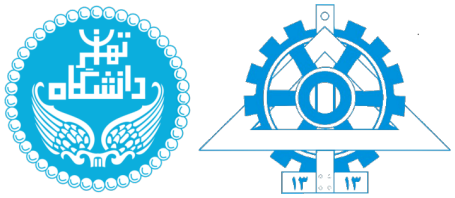
به نام خدا



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی دوم
موعد تحویل: شنبه ۲۵ اسفند ۹۷، ساعت ۹:۰۰
طراح: آبتین باطنی abtinbateni+da-hw@gmail.com

---

۱. یک الگوریتم از $O(n^2)$ برای پیدا کردن بزرگ‌ترین زیردنباله‌ی غیر نزولی از دنباله اعداد $X = x_1, x_2, ..., x_n$ ارائه دهید. (ارائه الگوریتم از $O(nlogn)$ نمره اضافی دارد.)

راه‌حل: dp_iرا تعریف می‌کنم طول بلندترین رشته‌ی منتهی به المان iام چند می‌باشد و آخرین عضو قبل i در این رشته چیست. بدین ترتیب dp هر عضو را با یک حلقه برروی تمام اعداد قبل و کوچتر از آن می‌توان محاسبه کرد و با $O(n^2)$سوال را حل کرد. برای بخش امتیازی از الگوریتم پیچیده‌تری باید استفاده کنید که آنرا می‌توانید در صفحه‌ی مربوط به الگوریتم Longest Increasing Subsequence در ویکیپدیای فارسی پیدا کنید.

۲. فرض کنید u و v دو رشته باشند. ما می‌خواهیم رشته u را به رشته‌ی v با عمل‌های زیر تبدیل کنیم:

- حذف یک کارکتر
- اضافه کردن یک کاراکتر در یک مکان
- عوض کردن یک کارکتر

اگر طول دو رشته به ترتیب n و m باشد یک الگورتیم از O(nm) ارائه دهید که کمترین تعداد عملیات مورد نیاز را بشمارد.

راه‌حل: $dp_{n,m}$ برابر پاسخ سوال در حالتی که از رشته‌ی اول n کاراکتر اولیه آن و از رشته‌ی دوم m کاراکتر اولیه آنرا در اختیار داریم. برای محاسبه هر خانه از این dp توجه کنید که در هر گام یکی از سه عمل مشخص شده برروی کاراکتر انتهایی یک و یا هر دو رشته اعمال می‌شود. بنابراین $dp_{n,m}$ از روی یکی از $dp_{n-1,m}$، $dp_{n,m-1}$، و$dp_{n-1,m-1}$ محاسبه می‌شود. به این ترتیب چون مجموع n و m هر بار در حال کاهش می‌باشد پس می‌توان با صرف $O(nm)$ زمان پاسخ را محاسبه کرد.

۳. در رودخانه n نقطه وجود دارد که در آنها می‌توان قایق اجاره کرد. فرض کنید این نقاط در راستای رودخانه به ترتیب از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. همچنین فرض کنید هزینه اجاره کردن قایق از نقطه i و رفتن تا خانه j برابر a_{ij} باشد. روشی ارائه دهید که با کمترین هزینه از نقطه ۱ با اجاره کردن تعدادی قایق به نقطه‌ی n برسیم.

- الگوریتمی از $O(n^2)$ ارائه دهید.

راه‌حل: dp_n را تعریف می‌کنم کمترین هزینه‌ای که با صرف آن می‌توان از مبدا به قایق i ام برسیدم. برای رسیدن به هر قایق اگر در قایق ابتدایی نباشیم باید در گام قبل سوار یک قایق دیگر شده باشیم. به این ترتیب با یک حلقه حالت‌های مختلفی را که برای انتخاب قایق قبلی داشتیم همه را بررسی می‌کنیم و بهینه‌ترین پاسخ را برای dp می‌یابیم.

۴. برای دو رشته‌ی $abbac$ و $abacbb$ بزرگترین زیردنباله‌ی مشترکشان را با یک روش پویا پیدا کنید. جدول مربوطه را به طور کامل پر کنید.
راه‌حل:

	j	0	1	2	3	4	5	6
i		y	a	b	a	c	b	b
0	x	0	0	0	0	0	0	0
1	a	0	↖ 1	← 1	↖ 1	← 1	← 1	← 1
2	b	0	↑ 1	↖ 2	← 2	← 2	↖ 2	↖ 2
3	b	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↖ 3
4	a	0	↖ 1	↑ 2	↖ 3	← 3	↑ 3	↑ 3
5	c	0	↑ 1	↑ 2	↑ 3	↖ 4	← 4	← 4

۵. الگوریتمی از O(nk) ارائه دهید که تعداد راه‌های ساخت عدد n را با استفاده از سکه‌های $c_1, ..., c_k$ تومانی را با استفاده از O(n) خانه‌ی حافظه بشمارد. توجه کنید که از هر سکه نهایتا یک‌بار می‌توان استفاده کرد.

راه‌حل: $dp_{n,i}$ را تعریف می‌کنم تعداد روش‌هایی که می‌توان عدد n را با استفاده از i سکه اول تولید کرد. با توجه به ساختار سوال $dp_{n,i}$ از $dp_{n-c_i,i-1}$ و $dp_{n,i-1}$ محاسبه می‌شود. حال در نظر بگیرید که به جای یک آرایه‌ی دو بعدی از آرایه‌ی یک بعدی dp_n استفاده کنیم. در این صورت به نظر می‌رسد که با تکه کد زیر می‌توان پاسخ بهینه را با حافظه‌ی $O(n)$ محاسبه کرد.

```
for j = 1 -> k:
    for i = 1 -> n:
        if (i >= c[j])
            dp[i] = dp[i] + dp[i - c[j]]
```

مشکل این کد این است که تضمینی وجود ندارد که $dp[i - c[j]]$ خودش در این مرحله بروزرسانی نشده باشد و ممکن است که او نیز با استفاده از سکه‌ی فعلی ساخته شده باشد. نکته سوال این است که هیچ لزومی وجود ندارد که dp از مقدار کم به زیاد بروزرسانی شود و می‌تواند از مقدار زیاد به کم نیز بروزرسانی شود. در این شرایط ایرادی که به الگوریتم وارد است دیگر پیش نخواهد آمد و درست عمل خواهد کرد. بنابراین تکه کد زیر پاسخ صحیح مسئله است.

```
for j = 1 -> k:
    for i = n -> 1:
        if (i >= c[j])
            dp[i] = dp[i] + dp[i - c[j]]
```

در یک که ارخانه چوب‌بری عجیب برای اینک۱ وه یک تکه چوب را در یک مرحله به k تکه برش بزنند c_k تومن پول گرفته می‌شود.

- الگوریتمی از $O(n^2)$ ارائه دهید که یک تکه چوب را با کمترین خرج به n تکه تقسیم کند.

راه‌حل: dp_n را تعریف می‌کنم کمترین هزینه‌ای که باصرف آن می‌توان یک تکه چوب را به n تکه تبدیل کرد. در گام آخر قبل از رسیدن به n تکه $n-k+1$ تکه داشته بودیم که با انجام یک برش k تایی به n تکه رسیده‌ایم. به این ترتیب با یک حلقه و بررسی تمامی حالت‌های ممکن می‌توان با صرف $O(n^2)$ مسئله را حل کرد.