به نام خدایی که قدرتش در بدیهی ترین ذرات هستی بی‌کران هویداست

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
طراحی الگوریتم ها ـ استاد دوستی

ترم بهار ۱۴۰۱

پاسخ تمرین ششم

طراح: مجید دلیری، $majiddl.2099@gmail.com$

---

۱. (۲۰ نمره)

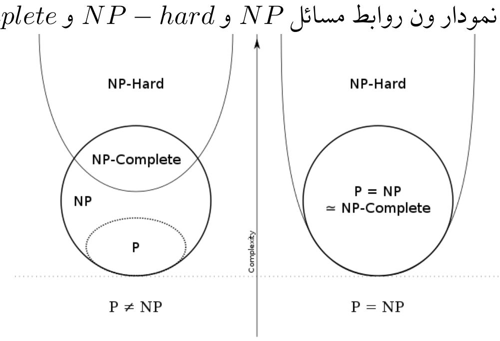
(آ) کلاس چندجمله ای را تعریف کنید.
دسته مسایلی می‌باشد که اگردر زمان چندجمله ای از ورودی اصلی مساله حل می‌شوند.

(ب) کاهش چند جمله ای را تعریف نمایید.
هرگاه مساله A را به مساله B کاهش چندجمله ای می‌دهیم به این معناست که نشان دهیم مساله A سخت‌تر از B نیست و به این معناست که اگر الگوریتمی چندجمله ای برای B باشد آنگاه الگوریتم چندجمله‌ای برای A نیز می‌باشد.

(ج) مسائل $NP - hard$ را تعریف کنید و وجه تمایز آنها با مسائل NP شرح دهید.
دسته مسائلی می‌باشند که بتوان همه مسائل NP را به آنها کاهش داد. به اصطلاح می‌گوییم که تمامی مسائل $NP - hard$ سخت تر از مسائل NP می‌باشند. وجه تمایز آنها می‌توان به عموماً عدم نیاز به $checker$ داشتن در این مسائل اشاره کرد. نقطه اشتراک آنها با مسائل NP به اصطلاح $NP - complete$ می‌گویند.

(د) کلاس مسائل $NP - Complete$ را نیز تعریف نمایید.
مسائل کلاس $NP - hard$ که در کلاس NP می باشند را مسائل $NP - complete$ می‌گویند.

(ه) نمودار ون روابط مسائل NP و $NP - hard$ و $NP - Complete$ را به صورت گرافیکی بکشید.



۲. (۲۰ نمره) درستی یا نادرستی هر یک از مسائل زیر را بررسی کنید.

(آ) اگر اثبات شود که یکی از مسائل $NP - Complete$ درون P قرار می گیرد تمامی مسائل NP نیز درون P قرار میگیرند.
بله درست چرا که به این معناست که سخترین مساله NP را می‌توان در زمان چندجمله حل کرد پس کل آن را نیز می‌توان در چندجمله ای حل نمود.

(ب) اگر مساله ای در کلاس NP باشد و بتوانیم مساله از کلاس $NP - Complete$ را به آن کاهش دهیم. آنگاه آن مساله $NP - Complete$ می باشد.
بله درست می‌باشد چراکه به این معناست که مساله مذکور از سخت ترین مساله NP سخت‌تر است و چون خود مساله نیز NP است، لذا درون $NP - complete$ قرار می‌گیرد.

(ج) تمامی مسائل $NP - hard$ قابل کاهش به مسائل $NP - Complete$ می باشند.
غلط است. عکس رابطه صحیح می‌باشد اما برعکس آن صحیح نیست الزاماً و همانطور که در نمودار های ون بالا می‌بینید دو کلاس تماما متفاوت می‌باشند.

(د) اگر یک مساله NP در زمان چندجمله ای حل شود تمامی مسائل NP نیز در زمان چندجمله حل میشود.
غلط است چرا که کلاس مساله NP شامل مسائل P می‌باشد و چنین چیزی صحیح نیست.

(ه) اگر یک مساله $NP-hard$ در زمان چندجمله ای حل شود تمامی مسائل $NP-Complete$ نیز در زمان چندجمله حل میشود.
درست است همانطور که بیان شد کلاس $NP-hard$ به معنای کلاس تمامی مسائلی که از NP و همچنین $NP-complete$ سخت تر است لذا در صورت حل شد یکی از مسائل آن تمامی $NP-complete$ نیز در چندجمله ای حل می‌شود.

۳. (۱۵ نمره) ثابت کنید مساله زیر در کلاس $NP-hard$ قرار میگیرد. گراف ساده G و عدد k داده شده است. آیا زیر مجموعه ای از رئوس گراف مانند V یافت میشود که اندازه آن k باشد و درون آن هیچ مثلثی ظاهر نشود. (مثلث به معنای سه تایی هایی از رئوس گراف می باشد که هر دوتای آنها به همدیگر متصل می باشند).
راهنمایی: مساله $Independent-set$ را به مساله مذبور کاهش دهید.

