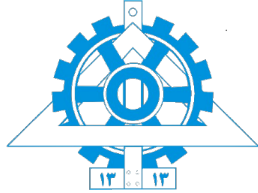


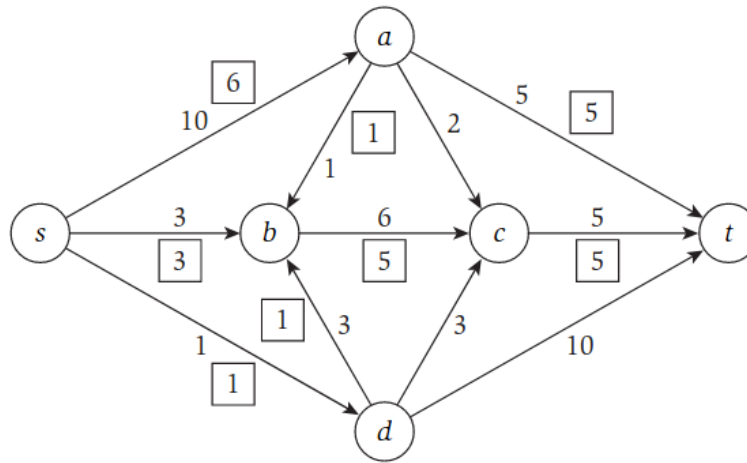
به نام خدا



## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

پاسخ تمرین کتبی پنجم  
طراح: حسنا سادات آذرمنسا، hsazarmsa@gmail.com

۱. شبکه جریان زیر را در نظر بگیرید. عددهای کنار هر یال ظرفیت یال و عددهای داخل کادر جریانی که از یال عبور می‌کند را نشان می‌دهد. (۱۵ نمره)



(آ) ابتدا بررسی کنید آیا جریان مشخص شده جریان معتبری هست یا نه. دلایل خود را بیان کنید. در صورت معتبر بودن جریان، مقدار آن را مشخص کنید. (۴ نمره)

بله این جریان معتبر است. برای بررسی اعتبار یک جریان باید شرایط feasible بودن جریان عبوری را بررسی کنیم. دو شرط برای feasible بودن جریان وجود دارد:

$$\forall e \in E : 0 \leq f_e \leq c_e \quad (1)$$

$$\forall i \neq s, t : \sum_{e \rightarrow i} f_e = \sum_{i \rightarrow e} f_e \quad (2)$$

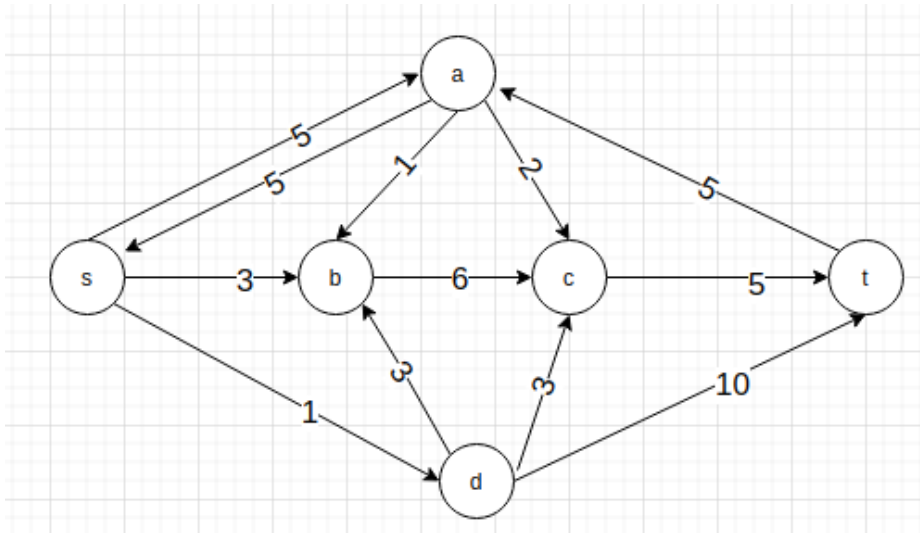
این دو شرط در شبکه جریان داده شده برقرار است پس این جریان معتبر است. مقدار این جریان از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$|f| = \sum_{s \rightarrow e} f_e - \sum_{e \rightarrow s} f_e = \sum_{e \rightarrow t} f_e - \sum_{t \rightarrow e} f_e = (6 + 3 + 1) - 0 = (5 + 5) - 0 = 10$$

