



## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

راه حل تمرین کتبی سوم

۱. برای حل مساله در ابتدا کارمندان را بر اساس امتیازشان مرتب می‌کنیم و در صف دیگری قرار می‌دهیم. جواب اولیه  $-\infty$  - برای همه کارمندان در نظر می‌گیریم حال به ترتیب هر کدام از آن‌ها را در نظر گرفته و با توجه به شرایطی که در صف اول دارند به آن‌ها پاداش می‌دهیم به بیان بهتر باید به هر کارمند در این مرحله یکی بیشتر از maximum پاداش کارمندان مجاورش پاداش بدهیم در این صورت شرایط مساله را رعایت کرده‌ایم و هر کارمند از کارمندان مجاورش پاداش بیشتری گرفته و همینطور کمینه پاداش را به همه کارمندان داده‌ایم. برای اثبات درستی این راه حل راه دیگری را در نظر بگیرید که در آن جمع پاداشی که به کارمندان داده شده در آن کمتر است. به طور دلخواه فرض می‌کنیم عنصر  $i$  در آن پاداش کمتری از عنصر  $i$  در راه حل پیشنهادی ما گرفته است. حال با توجه به شرایط مساله داریم که این عنصر از عناصر مجاورش پاداش کمتری گرفته، با توجه به شیوه پاداش دادن ما به کارمندان داشتیم که هر کارمند بعد از کارمندان با امتیاز کمتر از خود پاداش می‌گرفت پس به کمترین میزان ممکن پاداش می‌گرفت تا تنها شرایط مساله نقض نشود پس کمترین پاداش را گرفته بود در صورتی که ما فرض کردیم راه حال بهتری وجود دارد که با نتیجه بدست آمده تناقض دارد پس اثبات میشود راه حل پیشنهادی ما بهینه‌ترین راه حل ممکن است.

۲. نقاط را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم و در هر مرحله یک بازه به طول واحد با شروع از نقطه‌ای که بین نقاط پوشش داده نشده کمترین  $x$  را دارد اضافه می‌کنیم. انجام این کار در زمان خواسته شده ساده است، در زمان  $O(n \log n)$  نقاط را مرتب می‌کنیم. با شروع از نقطه با کمترین  $x$  بازه‌ها را اضافه می‌کنیم و پس از اضافه کردن هر بازه، تا جایی که نقاط توسط این بازه پوشش داده شده‌اند جلو می‌رویم و به همین صورت تا انتها پیش می‌رویم. برای اثبات اینکه این روش بهینه است به این شکل عمل می‌کنیم: هر پاسخ به این مساله را با یک دنباله صعودی از اعداد مشخص می‌کنیم که هر عدد نقطه شروع یک بازه به طول واحد است. فرض کنید پاسخ تولید شده توسط الگوریتم با دنباله  $S$  نشان داده شود. فرض می‌کنیم که این پاسخ بهینه نیست. شبیه‌ترین پاسخ بهینه به  $S$  را  $S'$  می‌نامیم که اولین المانی که در آن  $S$  و  $S'$  با هم تفاوت دارند بیشترین اندیس را داشته باشد. این نقطه تفاوت را در نظر می‌گیریم که در  $S$  مقدار  $a$  و در  $S'$  مقدار  $a'$  وجود دارد. با توجه به نحوه عملکرد الگوریتم  $a'$  نمی‌تواند بیشتر از  $a$  باشد چرا که در این صورت  $S'$  حداقل یک نقطه را پوشش نداده است. پس داریم  $a' < a$  اما در این صورت اگر  $a'$  را با  $a$  در  $S'$  جایگزین کنیم باز هم یک جواب درست داریم که تعداد بازه‌های استفاده شده در آن با  $S'$  مساوی است چرا که با توجه به عملکرد الگوریتم بین  $S$  و  $a'$  نمی‌تواند نقطه‌ای وجود داشته باشد و در نتیجه یک پاسخ بهینه است اما به  $S$  شبیه تر است. این یک تناقض است پس  $S$  یک پاسخ بهینه بوده.

