوری اختصاص داد که هر دانشجو یکی از دو درس محبوب خود را بردارد.

مثال: فرض کنید n=۶ دانشجو و m=۳ درس (با نام‌های X، Y و Z) داشته باشیم و ظرفیت هر درس p=۲ نفر باشد. اولویت‌های دانشجویان در جدول زیر مشخص شده است.

	اولویت ۱	اولویت ۲	اولویت ۳
دانشجو ۱	X	Y	Z
دانشجو ۲	Z	X	Y
دانشجو ۳	X	Y	Z
دانشجو ۴	Y	Z	X
دانشجو ۵	X	Y	Z
دانشجو ۶	Y	X	Z

در این مثال، نمی‌توان درس‌ها را طوری تخصیص داد که همه‌ی دانشجویان بتوانند در محبوب‌ترین درس خود شرکت کنند، زیرا درس X اولویت اول سه دانشجو است. با این حال می‌توان درس‌ها را طوری تخصیص داد که همه‌ی شش دانشجو بتوانند یکی از دو درس مورد علاقه‌ی خود را بردارند:

دانشجو ۱: X، دانشجو ۲: Z، دانشجو ۳: X، دانشجو ۴: Z، دانشجو ۵: Y، دانشجو ۶: Y

الف) (۵ نمره) چگونه این مسئله را با شبکه جریان مدل می‌کنید؟ شبکه جریان مربوط به مثال بالا را رسم کنید.

ب) (۵ نمره) پس از بدست آوردن جریان بیشینه، چطور مطمئن می‌شوید که آیا هر دانشجو می‌تواند یکی از دو درس محبوب خود را بردارد؟

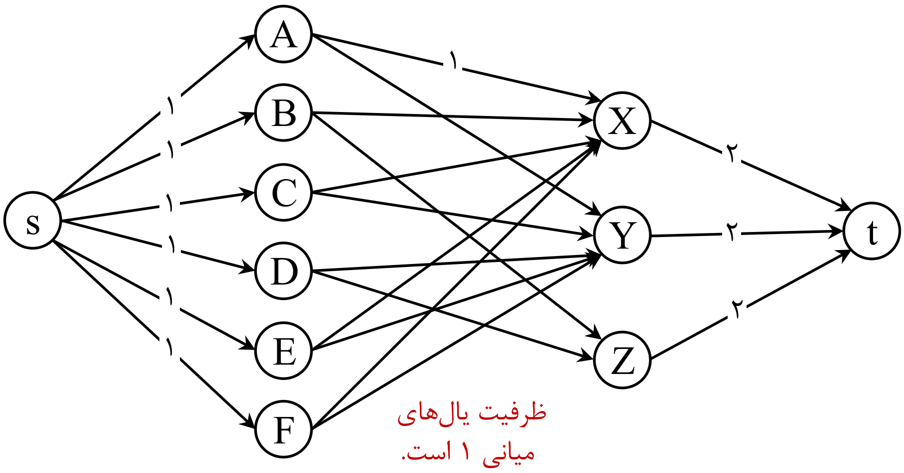
ج) (۵ نمره) اگر بدانیم $n \geq m$، روش فورد-فالکرسون در بدترین حالت چند مسیر تجمیعی پیدا می‌کند؟ پاسخ خود را براساس m و n بنویسید.

د) (۵ نمره) فرض کنید بخواهیم هر دانشجو بتواند یکی از k درس مورد علاقه‌ی خود را بردارد و $1 \leq k \leq m$. پاسخ قسمت الف را چطور تغییر می‌دهید.

ه) (۱۰ نمره) الگوریتم کارآمدی پیشنهاد دهید که کوچکترین k را (با توجه به تعریف قسمت د) پیدا کند که به ازای آن مسئله پاسخ داشته باشد. الگوریتم شما باید اکیدا سریعتر از حل کردن قسمت د به تعداد k بار باشد. پیچیدگی زمان اجرای الگوریتم بدست آمده چقدر است؟

پاسخ:

الف) (۵ نمره) به ازای هر دانشجو و هر درس یک راس در گراف قرار می‌دهیم. به علاوه دو راس مبدا (s) و مقصد (t) نیز به گراف اضافه می‌کنیم. از مبدا به همه رئوس مربوط به دانشجویان یک یال متصل می‌کنیم. ظرفیت این یال‌ها ۱ است. از راس مربوط به هر دانشجو به رئوس مربوط به دو درس محبوب او یال وصل کرده و ظرفیت آن را ۱ قرار می‌دهیم. در نهایت از رئوس مربوط به دروس به مقصد یک یال با ظرفیت ۲ یال متصل می‌کنیم.