(ب) آیا این جریان، جریان بیشینه است؟ ادعای خود را با کمک الگوریتم Ford-Fulkerson ثابت کنید. (در هر مرحله مسیر افزایشی و شبکه باقیمانده را رسم کنید). (۸ نمره)

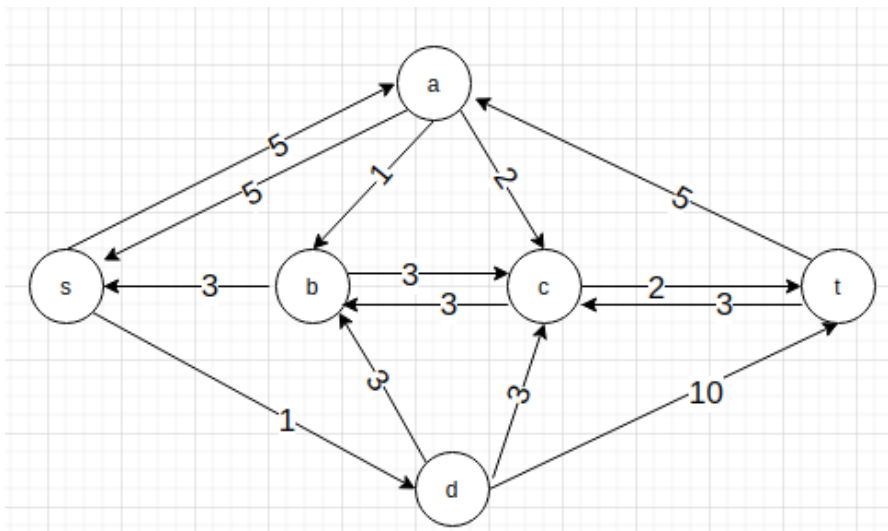
خیر. جریان بیشینه با الگوریتم Ford-Fulkerson به صورت زیر محاسبه می‌شود.  
مرحله اول:

- مسیر: s-a-t
- اندازه: ۵



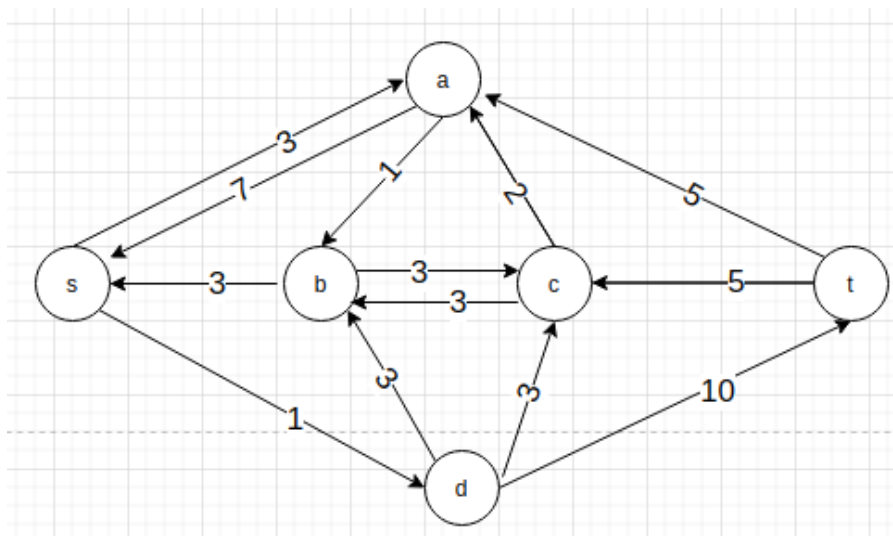
مرحله دوم:

- مسیر: s-b-c-t
- اندازه: ۳



مرحله سوم:

