



به نام خدا

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران

طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها، نیم‌سال اول سال تحصیلی ۹۶-۹۷

تمرین شماره ۳ (برنامه‌نویسی حریصانه) موعد تحویل: ۲۸ آبان ۱۳۹۶



به نکات زیر توجه فرمایید:

- الگوریتم خود را به طور کامل توضیح دهید؛ اگر در صورت سوال خواسته نشده نیازی به نوشتن شبه کد نیست.
 - در هر سوال باید پیچیدگی زمانی و پیچیدگی مصرفی الگوریتم خود را نیز محاسبه کنید.
 - سعی کنید الگوریتم با کمترین پیچیدگی را بدست آورید.
۱. قرار است تعدادی کارگاه در کلاس‌های یک ساختمان برگزار شوند، کارگاه i ام زمان s_i شروع می‌شود و تا زمان f_i ادامه دارد. در هر زمان هر کلاس فقط می‌تواند میزبان یک کارگاه باشد. الگوریتمی از مرتبه $O(n \lg n)$ ارائه کنید که حداقل تعداد کلاس‌های مورد نیاز را بدست آورد. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.
۲. نقاط $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ روی محور اعداد حقیقی داده شده‌اند. الگوریتمی از مرتبه $O(n \lg n)$ ارائه دهید که حداقل تعداد بازه‌های بسته به طول واحد را که برای پوشش دادن تمام این نقاط نیاز است بدست آورد. اثباتی بر درستی الگوریتم خود ارائه دهید.
۳. پویا می‌خواهد برای تعطیلات آخر هفته از تهران به شیراز برود. ماشین پویا به ازای هر یک لیتر بنزین یک کیلومتر راه می‌پیماید و گنجایش باک او C لیتر است. در مسیر تهران به شیراز شمار n پمپ بنزین وجود دارد که پمپ بنزین i ام در فاصله d_i از تهران قرار دارد و d_i ها به صورت مرتب‌شده به شما داده می‌شوند. پویا با باک پر شروع به سفر می‌کند.
- a. پویا می‌خواهد با حداقل تعداد توقف در پمپ بنزین‌ها سفر را به انجام برساند. الگوریتمی از مرتبه $O(n)$ ارائه دهید که به پویا بگوید در کدام پمپ بنزین‌ها باید توقف کند. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.
- b. قیمت هر لیتر بنزین در پمپ بنزین i ام برابر p_i است. پویا می‌خواهد با حداقل هزینه سفرش را به اتمام برساند. الگوریتمی از مرتبه $O(n)$ ارائه دهید که به پویا بگوید در هر پمپ بنزین باید چه مقدار بنزین خریداری کند. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.
۴. ایمان می‌خواهد یک متن با n کلمه را برای چاپ حروف‌چینی کند. هر سطر قالبی که قرار است متن در آن حروف‌چینی شود گنجایش k حرف را دارد. کلمه i ام متن شامل l_i حرف است. هر دو کلمه متوالی نیز باید توسط یک فاصله از هم جدا شوند. با توجه به اینکه هر کلمه باید کاملاً روی یک خط قرار بگیرد (این امکان وجود ندارد که بخشی از یک کلمه روی یک سطر و بقیه آن روی سطر بعدی قرار بگیرد) ایمان از شما خواسته‌است که در پیدا کردن زیباترین حروف‌چینی ممکن برای این متن به او کمک کنید.
- a. فرض کنید زیباترین حروف‌چینی آن است که مقدار $\sum_{i=1}^{m-1} r_i$ را کمینه کند. m تعداد خطوط متن حروف‌چینی شده است و r_i فضای استفاده نشده در خط i ام را نشان می‌دهد. (با واحد حرف). الگوریتمی ارائه دهید که زیباترین حروف‌چینی را بدست آورد. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.
- b. فرض کنید زیباترین حروف‌چینی آن است که مقدار $\sum_{i=1}^{m-1} r_i^2$ را کمینه کند. m تعداد خطوط متن حروف‌چینی شده است و r_i فضای استفاده نشده در خط i ام را نشان می‌دهد. (با واحد حرف). الگوریتمی از مرتبه $O(n^2)$ ارائه دهید که زیباترین حروف‌چینی را بدست آورد. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.

۵. شمار n کار قرار است روی یک دستگاه انجام شوند، زمان مورد نیاز برای انجام کار i ام برابر t_i است و ضربالعجل کار i ام زمان d_i است. دیرکرد انجام کار i ام برابر است با $l_i = \max(0, f_i - d_i)$ که f_i زمان به اتمام رسیدن کار i ام است. الگوریتمی از مرتبه $O(n \lg n)$ ارائه دهید که این n کار را به گونه‌ای روی دستگاه زمان‌بندی کند که بیشینه دیرکرد کمینه شود یعنی مقدار $L = \max(l_i)$ کمینه شود. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.
۶. شمار n بازه به شکل $[z_i, z_i + 1], z_i \in Z$ داده شده‌اند. الگوریتمی از مرتبه $O(n \lg n)$ ارائه دهید که با استفاده از حداکثر k بازه به شکل $[l_i, r_i], l_i, r_i \in Z$ تمام این n بازه را بپوشاند به گونه‌ای که مجموع طول بازه‌های استفاده شده کمینه شود.

پیروز و سربلند باشید