



## به نام خداوند بخشنده مهربان

تحلیل و طراحی الگوریتم ها، نیم سال اول سال تحصیلی ۹۸-۹۷

تمرین پنجم

امیر محمد کریمی

۱۸ آذر ۱۳۹۷

- اگر از الگوریتم هایی که در کلاس بحث شده است استفاده میکنید، لازم نیست درستی آنها را اثبات کنید.
- سعی کنید الگوریتم با کمترین پیچیدگی زمانی را بدست آورید.

۱. فرض کنید شما به همراه دوستان و  $n - 2$  نفر دیگر در خوابگاهی در نزدیکی دانشگاه زندگی می کنید. قرار است در  $n$  شب پیش رو، هر شب یکی از شما برای سایرین آشپزی کند به طوری که در مجموع  $n$  شب، هر فرد دقیقاً یکبار آشپزی کرده باشد. ممکن است هر یک از افراد در برخی از شب ها به دلیل داشتن مشکلاتی مانند امتحان، رفتن به کنسرت و غیره امکان آشپزی نداشته باشند، بنابراین برنامه ریزی برای آشپزی افراد در طی شب های آتی امری پیچیده و چالش برانگیز خواهد بود. فرض کنید افراد یکم تا  $n$  ام را به ترتیب با  $p_1$  تا  $p_n$  و شب های یکم تا  $n$  ام را به ترتیب با  $d_1$  تا  $d_n$  نشان می دهیم. به علاوه، برای فرد  $i$ ام ( $p_i$ ) مجموعه ای از شب ها به صورت  $S_i \subset \{d_1, \dots, d_n\}$  تعریف شده است که وی امکان آشپزی در آن شب ها را ندارد. بر اساس توضیحات فوق، یک برنامه ریزی قابل قبول برای آشپزی به صورتی است که در آن هر فرد دقیقاً یکبار در  $n$  شب آشپزی کند و در هر شب فردی برای آشپزی وجود داشته باشد. با ساختن گرافی دو بخشی، یک برنامه ریزی قابل قبول با شرایط فوق ارائه دهید.

۲. شبکه جریانی را بین ۲ راس  $s$  و  $t$  در نظر بگیرید که در آن ظرفیت هر یال برابر ۱ میباشد و ماکزیمم جریان در آن  $f$  است. الگوریتمی چندجمله ای ارائه دهید که  $k$  یال از این گراف حذف کند به طوری که تا حد ممکن ماکزیمم جریان این شبکه کاهش یابد. به عبارتی دیگر، مجموعه ای از  $k$  یال را بیابید به گونه ای که با حذف کردن یال های این مجموعه، ماکزیمم جریان این شبکه به کمترین مقدار ممکن پس از حذف  $k$  یال برسد.

۳. به ازای هر گراف بدون جهت  $G$  و یک عدد طبیعی  $k$ ، رابطه  $A$  بر روی هر دو راس دلخواه  $u$  و  $v$  بدین صورت تعریف میشود: به ازای هر  $u$  و  $v$ ، رابطه  $A$  برای  $(u, v)$  برقرار است اگر  $k$  مسیر متمایز بین  $u$  و

$v$  موجود باشد. آیا رابطه  $A$  خاصیت تراگذاری را داراست؟ یعنی اگر  $u A v$  و  $v A w$ ، آیا  $u A w$  برقرار است؟ اثبات کنید یا مثال نقض بزنید.

۴. یک سازمان که در حوزه آب و هوا فعالیت میکند، قصد دارد ویژگی های آب و هوایی یک شهر را اندازه گیری کند. مجموعه ویژگی های آب و هوایی این شهر  $C$  میباشد که تعداد اعضای آن برابر  $n$  است  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ . برای این کار، این شرکت از  $m$  بالن مختلف  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  استفاده میکند. هر بالن میتواند تعدادی از  $n$  ویژگی آب و هوایی شهر مورد نظر را اندازه گیری کند؛ به عبارت دیگر، بالن  $b_i$  میتواند مجموعه ویژگی های  $C_i$  را اندازه گیری کند که  $C_i$  زیرمجموعه ای از  $C$  میباشد. این سازمان قصد دارد به گونه ای برنامه ریزی کند که:

الف) هر بالن حداکثر 2 تا از شرایط را اندازه گیری کند. به عبارت دیگر، هر یک از  $b_i$  ها حداکثر 2 تا از  $c_i$  ها را انتخاب کند.

ب) هر یک از شرایط آب و هوایی با استفاده از دقیقاً  $k$  بالن اندازه گیری شود.

حال الگوریتمی ارائه دهید که در صورت امکان برنامه ریزی مورد نظر این سازمان را انجام دهد به طوری که همه شرایط گفته شده برآورده شوند.

۵. مسئله قبل را در نظر بگیرید. فرض کنید هر یک از بالن ها توسط یکی از 3 شرکت  $M_1, M_2, M_3$  ساخته شده اند. حال با اضافه شدن شرط زیر به شروط مسئله قبل، الگوریتمی برای برنامه ریزی این سازمان ارائه دهید:

به ازای هر  $i, C_i$  نباید توسط بالن هایی اندازه گیری شود که همگی توسط یک شرکت ساخته شده اند. به عبارت دیگر، در اندازه گیری یک  $C_i$  باید بالن هایی استفاده شوند که همگی ساخته شده توسط یک شرکت خاص نباشند.

۶. وحید قصد دارد تا یک شیرینی پزی در شهر افتتاح کند. برای او، درخواست پخت  $n$  شیرینی آمده است که هر کدام از آنها نیاز به مواد اولیه مشخص و همچنین قیمت فروش  $(p_i)$  برای سفارش  $i$  ام) مشخصی دارد. برای پختن کیک  $C_i$ ، او به تعداد مشخصی از مواد اولیه نیاز دارد. در کل،  $m$  ماده اولیه داریم که برای خرید ماده  $i$  ام، به میزان  $h_i$  باید هزینه کند. (پس از خرید یک ماده اولیه، به میزان نامحدودی از آن دسترسی خواهد داشت) او باید تصمیم بگیرد که به گونه ای سفارش ها را انجام دهد (یا انجام ندهد) که درآمدش بیشینه شود. درآمد آن، برابر است با میزان قیمت کیک هایی که پخته است منهای هزینه ای که برای خرید مواد اولیه آنها پرداخته است. با استفاده از الگوریتمی چندجمله ای، بیشینه درآمد ممکن را به دست آورید.