

به نام خدا

امتحان اول درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (پاییز ۹۹)

مدت امتحان: ۷۵ دقیقه

امتحان شامل سه بخش است و از هر بخش شما باید فقط و فقط یک سوال را حل کنید. برای انتخاب سوال مربوط به خود به توضیحات بالای هر بخش توجه کنید. برای انتخاب سوال خود فرض کنید شماره دانشجویی شما $ABCDEFGHI$ باشد و مقادیر A تا I را با توجه به شماره دانشجویی خود در هر بخش جایگزین کنید. برای مثال اگر شماره دانشجویی شما 894456123 است مقدار $A = 8$ و مقدار $H = 2$ خواهد بود. لطفا در بالای برگه جواب حتما علاوه بر نام و نام خانوادگی شماره دانشجویی و شماره سوال مربوط به خود را بنویسید

بخش اول (۲۵ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود سوال زیر را حل کنید

۱. در این سوال هدف اجرای الگوریتم ضرب چند جمله‌ای با زمان اجرای $O(n^{\log_2 3})$ است. با توجه به شماره دانشجویی خود مقادیر H ، G و I را محاسبه کنید و فرض کنید می‌خواهیم حاصل ضرب دو چند جمله‌ای $A(x) = 1 + G \times x + x^2 + 3 \times x^3$ و $B(x) = 3 - I \times x^2 + H \times x^3$ را حساب کنید

- به طور دقیق زیر مسئله‌های مرتبط چه زیر مسئله‌هایی هستند؟
- جواب هر زیر مسئله را مشخص کنید
- جواب نهایی را از روی جواب زیر مسئله‌ها حساب کنید. مراحل رسیدن به جواب نهایی رو مشخص کنید.

بخش دوم (۴۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار H و I را محاسبه کنید. اگر باقیمانده $I + H$ بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 2 یا 3 را حل کنید.

۲. درخت دودویی درختی است که دارای خواص زیر است:

- به هر راس یک عدد نسبت داده شده است.
- به غیر از ریشه، هر راس یک پدر دارد. همچنین هر راس حداکثر دو فرزند دارد که آنها را فرزند سمت چپ و راست می‌نامیم.

درخت جستجوی دودویی یک درخت دودویی است که خاصیت زیر را نیز دارد:

- به ازای هر راس، عدد نسبت داده شده به آن از تمام اعداد زیردرخت سمت چپ آن بزرگتر است و از تمام اعداد زیر درخت سمت راست آن بزرگتر نیست.

یک درخت دودویی به n راس داده شده است. الگوریتمی با زمان اجرای $O(n)$ طراحی کنید که تشخیص دهد که آیا درخت ورودی یک درخت جستجوی دودویی است. شبه کد مربوط به الگوریتم خود را بنویسید. در صورتی که زمان اجرای الگوریتم شما $O(n \log n)$ باشد قسمتی از نمره به شما تعلق می‌گیرد.

۳. یک آرایه به طول n از اعداد 0 تا n داده شده است. می‌دانیم در این آرایه تمام اعداد به جز یک عدد آمده است که آن را عدد گمشده می‌نامیم. الگوریتم با زمان اجرای $O(n)$ و حافظه کمکی $O(\log n)$ طراحی کنید که عدد گمشده را پیدا کند. شبه کد مربوط به الگوریتم خود را بنویسید.

بخش سوم (۳۵ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار I و G را محاسبه کنید. اگر باقیمانده $I + G$ بر ۲ به ترتیب ۰، ۱ بود به ترتیب سوال ۴ یا ۵ را حل کنید.

۴. رئوس یک چند ضلعی محدب در مختصات دکارتی (x, y) داده شده است. می‌دانیم هیچ دو رأس این چند ضلعی مختصات x یا y یکسان ندارند. رئوس چند ضلعی به ترتیب ساعت‌گرد با شروع از سمت چپ‌ترین رأس (رأس با کمترین x) داده شده‌اند. الگوریتمی با زمان اجرای $O(\log n)$ طراحی کنید که بالاترین رأس (رأس با بیشترین y) و سمت راست‌ترین رأس (رأس با بیشترین x) را پیدا کند.

۵. روی یک صفحه n مستطیل سیاه کشیده‌ایم. ضلع پایینی تمامی مستطیل‌ها روی محور x (خط $y = 0$) قرار دارند. مستطیل i -ام با سه‌تایی (l_i, r_i, h_i) توصیف می‌شود به این معنی که l_i و r_i به ترتیب مختصات ضلع سمت چپ و راست مستطیل روی محور x و h_i ارتفاع آن است. هدف این است که شکل نهایی از قرار دادن این مستطیل‌ها روی صفحه را پیدا کنیم. به بیانی دیگر شکل نهایی حاصل قرار گرفتن این مستطیل‌های سیاه یک شکل پلکانی-مانند می‌شود. باید الگوریتمی طراحی کنید که خروجی پلکانی-مانند را تولید کند و برای نقاطی که تغییر ارتفاع صورت می‌گیرد مختصات x و ارتفاع جدید رو در خروجی چاپ کنید. الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log n)$ برای این مسئله طراحی کنید.

• برای مثال فرض کنید در ورودی سه مستطیل با سه‌تایی‌های $(2, 6, 3)$ ، $(3.5, 5, 2)$ و $(3, 4, 5)$ داده شده‌اند. خروجی نهایی $((2, 3), (3, 5), (4, 3), (6, 0))$ خواهد بود به این دلیل که ابتدا در $x = 2$ ارتفاع شکل حاصل ۳ می‌شود، سپس در $x = 3$ به خاطر مستطیل سوم ارتفاع ۵ می‌شود، در $x = 4$ ارتفاع به ۳ کاهش پیدا می‌کند و در نهایت در $x = 6$ ارتفاع ۰ خواهد شد.

