



به نام خدا

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

امتحان پایان ترم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها وقت ۱۵۰ دقیقه

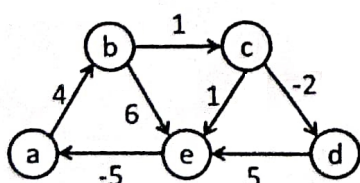


نکات خیلی مهم زیر را تک به تک و به دقت مطالعه کنید

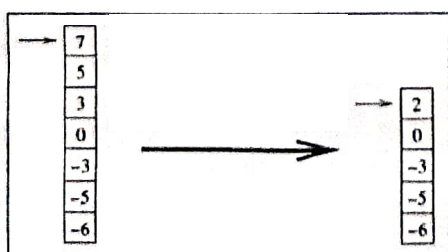
- (۱) برگه سوالات را با دقت بخوانید و سوالات خود را در نیم ساعت اول بپرسید.
- (۲) در صورت عدم خوانایی، برگه شما تصحیح نخواهد شد. استفاده از مداد بلامانع است.
- (۳) اگر در صورت مساله مشخص نشده، میتوانید فرمت ورودی مساله را به دلخواه خود تعریف کنید.
- (۴) در صورتی که از شما توسعه یک الگوریتم درخواست شده باشد، باید با توضیح و اثبات کامل نوشته شود. نوشتن pseudocode تنها کافی نیست. برای این الگوریتمها حتما باید پیچیدگی زمانی را نیز محاسبه کنید.
- (۵) در صورتی که مساله‌ای بیش از یک جواب دارد، بهترین الگوریتم از نظر مرتبه زمانی مدنظر بوده است.
- (۶) هر گونه استفاده از موبایل و وسایل الکترونیکی دیگر به منزله تقلب محسوب و نمره کل درس شما ۰٫۲۵ رد خواهد شد

کار	$t_i$	$d_i$
۱	۵	۷
۲	۲	۸
۳	۳	۱۵
۴	۲	۱۰
۵	۴	۲۰
۶	۳	۶
۷	۱	۳

سوال ۱- (۱۰ نمره) فعالیتهای روبرو را در نظر بگیرید. مدت زمان لازم برای انجام شدن آنها ( $t_i$ ) به همراه مهلت (deadline) انجام آنها ( $d_i$ ) به شما داده شده است و شما باید آنها را به ترتیبی انجام دهید که تا حد ممکن زمان پایان کار از ددلاین مشخص شده دیرتر نباشد و اگر هم بناچار دیرتر شود، بیشترین فاصله بین زمان انجام کارها تا زمان ددلاین شان کمترین مقدار ممکن شود. با یک روش حریصانه ترتیبی، انجام کارها را مشخص کنید (اثبات لازم نیست):



سوال ۲- (۲۵ نمره) کوتاهترین مسیر میان تمام نودهای گراف روبرو را از طریق الگوریتم Johnson (ترکیب بلمن فورد و دایکسترا) بدست آورید و مراحل آن را نیز توضیح و با شکل نشان دهید. (نوشتن مراحل انجام کار و رسم شکل لازم است)



- سوال ۴- (۱۵ نمره) یک پشته ترتیب‌دار (Ordered Stack)، پشته‌ای است که عناصر آن به صورت صعودی از پایین به بالا مرتب شده باشند. این نوع پشته باید اعمال زیر را پشتیبانی کند:
- a.  $Init(S)$ : یک پشته خالی ایجاد کند.
  - b.  $Destroy(S)$ : تمام عناصر پشته را حذف کند.
  - c.  $Pop(S)$ : عنصر بالای پشته را حذف و آن را برگرداند.



d.  $Push(S, x)$ : در ابتدا عناصر پشته را از بالای آن حذف کند تا به عنصری برسد که از  $x$  بزرگتر نباشد و سپس  $x$  را به بالای پشته اضافه کند. به عنوان مثال شکل فوق  $Push(S, 2)$  را نشان می‌دهد که در آن عناصر ۷، ۵ و ۳ از بالای پشته حذف شده و ۲ به بالای آن اضافه می‌شود. فرض کنید پشته ترتیب‌دار با یک لیست زنجیره‌ای دو طرفه پیاده سازی شده و اشاره گر به عنصر بالای پشته (top) نیز نگهداری می‌شود.

الف) مرتبه اجرای چهار عمل فوق در بدترین حالت چقدر است؟  
ب) ثابت کنید هزینه سرشکن اعمال فوق از مرتبه  $O(1)$  است.

0	8	$\infty$	$\infty$	1
3	0	$\infty$	$\infty$	2
$\infty$	2	0	1	$\infty$
$\infty$	3	5	0	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	0

سوال ۳- (۱۵ نمره) با استفاده از الگوریتم فلوید-وارشال کوتاه ترین مسیر میان کلیه نودهای یک گراف با ماتریس مجاورت روبرو را بدست آورید:

سوال ۵- (۱۵ نمره) در دانشگاه قرار است کمیته ویژه‌ای برای انتخاب رییس دانشگاه تشکیل شود. می‌خواهیم از هر گروه آموزشی (مثلاً گروه نرم افزار، گروه سخت افزار و ...) دقیقاً یک استاد به عنوان نماینده حضور داشته باشد. برخی از اساتید ممکن است غصو بیش از یک گروه آموزشی باشند اما هیچ یک نمی‌توانند نماینده‌ی بیش از یک گروه آموزشی باشند. همچنین می‌خواهیم تعداد استادان از مراتب علمی مختلف (استاد تمام، دانشیار و استادیار) در این کمیته برابر باشند. با استفاده از الگوریتم Max-flow راهی برای انتخاب این کمیته ارائه دهید.

سوال ۶- (۲۰ نمره) مساله کاهش مسیر پستی ( $Postal Route Reduction = PRR$ ) بدین صورت تعریف میشود: فرض کنید یک گراف جهت دار  $G=(V, E)$  و مجموعه  $S=\{R_1, R_2, \dots, R_L\}$  از تعداد  $L$  سیکل نامه رسانی به شما داده شده است. این سیکلها از نود آغازین  $s$  که محل جمع‌آوری نامه‌های پستی است شروع شده و به همین نود خاتمه می‌یابد. می‌خواهیم بدانیم آیا زیرمجموعه‌ای  $k$  عضوی از  $S$  وجود دارد که از تمام نودهای گراف رد شود (این  $k$  سیکل ممکن است از یک نود بیش از یک بار رد شوند).

الف: نسخه بهینه سازی (optimization) مساله کاهش مسیر پستی به چه صورت بیان میشود؟

ب: ثابت کنید این مساله NP است.

ج: ثابت کنید این مساله NP-Complete است.