



1- "دنبالک" به دنباله از d عدد مثبت است. دنبالک را به صورت $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_d)$ نشان می‌دهیم. یک دنبالک x "زیر دنبالک" دنبالک y است اگر و فقط اگر جایگشت p از $1..d$ وجود داشته باشد که به ازای $1 \leq i \leq d$ داشته باشیم: $x_{p(i)} < y_i$

(الف) ثابت کنید رابطه زیر دنبالک یک رابطه متعددی است.

(ب) الگوریتمی ارایه دهید که با زمان $O(d \log d)$ تعیین کند آیا دنبالک x زیردنبالک y هست یا نه.

(ج) فرض کنید n دنبالک داریم که با $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$ نشان می‌دهیم و بعد آن d است.

با الگوریتمی با زمان $O(d \log d * n^2)$ تلاش کنید بلندترین دنباله $(A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, \dots, A_{ik})$ را پیدا کنید به طوریکه به ازای $1 \leq j \leq k-1$ $A_{ij} < A_{i(j+1)}$ ام قرار بگیرد.

2- علی در شهر علی آباد در یک کشور با n شهر گیر افتاده است. بین هر دو شهر یک جاده یک طرفه یا دو طرفه وجود دارد. او در هر مرحله می‌تواند یکی از جاده‌ها را انتخاب کرده و از این سمت جاده به آن سمت جاده برود. مدت زمانی که طول می‌کشد از شهر i به شهر j برود را $s(i, j)$ می‌نامیم.

مشکل اصلی علی این است که هر جاده ای که طی می‌کند به اندازه $s(i, j)$ باید پول خرج کند. اما در یک سری از این شهرها (به جز علی آباد) بانک وجود دارد که علی می‌تواند به آنها مراجعه کند و 1 واحد به پولهایش اضافه می‌شوند. در یک سری از جاده‌ها هم صرافی (!) وجود دارد که علی با گرفتن ارز می‌تواند 2 واحد پول به پول هایش اضافه کند. علی می‌خواهد بداند آیا می‌تواند از علی آباد شروع کرده و دوباره با مقدار پول بیشتری از آنچه سفرش را با آن آغاز کرده بود به آبادی خود برگردد؟

به علی کمک کنید که ببیند در کشور می‌تواند چنین مسافرتی را انجام دهد یا نه. مرتبه زمانی الگوریتم شما باید با حاصلضرب تعداد جاده‌ها و تعداد شهرها متناسب باشد.

3- فرض کنید می‌خواهیم در گراف وزن دار بدون جهت کوتاهترین مسیر از u به v بیابیم که دقیقاً $1 \leq k \leq n$ یال دارد. الگوریتم کارآمد برای چنین الگوریتمی نشان دهید یا نشان دهید چنین مسیری وجود ندارد. (لزومی ندارد این مسیر ساده باشد یعنی می‌توانیم راس تکراری در دنباله (u, \dots, v) داشته باشیم)

4- (الف) فرض کنید یکبار MST یک گراف وزن دار بدون جهت را به دست آورده ایم. حالا چند راس به آن اضافه شده اند. کدام یک از الگوریتم‌های پریم یا کروسکال به ما کمک می‌کند؟ چرا؟ (این کار را در هر دو الگوریتم بررسی کنید)

(ب) اگر در گراف وزن دار بدون جهت وزن یال‌ها روی فاصله 0 تا 1 به صورت یکنواخت توزیع شده باشد، کدام یک از الگوریتم‌های کروسکال یا پریم سریعتر می‌تواند عمل کند؟ چرا؟ (راهنمایی: چه الگوریتمی می‌تواند با فرض یکنواختی با زمانی کمتر از زمان معمول حل شود؟)

5-فرض کنید در گراف وزن دار و بدون جهت $G(V,E)$ درخت گلوگاه یک درخت است که بزرگ ترین وزن یال آن در تمام درخت های پوشا کمینه است.

الف) ثابت کنید که MST درخت گلوگاه است.

ب) یک الگوریتم با زمان خطی طراحی کنید که با داشتن گراف و عدد b تعیین کند آیا b بزرگتر مساوی مقدار گلوگاه (بزرگترین یال) است یا نه.

6-گراف وزن دار بدون جهت G را فرض کنید. یک جنگل، گرافی است که هیچ دوری ندارد (و ممکن است همبند هم نباشد). F زیرگرافی از G است که جنگل است. کم هزینه ترین درخت پوشا را بیابید که شامل F هم بشود.