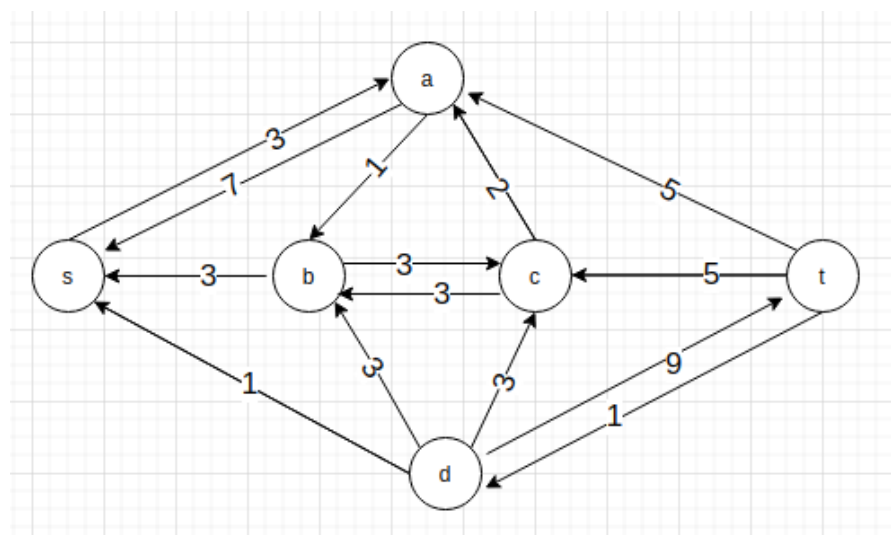
- مسیر: s-a-c-t
- اندازه: ۲



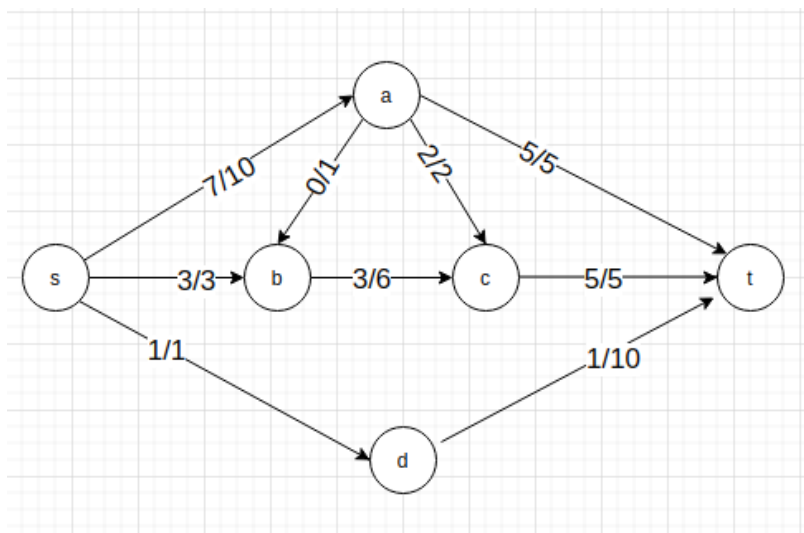
مرحله چهارم:

• مسیر: s-d-t

• اندازه: ۱



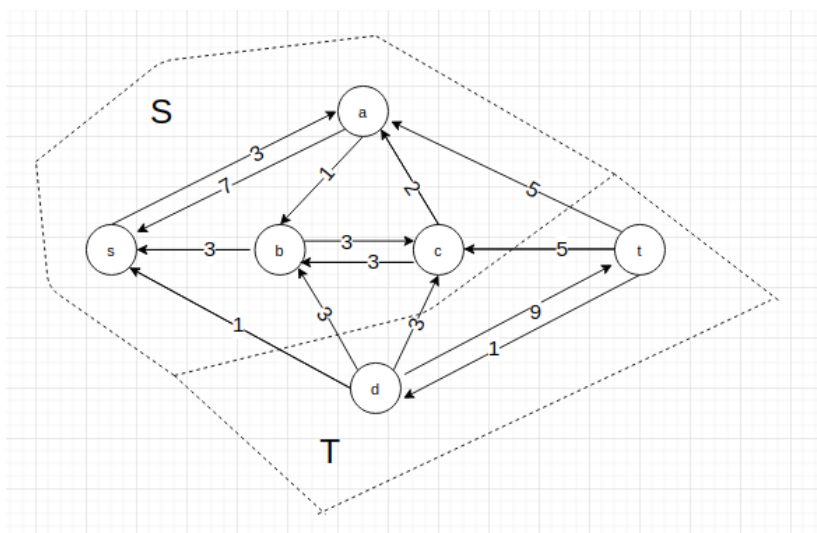
گراف نهایی:



