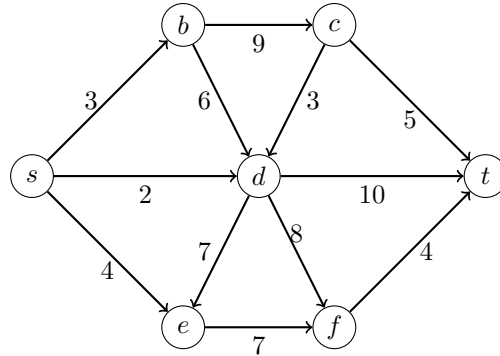


به نام خدا

امتحان پایان‌ترم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (بهمن ۹۶)

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه

۱. الگوریتم Ford-Fulkerson را بروی گراف زیر اجرا کنید. برای هر مرحله گراف القایی و مسیر افزایشی را مشخص کنید. در اجرای الگوریتم و هنگام بررسی همسایه‌ها، همسایه‌ها را به ترتیب الفبایی بررسی کنید.



۲. هدف از این سوال اثبات درستی الگوریتم Ford-Fulkerson است. فرض کنید شبکه جریان (G, c, s, t) به منبع s و مقصد t داده شده است به طوری که برای هر یال e مقدار $c(e)$ گنجایش یال e را نشان می‌دهد. ابتدا تعاریف زیر را برای شبکه جریان (G, c, s, t) و جریان f مرور می‌کنیم:

- جریان f یک جریان سازگار است اگر دو شرط زیر را داشته باشد:
 - برای هر یال e داشته باشیم: $0 \leq f(e) \leq c(e)$
 - برای هر راس $u \neq s, t$ داشته باشیم: $f^-(u) = \sum_{e=(u,v)} f(e) = \sum_{e=(v,u)} f(e) = f^+(u)$
 - اندازه جریان f که با $|f|$ نشان می‌دهیم برابر است با: $|f| = f^-(s) = f^+(t)$
 - گنجایش برش (S, T) برابر است با: $c(S, T) = \sum_{e=(u,v) | u \in S, v \in T} c(e)$
 - جریان برش (S, T) برابر است با: $f(S, T) = \sum_{e=(u,v) | u \in S, v \in T} f(e) - \sum_{e=(u,v) | u \in T, v \in S} f(e)$
- حال ثابت کنید:
- (آ) برای هر برش (S, T) خواهیم داشت: $f(S, T) \leq c(S, T)$
 - (ب) برای هر برش (S, T) خواهیم داشت: $|f| = f(S, T)$
 - (ج) اگر جریان f خروجی الگوریتم Ford-Fulkerson باشد، آنگاه یک برش (S, T) وجود دارد که $f(S, T) = c(S, T)$
 - (د) الگوریتم Ford-Fulkerson جریان سازگار f با بیشینه مقدار $|f|$ را پیدا می‌کند.

۳. شبکه جریان G داده شده است. ثابت کنید اگر جراینی به اندازه f از مبدأ s به مقصد t و جراینی به اندازه f از مبدأ t به مقصد u وجود داشته باشند، آنگاه جریان به اندازه f از مبدأ s به مقصد u وجود خواهد داشت.

۴. گراف بدون جهت و وزن‌دار G با n راس و زیردرخت فراگیر کمینه آن به نام T به عنوان ورودی داده شده‌اند. فرض کنید وزن یال e در این گراف از مقدار w_e به w'_e کاهش پیدا کرده است. الگوریتم از مرتبه زمانی $O(n)$ طراحی کنید که زیر درخت فراگیر کمینه گراف جدید را پیدا کند.

۵. فرض کنید ماتریس D ماتریس فاصله‌ها در گراف وزن‌دار G است. در حقیقت $D[i, j]$ اندازه کوتاه‌ترین مسیر بین i و j را نشان می‌دهد. ماتریس D و گراف وزن‌دار G داده شده‌اند. وزن یال e از w_e به w'_e کاهش پیدا کرده است. یک الگوریتم با زمان اجرای $O(n^2)$ ارائه دهید که ماتریس D را با توجه به کاهش وزن یال e به روز رسانی کند.

۶. درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. برای ادعای خود اثبات مختصری ارائه دهید.

(آ) اگر برای دو مسئله‌ی A و B داشته باشیم $A \leq_p B$ و الگوریتمی وجود داشته باشد که مسئله B را در زمان خطی حل کند آنگاه مسئله A نیز در زمان خطی حل خواهد شد.

(ب) $\text{NP-Complete} \subseteq \text{NP}$

(ج) اگر مسئله $A \in \text{NP-Complete}$ و $A \leq_p B$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $B \in \text{NP-Complete}$

(د) $P \subseteq \text{NP}$

۷. مسئله‌های ۳-SAT و INDEPENDENT-SET به این صورت تعریف شده‌اند:

- مسئله ۳-SAT: تعداد n متغیر منطقی x_1, x_2, \dots, x_n و عبارت منطقی c_1, c_2, \dots, c_m داده شده‌اند. در هر عبارت منطقی حداکثر از ۳ متغیر (خود متغیر یا نقیض آن) استفاده شده است که با عملگر \wedge از هم جدا شده‌اند. برای مثال یک عبارت منطقی می‌تواند به صورت $c_1 = x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}$ باشد. مسئله این است که آیا امکان مقداره‌ی به متغیرها وجود دارد به طوری که تمام عبارت‌های منطقی در نهایت مساوی ۱ شوند.

- مسئله INDEPENDENT-SET: گراف بدون جهت G و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا می‌توان k راس از گراف را طوری انتخاب کرد که بین هیچ تو راس انتخاب شده یالی نباشد.

ثابت کنید $\text{INDEPENDENT-SET} \leq_p \text{۳-SAT}$.

7	6	5	4	3	2	1	سوال
15	20	15	15	15	20	10	نمره