فرض کنید مساله $independent-set$ به ما داده شده است یعنی گراف G و عدد k داده شده است و پرسیده است که آیا مجموعه مستقل دارای k راس داریم یا خیر. گراف G' را به این صورت می‌سازیم که به گراف G تعداد $n-k+1$ راس جدید اضافه می‌کنیم که از تمامی این رئوس به تمامی رئوس G یالی وصل می‌کنیم. حال ادعا می‌کنیم که وجود مجموعه خالی از مثلث به اندازه $n+1$ درون G' معادل یافتن مجموعه ای مستقل به اندازه k درون G می‌باشد. برای اینکار پر واضح است که درون این $n-k+1$ راس مثلثی نیست. در صورتی که $n+1$ راس خالی از مثلث درون G' آمده باشد لذا به این معنا است که حداقل یکی از این رئوس جدید در آن ظاهر شده است لذا با در نظر گرفتن آن راس، واضح است اگر راسی از G درون آن مجموعه خالی از مثلث آمده باشد هیچ یالی به سایر رئوس مانند خود ندارد چرا که در این صورت مثلث خواهیم داشت. با توجه به این موضوع تمامی رئوس آمده از G تشکیل یک مجموعه مستقل می‌دهند و چون حداقل k راس از G امده است، مجموعه مستقلی به اندازه حداقل k خواهیم داشت.

۴. (۱۵ نمره) یک گراف دلخواه غیر ساده وزن دار داریم. میخواهیم بررسی کنیم که گشتی بسته به طول k از یک راس خاص وجود دارد یا خیر. ثابت کنید مساله تعریف شده $NP-Complete$ می باشد.
راهنمایی : راهنمایی: مساله $subset-sum$ را به مساله مذبور کاهش دهید.

چک کردن اینکه گشت وجود دارد یا خیر بسیار ساده است و با یک بازدید ساده از مسیر می‌توان آن را در زمان چندجمله ای چک کرد لذا کلاس مساله NP می‌باشد. فرض کنید مجموعه ای از عناصر و عدد s داده شده است و از ما می‌خواهد که آیا می‌توان زیرمجموعه از آن انتخاب کرد که مجموع عناصر زیرمجموعه برابر s شود. گرافی می‌سازیم که دارای یک راس می‌باشد و به ازای هر عنصر از مجموعه یک طوقه به طول آن عضو مجموعه اضافه می‌کنیم. حال در صورتی به سوال داشتن گشتی بسته به طول s پاسخ بدهیم در این صورت می‌توان با انتخاب عناصر داده شده و دور هایی که انجام گرفته است مجموعه مورد نظر را بیابیم.

۵. (۱۵ نمره) یک ماتریس دو بعدی باینری (درایه های صفر و یک) مربعی با اندازه n داده شده است. میخواهیم بردار باینری X را بیابیم به گونه ای که $AX=1$ گردد. (یک برداری از یک ها میباشد)
اثبات کنید مساله فوق در کلاس $NP-Complete$ قرار میگیرد.
راهنمایی: با استفاده از مساله $SAT-3$ و کاهش آن به مساله مذبور.

چک کردن درست بودن راه حل در پیچیدگی زمانی ضرب ماتریس ها انجام می‌شود که لذا چندجمله ای می‌باشد و لذا می‌توان مساله در کلاس NP قرار می‌گیرد. برای کاهش از $SAT-3$ استفاده می‌کنیم کافی است که مساله $SAT-3$ را در نظر بگیریم. اگر تعداد جملات آن را m در نظر بگیرید و تعداد متغیر های آن را n در نظر بگیرید. ماتریسی به سایز $m\cdot n$ می‌سازیم. یعنی به عبارتی دارای m سطر و دارای n ستون. در سطر i ام آن در ستون های j آن را یک می‌کنیم در صورتی که متغیر j ام در جمله i ام ظاهر شده باشد. در نهایت در صورت یافتن X که $AX=1$ را تایید کند، آنگاه آن نیز تمامی شرایط $SAT-3$ را تایید می کند و پاسخی برای مساله $SAT-3$ می‌باشد.

۶. (۱۵ نمره) ثابت کنید مسئله زیر در کلاس پیچیدگی $NP-Complete$ قرار دارد. در ابتدا ثابت کنید این مسئله در کلاس پیچیدگی NP قرار دارد و پس از آن مسئله $vertex-cover$ را به آن کاهش دهید.
گراف G و عدد k داده شده اند. آیا می‌توان با حذف حداکثر k راس از گراف G آن را خالی از دور کرد.

چک کردن درست بودن پاسخ وارده بسیار ساده است کافی است رئوس بیان شده جهت حذف را حذف کرده و در نهایت با اجرای الگوریتم dfs در صورتی که از نوع یال های $backedge$ درون درخت dfs موجود نبود گراف خالی از دور خواهد بود. مساله $vertex-cover$ را در نظر بگیرید. گراف G به همراه عدد k داده شده است و از شما می‌خواهد بررسی کنید که آیا مجموعه ای از k راس موجود است که تمامی یال های گراف از این ها بگذرد یا خیر. گراف جهتدار G' را به این صورت می‌سازیم که به تعداد رئوس G راس درون آن قرار می‌دهیم همچنین به ازای هر یال درون G مابین راس های u, v دو یال جهت دار از u به v و برعکس آن را قرار می‌دهیم. در صورتی که بتوان با حذف k راس از G' آن را خالی از دور کرد لذا هر دو راسی که به یکدیگر متصل بوده اند حداقل یکی از آنها حذف شده است که معادل همان $vertex-cover$ در گراف G می‌باشد.