۳. فرض کنید که این متن را در  $m$  خط حروف چینی کرده‌ایم. این  $m$  خط کلاً گنجایش  $mk$  حرف را دارند. از این تعداد  $\sum_{i=1}^n l_i$  حرف برای نوشتن کلمات استفاده شده. همینطور  $\sum_{i=1}^m r_i$  مقدار هزینه است.

این مقدار ربطی به نحوه چیدن ما ندارد پس هدف در اینجا کم کردن تعداد خطوط خروجی است و همینطور کمترین هزینه برای خط آخر است. این گونه عمل می‌کنیم: هر خط را تا جای ممکن پر می‌کنیم و سپس به خط بعدی می‌رویم. حال برای اثبات اینکه این الگوریتم هزینه را کمینه می‌کند داریم:

هر جواب را با دنباله  $S$  نشان می‌دهیم که دارای  $n$  عنصر است و عنصر  $i$  آن نشان دهند خطی است که کلمه  $i$  روی آن قرار گرفته است. فرض کنید  $S$  پاسخ الگوریتم باشد و  $S$  جواب مساله نباشد. شبیه‌ترین جواب به آن را در نظر می‌گیریم که اولین تفاوت آن با  $S$  بیشترین اندیس را داشته باشد و آن را  $S'$  می‌نامیم. این اولین تفاوت را در نظر می‌گیریم. فرض کنید در اندیس  $i$  رخ داده باشد. با توجه به نحوه

کار الگوریتم میدانیم که  $S'_i > S_i$ . حال جواب  $S''$  را شبیه  $S$  در نظر میگیریم با این تفاوت که کلمه  $i$  را در خط  $S'_i$  گذشته ایم چرا که گنجایش آن را داشته. علاوه بر این  $S''$  نه تعداد خطوط بیشتر از  $S'$  و نه تعداد حرف بیشتر از  $S'$  در خط آخر دارد که این یعنی بیشتر از  $S'$  به  $S$  شبیه است که این تناقض است.

۴. ● به صورت حریصانه هنگامی که به پمپ بنزین شماره  $i$  رسیدیم، اگر به اندازه رسیدن به پمپ بنزین شماره  $i+1$  بنزین در باک داشتیم در این پمپ نمی‌ایستیم و تا پمپ بعدی می‌رویم اما اگر مقدار بنزین در باکمان کافی نبود به ناچار در پمپ  $i$  ایستاده باک را پر می‌کنیم. برای اثبات اینکه این روش بهینه است به این شکل عمل می‌کنیم. پاسخی که الگوریتم خروجی میدهد را  $S$  بگیرید و فرض کنید  $S$  بهینه نباشد. از بین پاسخ‌های بهینه، نزدیک‌ترین پاسخ به  $S$  را بر میگزینیم و آن را  $S'$  می‌نامیم (نزدیکی دو پاسخ را بزرگ‌ترین  $i$  ای میگیریم که هر دو پاسخ تا رسیدن به پمپ بنزین  $i$  در ایستادن یا نایستادن، همانند هم رفتار کرده باشند) فرض کنید  $S$  و  $S'$  تا پمپ  $k-1$  همانند هم رفتار کرده‌اند و در پمپ  $k$  رفتار گوناگونی دارند در این صورت باید  $S$  در پمپ  $k$  توقف نکرده اما  $S'$  توقف کرده باشد. در این صورت پاسخ مانند  $S'$  را در نظر بگیرید که در پمپ  $k$  نمی‌ایستاد و در  $k+1$  سوخت‌گیری می‌کند از آنجا به بعد نیز مانند پاسخ بهینه رفتار می‌کند شمار ایستادن‌های  $S'$  با  $S$  برابر است اما به  $S$  نزدیک‌تر است و این خلاف فرض ما بود.

