به نام خدا

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران

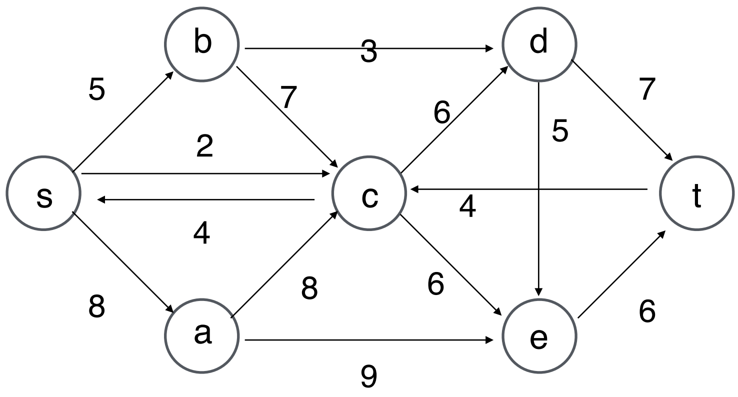
طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها، نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۹۷-۹۶

پاسخ تمرین شماره ۵ (flow and matching)

پاسخ سوال۱-

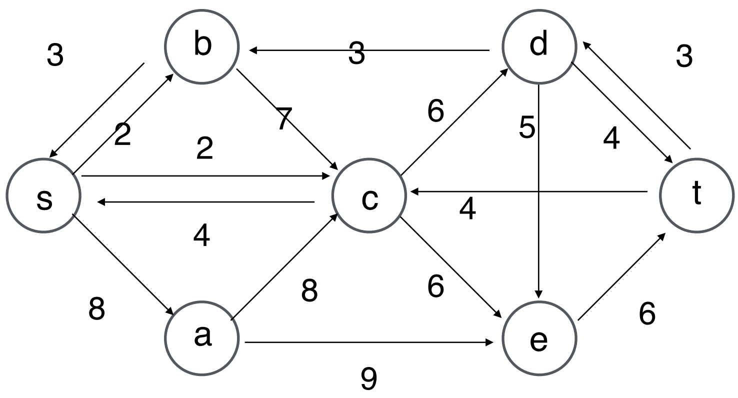
مرحله‌ی ۱:

مسیر افزایشی: s,c,t   مقدار جریان اضافه شده: 4



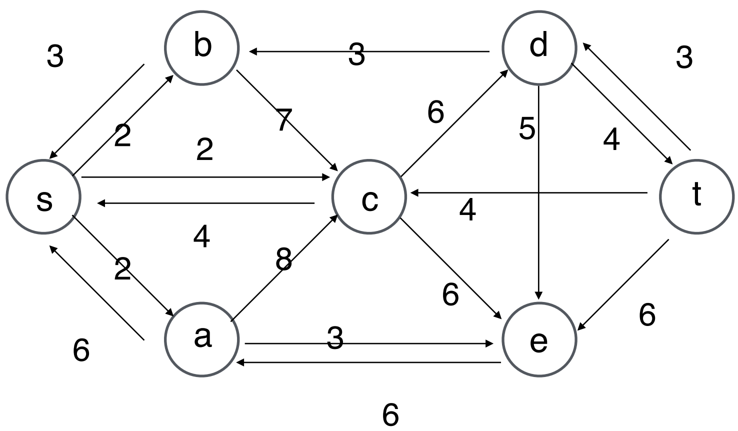
مرحله‌ی ۲:

مسیر افزایشی: s,b,d,t   مقدار جریان اضافه شده: 3



مرحله‌ی ۳:

مسیر افزایشی: s,a,e,t   مقدار جریان اضافه شده: 6



مرحله‌ی ۴:

مسیر افزایشی: s,c,d,t مقدار جریان اضافه شده: 2

مرحله‌ی ۵:

مسیر افزایشی: s,a,c,d,t مقدار جریان اضافه شده: 2

اندازه‌ی جریان ماکزیمم: 4+3+6+2+2=17

رئوس موجود در مجوعه‌ی min-cut: t={t} s={s, a, b, c, d, e}

پاسخ سوال۲- می‌دانیم در گراف جریان شبکه‌ی G مقدار جریانی که وارد یک راس می‌شود، برابر با مقدار جریانی‌ست که از آن خارج می‌شود (طبق قانون پایستگی جریان flow conservation) و از آنجا که به ازای جریان f که از u به v و همچنین از v به w وجود دارد، قانون محدودیت ظرفیت یالی برقرار است، مقدار f هیچ‌گاه بیشتر از مینیمم ظرفیت یال‌های بین رئوس u و v و همچنین بین رئوس v و w نخواهد بود.
تمام جریان وارد شونده به راس v از آن خارج می‌شوند. اگر مقدار جریان وارد شونده به v را f + e در نظر بگیریم، به اندازه f از این جریان از مسیر بین u و v می‌آید. جریان خارج‌شونده از v هم برابر f + e خواهد که به اندازه‌ی f از آن از مسیر بین v و w عبور می‌کند. پس اگر مسیر u->…->v->…->w را در نظر بگیریم، جریان به اندازه‌ی f از ابتدا تا انتهای آن برقرار است و این یعنی یک جریان از راس u به راس w به اندازه‌ی f وجود دارد.

