

به نام خدا

امتحان پنجم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (بهار ۱۴۰۰)

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

۱. شبکه جریان $G = (V, E)$ و جریان بیشینه آن f در ورودی داده شده است (دقت کنید که در ورودی مقدار جریان f برای تمامی یال‌ها داده شده است). فرض کنید که ظرفیت همه یال‌های شبکه جریان G اعدادی حسابی هستند. همچنین فرض کنید تمام مقادیر جریان بیشینه (مقدار f_e برای هر یال $e \in E$) اعدادی حسابی هستند.

وزن یال $e \in E$ را یک واحد زیاد می‌کنیم. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(|E| + |V|)$ ارائه دهید که جریان بیشینه را در گراف جدید حساب کند (۳۰ نمره).

۲. تعداد n خانواده برای صرف شام به یک رستوران با m میز شام رفته‌اند. تعداد اعضای خانواده i برابر a_i و ظرفیت میز j در رستوران برابر b_j است. به منظور بیشینه کردن روابط اجتماعی می‌خواهیم افراد را طوری دور میزهای شام قرار دهیم به طوری که هیچ دو عضوی از یک خانواده دور یک میز ننشسته باشند. الگوریتم با زمان چند جمله‌ای ارائه دهید که تعیین کند آیا امکان قرار دادن مهمان‌ها دور میزها وجود دارد که شرط مورد نظر را برآورده کند. برای مثال اگر سه میز با ظرفیت ۳، یک خانواده‌ی ۲ نفره، یک خانواده‌ی ۳ نفره، و یک خانواده‌ی ۴ نفره وجود داشته باشند، امکان این کار وجود ندارد (۳۰ نمره).

۳. شبکه جریان بدون مبدا و مقصد $G = (V, E)$ با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E را در نظر بگیرید. به بیانی دیگر G یک گراف جهت‌دار است و ظرفیت یال $e \in E$ برابر c_e است. حال فرض کنید:

- اگر در شبکه G راس s مبدا و راس t مقصد باشند، اندازه جریان بیشینه برابر f_1 خواهد بود.
- اگر در شبکه G راس t مبدا و راس u مقصد باشند، اندازه جریان بیشینه برابر f_2 خواهد بود.
- اگر در شبکه G راس s مبدا و راس u مقصد باشند، اندازه جریان بیشینه برابر f_3 خواهد بود.

ثابت کنید: $f_3 \geq \min(f_1, f_2)$ (۴۰ نمره).