



به نام خدا

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران

طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها، نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۹۶-۹۷

تمرین شماره ۳ (الگوریتم‌های حریصانه) موعد تحویل: ۹۷/۱/۱۶



\* در هر سوال درستی راه‌حل‌تان را نشان دهید.

۱.  $n$  آدم و  $n$  صندلی روی یک خط قرار دارند. می‌خواهیم هر آدم را روی یک صندلی بنشانیم. هر آدم در مکان  $x$  برای نشستن روی صندلی در مکان  $x'$  باید به اندازه‌ی  $|x' - x|$  مسافت طی کند. مکان صندلی‌ها و آدم‌ها را داریم. با پیچیدگی زمانی  $O(n \log n)$  برای هر نفر یک صندلی تعیین کنید به طوری که میانگین فاصله‌ی طی شده توسط آدم‌ها کمترین مقدار ممکن شود. اگر بخواهیم که بیشترین فاصله‌ی طی شده توسط آدم‌ها کمترین مقدار ممکن شود چه تفاوتی ایجاد می‌شود؟

۲. یک گراف جهت دار و دو راس  $s$  و  $t$  در آن داده شده است. می‌خواهیم تعدادی یال را برعکس کنیم (یعنی یال  $(u, v)$  را بکنیم  $(v, u)$ ) که حداقل یک مسیر از  $s$  به  $t$  در گراف حاصل وجود داشته باشد. الگوریتمی ارائه دهید که حداقل تعداد یال‌هایی که باید برعکس شوند را پیدا کند. پیچیدگی الگوریتم خود را حساب کنید.

۳. تعدادی خوراکی در یک صفحه داریم. خوراکی  $i$ ام در مکان  $(x_i, y_i)$  قرار دارد. فرض کنید مکان  $x$  همه‌ی خوراکی‌ها با هم متفاوت است. یک مورچه می‌خواهد با شروع از چپ‌ترین خوراکی، تمام خوراکی‌ها را بخورد و به مکان خوراکی اول بازگردد. به این شرط که در مسیری که طی می‌کند اول در تمام حرکت‌های خود به سمت راست حرکت کند (اگر از خوراکی  $i$  به خوراکی  $j$  رفته است، داشته باشیم  $x_j > x_i$ ) تا به راست‌ترین خوراکی برسد و سپس در هر تمام حرکت‌هایش به سمت چپ حرکت کند تا به مکان خوراکی اول برسد. (مورچه برای رفتن از هر خوراکی به خوراکی دیگر خط مستقیم را طی می‌کند). به این مورچه الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n^2)$  برای خوردن خوراکی‌ها ارائه دهید که با طی کردن کمترین مسافت به هدف خود برسد.

۴. فرض کنید  $n$  تا پروژه باید تحویل دهید که همگی در اولین روز بهتان داده می‌شود. انجام پروژه‌ی  $i$ ام  $d_i$  روز زمان لازم دارد. ترتیبی برای انجام پروژه‌هایتان پیدا کنید که میانگین زمانی که صاحبان پروژه منتظر بوده‌اند که پروژه‌شان را انجام دهید، کمترین حالت ممکن شود. پیچیدگی الگوریتم خود را محاسبه کنید.  
حالا با فرض این که پروژه‌ی  $i$ ام در روز  $s_i$  به شما داده خواهد شد و شما قبل از آن روز قادر به انجام آن نیستید، سوال را جواب دهید. (فرض کنید می‌توانید یک پروژه را نصفه رها کنید و سراغ پروژه‌ی دیگری بروید).  
میانگین زمانی که صاحبان پروژه منتظر بوده‌اند برابر است با:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (f_i - s_i)}{n}$$

( $f_i$  روزی است که پروژه‌ی  $i$ ام را تحویل می‌دهید و  $s_i$  روزی که پروژه را می‌گیرید که در بخش اول برای همه‌ی پروژه‌ها یک است).

۵. رومینا در یک مسابقه شرکت کرده است. در این مسابقه شرکت‌کننده یک دقیقه وقت دارد که با استفاده از چهار دکمه‌ی **A**, **paste**, **copy** و **select-all** روی کیبورد، به بیشترین تعدادی که می‌تواند **A** روی صفحه چاپ کند. رومینا می‌داند در یک دقیقه قادر است  $n$  دکمه کلیک کند. یک الگوریتم با پیچیدگی زمانی  $O(n^2)$  به رومینا بدهید که بیشترین **A** بی را که می‌تواند در مسابقه روی صفحه چاپ کند پیدا کند.

۶. یک آرایه به طول  $n$  داریم. در هر خانه از آرایه یا یک پلیس وجود دارد یا یک دزد. هر پلیس می‌تواند حداکثر یک دزد را که در خانه‌ای با فاصله‌ی کمتر از  $k$  از او قرار دارد دستگیر کند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n)$  ارائه دهید که حساب کند بیشترین تعداد دزدی که می‌توانیم دستگیر کنیم چه قدر است.

۷. می‌خواهیم یک متن با  $n$  کلمه را برای چاپ حروفچینی کنیم. کلمه‌ی  $i$ ام متن،  $l_i$  حرف دارد و هر دو کلمه‌ی متوالی با یک فاصله از هم جدا می‌شوند. هر کلمه باید کاملاً در یک سطر باشد. هر سطر گنجایش  $k$  حرف را دارد. الگوریتمی ارائه دهید که زیباترین نحوه‌ی حروفچینی را پیدا کنیم.

آ) اگر در زیباترین نحوه‌ی حروفچینی مقدار  $r_i$ ،  $\sum_{i=1}^m$  کمترین مقدار ممکن باشد. (  $m$  تعداد خطوط و  $r_i$  فضای خالی در آخر خط  $i$ ام است (با واحد حرف) ).

ب) اگر در زیباترین نحوه‌ی حروفچینی مقدار  $\sum_{i=1}^m r_i^2$  کمترین مقدار ممکن باشد.

پیچیدگی زمانی الگوریتم‌هایتان  $O(n^2)$  باشد.