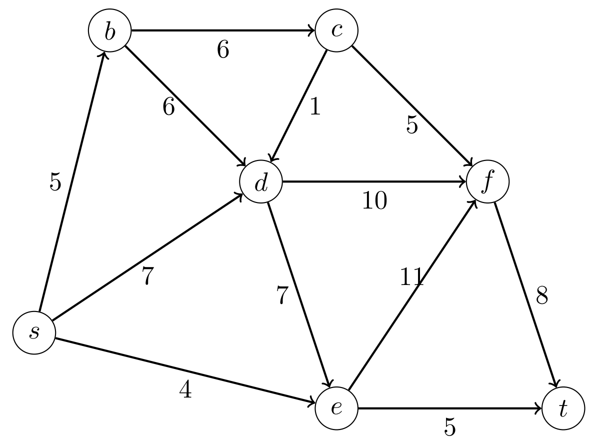
به نام خدا

امتحان پایان‌ترم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (بهار ۹۶)

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه

---

۱. الگو ریتم Edmonds-Karp را بروی گراف زیر اجرا کنید. برای هر مرحله گراف القایی و مسیر افزایشی را مشخص کنید. در اجرای الگوریتم و هنگام بررسی همسایه‌ها، همسایه‌ها را به ترتیب الفبایی بررسی کنید.



۲. هدف از این سوال اثبات درستی الگوریتم Ford-Fulkerson است. فرض کنید شبکه جریان (G, c, s, t) به منبع s و مقصد t داده شده است به طوری که برای هر یال e مقدار $c(e)$ گنجایش یال e را نشان می‌دهد. ابتدا تعاریف زیر را برای شبکه جریان (G, c, s, t) و جریان f مرور می‌کنیم:

- جریان f یک جریان **سازگار** است اگر دو شرط زیر را داشته باشد:
  - برای هر یال e داشته باشیم: $0 \leq f(e) \leq c(e)$
  - برای هر راس $u \neq s, t$ داشته باشیم: $f^-(u) = \sum_{e=(u,v)} f(e) = \sum_{e=(v,u)} f(e) = f^+(u)$
- **اندازه** جریان f که با $|f|$ نشان می‌دهیم برابر است با: $|f| = f^-(s) - f^+(s)$
- **گنجایش برش** (S, T) برابر است با: $c(S, T) = \sum_{e=(u,v)|u \in S, v \in T} c(e)$
- **جریان برش** (S, T) برابر است با: $f(S, T) = \sum_{e=(u,v)|u \in S, v \in T} f(e) - \sum_{e=(u,v)|u \in T, v \in S} f(e)$

حال ثابت کنید:

(آ) برای هر برش (S, T) خواهیم داشت: $f(S, T) \leq c(S, T)$

(ب) برای هر برش (S, T)خواهیم داشت: $|f| = f(S, T)$

(ج) اگر جریان f خروجی الگوریتم Ford-Fulkerson باشد، آنگاه یک برش (S, T) وجود دارد که $f(S, T) = c(S, T)$

(د) الگوریتم Ford-Fulkerson جریان سازگار f با بیشینه مقدار $|f|$ را پیدا می‌کند.

۳. تعداد n خانواده برای صرف شام به یک رستوران با m میز شام رفته‌اند. تعداد اعضای خانواده i برابر a_i و ظرفیت میز j در رستوران برابر b_j است. به منظور بیشینه کردن روابط اجتماعی می‌خواهیم افراد را طوری دور میزهای شام قرار دهیم به طوری‌که هیچ دو عضوی از یک خانواده دور یک میز **ننشسته** باشند. الگوریتم با زمان چند جمله‌ای ارائه دهید که تعیین کند آیا امکان قرار دادن مهمان‌ها دور میزها وجود دارد که شرط مورد نظر را برآورده کند.

۴. گراف جهت‌دار و وزن‌دار G با مجموعه رئوس $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ و m یال داده شده است. می‌دانیم هر یال جهت‌دار در این گراف به صورت $e = (i, j)$ است به طوری‌که $i < j$. الگوریتم با زمان اجرای $O(n + m)$ ارائه دهید که کوتاه‌ترین مسیرها از راس 1 به بقیه رئوس را پیدا کند. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.

۵. درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. برای ادعای خود اثبات مختصری ارائه دهید.

(آ) در صورتی که یک مسئله از کلاس NP در زمان چندجمله‌ای حل شود آنگاه $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

(ب) $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{NP\text{-}Hard}$

(ج) اگر یک از مسئله‌های کلاس NP-hard در زمان چندجمله‌ای حل شود، آنگاه تمام مسائل کلاس NP-Hard در زمان چندجمله‌ای حل خواهند شد.

۶. مسئله‌های SET-COVER و VERTEX-COVER به این صورت تعریف شده‌اند:

- **مسئله SET-COVER**: مجموعه U، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های U به نام $\mathcal{A}$، و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا زیرمجموعه‌ی $\mathcal{S}$ از $\mathcal{A}$ با k عضو وجود دارد که مجموعه U را پوشش دهد. به بیان دقیق‌تر آیا $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ وجود دارد که خواص زیر را داشته باشد:
  - $|\mathcal{S}| = k$
  - $\bigcup_{s\in\mathcal{S}} s = U$
- **مسئله VERTEX-COVER**: گراف بدون جهت G و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا می‌توان k راس از گراف را رنگ کرد به طوری به ازای هر یال حداقل یکی از دو سر آن یال رنگ شده باشد.

ثابت کنید $\mathrm{VERTEX\text{-}COVER} \leq_p \mathrm{SET\text{-}COVER}$.

۷. مسئله‌های SUBSET-SUM و KNAPSACK به این صورت تعریف شده‌اند:

- **مسئله SUBSET-SUM**: مجموعه A از اعداد طبیعی و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا زیرمجموعه‌ای از مجموعه A وجود دارد که جمع اعداد آن برابر عدد k شود.
- **مسئله KNAPSACK**: تعداد n کالا، یک کوله‌پشتی با حجم V، و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. می‌دانیم حجم کالای i برابر v_i و ارزش آن برابر w_i است. مسئله این است که آیا زیر مجموعه‌ای از کالاها وجود دارد که مجموع حجم آنها کمتر مساوی V و مجموع ارزش آنها بیشتر مساوی k شود.

هدف از این سوال این است که اثبات کنید مسئله KNAPSACK در کلاس NP-Complete قرار دارد.

(آ) ثابت کنید $\mathrm{KNAPSACK} \in \mathrm{NP}$.

(ب) ثابت کنید $\mathrm{KNAPSACK} \in \mathrm{NP\text{-}Hard}$. به این منظور نشان دهید: $\mathrm{SUBSET\text{-}SUM} \leq_p \mathrm{KNAPSACK}$.

سوال	1	2	3	4	5	6	7
نمره	10	20	15	15	15	15	15