سوال 1.

گراف دوبخشی G را به صورت زیر ایجاد میکنیم:

هر فرد را یک راس (p_i) و هر شب را نیز یک راس در نظر میگیریم (n_i). سپس هر p_i را به مجموعه شب هایی که میتواند در آنها آشپزی کند متصل میکنیم.

حال با اجرای الگوریتم matching روی گراف G، یک برنامه ریزی قابل قبول به دست می آید.

سوال 2.

الف) نادرست. با توجه به اینکه یال e فقط در یکی از مینیمم کات های گراف وجود دارد، پس با افزایش ظرفیت آن، ظرفیت مینیمم کات متناظر یک واحد افزایش می یابد ولی لزوما ظرفیت همه ی مینیمم کات ها افزایش نمی یابد و با توجه به برابری ظرفیت مینیمم کات یک گراف با ماکزیمم جریان آن، این عبارت در حالت کلی نادرست است.

ب) درست. ظرفیت همه مینیمم کات ها یک واحد افزایش می یابد؛ لذا تمام مینیمم کات های جدید، یک واحد بیشتر ظرفیت خواهند داشت.

ج) درست. با افزایش ظرفیت q، ظرفیت تمام مینیمم کات ها یک واحد افزایش می یابد و با کاهش e، ظرفیت یکی از مینیمم کات ها یک واحد کاهش می یابد. پس ظرفیت این مینیمم کات در نهایت تغییری نمیکند و از طرفی این کات، مینیمم کات جدید گراف نیز می باشد؛ بنابراین، ماکزیمم جریان گراف ثابت می ماند.

د) نادرست. با کاهش ظرفیت q، ظرفیت تمام مینیمم کات ها یک واحد کاهش می یابد و با افزایش e، ظرفیت یکی از مینیمم کات ها افزایش می یابد ولی ظرفیت بقیه مینیمم کات ها یک واحد کاهش داشته است؛ بنابراین مینیمم کات جدید، یک واحد کمتر ظرفیت دارد. پس ماکزیمم جریان گراف یک واحد کاهش می یابد.

سوال 3.

به ازای کاربر i ام ($0 < i < n$)، راس p_i و به ازای سرور j ام ($0 < j < k$)، راس d_j را در نظر میگیریم. سپس به ازای هر i و j، در صورتی که فاصله p_i تا d_j کمتر از r بود، یالی با ظرفیت 1 از p_i به d_j اضافه میکنیم. 2 راس s و t را نیز اضافه میکنیم و راس s را با ظرفیت 1 به همه ی p_i ها و راس t را با ظرفیت L به همه ی d_j

ها متصل میکنیم. حال با در نظر گرفتن راس s به عنوان راس شروع و راس t به عنوان راس پایان، الگوریتم ford-fulkerson را روی گراف به دست آمده اجرا میکنیم.

سوال 4.

ابتدا با استفاده از الگوریتم ford-fulkerson، تمام مسیرهای مجزا از s به t را می یابیم. چون ظرفیت همه یال ها برابر 1 است، پس جریان گذرنده از هر یک از این مسیرها برابر 1 است و همچنین ماکزیمم جریان گذرنده از این گراف (f) برابر با تعداد این مسیرهاست. حال از هر یک از این مسیرها، یک یال را به دلخواه حذف میکنیم. در نهایت به گرافی با کمترین مقدار جریان خواهیم رسید.

(اگر $k \geq f$ باشد، آنگاه ماکزیمم جریان پس از حذف یال ها به روش گفته شده، برابر 0 خواهد بود)

سوال 5.

به ازای هر فرد i ‏($0 < i < n$)، راس p_i و به ازای هر بیمارستان j ‏($0 < j < k$)، راس h_j را در نظر میگیریم. سپس به ازای هر i و j، در صورتی که فاصله p_i تا h_j کمتر از نیم ساعت بود، یالی با ظرفیت 1 از p_i به h_j اضافه میکنیم. 2 راس s و t را نیز اضافه میکنیم و راس s را با ظرفیت 1 به همه ی p_i ها و راس t را با ظرفیت $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ به همه ی h_j ها متصل میکنیم. حال با در نظر گرفتن راس s به عنوان راس شروع و راس t به عنوان راس پایان، الگوریتم ford-fulkerson را روی گراف به دست آمده اجرا میکنیم.