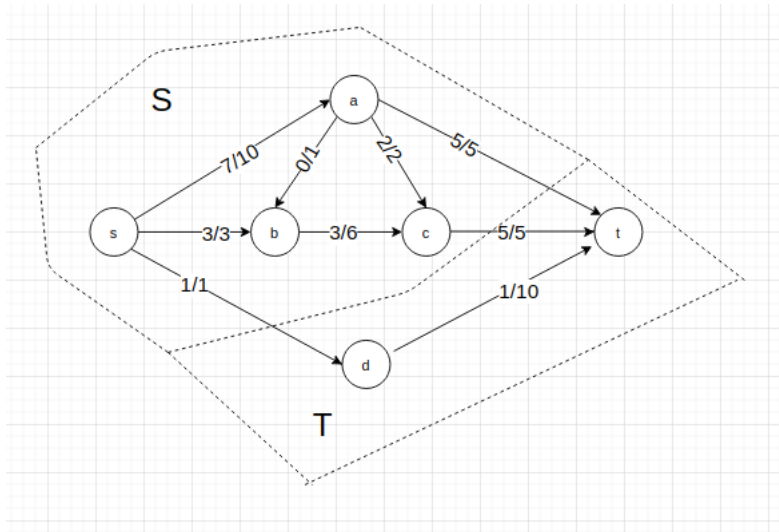
اندازه جریان بیشینه در نهایت برابر  $5 + 3 + 2 + 1 = 11$  می شود که بیشتر از جریان مشخص شده در قسمت الف است.

(ج) min-cut گراف را مشخص کنید. (۳ نمره)

برای پیدا کردن min-cut، کافیست روی گراف القایی جریان بیشینه (گراف مرحله چهارم در قسمت قبل) DFS یا BFS از راس s بزنیم. راس هایی که دیده می شوند در بخش S قرار دارند و راس هایی که دسترسی به آنها نداریم در بخش T هستند. بخش بندی به صورت زیر درمی آید.