پاسخ سوال۳- از آنجا که هر راس در یک مسیر شروع شونده از s قرار دارد، باید دوری وجود داشته باشد که شامل یال (v, s) باشد. با استفاده از الگوریتم DFS این دور را که در آن هیچ یالی دارای جریان صفر نمی‌باشد، پیدا می‌کنیم. این دور حتما وجود دارد زیرا f شرایط جریان را برآورده می‌کند. از آنجا که گراف هم‌بند می‌باشد، اینکار O(E) طول می‌کشد. حال جریان تمامی یال‌های موجود در دور را به اندازه‌ی ۱ واحد کم می‌کنیم. این کار باعث می‌شود اندازه‌ی جریان همان مقدار قبل باقی بماند، پس جریان همچنان بیشینه است. این کار شرط محدودیت گنجایش یالی را نقض نمی‌کند زیرا تمامی یال‌های واقع در دور، قبل از اینکه مقدار جریانشان را کم کنیم، دارای جریان $f > 0$ بودند. و در نهایت پایستگی جریان نقض نخواهد شد زیرا برای هر راس، جریان یک یال وارد شونده به آن و یک یال خارج شونده از آن را به یک اندازه کم کرده‌ایم.

پاسخ سوال۴- گراف دوبخشی H را از روی G به این شکل می‌سازیم: به ازای هر راس v در G، دو راس v[in] و v[out] را قرار می‌دهیم. همچنین به ازای هر یال به شکل (u,v) در G، یال (v[in], u[out]) را در H قرار می‌دهیم. ادعا می‌کنیم که عملیات خواسته شده امکان‌پذیر است اگر و فقط اگر H دارای یک perfect matching باشد.

الف) اگر H دارای یک perfect matching باشد، متناظر یال‌های matching را در گراف G انتخاب کرده و بقیه یال‌ها را از آن حذف می‌کنیم. گراف جدید ساخته شده از روی گراف G را ’G می‌نامیم. از آنجا که در matching ما به ازای هر راس تنها یک یال انتخاب شده، و همچنین به ازای تمام رئوس، یالی انتخاب شده است (طبق تعریف perfect matching)، در ’G به ازای هر راس دقیقا یک راس ورودی و دقیقا یک راس خروجی داریم. و با این کار گراف G را به تعدادی دور افراز کرده‌ایم که با هم اشتراکی ندارند.

ب) اگر بتوان گراف G را به تعدادی دور افراز کرد که با هم اشتراکی ندارند، (گراف به دست آمده از این افراز را G’ می‌نامیم) به سادگی می‌توان یک perfect matching در H از روی آن به دست آورد. به ازای هر یال از u به v در G’، یال [u[out به [v[in را در H به یکدیگر match می‌کنیم. این matching یک perfect matching است زیرا اولا تمام رئوس پوشش داده شده‌اند، ثانیا به ازای هر راس دقیقا یک یال در matching آمده است. (در G’ هر راس دقیقا یک خروجی و یک ورودی دارد)

پاسخ سوال۵- الف) گراف G’ را به همان صورتی که در راهنمایی آمده است می‌سازیم. برای هر یال ظرفیت ۱ را در نظر گرفته و الگوریتم جریان ماکزیمم را اجرا می‌کنیم. ادعا می‌کنیم اگر یال ((x[i], y[j] دارای جریان به اندازه‌ی ۱ در گراف G’ باشد و یالِ (i, j) یک یال در path cover ما باشد، نتیجه یک minimum path cover خواهد بود.

ابتدا بررسی می‌کنیم که هیچ راسی دو بار در یک مسیر ظاهر نشود. اگر این اتفاق بیافتد یعنی داریم: f(x[i], y[j]) = f(x[k], y[j]) برای i != k != j . که این موضوع با ویژگی‌های جریانی که می‌تواند در G’ وجود داشته باشد، مغایرت دارد. چون یالی که راس [y[j را به راس [y[0 متصل می‌کند (که نقش راس t را در این گراف دارد)، دارای ظرفیت ۱ می‌باشد. همچنین از آنجا که ظرفیت یالی که از s ([x[0) به راس [x[i می‌رود برابر با ۱ است، هیچ‌گاه نمی‌توانیم دو یال به صورت ((x[i], y[j] و ((x[i], y[k] برای k != j داشته باشیم.

می‌توان ادعا کرد که هر راس در یک مسیر قرار خواهد گرفت. اگر به ازای j هیچ یک از یال‌های ((x[i], y[j] یا ((x[j], y[i] وجود نداشته باشند، آنگاه j خود یک مسیر خواهد بود. پس مطمئن خواهیم بود که به یک path cover خواهیم رسید.

