

به نام خدا

## امتحان پایان ترم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (تیر ۹۹)

مدت امتحان: ۲۱۰ دقیقه

امتحان شامل نه بخش است و از هر بخش شما باید فقط و فقط یک سوال را حل کنید. برای انتخاب سوال مربوط به خود به توضیحات بالای هر بخش توجه کنید. برای انتخاب سوال خود فرض کنید شماره دانشجویی شما  $ABCDEFGHI$  باشد و مقادیر  $A$  تا  $I$  را با توجه به شماره دانشجویی خود در هر بخش جایگزین کنید. برای مثال اگر شماره دانشجویی شما 894456123 است مقدار  $A = 8$  و مقدار  $H = 2$  خواهد بود. لطفا در بالای برگه جواب حتما علاوه بر نام و نام خانوادگی شماره دانشجویی و شماره سوال مربوط به خود را بنویسید

بخش اول (۱۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار  $G$  را محاسبه کنید.  
اگر باقیمانده  $G$  بر 3 به ترتیب 0، 1 یا 2 بود به ترتیب سوال 1، 2 یا 3 را حل کنید.

۱. یک جایگشت از اعداد 1 تا  $n$  داده شده است. در هر حرکت می‌توان با استفاده از عملیات  $swap(i)$  جای عنصر  $i$ -ام و  $i+1$ -ام را عوض کنیم. الگوریتمی با زمان اجرای  $O(n \log n)$  ارائه دهید که کمترین تعداد عملیات لازم برای مرتب کردن جایگشت ورودی را محاسبه کند.

۲. مجموعه‌ای  $A$  با  $n$  عضو و عدد  $k$  به عنوان ورودی داده شده‌اند. هدف پیدا کردن زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ای  $A$  با کمترین تعداد عضو است که جمع اعضای آن بیشتر مساوی عدد  $k$  شود. الگوریتمی با زمان اجرای متوسط  $O(n)$  برای این مسئله طراحی کنید.

۳. ماتریس  $A$  با ابعاد  $n \times n$  از اعداد حقیقی به عنوان ورودی داده شده است. می‌دانیم اعداد در هر سطر و هر ستون به صورت صعودی مرتب هستند. یک الگوریتم جستجو با زمان اجرای  $O(n)$  طراحی کنید که به عنوان ورودی عدد  $x$  را بگیرد و تشخیص دهد که آیا عدد  $x$  در ماتریس  $A$  وجود دارد یا نه.

بخش دوم (۱۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار  $H$  را محاسبه کنید.  
اگر باقیمانده  $H$  بر 3 به ترتیب 0، 1 یا 2 بود به ترتیب سوال 4، 5 یا 6 را حل کنید.

۴. شما در امتحان درس الگوریتم با  $n$  سوال شرکت کرده‌اید که نمره‌ی سوال  $i$ -ام برابر  $p_i$  است. شما سوال‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنید و هر سوال را یا حل می‌کنید یا از آن سوال رد خواهید شد و دیگر به آن سوال برنخواهید گشت. فقط سوالات طاقت فرسا هستند به این معنی که اگر شما سوال  $i$ -ام را حل می‌کنید دیگر حوصله حل کردن  $f_i$  سوال بعدی را ندارید و از آنها رد خواهید شد. هدف پیدا کردن ترتیب حل کردن سوال‌ها به نحوی است که بیشترین نمره از امتحان را کسب کنید.

(آ) الگوریتمی پویا با زمان اجرای  $O(n)$  برای حل مسئله ارائه کنید و شبه کد خود را بنویسید.

(ب) الگوریتم بازگشتی حافظه‌دار (memoized) با زمان اجرای  $O(n)$  برای حل مسئله ارائه کنید و شبه کد خود را بنویسید.

۵. یک متن با  $n$  کلمه به شما داده شده است به طوری که طول کلمه  $i$ -ام برابر  $w_i$  کاراکتر است. هدف شما این است که این متن را به بهترین شکل در یک پاراگراف قرار دهید. فرض کنید هر طول سطر برابر  $m$  کاراکتر است و در چینش کلمات باید موارد زیر را رعایت کنید و هدف چینش کلمات در یک پاراگراف با کمترین هزینه است:

- بین هر دو کلمه‌ای که در یک سطر قرار دارند باید دقیقا یک فاصله وجود داشته باشد.
- اگر در انتهای یک سطر تعداد  $k$  کاراکتر خالی وجود داشته باشد، هزینه آن برابر  $p_k$  است.
- هزینه کل پاراگراف برابر جمع هزینه تک تک سطرهای آن است.

(آ) الگوریتمی پویا با زمان اجرای  $O(n^2)$  برای حل مسئله ارائه کنید و شبه کد خود را بنویسید.

(ب) الگوریتم بازگشتی حافظه‌دار (memoized) با زمان اجرای  $O(n^2)$  برای حل مسئله ارائه کنید و شبه کد خود را بنویسید.

