



# طراحی الگوریتم

تمرین دوم - برنامه ریزی پویا

آرین باستانی و علی حمزه پور

تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۰۸/۱۱

## ۱. ربات احمق

۱۵ نمره

محمد یک ربات برای تمیز کردن خانه‌ی خود ساخته است. خانه به صورت یک جدول  $n \times n$  مدل شده و میزان کثیفی بلوک سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام به صورت  $a_{i,j}$  نشان داده می‌شود. مشکل این است که ربات فقط می‌تواند به سمت بالا، بالاچپ، و بالا راست حرکت کند. ربات حرکتش را از یکی از بلوک‌های پایینی جدول آغاز می‌کند.

**الف)** با استفاده از برنامه‌ریزی پویا با محدودیت زمانی و حافظه‌ی  $O(n^2)$ ، الگوریتمی طراحی کنید که ربات بتواند بیشترین میزان کثیفی را از بین ببرد.

**ب)** آیا می‌توان این مسئله را با حافظه‌ی کمتری حل کرد؟ اگر پاسخ منفی است، دلیل بیاورید و اگر پاسخ مثبت است، روش خود را شرح دهید.

## ۲. دنیای تک‌بعدی علی

۱۵ نمره

علی پسری تک‌بعدی‌ست. دنیای او تنها یک بعد دارد و می‌توان مکان او را با یک عدد نشان داد. او هر روز بیدار می‌شود و برای هدف تک‌بعدی‌اش تلاش می‌کند. او در ابتدای روز اول در مکان  $x = 0$  قرار دارد. همچنین او از قبل می‌داند که در روز  $i$ ام می‌تواند به اندازه‌ی  $m_i$  در دنیایش به جلو یا عقب برود. هدف علی در مکان  $x = t$  قرار دارد. از آنجا که علی دچار اختلال نشخوار فکری (*overthinking*) است، دائماً به این فکر می‌کند که با چه حالتی می‌تواند به هدفش برسد. به علی کمک کنید و الگوریتمی را پیشنهاد دهید که با دانستن مقادیر  $t$  و  $m_i$  به او بگوید که به چند حالت مختلف می‌تواند در پایان روز  $n$ ام به هدفش برسد! در صورتی که  $\sum_{i=1}^n m_i = M$ ، پیچیدگی زمانی الگوریتم شما باید  $O(Mn)$  باشد.

## ۳. دبیر ACM

۲۰ نمره

بعد از انتخابات اعضای انجمن ACM، دبیر این انجمن باید مشخص شود. اعضای انجمن به این توافق رسیدند که محبوب‌ترین فرد باید به عنوان دبیر انتخاب شود. هر کس در دانشکده طرفدار یکی از اعضای انجمن است. اعضای انجمن معتقدند که محبوب‌ترین فرد کسی نیست که بیشترین طرفدار را داشته باشد، بلکه کسی هست که از تمام گروه‌ها و قشرها طرفدار داشته باشد! آن‌ها به ترتیب به  $n$  نفر از افراد دانشکده در گروه‌ها و ورودی‌های مختلف مراجعه

می‌کنند و از آنها می‌پرسند که طرفدار چه نماینده‌ای هستند. این اطلاعات را به صورت دنباله‌ای از اعداد می‌نویسند به طوری که اگر  $A_i = j$ ، یعنی نفر  $i$ ام در این نمونه‌گیری طرفدار عضو  $j$ ام انجمن است. آنها سپس طبق این دنباله برای هر عضو یک درجه‌ی گمنامی تعریف میکنند:

کمترین مقدار  $k$  که در هر  $k$  نفر متوالی در دنباله حداقل یک نفر طرفدار عضو  $j$ ام باشد، درجه‌ی گمنامی عضو  $j$ ام در انجمن است (اعضای انجمن از 1 تا  $m$  شماره‌گذاری شده‌اند).



برای مثال در دنباله‌ی  $\{1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 2\}$  درجه‌ی گمنامی نماینده‌های 1، 2 و 3 به ترتیب 5، 4 و 2 است. دبیر انجمن فردی‌ست که کمترین درجه‌ی گمنامی را داشته باشد. در صورتی که چند عضو با هم کمترین درجه‌ی گمنامی را داشته باشند، دبیر انجمن فردی‌ست که شماره‌ی او از همه کمتر است. در صورتی که بدانیم تعداد اعضای انجمن  $m$  است و  $m < n$ ، شبه کد الگوریتم با پیچیدگی زمانی  $O(n)$  را بنویسید که با دریافت دنباله‌ی  $A$  به طول  $n$ ، دبیر انجمن را پیدا کند. الگوریتم خود را توضیح بدهید و صرفاً به شبه کد بسنده نکنید.