اگر k مسیر در یک پوشش از n راس وجود داشته باشد، در کل n - k یال در مسیرها خواهیم داشت. در صورتی که یک path cover داشته باشیم می‌توانیم گراف جریان شبکه‌ی ماکزیمم را از روی آن بسازیم. به این ترتیب که به یال ((x[i], y[j] جریان با مقدار ۱ بدهیم اگر و تنها اگر یال (i, j) در یکی از مسیرهای پوشش مسیری قرار داشته باشد. فرض کنید الگوریتم ماکزیمم جریان شبکه، به ما جریان n - k را بدهد که به این معناست k مسیر مجزا را برای پوشش مسیری در گراف اولیه پیدا کرده است. ولی با برهان خلف در نظر می‌گیریم minimum path cover کمتر از k مسیر دارد. پس باید بیشتر از n - k یال وجود داشته باشد و در نتیجه باید جریانی با مقداری بیش از آنچه به دست آورده بودیم ساخته شود. که این موضوع مغایرت دارد با اینکه دفعه‌ی قبل جریان ماکزیمم را به دست آورده بودیم.

بدین ترتیب با استفاده از گراف G’ ما می‌توانیم minimum path cover را به دست آوریم. از آنجا که پیدا کردن جریان ماکزیمم در G’ معادل با پیدا کردن maximum matching در گراف دوبخشی می‌باشد (با حذف رئوس [x[0 و [y[0 در گراف G’) این کار با (O(VE قابل انجام است.

ب) این الگوریتم بر روی گراف‌های جهت‌داری که شامل دور می‌باشند، جواب نخواهد داد. به عنوان مثال گرافی را در نظر بگیرید با رئوس {4 ,3 ,2 ,1} و یال‌های {(4, 3) ,(3, 1) ,(2, 3) ,(1, 2)}. خروجی مد نظر ما مسیر {4,3,1,2} خواهد بود ولی الگوریتم ماکزیمم جریان به یال‌های (x1, y2) و (x2, y3) و (x3, y1) جریان ۱ را خواهد داد و دو مسیر {{1,2,3} ,{4}} را کشف خواهد کرد.

پاسخ سوال۶- به ازای تمامی روزهای تعطیل سال که در مجموعه‌ی H هستند، یک نود (holiday(k در نظر می‌گیریم. این نود ها هر یک با ظرفیت ۱ به نودِ نهاییِ t متصل هستند. به ازای هر پزشک یک راس (P(i را در نظر می‌گیریم، که هر یک با ظرفیت c به نودِ مبدأ s متصل است. (هر پزشک حداکثر c روز را کشیش می‌باشد) به ازای k دوره‌ی تعطیلات برای هر پزشک (P(i، k نود (D(i, j داریم. هر (P(i با ظرفیت ۱ به تمام

نودهای D(i, j) متصل است (از آنجا که می‌خواهیم هر پزشک در هر دوره‌ی تعطیلی حداکثر یک روز آن‌را کشیش باشد). نود D(i, j) به تمام نودهای holiday(k) که متعلق به دوره‌ی تعطیلات j ام می‌باشند و در مجوعه‌ی h(i) قرار دارد، با ظرفیت ۱ متصل است.
اگر در این گراف بتوانیم جریانی برابر تعداد تمام روزهای سال بیابیم (به اندازه‌ی مجموعه‌ی H)، جواب مسئله را پیدا کرده‌ایم.

پاسخ سوال۷- گراف جریان شبکه‌ی G را (با 2 + n^2 راس) از روی ماتریس داده شده به این شکل می‌سازیم: به ازای هر تقاطع در ماتریس یک راس در G قرار می‌دهیم. (به تعداد n^2 راس) همچنین به ازای هر دو تقاطعی که مجاور هم هستند، بین رئوس متناظرشان در گراف G یک یال (دو جهته) با ظرفیت ۱ قرار می‌دهیم. در آخر دو راس s و t را به گراف G اضافه می‌کنیم.
حال بین تمام تقاطع های مرزی (رئوسی به صورت (i, j) که در آن‌ها i=1 یا i=n یا j=1 یا j=n می‌باشد) و راس t، یک یال با ظرفیت ۱ قرار می‌دهیم. هم‌چنین بین تمام m نقطه‌ی شروع شونده و راس s یک یال با ظرفیت ۱ در گراف G قرار می‌دهیم. بدین ترتیب هر یک از مسیرهای افزایشی در گراف جریان G ساخته شده، یک جریان واحد می‌باشد. پس می‌توان ادعا کرد که پیدا کردن جریانی به اندازه‌ی m در گراف G، معادل با این است که برای مسئله‌ی اولیه راه‌حلی را پیدا کرده باشیم. (می‌دانیم که این جریان بیشتر از m نمی‌تواند باشد، زیرا cut ای داریم شامل راس s، و از آن‌جا که m تا یال به ظرفیت ۱ از این cut خارج می‌شود، ماکزیمم جریان خارج شده از این cut برابر m می‌باشد) و اگر جریان ماکزیمم کمتر از m باشد، یعنی برای مسئله‌ی اولیه پاسخی پیدا نکرده‌ایم.