

به نام خدا

امتحان سوم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (بهار ۱۴۰۰)

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

امتحان شامل سه بخش است و از هر بخش شما باید فقط و فقط یک سوال را حل کنید. برای انتخاب سوال مربوط به خود به توضیحات بالای هر بخش توجه کنید. برای انتخاب سوال خود فرض کنید شماره دانشجویی شما $ABCDEFGHI$ باشد و مقادیر A تا I را با توجه به شماره دانشجویی خود در هر بخش جایگزین کنید. برای مثال اگر شماره دانشجویی شما 894456123 است مقدار $A = 8$ و مقدار $H = 2$ خواهد بود. لطفاً در بالای برگه جواب حتماً علاوه بر نام و نام خانوادگی شماره دانشجویی و شماره سوال مربوط به خود را بنویسید

بخش اول (۲۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود سوال زیر را حل کنید

۱. در این سوال هدف اجرای الگوریتم پیدا کردن کد هافمن (huffman code) است. فرض کنید تعداد ۸ کاراکتر با فراوانی‌های زیر به عنوان ورودی داده شده‌اند. الگوریتم پیدا کردن کد هافمن را بر روی این ورودی اجرا کنید، مراحل رسیدن به جواب را به طور دقیق مشخص کنید و کد نهایی هر کاراکتر را تعیین کنید
دقت کنید که مقادیر I ، G و H را باید از روی شماره دانشجویی خود محاسبه و جایگزین کنید.

f_a	f_b	f_c	f_d	f_e	f_f	f_g	f_h
I	1	6	$G + H$	10	$G \times H + 1$	$I + G$	2

بخش دوم (۴۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار G و I را محاسبه کنید. اگر باقیمانده $G + I$ بر ۲ به ترتیب ۰، ۱ بود به ترتیب سوال ۲ یا ۳ را حل کنید.

۲. تعدادی گل بروی یک خط کاشته شده‌اند و هدف ما پیدا کردن کمترین تعداد فواره برای آبیاری تمامی گل‌ها است. دقت کنید که هر فواره را می‌توان در هر نقطه‌ای بروی خط قرار داد و هر فواره k متر قبل و k متر بعد از خود را آبیاری می‌کند (تمام فواره‌ها یکسان هستند). برای آبیاری هر گل کافی است که حداقل در محدوده یک فواره قرار گیرد.
در ورودی یک آرایه به طول n از اعداد طبیعی داده شده است که عدد i -ام آرایه مشخص می‌کند که گل i -ام در فاصله چند متری از مبدا واقع شده است. همچنین عدد k که مشخص کننده محدوده آبیاری هر فواره است در ورودی داده شده است. هدف پیدا کردن کمترین تعداد فواره برای آبیاری تمامی گل‌ها است.

(آ) الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log(n))$ برای حل مسئله طراحی کنید (۲۰ نمره). در صورتی که الگوریتم شما از زمان اجرای $O(n^2)$ باشد ۵ نمره به شما تعلق خواهد گرفت.
(ب) درستی الگوریتم خود را اثبات کنید (۲۰ نمره).

۳. تعداد n فواره بروی یک خط قرار دارند. مکان فواره i -ام x_i و شعاع عملکرد آن r_i است. به بیانی دیگر فواره i -ام تمام بازه‌ی $[x_i - r_i, x_i + r_i]$ را آبیاری می‌کند. هدف این است که کمترین تعداد از فواره‌ها را روشن کنیم که تمام بازه $[0, m]$ را پوشش دهند.

(آ) الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log(n))$ برای حل مسئله طراحی کنید (۲۰ نمره). در صورتی که الگوریتم شما از زمان اجرای $O(n^2)$ باشد ۵ نمره به شما تعلق خواهد گرفت.
(ب) درستی الگوریتم خود را اثبات کنید (۲۰ نمره).

بخش سوم (۴۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار H را محاسبه کنید.
اگر باقیمانده H بر ۲ به ترتیب ۰، ۱ بود به ترتیب سوال ۴ یا ۵ را حل کنید.

۴. تعداد n سکه در اختیار دارید که ارزش سکه‌ی i -ام برابر c_i تومان است (c_i یک عدد طبیعی است). دقت کنید سکه‌ها مرتب هستند و برای هر i داریم $c_i \leq c_{i+1}$. همچنین دقت کنید که ارزش بعضی سکه‌ها می‌تواند برابر باشند. هدف شما این است که بتوانید با سکه‌های که در اختیار دارید هر مقداری بین ۱ تومان تا k تومان را بپردازید. ولی ممکن است این امکان وجود نداشته باشد. برای مثال اگر ۲ سکه با ارزش‌های ۱ و ۳ تومان داشته باشید و $k = 4$ باشد این امکان وجود ندارد. به طور مشخص نمی‌توانید ۲ تومان را با سکه‌های خود پرداخت کنید.

فرض کنید شما می‌توانید تعدادی سکه به سکه‌های خود اضافه کنید. همچنین انتخاب با شماست و می‌توانید ارزش هر سکه را مشخص کنید (البته ارزش هر سکه باید یک عدد طبیعی باشد). هدف این است که کم‌ترین تعداد سکه را اضافه کنید که بتوانید هر مقداری بین ۱ تومان تا k تومان را پرداخت کنید.

(آ) الگوریتم با زمان اجرای $O(n + \log(k))$ برای حل مسئله طراحی کنید (۲۰ نمره). در صورتی که زمان اجرا $O(n^2 + \log(k))$

باشد ۵ نمره به شما تعلق خواهد گرفت.

(ب) درستی الگوریتم خود را اثبات کنید (۲۰ نمره).

۵. فصل امتحانات است و باید برای محل برگزاری n امتحان برنامه‌ریزی کنیم. زمان امتحان i -ام بازه $[s_i, f_i]$ است. هر امتحان را می‌توان در هر کلاس برگزار کرد. فقط برنامه‌ریزی باید طوری باشد که محل برگزاری دو امتحان که از نظر زمانی اشتراک دارند متفاوت باشد. هدف این است که کم‌ترین تعداد کلاس مورد نیاز برای برگزاری این n امتحان را پیدا کنیم. برای مثال اگر ۳ امتحان داشته باشیم که در بازه‌های $[3, 6]$ و $[4, 8]$ و $[7, 9]$ برگزار می‌شوند. می‌توان این ۳ امتحان را در دو کلاس برگزار کرد. به این ترتیب که امتحان اول و سوم در یک کلاس و امتحان دوم در کلاس دیگر برگزار شوند.

(آ) الگوریتم با زمان اجرای $O(n \log(n))$ برای حل مسئله طراحی کنید (۲۰ نمره). در صورتی که زمان اجرا $O(n^2)$ باشد ۵ نمره به

شما تعلق خواهد گرفت.

(ب) درستی الگوریتم خود را اثبات کنید (۲۰ نمره).