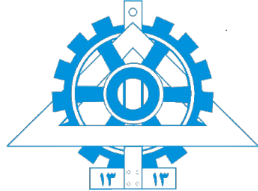


به نام خدا



## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی ششم  
موعد تحویل: شنبه ۲۴ خرداد ۹۹، ساعت ۲۳:۵۵  
طراح: ژيوار صورتی حسن‌زاده zhivarsourati@gmail.com

۱. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- تعریفی برای مسائل np-complete ارائه دهید.
- تعریفی برای مسائل np-hard ارائه دهید.
- چرا از reduction در حل مسائل np-complete استفاده می‌شود؟

۲. درستی یا نادرستی هر کدام از عبارات زیر را مشخص نمایید.

- اگر یک مسئله np-complete در زمان خطی حل شود، تمام مسائل np-complete را می‌توان در زمان خطی حل کرد.
- اگر یک مسئله np در زمان چندجمله‌ای حل شود، تمام مسائل np را می‌توان در زمان چندجمله‌ای حل نمود.

۳. ثابت کنید مسئله زیر در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد. در ابتدا ثابت کنید این مسئله در کلاس پیچیدگی np قرار دارد و پس از آن مسئله vertex-cover را به آن کاهش دهید.  
گراف  $G$  و عدد  $k$  داده شده‌اند. آیا می‌توان با حذف حداکثر  $k$  رأس از گراف  $G$  آن را خالی از دور کرد.

۴. ثابت کنید مسئله زیر در کلاس پیچیدگی np-complete قرار می‌گیرد.  
دو گراف  $G_1, G_2$  را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا گراف  $G_1$  زیرگراف  $G_2$  است یا خیر به بیان دیگر می‌خواهیم بررسی کنیم آیا تناظر یک به یکی برای رئوس  $G_1$  به رئوس  $G_2$  که یال‌های آن نیز وجود داشته باشند وجود دارد یا خیر.  
برای این کار در ابتدا ثابت کنید که این مسئله در کلاس پیچیدگی np قرار دارد و پس از آن با کاهش مسئله دیگری که می‌دانید در این کلاس قرار دارد جواب مسئله را کامل کنید.

۵. مسئله‌ای به این شکل در نظر بگیرید که مجموعه‌های  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_r$  و همچنین  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_s$  را داریم. می‌خواهیم بررسی کنیم آیا مجموعه  $T$  وجود دارد که روابط زیر برقرار باشند یا خیر؟

$$|T \cap A_i| \geq 1 \text{ for } i = 1, 2, 3, \dots, r$$

$$|T \cap B_j| \leq 1 \text{ for } j = 1, 2, 3, \dots, s$$

نشان دهید مسئله داده شده در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد.

برای این کار در ابتدا ثابت کنید که این مسئله در کلاس پیچیدگی np قرار دارد و پس از آن با کاهش مسئله 3-cnf-sat به این مسئله ثابت کنید این مسئله در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد.

۶. در نظر بگیرید که ماشین گشتی وجود دارد که هر بار از ایستگاه خود شروع می‌کند و مسیرهایی را طی می‌کند و سپس دوباره به ایستگاه برمی‌گردد. همچنین در نظر بگیرید که هر مسیر طولی دارد. مسیرهای مختلفی نیز برای او وجود دارند که بسته به نوع گشت زنی اش طول مسیر متفاوت می‌شود. حال می‌خواهیم ببینیم آیا مسیری به اندازه  $k$  برای گشت زنی وجود دارد یا خیر.

برای این کار در ابتدا ثابت کنید که این مسئله در کلاس پیچیدگی  $np$  قرار دارد و پس از آن با کاهش مسئله subset-sum به این مسئله ثابت کنید این مسئله در کلاس پیچیدگی  $np$ -complete قرار دارد.

۷. مسئله‌ای را در نظر بگیرید که در آن شکارچی‌ای داریم که او نقشه محوطه‌ای را دارد که در آن تعدادی شهر وجود دارند و همینطور راه‌های بین شهرها در نقشه به او نشان داده شده‌است. شکارچی در طول مسیر می‌تواند به اندازه حیوان‌هایی که تخمین زده شده در مسیر وجود دارند شکار کند و سود بدست بیاورد. همینطور در نظر بگیرید که اگر شکارچی یکبار مسیر را طی کند و حیوان‌های مسیر را شکار کند بار دوم که از آن مسیر عبور کند دیگر حیوانی وجود ندارد که آن‌ها را شکار کند. همینطور شهرهایی که در نقشه وجود دارند برای این هستند که شکارچی در آن‌ها استراحت کند و همینطور غذا بخورد که موارد گفته شده نیز هزینه‌هایی برای او در پی خواهند داشت که هر زمانی که شکارچی وارد شهری شود به مقدار هزینه‌ای که برای هر شهر معین شده از او گرفته خواهد شد. در نقشه داده شده هم هزینه‌های شهرها و هم اطلاعات مربوط به سود تخمینی در پیمودن هر راه داده شده است. حال ما می‌خواهیم سود گرفته شده شکارچی را به بیشترین مقدار خودش برسانیم و سؤال نیز این است که آیا با نقشه داده شده امکان گرفتن سود مقدار  $k$  وجود دارد یا خیر. تعریف سود را نیز به این شکل در نظر بگیرید که هزینه کسب شده در راه‌های طی شده با در نظر گرفتن هزینه‌های کسری در شهرها. برای این کار در ابتدا ثابت کنید که این مسئله در کلاس پیچیدگی  $np$  قرار دارد و پس از آن با کاهش مسئله ham-cycle به این مسئله ثابت کنید این مسئله در کلاس پیچیدگی  $np$ -complete قرار دارد.