

به نام خدا



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها، نیمسال دوم، سال تحصیلی 97-98

تمرین سری سوم، مهلت تحویل: 26 آبان ماه - ساعت ۱۱

1. درختی داریم با  $n$  راس که تعدادی از رئوس آن سیاه و بقیه سفید هستند. می‌توانیم با حذف کردن بعضی از یال‌های درخت، درخت را به تعدادی مولفه‌ی همبند تقسیم کنیم. منتهی می‌خواهیم در هر مولفه، دقیقاً یک راس وجود داشته باشد. الگوریتم بهینه‌ای از مرتبه‌ی زمانی  $O(n)$  ارائه دهید تا تعداد روش‌های انجلم این کار را محاسبه کند.

2.  $N$  کامیون در یک طرف از خیابان قرار دارند و آرایش خطی دارند. در طرف دیگر خیابان  $n$  پارکینگ قرار دارند و می‌خواهیم هر کامیون را در یک پارکینگ پارک کنیم. هر کامیون در مکان  $x$  برای پارک کردن در پارکینگی در مکان  $x'$  باید به اندازه‌ی  $|x' - x|$  مسافت طی کند. مکان کامیون‌ها و پارکینگ‌ها را داریم. با پیچیدگی زمانی  $O(n \log n)$  برای هر کامیون یک پارکینگ تعیین کنید به طوری که میانگین فاصله‌ی طی شده توسط کامیون‌ها کمترین مقدار ممکن شود. اگر بخواهیم که بیشترین فاصله‌ی طی شده توسط کامیون‌ها کمترین مقدار ممکن شود چه تفاوتی ایجاد می‌شود؟

3. دو string به شما داده شده است. با فقط استفاده از سه عملیات زیر، می‌خواهیم String 1 را به String 2 تبدیل کنیم. الگوریتمی ارائه دهید که کمترین تعداد عملیات را برای این کار پیدا کند. عملیات مورد استفاده: Insert, Remove, Replace  
مثلاً برای تبدیل cat به cute ابتدا a را با u، Replace می‌کنیم سپس e را Insert می‌کنیم.

4. یک آرایه به طول  $n$  داریم. در هر خانه از آرایه یا یک خرگوش وجود دارد یا یک هویج. هر خرگوش می تواند حداکثر یک هویج را که در خانه ای با فاصله ی کمتر از  $k$  از او قرار دارد بخورد. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n)$  ارائه دهید که حساب کند بیشترین تعداد هویجی که می تواند خورده شود را حساب کند.

5. امتحانی در روز شنبه و در بازه ی زمانی  $[a,b]$  برگزار میشود. تعداد  $n$  مراقب برای حضور در امتحان اعلام آمادگی کردند به صورتی که مراقب  $i$ -ام می تواند در بازه ی زمانی  $[S_i, F_i]$  این مسئولیت را قبول کند. حداقل یک مراقب در هر لحظه از زمان باید در محل حضور داشته باشد. مطلوب است الگوریتمی با مرتبه ی زمانی  $O(n \log n)$  که کمترین تعداد مراقب را برای این کار محاسبه کند.

6. الگوریتمی ارائه دهید که به ازای هر  $n$  تعداد درخت های دودویی کامل را با  $n$  برگ محاسبه کند (درختی دودویی کامل است که هر راس یا فرزند نداشته باشد یا دو فرزند داشته باشد)