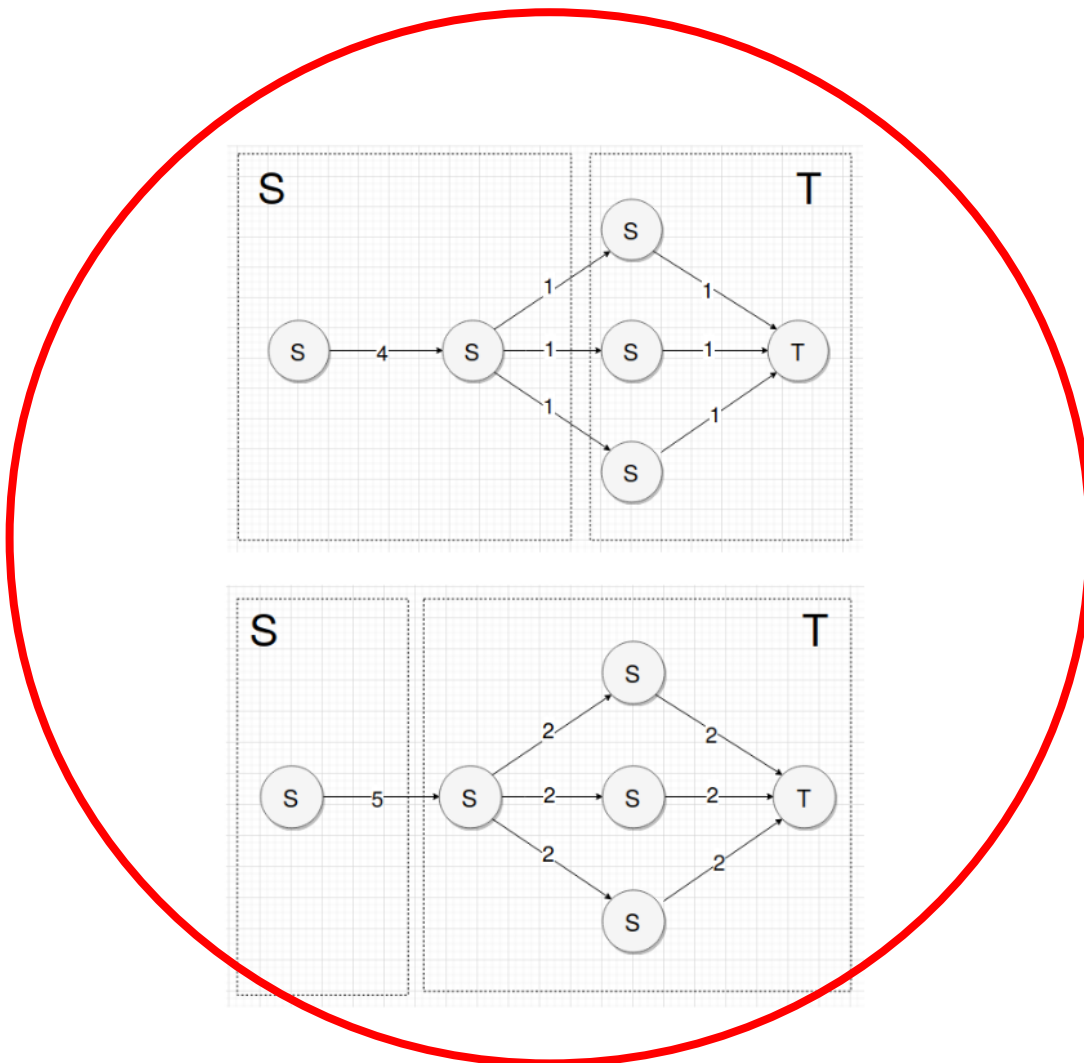
در نتیجه min-cut به صورت زیر است.



۲. فرض کنید گراف شبکه  $G = (V, E)$  با دو راس  $s \in V$  و  $t \in V$ ، ظرفیت یال  $c_e$  برای هر یال  $e \in E$  و جریان  $f$  به شما داده شده است. درستی یا نادرستی موارد زیر را در این شبکه جریان با ذکر دلیل مشخص کنید. (۲۰ نمره)

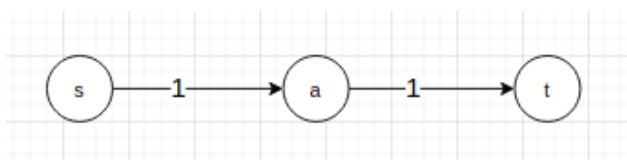
(۱) با افزایش ظرفیت هر یال به میزان یک واحد، برش کمینه مربوط به این شبکه همچنان معتبر خواهد بود. (برش کمینه تغییری نمی‌کند.)

غلط. مثال نقض:



(ب) در گراف شبکه حداقل یک یال وجود دارد که با افزایش ظرفیت آن، جریان بیشینه افزایش می‌یابد.

غلط. مثال نقض:



در شبکه بالا با افزایش ظرفیت هر یک از یال‌های جریان بیشینه ثابت و برابر یک می‌ماند. زیرا با افزایش ظرفیت یکی از یال‌ها مینیمم ظرفیت مسیر تغییری نمی‌کند.

(ج) اگر ظرفیت یال  $(u, v) \in E$  را یک واحد افزایش دهیم، جریان بیشینه یا ثابت می‌ماند یا یک واحد افزایش می‌یابد.

درست. جریان بیشینه جدید را  $f'$  و جریان بیشینه قبلی را  $f$  در نظر می‌گیریم. برای اثبات این عبارت باید دو حکم زیر را اثبات کنیم.

(۱) حکم: کمترین میزانی که  $f'$  می‌تواند داشته باشد  $f$  است.  

$$\min(|f'|) = |f|$$
اثبات:

با افزایش ظرفیت جریان قبلی ( $f$ ) همچنان معتبر می ماند، پس در شبکه جدید به جریان معتبر با اندازه  $f$  وجود دارد. در نتیجه اندازه جریان بیشینه نمی تواند از این میزان کمتر باشد.