ب) (۵ نمره) اگر اندازه جریان بیشنه برابر n (تعداد دانشجویان) بود، با توجه به ساخت گراف جریان، هر دانشجو به یکی از دو درس مورد علاقه خود متصل شده است. در غیر این صورت، مسئله جوابی ندارد.

ج) (۵ نمره) بیشترین جریان n است و هر بار یک مسیر تجمیعی به وزن ۱ در گراف پیدا شده و جریان مربوطه اضافه می‌شود. پس حداکثر n بار این الگوریتم اجرا می‌شود.

د) (۵ نمره) از هر راس متناظر با هر دانشجو به k درس مورد علاقه (به جای دو درس مورد علاقه) متصل می‌کنیم.

ه) (۱۰ نمره) دو راه حل کارآمد برای این مسئله در زیر تشریح شده است:

- **راه حل اول:** استفاده از جستجوی دودویی

اگر $n > pm$ باشد، مسئله پاسخی ندارد، در غیر این صورت، از جستجوی دودویی برای یافتن کوچکترین k می‌توان استفاده کرد. دقت کنید که اگر مسئله به ازای k_1 جواب داشته باشد، حتما به ازای $k_2 > k_1$ نیز جواب دارد زیرا پاسخ به ازای k_1 پاسخ به ازای k_2 نیز است. در این حالت، $\log m$ بار مسئله قسمت د بایستی حل شود.

- **راه حل دوم:** افزایش تدریجی جریان بیشینه

اگر هربار لازم باشد مسئله را به صورت تعریف شده در قسمت د حل کنیم، در بدترین حالت مجبور می‌شویم مسئله را m بار حل کنیم. اما با دقت در مسئله، می‌بینیم که لازم نیست مسائل را به صورت مستقل حل کنیم. به عبارتی از راه‌حل مسئله برای k استفاده می‌کنیم. در این حالت:

۱. یک یال برای نشان دادن علاقه k+1 به گراف اضافه می‌کنیم.

۲. حال مسئله را با راه‌حلی که قبلا داشتیم شروع به حل می‌کنیم.

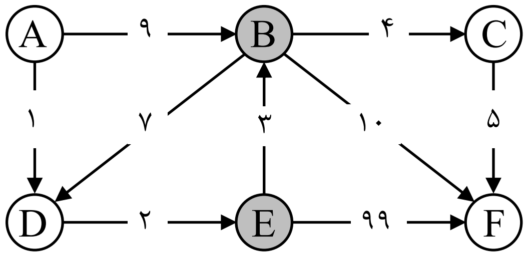
تعداد کل مسیرهای تجمیعی n است که این تعداد مسیر را برای kی که به ازای آن به جواب می‌رسیم لازم است بدست آوریم.

۳– (۲۵ نمره) دو مسئله‌ی یافتن کوتاه‌ترین مسیر در گراف را در نظر بگیرید:

مسئله الف: یک گراف وزن‌دار و جهت‌دار G با وزن‌های غیر منفی داده شده است. اگر دو راس این گراف به صورت s (مبدا) و t (مقصد) مشخص شده باشند، کوتاه‌ترین مسیر از s به t را پیدا کنید.

مسئله ب: یک گراف وزن‌دار و جهت‌دار G با وزن‌های غیر منفی داده شده است. اگر دو راس این گراف به صورت s (مبدا) و t (مقصد) مشخص شده باشند و رئوس گراف با رنگ سفید یا خاکستری رنگ‌آمیزی شده باشند، کوتاه‌ترین مسیر از s به t را پیدا کنید طوری که **حداکثر** از یک راس خاکستری عبور کند. فرض کنید مبدا خاکستری نیست.

مثال: در گراف زیر، کوتاه‌ترین مسیر از A به F در **مسئله الف** برابر $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F$ (با وزن ۱۵) و در **مسئله ب** برابر $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F$ (با وزن ۱۸) می‌باشد.

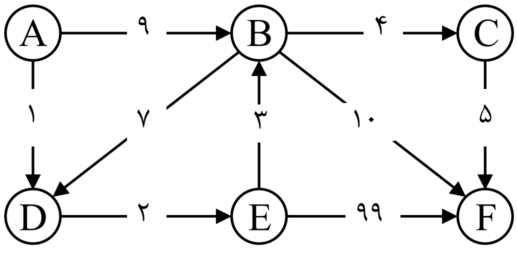


الف) یک تقلیل (reduction) خطی از **مسئله الف** به **مسئله ب** پیدا کنید. تقلیل خود را برای مثال مذکور شرح دهید.

