

به نام خدا

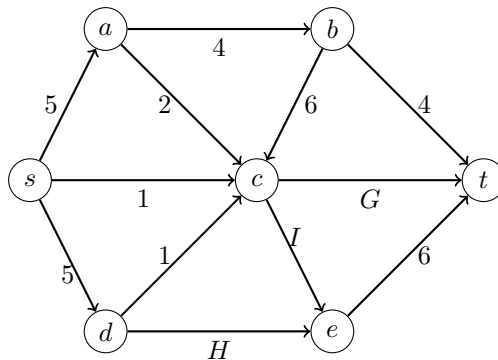
امتحان سوم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (شبکه جریان) - زمستان ۹۹

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

امتحان شامل سه بخش است و از هر بخش شما باید فقط و فقط یک سوال را حل کنید. برای انتخاب سوال مربوط به خود به توضیحات بالای هر بخش توجه کنید. برای انتخاب سوال خود فرض کنید شماره دانشجویی شما $ABCDEFGHI$ باشد و مقادیر A تا I را با توجه به شماره دانشجویی خود در هر بخش جایگزین کنید. برای مثال اگر شماره دانشجویی شما 894456123 است مقدار $A = 8$ و مقدار $H = 2$ خواهد بود. لطفا در بالای برگه جواب حتما علاوه بر نام و نام خانوادگی شماره دانشجویی و شماره سوال مربوط به خود را بنویسید

بخش اول (۲۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود سوال زیر را حل کنید.

۱. الگوریتم Ford-Fulkerson را بر روی گراف زیر با در نظر گرفتن راس s به عنوان منبع و t به عنوان خروجی اجرا کنید. دقت کنید که مقادیر I ، G و H را باید از روی شماره دانشجویی خود محاسبه و جایگزین کنید. در هر مرحله مسیر افزایشی و میزان افزایش جریان را مشخص کنید.



بخش دوم (۴۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار $G + I$ را محاسبه کنید. اگر باقیمانده $G + I$ بر ۲ به ترتیب ۰، ۱ بود به ترتیب سوال ۲ یا ۳ را حل کنید.

۲. یال افزایشی بحرانی یالی است که با افزایش ظرفیت آن مقدار جریان بیشینه شبکه جریان افزایش پیدا می‌کند. به همین ترتیب یال کاهش بحرانی یالی است که با کاهش ظرفیت آن مقدار جریان بیشینه شبکه کاهش پیدا می‌کند.

(آ) یک شبکه جریان مثال بزنید که هیچ یال افزایشی بحرانی نداشته باشد.

(ب) ثابت کنید هر شبکه جریانی که جریان بیشینه آن بیشتر از صفر باشد، حداقل یک یال کاهش بحرانی دارد.

۳. فرض کنید شبکه جریان (G, c, s, t) به منبع s و خروجی t داده شده است به طوری که برای هر یال e مقدار $c(e)$ گنجایش یال e را نشان می‌دهد و یک عدد صحیح است. ابتدا مقدار Δ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

• **یال‌های برش** (S, T) که با $E(S, T)$ نشان می‌دهیم برابر است با تعداد یال‌های بین S و T . بیشینه این مقدار برای تمام برش‌های (S, T) را Δ می‌نامیم.

جریان سازگار f با مقادیر صحیح برای هر یال داده شده است. هم چنین می دانیم هیچ مسیر افزایشی در گراف G_f وجود ندارد که مقدار f را حداقل 2 واحد زیاد کند. ثابت کنید که جریان بیشینه برای گراف G کمتر یا مساوی $\Delta + |f|$ است. **راهنمایی:** اگر یال های با ظرفیت کمتر از 2 را از گراف G_f حذف کنید، مسیری از منبع s به خروجی t در گراف G_f وجود نخواهد داشت.

بخش سوم (۴۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار H را محاسبه کنید.
اگر باقیمانده H بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 4 یا 5 را حل کنید.

۴. یک جدول با n سطر و m ستون، آرایه R از اعداد صحیح به طول n و آرایه C به طول m از اعداد صحیح داده شده اند. هر خانه جدول سفید یا سیاه است. می خواهیم در هر خانه سفید رنگ یک عدد بنویسیم به طوری که:

- برای هر $1 \leq i \leq n$: جمع اعداد سطر i برابر $R[i]$ شود.
- برای هر $1 \leq j \leq m$: جمع اعداد ستون j برابر $C[j]$ شود.

با استفاده از شبکه جریان الگوریتمی طراحی کنید که با گرفتن جدول ورودی، آرایه R و آرایه C مشخص کند که آیا این امکان وجود دارد یا نه.

۵. مسابقات لیگ برتر فوتبال در انتهای هفته ۲۳- ام است و ۷ هفته تا پایان لیگ فرصت هست. فرض کنید بازیهای باقیمانده در ماتریس g به شما داده شده است. در حقیقت $g[i, j] = k$ است اگر و تنها اگر تیم i و تیم j در هفته k -ام با هم بازی داشته باشند.

تا اینجا کار تیم i -ام جدول تعداد w_i برد و l_i باخت داشته است. هم چنین فرض کنید نتیجه مساوی وجود ندارد و در پایان هر مسابقه حتما یکی از دو تیم به عنوان برنده از زمین خارج می شود. شما از بین ۱۶ تیم شرکت کننده در مسابقات، طرفدار تیم دهم جدول هستید. ولی با توجه به اینکه ۷ هفته به پایان لیگ باقی مانده است، هنوز امیدوار هستید که تیم محبوبتان قهرمان لیگ برتر شود. تیم محبوب شما در صورتی قهرمان می شود که تعداد بردهایش در انتهای مسابقات از بقیه تیم ها بیشتر باشد.

با استفاده از شبکه جریان الگوریتمی طراحی کنید که مشخص کند که با توجه به تعداد برد فعلی تیم ها و بازیهای باقیمانده، آیا این امکان وجود دارد که تیم محبوب شما قهرمان لیگ برتر شود.

راهنمایی: می توانید به ازای هر تیم و همچنین هر بازی باقیمانده یک راس در شبکه جریان قرار دهید.