



بسم الله الرحمن الرحيم



طراحی الگوریتم - بهار ۱۴۰۰
NP

تاریخ تحویل : یکشنبه (۱۴۰۰/۰۳/۳۰)

امیرحسین عباسکوهی

نکته: در مسائل NP-complete باید حتماً دو بخش را اثبات کنید. اول اینکه مسئله داده شده NP است. سپس ثابت کنید مسئله NP-complete شناخته شده ای با پیچیدگی زمانی چند جمله ای وجود دارد که می توان به مسئله داده شده کاهش داد.

۱. درباره مسائل NP به سوالات زیر پاسخ دهید. (۱۰ نمره)

- تعریفی از مسائل NP ارائه دهید.
- تعریفی برای مسائل NP-Hard ارائه دهید.
- تعریفی برای مسائل NP-Complete ارائه دهید.
- چرا از reduction در حل مسائل NP-Complete استفاده می شود؟

۲. درستی یا نادرستی عبارت های زیر مشخص کنید و دلیل خود را در این باره ذکر کنید. (۱۰ نمره)

(آ) اگر $X \leq_P Y$ و $Y \leq_P Z$ آنگاه $X \leq_P Z$

(ب) اگر $X \leq_P Y$ و Y یک مسئله NP-hard باشد آنگاه X نیز NP-hard می باشد.

(ج) فرض کنید X یک مسئله در کلاس NP باشد و $P \neq NP$ آنگاه X نمی تواند در زمان چند جمله ای حل شود.

(د) اگر یک مسئله NP-complete در زمان خطی حل شود، تمامی مسائل NP-complete را می توان در زمان خطی حل کرد.

۳. در مسئله پیدا کردن Clique (در این مسئله به دنبال زیر مجموعه ای شامل K رأس هستیم که آن رؤس همگی با هم مجاور اند یعنی دو به دو به هم یال دارند)، طبیعی است که به دنبال رأس های با درجه بالا بگردیم. فرض کنید میخواهیم بررسی کنیم که آیا گراف داده شده دارای یک Clique با درجه پایین هست یا نه (به طور مشخص کوچکتر یا مساوی میانه درجه رؤس کل گراف). در اینجا میخواهیم نشان دهیم این مسئله هم NP-complete می باشد. (۲۵ نمره)

کلیک درجه پایین (Low-Degree Clique): گراف $G = (V, E)$ و عدد صحیح k به ما داده شده است. آیا گراف G کلیکی به اندازه k شامل رؤسی که درجه آن ها بزرگتر از میانه درجه رؤس کل گراف نباشد، دارد؟

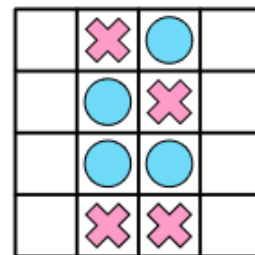
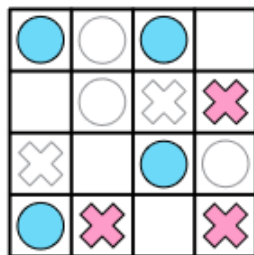
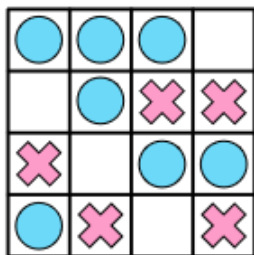
۴. جدولی با ابعاد $n \times m$ از مربع های واحد داریم که هر کدام از این مربع ها می تواند خالی، دارای X یا دارای O باشد. هدف این است تا با حذف برخی از X یا O ها جدول را به شکلی در آوریم که دارای دو شرط زیر باشد:

اول- هر ردیف حداقل دارای یکی از علامت های X یا O باشد.

دوم- هیچ ستونی دارای هر دو علامت نباشد.

قطعا برای برخی حالات نمی توان شرایط بالا را به دست آورد.

ثابت کنید فهمیدن اینکه برای یک جدول اولیه فهمیدن اینکه می توان به جدول با شرایط ذکر شده رسید یا خیر یک مسئله NP-hard می باشد. (۲۰ نمره)



A solvable puzzle and one of its many solutions.

An unsolvable puzzle.

۵. در مسئله دسته بندی، به ما مجموعه $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ داده شده است که a_i در این مجموعه یک عدد صحیح می باشد. از ما خواسته شده است که آیا $B \subseteq A$ ای وجود دارد که در آن $\sum_{a_i \in B} a_i = \sum_{a_i \in A/B} a_i$. نشان دهید که مسئله دسته بندی $NP - complete$ می باشد. (۲۰ نمره)

۶. در مورد الگوریتم های تقریبی (approximation) جستجو کنید و آن را توضیح دهید. سپس یکی از الگوریتم های تقریبی معروف علوم کامپیوتر را بنویسید. (۱۵ نمره)