۲ حکم: بیشترین میزانی که  $f'$  می تواند داشته باشد  $f + 1$  است.

$$\max(|f'|) = |f + 1|$$

اثبات:

فرض خلف: جریان بیشینه جدید حداقل دو واحد از جریان بیشینه قبلی بیشتر است.

در جریان بیشینه جدید یکی از مسیرهای از  $s$  به  $t$  که از یال  $(u, v)$  می گذرد را در نظر گرفته و جریان عبوری از هریک از یال های این مسیر را یک واحد کاهش می دهیم. اگر جریان جدید را  $f''$  بنامیم اندازه  $f''$  حداقل یک واحد از اندازه  $f$  بیشتر است.

از طرفی جریان  $f''$ ، جریان معتبری برای شبکه قبلی هم هست. زیرا جریان عبوری از هریک از یال های شبکه جدید کمتر مساوی ظرفیت هریک از یال ها در شبکه قبلی است. (توجه شود چون جریان عبوری از یال  $(u, v)$  را یک واحد کم کردیم، جریان عبوری از این یال حداکثر می تواند یکی کمتر از ظرفیتش در شبکه جدید باشد).

از آنجایی که جریان  $f''$  جریان معتبری برای شبکه قبلی است و مقدار آن حداقل  $|f + 1|$  است، پس مقدار جریان بیشینه شبکه قبلی حداقل  $|f + 1|$  است. به تناقض رسیدیم پس فرض غلط بوده است.

۳. فرض کنید  $G(V, E)$  گرافی جهت دار که گنجایش یال  $e$  آن برابر  $c_e$  باشد و  $f$  جریان بیشینه از  $s$  به  $t$  را مشخص کند. حال فرض کنید گنجایش یال ها را به صورت زیر تغییر می دهیم. ثابت کنید  $f$  همچنان جریان بیشینه باقی می ماند. (۱۵ نمره)

$$\forall e \in E, c'_e \geq c_e \bullet$$

$$\forall e \in E, f_e = c_e \Rightarrow c'_e = c_e \bullet$$

با اضافه کردن ظرفیت یال ها تمامی برش های یالی (cut ها) بزرگتر می شوند یا ثابت می مانند. برش یالی کمینه (min-cut) از  $s$  به  $t$  را در نظر بگیرید، طبق قضیه max-flow min-cut میدانیم جریان گذرنده از تمامی یال های این برش برابر ظرفیتشان است. در نتیجه طبق فرض سوال گنجایش یال های این برش ثابت می ماند. پس اندازه این برش ثابت مانده و همچنان برش کمینه خواهد بود و جریان بیشینه نیز تغییری نمی کند. واضح است  $f$  همچنان جریان معتبر است پس جریان  $f$  جریان بیشینه این گراف است.

۴. فرض کنید گراف  $G(V, E)$  گرافی جهت دار است که گنجایش یال  $e$  آن برابر  $c_e$  باشد و  $s, t \in V$  دو راس از آن باشند. (۲۵ نمره)

(آ) الگوریتمی ارائه دهید که جریان  $f$  را برای هر یال طوری محاسبه کند که جرابانی با اندازه ی دقیقاً  $d$  که  $d$  عددی حقیقی است از  $s$  به  $t$  ایجاد شود، یا اعلام کند وجود ندارد. (۱۲ نمره)

در الگوریتم Ford-Fulkerson هر بار با یافتن مسیر افزایشی اگر ظرفیت کم ظرفیت ترین یال را  $r$  در نظر بگیریم و جمع مسیرهای افزایشی پیدا شده قبل از این مرحله برابر  $F$  باشد به صورت زیر عمل می کنیم:

اگر  $F + r < d$  بود به طور عادی جریان  $r$  را می گذرانیم.

در غیر این صورت جریان  $d - F$  را از این مسیر می گذرانیم و الگوریتم را پایان می دهیم.