۶. شما یک ریسمان به طول  $n$  متر در اختیار دارید و می‌توانید با ایجاد برش‌هایی، این ریسمان را به ریسمان‌های کوچکتر تقسیم کنید. تنها شرطی که دارید این است که طول ریسمان‌های نهایی باید یک عدد طبیعی باشد. در نهایت می‌توانید ریسمان‌های نهایی را بفروشید و قیمت یک ریسمان به طول  $k$  متر  $v(k)$  تومان است. هدف این است که برش‌ها را طوری ایجاد کنید که با فروش ریسمان‌های نهایی بیش‌ترین سود را ببریم.

- (آ) الگوریتمی پویا با زمان اجرای  $O(n^2)$  برای حل مسئله ارائه کنید و شبه کد خود را بنویسید.  
 (ب) الگوریتم بازگشتی حافظه‌دار (memoized) با زمان اجرای  $O(n^2)$  برای حل مسئله ارائه کنید و شبه کد خود را بنویسید.

بخش سوم (۱۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار  $I$  را محاسبه کنید.  
 اگر باقیمانده  $I$  بر 3 به ترتیب 0، 1 یا 2 بود به ترتیب سوال 7، 8 یا 9 را حل کنید.

۷. تعداد  $n$  بازه به عنوان ورودی داده شده است. فرض کنید بازه‌ی  $i$ -ام به صورت  $(s_i, f_i)$  است. هدف پیدا کردن کمترین تعداد نقاط مانند  $x_1$  تا  $x_k$  است به طوری که برای هر بازه‌ای حداقل یک نقطه داخل آن باشد. به بیان دیگر برای هر بازه  $i$  باید یک نقطه مانند  $z$  پیدا شود که  $x_j \in (s_i, f_i)$ . الگوریتمی حریصانه با زمان اجرای  $O(n \log n)$  طراحی کنید که کمترین تعداد نقاط برای پوشش بازه‌ها را پیدا کند. درستی الگوریتمی خود را اثبات کنید.

۸. تعداد  $n$  نقطه روی محور  $x$  داده شده است و فرض کنید مختصات نقطه  $i$ -ام برابر  $x_i$  است. الگوریتمی حریصانه با زمان اجرای  $O(n \log n)$  ارائه دهید که کمترین تعداد بازه بسته به طول واحد را پیدا کند که تمام نقاط را پوشش دهند. درستی الگوریتم رو را ثابت کنید.

۹. در دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه تهران در ترم آینده  $n$  درس ارائه می‌شود. درس  $i$ -ام در بازه زمانی  $[s_i, f_i]$  ارائه می‌شود. هدف دانشکده این هست که کلاس‌های درس را طوری به این درس‌ها اختصاص دهد که هیچ دو درسی که اشتراک زمانی دارند در یک کلاس برگزار نشوند. دانشکده را در این زمینه کمک کنید که کمترین تعداد کلاس برای برگزاری تمام درس‌ها در ترم آینده را پیدا کند. الگوریتمی حریصانه با زمان اجرای  $O(n \log n)$  برای این مسئله ارائه کنید و درستی الگوریتم خود را ثابت کنید. در طراحی الگوریتم خود فرض کنید که ظرفیت کلاس‌ها به اندازه کافی بزرگ است و امکان اختصاص هر کلاس به هر درسی وجود دارد.

بخش چهارم (۱۵ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار  $G$  و  $H$  را محاسبه کنید.  
 اگر باقیمانده  $G + H$  بر 3 به ترتیب 0، 1 یا 2 بود به ترتیب سوال 10، 11 یا 12 را حل کنید.

۱۰. یک جدول  $n \times n$  داده شده است که بعضی از خانه‌های آن سیاه هستند. می‌خواهیم از گوشه بالا سمت چپ این جدول شروع به حرکت می‌کنیم و به طرف گوشه پایین سمت راست می‌رویم (در هر حرکت به سمت پایین یا راست حرکت می‌کنیم). زمانی که به گوشه پایین سمت راست رسیدیم به حرکت ادامه می‌دهیم و به گوشه بالا سمت چپ بازمی‌گردیم (در مسیر بازگشت در هر حرکت به سمت بالا یا چپ حرکت می‌کنیم). هدف این است که مسیری را پیدا کنیم که از بیشتر تعداد خانه سیاه عبور می‌کند. دقت کنید که اگر از یک خانه سیاه هم در مسیر رفت و هم در مسیر برگشت عبور کنیم، این خانه تنها یک بار به حساب می‌آید. الگوریتم پویا با زمان اجرای  $O(n^3)$  برای این مسئله طراحی کنید. در صورتیکه الگوریتم شما از مرتبه زمانی  $O(n^4)$  باشد هم قسمتی از نمره به شما تعلق می‌گیرد.

راهنمایی: فرض کنید که مسیر رفت و برگشت رو همزمان و مرحله به مرحله درست می‌کنید. به بیانی دیگر فرض کنید از خانه گوشه بالا سمت چپ شروع به حرکت کردید و از طریق دو مسیر همزمان به سمت پایین سمت راست حرکت می‌کنید.

