سؤال اول

در نگاه اول در این سؤال با یک شهر با تعدادی خانه و تعدادی فیبر نوری که آن‌ها را به هم متصل کرده است مواجه هستیم که نشان می‌دهد سؤال باید به گراف تشبیه شود. رأس‌های گرافمان را با خانه‌های سؤال، یال‌های بین آن‌ها را با فیبرهای متصل کننده و وزن آن یال‌ها را با اندازه فیبر متناظر با آن، متناظر در نظر می‌گیریم. حال می‌خواهیم بدانیم خواسته سؤال از این گراف چیست. می‌خواهیم تعدادی از یال‌ها (فیبرها) را حذف کنیم (بفروشیم) که گراف باقیمانده همبند باشد و مجموع وزن یال‌های حذف شده بیشترین مقدار را داشته باشد (بیشترین پول را بدست آوریم) و یا مجموع وزن یال‌های حذف نشده کمترین مقدار را داشته باشد. از آنجایی که گراف همبندی که درخت نیست دور دارد و وزن یال‌ها مثبت است همیشه می‌توان تا رسیدن به یک درخت یال حذف کرد که به معنای آن است که گراف باقیمانده‌ی حداقل، درخت است (درخت کمینه پوشا) ولی سؤال از ما تمام یال‌هایی که می‌توان حذف کرد را هم می‌خواهد که برابر اشتراک تمام درخت‌های پوشای کمینه است. می‌دانیم که در هر مرحله از الگوریتم کروسکال به ازای هر کدام از یال‌هایی که کمترین اندازه را دارند حداقل یک درخت کمینه پوشا شامل آن یال است و از آنجایی که هر یال که در دوری باشد که اندازه همه دیگر یال ها از آن کمتر باشد نمی‌تواند در هیچ درخت کمینه پوشایی باشد (چون برای هر درخت پوشای شامل آن یال می‌توان با حذف آن یال و اضافه کردن یال دیگری در همان دور اندازه درخت را کاهش داد) پس این یال ها تمام یال‌های خواسته شده هستند (هر یالی که نتوان به درخت اضافه کرد به این معناست که با یال های قبلی که اندازه همه آن‌ها کمتر است دور می‌سازد). با کمی تغییر الگوریتم کروسکال برای دو مرحله‌ای بررسی کردن یال‌ها با اندازه مشابه می‌توان به خواسته مسئله رسید.

سؤال دوم

مانند سؤال اول این سؤال را هم می‌توان به یک گراف وزن‌دار تشبیه کرد که رئوس آن با خانه‌ها، یال‌های آن با مسیرها و وزن یال‌ها با طول مسیرها متناظر است. سؤال از ما می‌خواهد که بعد از هر عیددیدنی زمان را چاپ کنیم برای بدست آوردن این زمان باید بدانیم که چه زمانی این عیددیدنی شروع می‌شود که می‌شود اولین زمانی که میزبان از تمام عیددیدنی‌های قبلی که در آن مهمان بوده است برگشته باشد و مهمان به خانه میزبان رسیده باشد (بعد از اتمام عیددیدنی‌هایی که در آنها میزبان یا مهمان بوده است مسیر بین دوخانه را طی می‌کند). فرض کنید برای هر خانواده دو زمان اتمام عیددیدنی‌هایی که در آن میزبان بوده است و اتمام عیددیدنی‌هایی که در آن مهمان بوده است (زمانی که به خانه می‌رسد) را داشته باشیم و در آرایه guest و host ذخیره کرده باشیم. طبق این فرض جواب عیددیدنی بعدی که در آن خانواده v از خانواده u دیدن می‌کند برابر با ans = max(max(host[v], guest[v]) + dis(v, u), guest[u]) + k است و بعد از این مرحله guest[v] به ans + dis(u, v) و host[u] به max(host[u], ans) (host[u] قبلی می‌تواند بزرگتر باشد چون u می‌تواند مهمان‌هایی داشته باشد که دیرتر می‌رسند) تبدیل می‌شود.

برای بدست آوردن $dis(v, u)$ می‌توانیم هر مرحله از dijkstra استفاده کنیم $O(qmlg_2n)$ و یا می‌توانیم اول برنامه یک بار با استفاده از Floyd-Warshall تمام فواصل را ذخیره کنیم ($O(n^3 + q)$) که به دلیل محدودیت‌های سؤال راه دوم را انتخاب می‌کنیم.

