



به نام خدا



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی چهارم

موعد تحویل: دوشنبه ۱۹ اردیبهشت ۱۴۰۱، ساعت ۱۲:۰۰

طراح: ادیب رضایی adibrezaeish@gmail.com

۱. گراف $G(V, E)$ با راس‌هایی با وزن مثبت و یال‌هایی بدون وزن و راس s در ورودی به شما داده شده است. الگوریتمی با پیچیدگی $O(|E| + |V|\log|V|)$ ارائه دهید که کم هزینه ترین مسیر از راس s به سایر راس‌ها را بدست آورد. درستی الگوریتم خود را نشان دهید. (۱۰ نمره)

۲. درخت پوشای کمینه T را برای گراف وزن دار بی جهت $G = (V, E)$ در نظر بگیرید. می‌خواهیم m یال $E' = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ را به G اضافه کنیم. برای سادگی فرض می‌کنیم یال‌ها وزن‌های متفاوتی دارند. الگوریتمی با $O(nm)$ ارائه دهید که درخت پوشای کمینه $G' = (V, E \cup E')$ را زمانی که درخت پوشای کمینه T برای G داده شده است پیدا کند. (۱۵ نمره)

۳. حسام قصد مهاجرت به کشوری را دارد که شهرهای آن با جاده‌های دو طرفه به یکدیگر راه دارند و از هر شهر به هر شهر دیگر حداقل یک مسیر می‌توان پیدا کرد. او می‌خواهد خانه‌ای بخرد که بهترین دسترسی را به سایر شهرها دارد. شهری بهترین دسترسی را دارد که ماکسیمم مسافت کوتاه ترین مسیر آن به سایر شهرها کمترین مقدار ممکن باشد. الگوریتم بهینه‌ای ارائه دهید که شهر مورد نظر حسام را برای او پیدا کند. پیچیدگی و درستی الگوریتم را نشان دهید. (۱۵ نمره)

۴. شهردار شهر s به تازگی می‌خواهد به شهر دیگری سفر کند. شهرها با جاده‌های یک طرفه به یکدیگر ارتباط دارند. همچنین بعضی از جاده‌ها به تازگی آسفالت شده‌اند و او می‌خواهد برای بررسی وضعیت اینگونه جاده‌ها حداکثر از ۲ تای آنها در مسیر خود بگذرد. از طرفی او عجله دارد و می‌خواهد در سریع ترین زمان ممکن به شهرهای دیگر دسترسی پیدا کند

(آ). الگوریتمی ارائه دهید که کمترین مسافت بین شهر s تا همه شهرهای دیگر محاسبه کند و شرط داده شده برای آن برقرار باشد. مرتبه زمانی را بر اساس تعداد شهرها و جاده‌های شهر محاسبه کنید و درستی آن را نشان دهید. (۱۰ نمره)

(ب). شبه کدی ارائه دهید که کوتاه ترین مسیر از مبدأ s را به سایر شهرها پیدا می‌کند. (نیازی به در نظر گرفتن شرط گذشتن از جاده‌های آسفالت در شبه کد نیست) (۱۰ نمره)

۵. در شهر گاتهام t دزد در مکان‌های $T = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_l\}$ قرار دارند. شهر را با یک گراف ساده وزن دار بی جهت همبند بدون طوقه (حلقه یا loop) با n راس و m یال نمایش می‌دهیم. p ایستگاه پلیس در $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_p\}$ نقطه شهر مستقر شده‌اند. سرعت فرار دزد و سرعت دنبال کردن پلیس را $V = 1$ در نظر بگیرید. در l نقطه $L = \{L_1, L_2, L_3, \dots, L_l\}$ از شهر موتور ویژه وجود دارد که سرعت پلیس برای دستگیری دزد را ۲ برابر می‌کند و فقط یک بار در طول مسیر خود می‌تواند از آن استفاده کند. (توجه: پلیس می‌تواند در این نقطه‌ها از موتور ویژه استفاده نکند)

(آ) فرض کنید همه دزد ها به یکباره اصلاح شدند و می‌خواهند خود را معرفی کنند. الگوریتمی ارائه دهید که هر دزد بتواند خود را به نزدیک ترین ایستگاه پلیس معرفی کند. پیچیدگی الگوریتم را بنویسید. (۱۰ نمره)

(ب) فرض کنید دزد در نقطه T_1 قصد فرار دارد و می‌خواهد خود را به نقطه D برساند. در این شرایط پلیس‌ها از ایستگاه‌های پلیس خارج شده و سعی در دستگیری دزد دارند. الگوریتمی ارائه دهید که کوتاه ترین زمانی که دزد می‌تواند فرار کند را مستقل از اینکه پلیس چه مسیری را برای دستگیری او انتخاب می‌کند پیدا کند. پیچیدگی الگوریتم را بنویسید. (۱۰ نمره)

نکته: پلیس ممکن است زودتر یا همزمان به نقطه‌ای از شهر که دزد می‌رسد برسد. در جفت این حالات پلیس می‌تواند دزد را دستگیر کند اگر دزد نتواند با توجه به شرایط فرار کند در خروجی *Can't escape* را چاپ کنید.

۶. در نزدیکی محله سروش n روستا وجود دارد که هنوز هیچکدام از آنها برق ندارند. استاندار تصمیم گرفته که بین روستاها سیم کشی کند که بتواند برق آنها را تامین کند. (استاندار مکان روستاها و فاصله راه بین آنها را میداند)

(آ) الگوریتم بهینه ای ارائه دهید تا استاندارد با کمترین هزینه (کمترین طول سیم کشی) بین روستا ها برق را توزیع کند. پیچیدگی الگوریتم را ذکر کنید. (۵ نمره)

(ب) استاندارد نگران این است که طول بزرگترین سیمی که نیاز است بین دو روستا کشیده شود آنقدری بلند شود که نیاز به برق فشار قوی داشته باشد. ثابت کنید با الگوریتم ارائه شده در قسمت (آ) طول بلندترین سیم کشیده شده بین دو روستا همواره کمینه است. (۱۵ نمره)