● اینجا نیز یک روش حریصانه ارائه می‌دهیم. فرض کنید در پمپ بنزین  $i$  ایستاده ایم دقیقاً به میزانی بنزین می‌زنیم که به همراه بنزین باقی‌مانده در باک به نخستین پمپ بنزینی برسیم که قیمت بنزین آن ارزان‌تر است و به آن پمپ می‌رویم. اگر با یک باک پر به چنین پمپ بنزینی نمی‌رسیم، باک را پر می‌کنیم و به پمپ بنزین بعدی می‌رویم. در آنجا همین کار را تکرار می‌کنیم. برای اثبات اینکه این روش میزان پول مصرفی را کمینه می‌کند به این شکل عمل می‌کنیم: پاسخی که الگوریتم می‌دهد را  $S$  بگیرید و فرض کنید  $S$  بهینه نباشد از بین پاسخ‌های بهینه، نزدیک‌ترین به  $S$  را بر میگزینیم و آن را  $S'$  می‌نامیم. نخستین جایی که در نظر بگیرید را  $S$  مانند  $S'$  رفتار نمی‌کند. دو حالت زیر ممکن است رخ دهد:

– اگر در حالتی که باک را کامل پر کرده چون نمی‌توانسته با یک باک پر به یک پمپ بنزین با قیمت پایین‌تر برسد. در این صورت  $S'$  میزان کمتری بنزین زده‌است. چون با این میزان بنزین قطعاً مجبور به بنزین زدن در جای گران‌تر است  $S'$  را می‌توان با پر کردن باک در این مرحله بهتر کرد که تناقض است.

– اگر  $S$  در حالتی باشد که دقیقاً به میزانی بنزین زده شده که به نخستین پمپ بنزین ارزان‌تر برسیم: اگر  $S'$  میزان کمتری بنزین زده باشد، قطعاً در یک پمپ بنزین با قیمت بالاتر توقف کرده و بنزین زده که می‌توان با جایگزینی  $S'$  را بهتر کرد. اگر  $S'$  میزان بیشتری بنزین زده باشد. میزان اضافه را می‌توان در پمپ بنزینی با قیمت پایین‌تر زد و این هم تناقض است.

۵. پروژه‌ای که کمترین تعداد روز نیاز دارد را اول انجام می‌دهیم و در روزی که پروژه تمام شود یک سری پروژه داریم که تعدادی روز زمان لازم دارند. پس ادامه مساله مانند حالت ابتدایی است.

برای اثبات فرض کنید راه حل  $S$  وجود دارد که پروژه  $i$  را اول انجام داده، پس از روز  $1$  تا  $d_i$  این پروژه انجام شده و پروژه با کمترین روز لازم (پروژه  $1$ ) در روز  $d$  تا  $d_1 + d$  انجام شده. به راحتی قابل مشاهده است که اگر جای پروژه  $i$  و پروژه  $1$  را عوض کنیم، پروژه‌های بین این دو، زودتر تحویل داده می‌شوند و پروژه‌های بعد از پروژه  $1$  تغییری نمی‌کنند، پس راه حل بهتر می‌شود.

برای حالت بعد هم کافی است پروژه با کمترین روز مورد نیاز انتخاب شود. هر زمان که پروژه‌ای در حال انجام تمام شد یا پروژه‌ای جدیدی به ما داده شد، این انتخاب را دوباره انجام می‌دهیم. (فرض کنید که پروژه‌ای که در حال انجام آن بودیم  $d$  روز دیگر زمان لازم دارد. این پروژه مانند پروژه‌ای می‌شود که از حالا  $d$  روز زمان لازم دارد) پس در هر تصمیم یک سری پروژه داریم که هر کدام تعدادی روز زمان لازم دارند. پس مساله باقی‌مانده مانند حالت ابتدایی است. اثبات درستی این انتخاب شباهت زیادی به حالت قبل دارد.