(ب) فرض کنید برای هر یال علاوه بر حد بالای  $c$  یک حد پایین  $l$  نیز برای جریان آن یال متصوریم. قسمت بالا را با این شرط حل کنید. (۱۳ نمره)

ابتدا از هر یال جریان  $l_e$  را می گذرانیم. برای راس  $v$  مقدار  $d_v$  را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$d_v = \sum_{v \rightarrow e} l_e - \sum_{e \rightarrow v} l_e$$

سپس ظرفیت یال ها را برابر  $c_e - l_e$  قرار می دهیم. و حد پایین را برای یال ها حذف می کنیم. حال مسئله را به یک مسئله circulation تبدیل می کنیم.

مقادیر همه راس‌ها جز راس‌های  $s$  و  $t$  را برابر  $-d_v$  قرار می‌دهیم. دلیل این موضوع آن است که تا اینجا برآیند جریان در راس  $v$  برابر  $d_v$  بوده است. درحالی که برآیند برای راس‌های میانی باید صفر باشد تا جریان معتبری داشته باشیم. به همین دلیل در مسئله circulation تلاش می‌کنیم برآیند جریان راس  $v$  را  $-d_v$  بگذاریم تا با جریان قبل خنثی شده و جریان معتبری به دست بیاید. مقدار راس  $s$  را برابر  $d_s - d$  قرار می‌دهیم تا با در نظر گرفتن جریان قبلی، برآیند جریان در این راس  $d$  شود که مدنظر سوال است. به همین صورت مقدار راس  $t$  را برابر  $-d - d_t$  قرار می‌دهیم.

سپس این مسئله circulation را حل می‌کنیم. اگر جواب داشت جریان عبوری از هر یال را با حد پایین خود (که در گذشته عبور داده بودیم) جمع می‌کنیم و به عنوان جواب بازمی‌گردانیم. در غیر این صورت مسئله جواب ندارد.

۵. به علت بیماری کرونا تصمیم گرفته شده است امتحانات به صورت غیر حضوری برگزار شود. به همین دلیل استاد درس طراحی الگوریتم تصمیم گرفته است برای هر دانشجو مجموعه سوالات امتحانی متفاوتی طرح کند. در این ترم استاد  $n$  دانشجو دارد و می‌خواهد هر برگه امتحانی  $c$  سوال داشته باشد. استاد درس تصمیم می‌گیرد مجموعه‌ای سوال از هر مبحث طرح کرده و سپس آن‌ها بین برگه‌ها تقسیم کند. به طوری که یک سوال دقیقاً به یک دانشجو داده شود. تعداد مباحث درسی را  $p$  و تعداد کل سوالاتی که استاد طرح کرده است را  $nc$  در نظر بگیرید. هر سوال به یک مبحث درسی تعلق دارد و همچنین مبحث هر سوال مشخص است.

استاد با ذهن هوشمند و تجربه زیادش می‌تواند دقیق پیش‌بینی کند که هر دانشجو کدام سوالات را در زمان امتحان با فکر کردن می‌تواند حل کند. به همین دلیل استاد می‌داند هر دانشجو به کدام سوالات می‌تواند پاسخ درست دهد. از آنجایی که استاد دوست دارد تمام دانشجویانش نمره کامل در درس بیاورند می‌خواهد طوری سوالات را در برگه دانشجویانش پخش کند که به هر دانشجو فقط سوالاتی بیفتد که می‌تواند حل کند. (۲۵ نمره)

(آ) استاد می‌خواهد بداند که آیا می‌تواند سوالات را به این صورت پخش کند یا نه. اما از آنجایی که سرش شلوغ است از شما کمک خواسته است.

الگوریتمی ارائه دهید در صورت وجود راه‌حل روش تقسیم‌بندی را در اختیار استاد بگذارد یا آنکه اعلام کنید همچنین راه‌حلی وجود ندارد.

ابتدا داده‌ها، خواسته‌ها و محدودیت‌های مسئله را مشخص کنید. سپس سعی کنید این مسئله را به یک گراف شبکه مدل کنید. (۱۰ نمره)

داده‌ها:

- $p$  مبحث درسی
- $n$  دانشجو
- $nc$  سوال
- هر دانشجو یک برگه امتحانی دارد

محدودیت‌ها:

- هر برگه امتحانی دقیقاً  $c$  سوال داشته باشد.
- هر سوال دقیقاً در یک برگه آمده باشد.

