به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی ششم

موعد تحویل: شنبه ۲۴ خرداد ۹۹، ساعت ۲۳:۵۵

طراح: ژیوار صورتی حسن‌زاده zhivarsourati@gmail.com

---

۱. (12pts) به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- تعریفی برای مسائل np-complete ارائه دهید.
- تعریفی برای مسائل np-hard ارائه دهید.
- چرا از reduction در حل مسائل np-complete استفاده می‌شود ؟

پاسخ :به جزوه مراجعه شود.

۲. (12pts) درستی یا نادرستی هر کدام از عبارات زیر را مشخص نمایید.

- اگر یک مسئله np-complete در زمان خطی حل شود، تمام مسائل np-complete را می‌توان در زمان خطی حل کرد.
پاسخ: نادرست، از آنجا که فرآیند کاهش، فرآیندی چندجمله‌ای و نه لزوما خطی است پس لزومی برای حل همه مسائل np-complete وجود ندارد.
- اگر یک مسئله np در زمان چندجمله‌ای حل شود، تمام مسائل np را می‌توان در زمان چندجمله‌ای حل نمود.
پاسخ: نادرست، اگر p برابر با np بود می‌توانستیم همچنین ادعایی کنیم اما از آنجا که نمی‌توان همچین ادعایی بدون اثبات آن کرد و شرطی که برای آن داریم این است که مسئله گفته شده از کلاس np-complete باشد پس این گزاره نادرست است.

۳. (14pts) ثابت کنید مسئله زیر در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد.

در ابتدا ثابت کنید این مسئله در کلاس پیچیدگی np قرار دارد و پس از آن مسئله vertex-cover را به آن کاهش دهید.
گراف G و عدد k داده شده‌اند. آیا می‌توان با حذف حداکثر k رأس از گراف G آن را خالی از دور کرد.
پاسخ: ابتدا k رأس از گراف داده شده حذف می‌کنیم پس از آن نیز الگوریتم وجود دور را اجرا می‌کنیم که هر دو این کارها در زمان چندجمله‌ای قابل انجام است.

برای این کار فرض می‌کنیم گرافی که برای ورودی مسئله vertex-cover داده شده‌است G نام دارد. حال گراف G' را به این شکل می‌سازیم که به تعداد رأس‌های گراف G برای آن رأس در نظر گرفته و همینطور برای یال‌های آن نیز به ازای هر کدام از یال‌های گراف G دو یال جهت‌دار از دو رأس یال به صورت رفت و برگشت رسم می‌کنیم. به این شکل می‌توان گراف ورودی را به گرافی جهت‌دار برای مسئله داده شده تبدیل کرد. ادعا می‌کنیم که vertex-cover در گراف G جواب مسئله برای گراف G' نیز است. به عنوان برهان خلف در نظر بگیرید دوری در گراف G' وجود دارد که رأس های آن رأس هایی غیر از رأس های جواب مسئله vertex-cover است. در این صورت اگر دو رأس مجاور در گراف G' در نظر بگیرید می‌توان نتیجه گرفت که یالی که بین آن دو رأس در گراف G بوده‌است که فرض جواب ما را برای مسئله vertex-cover بهم می‌زند که ثابت می‌کند برای هر جواب vertex-cover در مسئله G جوابی برای مسئله داده شده ما وجود دارد. حال برای طرف دوم آن نیز می‌توان به همین شکل در نظر گرفت که در نتیجه آن ثابت می‌شود که جواب vertex-cover جوابی برای مسئله داده شده ما نیز هست.

۴. (16pts) ثابت کنید مسئله زیر در کلاس پیچیدگی np-complete قرار می‌گیرد.
دو گراف G1, G2 را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا گراف G۱ زیرگراف G۲ است یا خیر به بیان دیگر می‌خواهیم بررسی کنیم آیا تناظر یک به یکی برای رئوس G۱ به رئوس G۲ که یال‌های آن نیز وجود داشته باشند وجود دارد یا خیر.
برای این کار در ابتدا ثابت کنید که این مسئله در کلاس پیچیدگی np قرار دارد و پس از آن با کاهش مسئله دیگری که می‌دانید در این

کلاس قرار دارد جواب مسئله را کامل کنید.

پاسخ: برای اثبات اینکه این مسئله در کلاس np قرار دارد به این شکل می‌گوییم که با توجه به این که تابعی برای تناظر یک به یک آن‌ها وجود دارد می‌توان این کار را در $O(n+m)$ برای بررسی رئوس و یال‌های گراف G۱ انجام داد که همانطور که مشاهده می‌کنید این کار در زمان چندجمله‌ای قابل انجام است پس این مسئله در کلاس np قرار دارد.
برای ادامه حل مسئله clique را در نظر می‌گیریم و آن را به مسئله داده شده کاهش می‌دهیم. به این شکل که فرض کنید گراف داده شده برای مسئله clique ، G است و عدد داده شده نیز k است. برای این منظور گراف G۱ را گرافی کامل با k رأس در نظر می‌گیریم همینطور گراف G۲ را نیز گراف G در نظر می‌گیریم. حال می‌توانید به راحتی ببینید که انجام این کار یعنی ساخت گراف G۱ با توجه به اینکه به اندازه حداکثر k رأس دارد $(O(n^2))$ زمان نیاز خواهدداشت همینطور اینکه می‌توان به سادگی دید که اگر در گراف درست شده ما clique به اندازه k داشته باشیم گراف G۱ زیر گراف G۲ خواهدبود و برعکس.به این ترتیب توانستیم مسئله clique را به مسئله داده شده کاهش بدهیم که در نتیجه ثابت می‌شود که این مسئله نیز در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد.