سؤال سوم

برای حل این سؤال باید به این موضوع توجه کنیم که در هر گرافی وزن‌دار به ازای هر رأس i و یال (v, u, w) (v و u دو سر یال و w وزن یال است) $dis[i][v]+w \geq dis[i][u]$ برقرار است. اگر طبق راهنمایی سؤال S_i ها را در نظر بگیریم قانون‌های استاندارد به شکل $S_b - S_{a-1} > c$ یا $S_b - S_{a-1} < c$ در می‌آید که می‌توان آنها را به شکل $S_b + (-c-1) \geq S_{a-1}$ یا $S_{a-1} + (c-1) >= S_b$ نوشت. اگر در یک گراف فرضی به ازای هر کدام از این قوانین و قوانین دیگر صورت سؤال ($0 \leq S_i - S_{i-1} \leq 2 * 10^9$ و $1 \leq S_n - S_n - 1$) یالی بکشیم و کوتاه‌ترین مسیرها را با استفاده از آن پیدا کنیم این S_i ها که متناظر با $dis[0][i]$ هستند تمام شرایط سؤال را دارند بجز زمانی که در این گراف دور منفی وجود داشته باشد. حال می‌خواهیم اثبات کنیم که به وجود آمدن دور منفی به معنای جواب نداشتن این مسئله است. قوانین متناظر با این دور را در نظر بگیرید.

$$S_{i_1}+w_1 \geq S_{i_2},\ S_{i_2}+w_2 \geq S_{i_3},\ \ldots,\ S_{i_K}+w_k \geq S_{i_1}$$

با جمع زدن این قوانین به مجموع زیر می‌رسیم.

$$S_{i_1}+ S_{i_2}+\ldots+ S_{i_K}+w_1+w_2+\ldots+w_k \geq S_{i_1}+ S_{i_2}+\ldots+ S_{i_K}$$

$$w_1+w_2+\ldots+w_k \geq 0$$

که نتیجه حاصل با منفی بودن دور در تناقض است.

پس می‌توان با ساختن این گراف و با استفاده از Bellman-Ford (برای پیدا کردن دور منفی) S_i ها را پیدا کرد ($O(n(n+m))$).

سؤال چهارم

برای حل این سؤال اول می‌خواهیم راهی پیدا کنیم که مشخص کند آیا این گراف وجود دارد. برای این کار اول تمام یال‌های با وزن صفر را به یک تغییر می‌دهیم و مقدار dijkstra آن را حساب می‌کنیم (d_1). بعد از آن مقدار آن یال‌ها را به بزرگترین عدد ممکن (10^9) تغییر می‌دهیم و دوباره مقدار dijkstra آن را محاسبه می‌کنیم (d_2). بدیهی است که d باید عددی بین d_1 و d_2 باشد (d_1 کمترین و d_2 بیشترین مقدار ممکن برای dijkstra اولیه است) و اگر نباشد این گراف وجود ندارد. حال می‌خواهیم اثبات کنیم که d اگر بین این دو عدد باشد برای این سؤال جوابی وجود دارد. می‌دانیم که اگر وزن یکی از یال‌های گرافی را یکی زیاد کنیم اندازه هر مسیری در آن، حداکثر یکی زیاد می‌شود پس

جواب dijkstra آن هم حداکثر یکی زیاد می‌شود. از گرافی که یال‌های قابل تغییر آن یک است شروع می‌کنیم و هر مرحله، یکی از یال‌های قابل تغییر که وزن آن 10^9 نیست را یکی زیاد می‌کنیم؛ مقدار dijkstra بعد از تعداد متناهی مرحله می‌تواند به d_2 برسد پس در مرحله‌ای هم به d می‌رسد و همچنین اضافه کردن به یک یال تا مرحله‌ای dijkstra را افزایش می‌دهد ولی بعد از اولین باری که افزایش پیدا نمیکند از آنجایی که دیگر کوتاه‌ترین مسیر از این یال نمی‌گذرد دیگر افزایش پیدا نمی‌کند. انجام دادن این الگوریتم بسیار زمانبر است ولی می‌توان آنرا با ایده‌های مختلفی بهینه‌تر کرد مثلا با پیدا کردن dijkstra اولیه یال‌های قابل تغییری که در این مسیر نیستند را 10^9 می‌گذاریم که مقدار dijkstra را تغییر نمی‌دهد ولی k را کاهش می‌دهد. ایده دیگر این است که به جای اضافه کردن یکی یکی هر مرحله به مقداری اضافه کنیم که طول مسیر پیدا شده به d برسد یا آن یال 10^9 شود. یکی دیگر از ایده‌های خوب تغییر ترتیب ذخیره یال به صورت تصادفی است که باعث می‌شود به کوتاه‌ترین مسیر دیگری برسیم و با استفاده از ایده دوم k را بیشتر کم کنیم. ولی ایده اصلی که ما را به حل سؤال می‌رساند binary search است. یال‌های قابل تغییر را به ترتیبی مرتب می‌کنیم و روی آن پیمایش می‌کنیم و با $O(\lg_2 k)$ dijkstra نقطه‌ای را پیدا می‌کنیم که اگر x یال اول ترتیب 10^9 و بقیه یال‌های ترتیب یک باشند جواب $s1 \le d$ و اگر x+1 یال اول ترتیب 10^9 و بقیه یال‌های ترتیب یک باشند جواب $s2 \ge d$ شود. طبق چیزی که اثبات کردیم با افزایش وزن یال x+1 ام dijkstra نیز همانقدر افزایش میابد تا به مقدار s2 برسد و ثابت شود پس اگر x یال اول ترتیب را 10^9 بگذاریم یال x+1 ام را $d-s_1+1$ و بقیه یال‌های ترتیب را یک بگذاریم dijkstra برابر d می‌شود (O(mlgmlgk)).