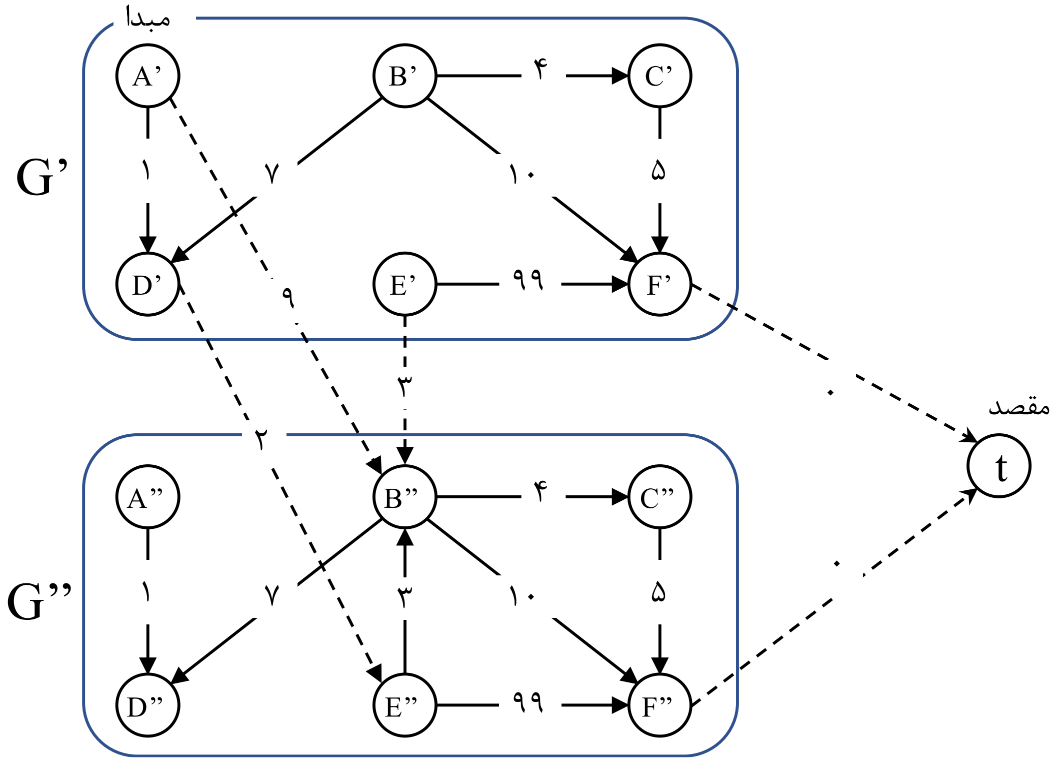
ب) یک تقلیل خطی از **مسئله ب** به **مسئله الف** پیدا کنید. تقلیل خود را برای مثال مذکور شرح دهید.

پاسخ:

الف) (۵ نمره، ۱ نمره برای مثال) همه‌ی رئوس گراف داده شده را سفید رنگ می‌کنیم. رئوس مبدا و مقصد تغییری نمی‌کنند. در این حالت پاسخی که مسئله ب بدست می‌دهد مشابه پاسخ مسئله الف خواهد بود.



ب) (۲۰ نمره، ۱ نمره برای مثال) دو کپی از گراف G به نام‌های G’ و G’’ می‌سازیم. به ازای هر یال $v \rightarrow w$ در هر کدام از این دو گراف که w در آن‌ها خاکستری است، یال را حذف کرده و یال $v' \rightarrow w''$ را بین دو گراف G’ و G’’ با همان وزن یال $v \rightarrow w$ قرار می‌دهیم. در نهایت یک راس مقصد t به گراف اضافه کرده و از رئوس مقصد G’ و G’’ با وزن صفر به آن متصل می‌کنیم. رنگ رئوس را در نهایت حذف می‌کنیم. راس مبدا، برابر راس مبدا در گراف G’ و مقصد برابر راس t می‌باشد.