۵. (16pts) مسئله ای به این شکل در نظر بگیرید که مجموعه های $A_1, A_2, A_3, ...A_r$ و همینطور $B_1, B_2, B_3, ...B_s$ را داریم. می‌خواهیم بررسی کنیم آیا مجموعه T وجود دارد که روابط زیر برقرار باشند یا خیر ؟

$|T \cap A_i| \geq 1 for i = 1, 2, 3, ..., r$

$|T \cap B_j| \leq 1 for j = 1, 2, 3, ..., s$

نشان دهید مسئله داده شده در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد.

برای این کار در ابتدا ثابت کنید که این مسئله در کلاس پیچیدگی np قرار دارد و پس از آن با کاهش مسئله 3-cnf-sat به این مسئله ثابت کنید این مسئله در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد.

پاسخ: برای قسمت اول حل با توجه به اینکه بررسی شرط های گفته شده برای هر A_i, B_j به تعداد محدود و در نتیجه چند جمله‌ای است پس می‌توان ثابت کرد این مسئله در کلاس np قرار می‌گیرد. برای ادامه حل مسئله 3-cnf-sat را در نظر بگیرید که در آن $C_1, C_2, C_3, ...C_m$ ، clause های ما هستند و همینطور $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ ، variable های ما هستند که در مسئله اصلی برای این variable ها $x_1, ...x_n, y_1, ...y_n$ را در نظر می‌گیریم که y ها variable منفی x ها هستند.

حال A ها را به شکل variable های داخل هر clause در نظر می‌گیریم به این شکل که اگر داریم: $C_1 = x_1 \vee !x_4 \vee x_5$ در نتیجه داریم $A_1 = \{x_1, y_4, x_5\}$ و همینطور برای هر B نیز به این شکل هر کدام از آن‌ها را تشکیل می‌دهیم $B_i = \{x_i, y_i\}$. حال اگر T را به شکل همه variable هایی که درست هستند و یا True هستند در نظر بگیریم اندازه آن n خواهد شد چون برای هر variable یا x و یا y درست هستند. همینطور اگر برای 3-cnf-sat جواب وجود داشته باشد از هر clause حداقل یکی از variable ها درست هستند و همینطور اگر بیش از یکی نیز درست بود نیز اشکالی در حل ایجاد نمی‌شود که در نتیجه آن شرط اول درست خواهد بود و همینطور شرط دوم نیز به شکل بدیهی درست است پس ثابت می‌شود که این مسئله نیز در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد.

۶. (14pts) در نظر بگیرید که ماشین گشتی وجود دارد که هر بار از ایستگاه خود شروع می‌کند و مسیرهایی را طی می‌کند و سپس دوباره به ایستگاه برمی‌گردد. همچنین در نظر بگیرید که هر مسیر طولی دارد. مسیر های مختلفی نیز برای او وجود دارند که بسته به نوع گشت زنی اش طول مسیر متفاوت می‌شود. حال می‌خواهیم ببینیم آیا مسیری به اندازه k برای گشت زنی وجود دارد یا خیر.

برای این کار در ابتدا ثابت کنید که این مسئله در کلاس پیچیدگی np قرار دارد و پس از آن با کاهش مسئله subset-sum به این مسئله ثابت کنید این مسئله در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد.

پاسخ: برای اینکه ثابت کنیم مسیر ارائه شده جوابی برای مسئله است یا خیر به راحتی می‌توانیم مسیر گفته شده در جواب را روی نقشه و یا همان گراف مسئله بررسی کنیم که این ثابت می‌کند این مسئله در کلاس np قرار دارد.
حال برای آنکه مسئله subset-sum را به این مسئله کاهش بدهیم نیز به این شکل عمل می‌کنیم که در ابتدا یک رأس در کل گراف در نظر می‌گیریم که این رأس همان مبدأ شروع حرکت است، همینطور به ازای هر کدام از عناصر موجود در مجموعه داده شده برای مسئله subset-sum یک self-loop با وزنی به مقدار عدد آن عنصر در نظر می‌گیریم. همینطور عددی که می‌خواهیم مجموع به آن برسد را نیز طول مسیری که می‌خواهیم ماشین گشت طی کند در نظر می‌گیریم. در نظر داشته باشید که در این گراف برای پیمودن مسیر با طول k با

توجه به اینکه نمی‌توان از یال ها که همان طوقه‌ها هستند دوبار عبور کرد پس مسیری با طول k در حقیقت تشکیل شده از چند طوقه که همان شامل شدن بعضی عناصر در مجموعه داده شده subset sum است، می‌باشند. به سادگی می‌توان بررسی کرد که هر مسیر به طول k در گراف جوابی برای مسئله subset-sum به ما خواهد داد همینطور برعکس یعنی هر جواب مسئله subset-sum مسیری با طول k که متناظر با آن در گراف است را به ما خواهد داد که در این صورت ثابت کردیم این مسئله نیز در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد.

