به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

پاسخ تمرین کتبی ششم

طراح: سینا نادی nadi@ut.ac.ir

---

۱. به سوالات زیر پاسخ دهید.

- کلاس پیچیدگی NP را تعریف کنید.
- کاهش چندجمله ای را تعریف کنید.
- مسائل NP-Hard را تعریف کنید.
- مسائل NP-Complete را تعریف کنید.

پاسخ : به جزوه مراجعه شود.

۲. درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

- اگر یک مساله NP-Complete در زمان خطی حل شود، تمام مسائل NP-Complete را می توان در زمان خطی حل کرد.
پاسخ : نادرست است. از آنجاکه فرآیند کاهش، چندجمله ای و نه لزوما خطی است لزومی بر حل سایر مسائل NP-Complete در زمان خطی نیست.
- اگر یک مساله NP در زمان چندجمله ای حل شود، تمام مسائل NP را می توان در زمان چندجمله ای حل کرد.
پاسخ : اگر P = NP باشد گزاره مطرح شده درست است. اگر P != NP باشد گزاره مطرح شده نادرست است زیرا مساله حتما باید در کلاس NP-Complete باشد تا بتوان چنین ادعایی را مطرح کرد. (P versus NP Problem)
- اگر مساله ای در کلاس پیچیدگی NP باشد و بتوانیم مساله ای NP-Complete را به آن کاهش دهیم، آنگاه آن مساله NP-Complete است.
پاسخ : نادرست است. کاهش باید چندجمله ای باشد تا بتوان چنین ادعایی را مطرح کرد.

۳. ثابت کنید مساله زیر در کلاس پیچیدگی NP-Complete قرار می گیرد.
گراف جهتدار و وزندار G داده شده است به طوری که وزن یال های آن اعداد صحیح هستند. آیا این گراف دوری دارد که مجموع وزن یال های آن برابر صفر باشد ؟

(آ) ثابت کنید مساله مورد نظر در کلاس پیچیدگی NP قرار دارد.
پاسخ : با جمع کردن وزن یال های دور در زمان چندجمله ای، آن را با صفر مقایسه می کنیم.

(ب) مساله Subset-Sum را به مساله مورد نظر کاهش چندجمله ای دهید.
پاسخ : مجموعه A شامل n عدد صحیح را در نظر بگیرید گراف دو بخشی G شامل بخش های X و Y را به این صورت می سازیم که در بخش X به ازای هر عدد در مجموعه A یک راس متناظر در نظر می گیریم و در بخش Y نیز n راس در نظر می گیریم. حال از هر راس در X به تمام راس ها Y یالی با وزن عدد متناظرش وصل می کنیم سپس از هر راس در Y یالی به وزن صفر به تمام راس های X وصل می کنیم. می توان به سادگی بررسی کرد وجود دوری با مجموع وزن صفر در این گراف معادل وجود زیرمجموعه ای از اعداد با مجموع صفر است. دقت شود مساله وجود زیرمجموعه با مجموع صفر هم ارز وجود زیرمجموعه با مجموع دلخواه است.

۴. ثابت کنید مساله زیر در کلاس پیچیدگی NP-Complete قرار می گیرد.
گراف جهتدار G و عدد K داده شده است. آیا می توان با حذف حداکثر K راس از G آن را خالی از دور کرد ؟

(آ) ثابت کنید مساله مورد نظر در کلاس پیچیدگی NP قرار دارد.
پاسخ : ابتدا K راس داده شده را حذف می کنیم سپس الگوریتم وجود دور (Detect-Cycle) را در گراف حاصل اجرا می کنیم. هر دو مرحله فوق در زمان چندجمله ای قابل اجرا است.

(ب) مساله Vertex-Cover را با استفاده از مساله مورد نظر حل کنید. (Polynomial-Reduction)
پاسخ : فرض کنید گراف G و عدد K ورودی مساله Vertex-Cover به ما داده شده است گراف H را به این صورت می سازیم که ابتدا به ازای هر راس در G یک راس متناظر در H در نظر می گیریم سپس به ازای هر یال میان دو راس در G ، دو یال جهتدار یکی از راس اول به راس دوم و دیگری برعکس میان راس های متناظر در H در نظر میگیریم. حال به سادگی می توان بررسی کرد وجود Vertex-Cover به اندازه حداکثر K معادل وجود حداکثر K راس در H است به گونه ای که با حذف آن ها گراف حاصل خالی از دور شود.

۵. ثابت کنید مساله زیر در کلاس پیچیدگی NP-Hard قرار می گیرد.
گراف ساده G و عدد K داده شده است. آیا زیرمجموعه ای از رئوس G مانند V با اندازه K وجود دارد به گونه ای که خالی از مثلث باشد ؟ (خالی از مثلث یعنی به ازای هر سه راس متمایز از V حداکثر میان دو زوج از آن ها یالی در G وجود داشته باشد)
(راهنمایی : مساله Independent-Set را به مساله مورد نظر کاهش چندجمله ای دهید.)
پاسخ : فرض کنید گراف G و عدد K ورودی مساله Independent-Set داده شده است گراف H را به اضافه کردن n-K+۱ راس به G که n تعداد رئوس G است به این گونه می سازیم که هر کدام از این n-K+۱ راس را به تمامی رئوس G متصل می کنیم حال ادعا می کنیم وجود زیرمجموعه ای خالی از مثلث به اندازه n+۱ در H معادل وجود یک مجموعه مستقل به اندازه K در G است. ابتدا فرض کنید مجموعه مستقلی به اندازه K در G داریم. حال این مجموعه را به همراه n-K+۱ راس افزوده شده در نظر بگیرید به سادگی می توان بررسی کرد مجموعه حاصل خالی از مثلث است. از طرفی دیگر فرض کنید مجموعه ای خالی از مثلث به اندازه n+۱ در H داریم به سادگی می توان بررسی کرد حداقل K راس از این مجموعه در G قرار دارد و حداقل یک راس از این مجموعه در n-K+۱ راس افزوده شده قرار دارد. از آنجاکه این راس به تمام رئوس G متصل است پس هیچ یالی میان رئوسی از مجموعه که در G قرار دارند نباید وجود داشته باشد زیرا در غیر این صورت به همراه همان یک راس تشکیل مثلث خواهند داد که تناقض است. درنتیجه یک مجموعه مستقل به اندازه حداقل K در G داریم.

۶. ریچارد کارپ (Richard Karp) در مقاله ای نشان داد ۲۱ مساله که به Karp's ۲۱ Problems مشهور هستند، NP-Complete هستند. در مورد این مسائل تحقیق کرده و به دلخواه یکی از مسائلی که در کلاس درس و تمارین ارائه نشده است را انتخاب کرده و ثابت کنید در کلاس پیچیدگی NP-Complete قرار می گیرد.

I know NP-Complete jokes but once you've heard one you've heard them all .