#### ۴. سازمان رنجش

##### ۲۰ نمره

مدتی است که سازمان رنجش تصمیم به اضافه کردن یک گزینه‌ی جایگزین برای کسانی که نتیجه‌ی کنکور مورد انتظار را نگرفته‌اند، گرفته است. این تصمیم بدین صورت است که هر داوطلب از آزمون‌های آزمایشی که شرکت کرده می‌تواند تعدادی را انتخاب کند (می‌توان از هر آزمون بیش از یک‌بار استفاده کرد) و با وجود قابلیت تعویض ترتیب آزمون‌ها و تعویض ترتیب ترازهای دروس به ازای هر آزمون (در اینجا فقط ترازهای ریاضی، فیزیک و شیمی مطرح است و می‌توان ترازهای آنها را بین هم جابجا کرد)، آزمون‌ها را به چالش انتخابی خود به سازمان رنجش بدهد. این آزمون‌ها باید به طوری چیده شوند که در هر آزمون، نسبت به آزمون قبلی تراز فیزیک و تراز شیمی هر دو پیشرفت داشته باشند و اگر برای آزمون‌های دریافت شده از داوطلب این شرایط برقرار بود، مجموع ترازهای ریاضی در این آزمون‌ها محاسبه شده و با توجه به آن، قبولی داوطلب در دانشگاه‌ها و رشته‌های مورد نظر مشخص می‌شود. برای آزمون  $i$ ام، ترازهای ریاضی، فیزیک و شیمی به ترتیب برابر  $m_i$  و  $p_i$  و  $c_i$  هستند و  $N$  آزمون وجود دارد.

الگوریتمی برای پیدا کردن ترتیب با بیشینه مجموع ترازهای ریاضی با شرایط گفته شده ارائه دهید (محدودیت پیچیدگی زمانی برابر  $O(N^2)$  می‌باشد).

#### ۵. چالش نمره گرفتن

##### ۲۰ نمره

پس از اعلام نمرات درس طراحی الگوریتم، آراین به دفتر دکتر دوستی مراجعه می‌کند و از او خواهش می‌کند که به دلیل حضور فعال در کلاس نمره‌اش را افزایش دهد. دکتر دوستی قبول می‌کند اما از آنجا که به همین سادگی‌ها به کسی نمره نمی‌دهد، یک چالش برای او مطرح می‌کند. او به آراین می‌گوید: «من به تو مقدار ثابت  $(x)$  نمره اضافی می‌دهم و تو باید مقداری دلخواه از آن  $(k)$  را خرج یک بازی با من کنی. در صورتی که بازی را ببری،  $x - k$  نمره به تو تعلق می‌گیرد، اما اگر ببازی از نمره خبری نیست!»

بازی به شکل زیر است:

- دکتر دوستی یک عدد دلخواه از 1 تا  $n$  انتخاب می‌کند.

- آراین در هر مرحله می‌تواند یک عدد حدس بزند. در صورتی که حدس او غلط باشد، به اندازه‌ی عددی که حدس زده است، از  $k$  امتیازی که ابتدا انتخاب کرده بود کم می‌شود. دکتر دوستی هم به او می‌گوید که عدد مدنظرش از عدد آراین بزرگتر است یا کوچک‌تر.

- بازی به همین رویه ادامه پیدا می کند تا زمانی که آراین عدد درست را پیدا کند و یا امتیازهایش تمام شوند. در صورتی که امتیازهایش تمام شود، او بازی را باخته و هیچ نمره ای نمیگیرد!

به آراین کمک کنید و الگوریتمی طراحی کنید که با دانستن مقدار  $n$ ، کمترین میزان نمره ای که نیاز است خرج شود تا آراین در هر صورت بتواند ببرد را پیدا کند (به این معنا که صرف نظر از هر عددی که دکتر دوستی انتخاب می کند، آراین می تواند با استراتژی خود و آن میزان نمره بازی را ببرد). پیچیدگی زمانی الگوریتم شما باید  $O(n^3)$  باشد.

## ۶. روباه جادویی

### ۲۰ نمره

شما یک جادوگر هستید که یک روباه جادویی را در جنگل افسون شده هدایت می کنید تا به انبار طلسم ها برسد. روباه از موقعیت 0 شروع می کند و مقدار پرش اولیه آن 1+ است. مسیر در هر دو جهت به طور بی نهایت ادامه دارد و روباه می تواند به جلو یا عقب بپرد.

روباه به دو نوع طلسم جادویی واکنش نشان می دهد:

- **طلسم امید (H):** روباه به اندازه مقدار پرش کنونی به جلو می پرد و مقدار پرش دو برابر می شود:

position += jump

jump \*= 2

- **طلسم بازگشت (B):** جهت پرش تغییر می کند:

- اگر مقدار پرش مثبت باشد، به 1- تغییر می یابد.

- اگر مقدار پرش منفی باشد، به 1+ تغییر می یابد.

برای مثال، با دنباله طلسم «HBH» روباه به صورت زیر حرکت می کند:

۱. شروع در موقعیت 0، مقدار پرش 1

۲. H: پرش به موقعیت 1 (مقدار پرش به 2 می رسد)

۳. B: تغییر جهت (مقدار پرش به 1- تغییر می کند، موقعیت در 1 باقی می ماند)

۴. H: پرش به موقعیت 0 (مقدار پرش به 2- می رسد)

هدف، کمینه سازی تعداد طلسم های استفاده شده برای رساندن روباه به مقصد است. الگوریتمی برای پیدا کردن این دنباله ی کمینه از طلسم ها با پیچیدگی زمانی  $O(T \log T)$  ارائه کنید ( $T$  فاصله ی مکان انبار طلسم ها از موقعیت اولیه ی روباه است).