

به نام خدا

## امتحان چهارم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (بهار ۱۴۰۰)

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

۱. گراف وزن‌دار  $G$  با  $n$  راس و  $m$  یال و زیردرخت فراگیر کمینه آن در ورودی داده شده‌اند. یال  $e$  با وزن  $w_e$  را به گراف  $G$  اضافه می‌کنیم. الگوریتمی با زمان اجرای  $O(n)$  ارائه دهید که زیردرخت فراگیر کمینه در گراف  $G + e$  را حساب کند (۳۰ نمره).

۲. گراف وزن‌دار  $G$  با  $n$  راس و  $m$  یال در ورودی داده شده‌اند. زیردرخت فراگیر بیشینه زیر درختی است که مجموع وزن یال‌های آن بیشینه شود.

(آ) الگوریتمی با زمان اجرای  $O(m \times \log(n))$  ارائه دهید که زیردرخت فراگیر بیشینه گراف  $G$  را پیدا کند (۲۰ نمره).

(ب) درستی الگوریتم خود را ثابت کنید (۱۰ نمره).

۳. گراف جهت‌دار و وزن‌دار  $G$  با  $n$  راس و  $m$  یال و راس مبدا  $s$  در ورودی داده شده‌اند. پهنای یک مسیر برابر است با وزن یال با بیشترین وزن در طول مسیر. هدف این است که برای هر راس  $v \in G$  مسیری از  $s$  به  $v$  را پیدا کنیم که کم‌ترین پهنای ممکن را داشته باشد.

(آ) الگوریتمی با زمان اجرای  $O(n + m \times \log(n))$  برای حل این مسئله ارائه دهید (۲۰ نمره).

(ب) درستی الگوریتم خود را ثابت کنید (۲۰ نمره).