در نهایت بررسی میکنیم که آیا از همه یال های خروجی از s جریانی برابر با ظرفیت آنها میگذرد یا خیر. اگر بگذرد، در اینصورت، هر فرد به یک بیمارستان فرستاده شده است. با بررسی یال های بین 2 لایه میانی (یال های بین p_i ها و h_j ها) در می یابیم که هر فرد به کدام بیمارستان منتقل شده است.

در غیر اینصورت، پاسخی با شرایط بیان شده وجود نخواهد داشت.

سوال 6.

به ازای هر ویژگی i ‏($0 < i < n$)، راس p_i و به ازای هر بالن j ‏($0 < j < m$)، راس b_j را در نظر میگیریم. سپس به ازای هر i و j، در صورتی که بالن b_j میتوانست ویژگی p_i را اندازه گیری کند، یالی با ظرفیت 1 از p_i به b_j اضافه میکنیم. 2 راس s و t را نیز اضافه میکنیم و راس s را با ظرفیت k به همه ی p_i ها و راس t را با

ظرفیت 2 به همه ی b_j ها متصل میکنیم. حال با در نظر گرفتن راس s به عنوان راس شروع و راس t به عنوان راس پایان، الگوریتم ford-fulkerson را روی گراف به دست آمده اجرا میکنیم.

در نهایت بررسی میکنیم که آیا از همه یال های خروجی از s جریانی برابر با ظرفیت آنها(k) میگذرد یا خیر. اگر بگذرد، در اینصورت، هر بالن حداکثر 2 ویژگی را اندازه گیری کرده است و همچنین هر ویژگی دقیقا توسط k بالن اندازه گیری شده است. در غیر اینصورت، پاسخی با شرایط گفته شده وجود نخواهد داشت.

سوال 7.

گراف قسمت قبل را در نظر بگیرید. تغییرات زیر را روی آن اعمال میکنیم:

ابتدا همه یال های بین رئوس p_i و b_j را حذف میکنیم. سپس 3 راس M_1 و M_2 و M_3 را به گراف اضافه میکنیم. از هر راس p_i به هر 3 راس اضافه شده با ظرفیت k-1 یالی اضافه میکنیم و از هر بالن b_j به راس مربوط به شرکت سازنده آن یالی با ظرفیت 1 متصل میکنیم. سایر قسمت های گراف را تغییر نمی دهیم. در نهایت بر روی این گراف الگوریتم ford-fulkerson را اجرا میکنیم. در صورتی که از همه یال های خروجی s جریانی برابر با ظرفیت آنها (k) بگذرد، آنگاه پاسخ مطلوب به دست آمده است. در غیر اینصورت، پاسخی برای مسئله گفته شده وجود نخواهد داشت.

سوال 8.

ابتدا باید یال هایی را بیابیم که در تمام کوتاهترین مسیرها از راس 1 به راس n وجود دارند. برای این کار از الگوریتم Dijkstra با کمی تغییر استفاده خواهیم کرد. [فرض کنید $d_1(x)$ کوتاهترین فاصله راس 1 تا راس x باشد. 2 راس u , v را در نظر بگیرید. یال (u,v) در کوتاهترین مسیر از راس 1 به n حضور دارد اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد:]

$$d_1(v) + w(u,v) + \ d_n(u) = d_1(n)$$

پس از یافتن یال های مورد نظر، سایر یال های گراف که در کوتاهترین مسیرهای بین رئوس 1 و n حضور ندارند را حذف میکنیم. سپس، با استفاده از الگوریتم ford-fulkerson مینیمم کات این گراف را به دست می آوریم. در نهایت، با حذف تمام یال های این کات، با کمترین هزینه به پاسخ مورد نظر دست می یابیم.