۴- (۲۵ نمره) مسئله‌ی مقابل را در نظر بگیرید: در شهر پهلوانان، هر پهلوان عضو حداقل یک باشگاه است. شهردار شهر، برای افزایش تمرکز پهلوانان قصد دارد تعدادی باشگاه را تعطیل کند به طوری که پس از تعطیلی، هر پهلوان هنوز عضو حداقل یک باشگاه تعطیل نشده باشد. ورودی مسئله، لیست پهلوانان، لیست باشگاه‌ها، لیست اعضای هر باشگاه و عدد k می‌باشد. آیا شهردار می‌تواند k باشگاه را طوری انتخاب کند که پس از تعطیلی آن‌ها هنوز هر پهلوان عضو حداقل یک باشگاه باشد؟ ثابت کنید این مسئله NP-complete است.

راهنمایی: فرض کنید می‌دانیم مسئله پوشش مجموعه (set cover)، NP-complete هستند. در مسئله پوشش مجموعه، یک مجموعه متناهی U و خانواده F از زیرمجموعه‌های U داده شده است به طوری که اجتماع این زیرمجموعه‌ها برابر U است. آیا می‌توان با انتخاب k یا کمتر زیرمجموعه از F، U را پوشش داد؟ مثال: $U = \{۱،۲،۳،۴،۵\}$ و $F = \{\{۱,۲,۳\}, \{۲,۴\}, \{۳,۴\}, \{۴,۵\}\}$. می‌توان با دو زیرمجموعه $\{۱,۲,۳\}$ و $\{۴,۵\}$ مجموعه U را پوشش داد.

پاسخ:

(۵ نمره) ابتدا باید ثابت کنیم مسئله NP است. برای این‌کار، گواهی را لیست k باشگاهی در نظر می‌گیریم که قرار است تعطیل شوند. تصدیق‌کننده به ازای هر پهلوان بررسی می‌کند که آیا هنوز عضو باشگاهی است که در لیست k باشگاه تعطیل شده نباشد. اگر این شرط برای همه‌ی پهلوانان صدق کرد، پاسخ بلی است و در غیر این صورت خیر. بدیهی است که این بررسی در زمان چند جمله‌ای قابل انجام است، پس مسئله NP می‌باشد.

(۲۰ نمره: ۵ نمره گزاره تبدیل ورودی‌ها، ۵ نمره هر طرف اثبات، ۵ نمره نتیجه‌گیری NP-complete) حال باید ثابت کنیم مسئله NP-hard است. برای این کار از کاهش مسئله‌ی پوشش مجموعه استفاده می‌کنیم. به عبارتی، باید نشان دهیم $Set\ Cover \leq_p Pahlevan$. برای این‌کار بایستی یک ورودی دلخواه پوشش مجموعه را به ورودی مسئله‌ی داده شده (پهلوان) تبدیل کنیم. اعضای U معادل پهلوانان شهر هستند. به ازای هر خانواده F یک باشگاه می‌سازیم و اعضای باشگاه، اعضای زیرمجموعه‌ی مربوطه خواهند بود. در نهایت، مقدار $k_{pahlevan}$ را برابر $|F| - k_{Set\ Cover}$ قرار می‌دهیم. دقت کنید که $|F|$ برابر تعداد زیرمجموعه‌ها در مجموعه F می‌باشد. این تقلیل به وضوح در زمان چندجمله‌ای قابل انجام است. حال باید نشان دهیم که:

طرف اول: اگر ورودی دارای پوشش رئوس به اندازه‌ی $k_{Set\ Cover}$ باشد، آنگاه مسئله پهلوان به طوری که در بالا ساخته شد نیز پاسخ بله دارد.

در این حالت، اگر همه‌ی باشگاه‌ها به جز $k_{Set\ Cover}$ باشگاه تعطیل شوند ($|F| - k_{Set\ Cover}$)، هنوز همه‌ی پهلوان‌ها عضو حداقل یک باشگاه (خانواده) هستند.

طرف دوم: اگر بتوان با تعطیلی $|F| - k_{Set\ Cover}$ باشگاه، هنوز هر پهلوان عضو یک باشگاه باشد، مسئله‌ی پوشش مجموعه، پوششی با $k_{Set\ Cover}$ خواهد داشت.

در این حالت چون باشگاه‌های تعطیل نشده ($k_{Set\ Cover}$ باشگاه) همه‌ی پهلوانان را پوشش می‌دهند، پس همه‌ی مجموعه U به کمک $k_{Set\ Cover}$ عضو قابل پوشش خواهد بود.

حال ثابت کردیم که مسئله هم NP و هم NP-hard است، پس در نتیجه مسئله‌ی داده شده NP-complete می‌باشد.