



به نام خدا



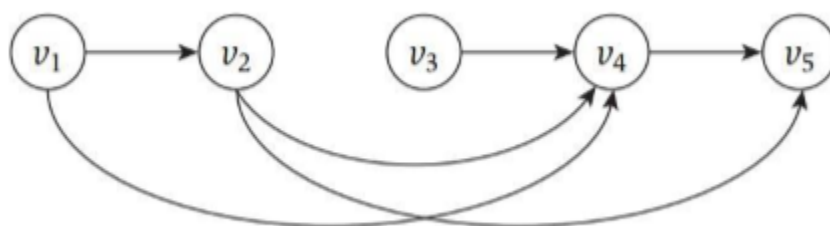
دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

طراحی و تحلیل الگوریتمها، نیمسال دوم، سال تحصیلی ۹۷-۹۸

تمرین سری دوم، مهلت تحویل: شنبه ۱۲ آبان ماه - ساعت ۹

1. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهتدار با رئوس v_1, v_2, \dots, v_n باشد. میگوییم گراف G مرتب است اگر دو شرط زیر برای آن برقرار باشد:

- هر یال در این گراف از راس با اندیس کوچکتر خارج و به راس با اندیس بزرگتر وارد شود.
- برای هر راس با اندیس کوچکتر از n ، حداقل یک یال از آن راس خارج شده باشد.



نمونه ای از یک گراف مرتب با ۵ راس

یک گراف مرتب G به عنوان ورودی به شما داده شده است. به کمک برنامه‌نویسی پویا، اندازه طولانی‌ترین مسیر بین v_1, v_2 را محاسبه کنید. $O(n + m)$

2. روی محور x ها، n نقطه داده شده است. قصد داریم با k بازه بسته تمام نقاط را بپوشانیم. (یک بازه می‌تواند به طول صفر و فقط شامل یک نقطه باشد، یا این‌که به طول بسیار بزرگ و شامل تمامی نقاط باشد.) اگر این کار را به صورتی انجام دهیم که مجموع طول بازه‌ها کمینه شود، این طول چند است؟ $O(nk)$

3. می‌خواهیم مجموعه‌ی n عدد طبیعی را به دو دسته افراز کنیم. اگر $S1$ مجموع همه‌ی عددهای دسته‌ی اول و $S2$ مجموع همه‌ی عددهای دسته‌ی دوم باشد، الگوریتمی ارائه دهید که کمترین مقدار ممکن برای $|S1 - S2|$ را محاسبه کند. $O(nk)$ (فرض کنید این n عدد در بازه 0 تا k قرار دارند)

4. در یک شرکت n نفر مشغول به کار هستند. هر شخص-به غیر از مدیر عامل- دقیقاً یک رئیس دارد. لذا درخت سازمانی شرکت را می توان به گونه ای رسم کرد که مدیر عامل در ریشه ی آن قرار دارد. به هر کارمند این شرکت یک عدد طبیعی نسبت داده شده که میزان باحال بودن آن شخص را نشان می دهد (یعنی هر چقدر این عدد بزرگتر باشد، آن شخص باحال تر است). این شرکت می خواهد یک میهمانی ترتیب دهد و برای اینکه به همه خوش بگذرد، در این مهمانی نباید هیچ کس به همراه رئیس مستقیمش دعوت شده باشد. میزان باحال بودن یک مهمانی، مجموع مقادیر شاخص باحال بودن افراد حاضر در آن مهمانی است. الگوریتمی بنویسید که بیشینه باحال بودن مهمانی های ممکن را به دست آورد. $O(n + m)$

5. یک درخت دودویی متوازن، درختی است که اختلاف ارتفاع زیر درخت سمت چپ و راست آن، حداکثر یک واحد باشد و همچنین زیر درخت سمت راست و سمت چپ آن نیز متوازن باشند. الگوریتمی ارائه دهید که تعداد درخت های دودویی متوازنی که با n گره میتوان ساخت به صورتی که دقیقاً l برگ داشته باشند را محاسبه کند. دقت کنید در صورتی که جای زیردرخت های چپ و راست یک گره را عوض کنید یک درخت متمايز حاصل می گردد. $O(n^3)$

6. تعدادی موشک انداز با ارتفاع های متفاوت در اختیار داریم. فرمانده این موشک اندازها را در یک صف خطی در امتداد شرق به غرب قرار داده و دشمن از هر دو سمت شرق و غرب در حال حمله است. اگر موشک اندازی با ارتفاع بیشتر، جلوی موشک اندازی با ارتفاع کمتر قرار گیرد موشک انداز کوتاه تر از تیررس دشمن خارج شده و در امان است. فرمانده می خواهد بداند که اگر نیروهای حمله کننده از غرب، تعداد j موشک انداز و نیروهای حمله کننده از شرق تعداد i موشک انداز را ببینند، با فرض اینکه تعداد کل موشک اندازها n باشد، چند حالت ممکن برای چینش موشک اندازها متصور میشوند. الگوریتمی برای تشخیص این تعداد حالات ارائه دهید. $O(n^3)$