خواسته‌ها:

هر سوال را در برگه کدام دانشجو بگذاریم؟

اگر به خواسته مسئله دقت کنید نوع این مسئله از نوع اختصاص دادن است. (هر سوال به کدام دانشجو) برای همین سعی می‌کنیم مسئله را گراف شبکه‌ای مشابه مسائل matching مدل کنیم.

ابتدا باید نودهای گراف را تشخیص دهیم که در اینجا به نظر می‌آید نودهای گراف دانشجو و سوالات هستند. (به علاوه نودهای  $s$  و  $t$ )

بعد از تعیین نودها باید مفهوم و معنی یال در گراف را مشخص کنیم. برای مثال یال از دانشجوی  $i$  به سوال  $j$  مشخص می‌کند که سوال  $j$  در برگه دانشجوی  $i$  قرار دارد (می‌توانستیم یال را از سوال به دانشجو هم بگیریم). مشابه مسائل matching، از نود  $s$  به تمام نودهای دانشجو یال وصل می‌کنیم و از تمام نودهای سوال به نود  $t$  یال وصل می‌کنیم.

بعد از تعیین نودها و یال‌ها سعی می‌کنیم با تعیین ظرفیت‌ها محدودیت‌ها را اعمال کنیم. هر برگه سوال یا هر دانشجو که یک برگه سوال دارد باید  $c$  سوال به آن اختصاص پیدا کند. پس ظرفیت یال‌هایی که از  $s$  به دانشجو‌ها وصل می‌شوند را  $c$  می‌گذاریم.



همچنین هر سوال باید در یک برگه آمده باشد، پس ظرفیت یال‌هایی که از سوالات به  $t$  وصل می‌شوند را ۱ در نظر می‌گیریم. ظرفیت یال‌های بین دانشجویان و سوالات را نیز ۱ قرار می‌دهیم. (خوب است فکر کنید اگر ظرفیت این یال‌ها را بیشتر در نظر می‌گرفتیم مشکلی ایجاد میشد یا نه).  
بعد از تمام این مراحل باید الگوریتم خود را تعریف کنیم. جریان بیشینه را به کمک Ford-Fulkerson به دست می‌آوریم. اگر جریان بیشینه برابر  $nc$  بود، جریان را به عنوان جواب مسئله برمی‌گردانیم. در غیر این صورت مسئله جواب ندارد.

(ب) از آنجایی که استاد دوست دارد سوالات هر برگه متنوع باشد، تصمیم می‌گیرد از هر مبحث درسی در یک برگه حداکثر یک سوال بیاورد. سوال قسمت قبل را با محدودیت جدید حل کنید. (۱۵ نمره)

repetitive 3 times

در اینجا یک محدودیت جدید به مسئله اضافه شده است (یکتا بودن مبحث سوالات در هر برگه امتحانی). مباحثی درسی در اینجا نقش پررنگ‌تری دارند و در یکی از محدودیت‌هایمان دخیل هستند. اما فعلاً نقشی در گراف شبکه ندارند.  
پس ابتدا کمی گراف شبکه قبلی را تغییر می‌دهیم و نودهای مبحث درسی (که  $p$  تا هستند) را اضافه می‌کنیم. حال باید مانند گذشته یال‌ها و ظرفیت‌هایشان را تعریف کنیم.  
می‌خواهیم به هر دانشجو  $c$  سوال اختصاص دهیم پس ظرفیت یال‌های  $s$  از  $c$  به دانشجویان را  $c$  قرار می‌دهیم.  
از هر مبحث درسی فقط یک سوال برای دانشجو می‌تواند بیاید پس از دانشجویان به مبحث درسی یالی با ظرفیت ۱ وصل می‌کنیم.  
مبحث درسی  $i$  به سوال  $j$  یال دارد اگر و تنها اگر مبحث سوال  $j$ ،  $i$  باشد. ظرفیت این یال‌ها را ۱ در نظر می‌گیریم.  
در نهایت مانند گذشته از سوالات به  $t$  با ظرفیت ۱ یال وصل می‌کنیم.  
دوباره جریان بیشینه را در شبکه تعریف شده به دست می‌آوریم اگر جریان بیشینه برابر  $nc$  بود، جریان را به عنوان جواب مسئله برمی‌گردانیم. در غیر این صورت مسئله جواب ندارد.