۷. (16pts) مسئله‌ای را در نظر بگیرید که در آن شکارچی‌ای داریم که او نقشه محوطه‌ای را دارد که در آن تعدادی شهر وجود دارند و همینطور راه‌های بین شهرها در نقشه به او نشان داده شده‌است. شکارچی در طول مسیر می‌تواند به اندازه حیوان‌هایی که تخمین زده شده در مسیر وجود دارند شکار کند و سود بدست بیاورد. همینطور در نظر بگیرید که اگر شکارچی یکبار مسیر را طی کند و حیوان‌های مسیر را شکار کند بار دوم که از آن مسیر عبور کند دیگر حیوانی وجود ندارد که آن‌ها را شکار کند. همینطور شهرهایی که در نقشه وجود دارند برای این هستند که شکارچی در آن‌ها استراحت کند و همینطور غذا بخورد که موارد گفته شده نیز هزینه‌هایی برای او در پی خواهندداشت که هر زمانی که شکارچی وارد شهری شود به مقدار هزینه‌ای که برای هر شهر معین شده از او گرفته خواهدشد. در نقشه داده شده هم هزینه‌های شهرها و هم اطلاعات مربوط به سود تخمینی در پیمودن هر راه داده شده است. حال ما می‌خواهیم سود گرفته شده شکارچی را به بیشترین مقدار خودش برسانیم و سؤال نیز این است که آیا با نقشه داده شده امکان گرفتن سود مقدار k وجود دارد یا خیر.تعریف سود را نیز به این شکل در نظر بگیرید که هزینه کسب شده در راه‌های طی شده با در نظر گرفتن هزینه‌های کسری در شهرها.

برای این کار در ابتدا ثابت کنید که این مسئله در کلاس پیچیدگی np قرار دارد و پس از آن با کاهش مسئله ham-cycle به این مسئله ثابت کنید این مسئله در کلاس پیچیدگی np-complete قرار دارد.
پاسخ: برای آنکه ثابت کنیم مسئله گفته شده در کلاس np قرار دارد راه حلی را در نظر میگیریم که در حالت بیشینه خود |V||E| هزینه خواهدداشت با توجه به اینکه راه تکرار رفتن برای شکارچی سودی در پی نخواهدداشت که می‌توان دید این هزینه به شکل چندجمله‌ای است و ثابت می‌کند که مسئله گفته شده در کلاس np قرار دارد.
برای گام بعدی و کاهش ham-cycle نیز به این شکل در نظر بگیرید که گراف G را برای مسئله ham-cycle داریم و می‌خواهیم آن را به مسئله گفته شده تبدیل کنیم. گراف G' را برای گراف مسئله در نظر می‌گیریم که از روی گراف G ساخته می‌شود. به ازای هر کدام از رئوس گراف G رأسی در گراف G' در نظر میگیریم که هزینه $|E| + 1$ را خواهد داشت و همینطور یالی به خودش با هزینه $2(|E| + 1)$ خواهدداشت. به ازای هر یال در گراف G نیز یالی با هزینه 1 در گراف G' در نظر می‌گیریم. k را نیز |V| در نظر می‌گیریم. اگر شکارچی بخواهد بیشترین سود را بگیرد با توجه به اینکه نباید یال ها را چند بار طی کند پس از هر رأس به رأس بعدی رفته و همینطور self-loop ها را نیز طی می‌کند تا در نهایت به مقدار |V| سود کند. برای اثبات این راه نیز می‌توانید به این شکل در نظر بگیرید اگر شکارچی بخواهد سود موجود در self-loop ها را بگیرد حتما باید به هر شهر وارد شود که در آن صورت نیز باید هزینه ماندن در شهر را بپردازد که به نوعی با هم خنثی می‌شوند. همینطور شکارچی به هر شهر بیش از یکبار نمی‌رود به این دلیل که حداکثر |E| با هزینه 1 داریم که هزینه ماندن در شهر که $|E| + 1$ است را جبران نمی‌کند. در حالت کلی نیز برای گرفتن سود |V| شکارچی باید همه شهرها را طی کند. با توجه به اینکه در این راه شکارچی از هر شهر دقیقا یکبار می‌گذرد اگر مسیر شکارچی را بدون self-loop ها در نظر بگیریم راه حل برای مسئله ham-cycle نیز درست است.