۱۱. تعداد  $n$  نفر دور میز نشسته‌اند. بعضی از این افراد دور میز با هم رابطه آشنایی دارند. دقت کنید که رابطه آشنایی دو طرفه است. هدف این است حداقل تعداد افراد رو از دور میز بلند کنیم تا برای افراد باقی‌مانده دور میز، هر فرد با دو فرد کناری خود آشنا باشد. الگوریتم پویا با زمان اجرای  $O(n^3)$  برای حل این مسئله پیشنهاد دهید.

۱۲. یک آرایه به طول  $n$  به عنوان ورودی داده شده است. در هر مرحله یک عضو این آرایه را حذف کرده و به اندازه ضرب دو عضو کناری آن سکه گرفت. توجه کنید که دو عضو ابتدا و انتهای آرایه را نمی‌توان حذف کرد. بعد از  $n - 2$  بار تکرار عمل فوق، تنها دو عنصر در آرایه باقی می‌ماند و تعدادی سکه جمع‌آوری کرده‌ایم. الگوریتمی پویا با مرتبه زمانی  $O(n^3)$  طراحی کنید که بیشترین سکه ممکن را جمع‌آوری کند.

بخش پنجم (۱۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار  $G$  و  $I$  را محاسبه کنید. اگر باقیمانده  $G + I$  بر 3 به ترتیب 0، 1 یا 2 بود به ترتیب سوال 13، 14 یا 15 را حل کنید.

۱۳. گراف بدون جهت و وزن دار  $G$  با  $n$  راس و زیردرخت فراگیر کمینه آن به نام  $T$  به عنوان ورودی داده شده‌اند. فرض کنید وزن یال  $e$  در این گراف از مقدار  $w_e$  به  $w'_e$  کاهش پیدا کرده است. الگوریتم از مرتبه زمانی  $O(n)$  طراحی کنید که زیر درخت فراگیر کمینه گراف جدید را پیدا کند.

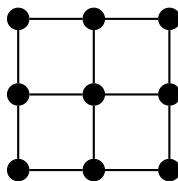
۱۴. فرض کنید ماتریس  $D$  ماتریس فاصله‌ها در گراف وزن دار  $G$  است. در حقیقت  $D[i, j]$  اندازه کوتاه‌ترین مسیر بین  $i$  و  $j$  را نشان می‌دهد. ماتریس  $D$  و گراف وزن دار  $G$  داده شده‌اند. وزن یال  $e$  از  $w_e$  به  $w'_e$  کاهش پیدا کرده است. یک الگوریتم با زمان اجرای  $O(n^2)$  ارائه دهید که ماتریس  $D$  را با توجه به کاهش وزن یال  $e$  به روز رسانی کند.

۱۵. گراف بدون جهت و وزن دار  $G$  با  $n$  راس و  $m$  یال و همچنین یال  $e \in G$  داده شده است. الگوریتمی طراحی کنید که زیر درخت فراگیر کمینه گراف  $G$  که شامل یال  $e$  است را پیدا کند. مرتبه زمانی الگوریتم شما باید  $O(m \log n)$  باشد.

بخش ششم (۱۵ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار  $I$  و  $H$  را محاسبه کنید. اگر باقیمانده  $I + H$  بر 3 به ترتیب 0، 1 یا 2 بود به ترتیب سوال 16، 17 یا 18 را حل کنید.

۱۶. مسابقات والیبال لیگ برتر به خاطر کرونا به صورت نیمه کاره تعطیل شده است. پس از تعطیلات مربوط به کرونا مسابقات از سر گرفته می‌شود. می‌خواهیم ببینیم آیا امکان دارد نتیجه‌ی نهایی مسابقات به گونه‌ای مهندسی شود که تیم مورد نظر ما قهرمان شود؟ به عبارت دیگر اگر هر بازی دقیقاً یک برنده و یک بازنده داشته باشد. آیا امکان دارد در نهایت تیم مورد نظر ما بیشترین برد را بین تمام تیم‌ها بدست آورد؟ با استفاده از شبکه جریان، الگوریتمی طراحی کنید که جواب این سوال رو پیدا کند.

۱۷. یک گرید گرافی متشکل از  $n^2$  راس است که دارای  $n$  سطر و  $n$  ستون از رئوس است. هر راس گراف، به چهار راس همسایه‌اش با یک یال بدون جهت متصل شده است (به غیر از رئوس مرزی). نمایی از یک گرید با 9 راس در ادامه آمده است. تعداد  $k$  راس از این رئوس را رنگ کرده‌ایم. هدف این است از هر کدام از رئوس رنگ شده، یک مسیر به رئوس مرزی پیدا کنیم به طوری که این مسیرها در هیچ راسی مشترک نباشند. با استفاده از شبکه جریان، الگوریتمی طراحی کنید که در ابتدا تشخیص دهد که آیا این کار امکان‌پذیر است یا نه و در مرحله بعد و در صورت امکان مسیرهای مورد نظر را پیدا کند.



۱۸. بیمارستان می‌خواهد برنامه‌ی حضور پزشکان کشیک خود را برای تعطیلات کل سال را به گونه‌ای ساماندهی کند که هر روز از تعطیلات حداقل یک پزشک کشیک در بیمارستان وجود داشته باشد. در کل سال  $k$  دوره‌ی تعطیلات وجود دارد و هر دوره ممکن است یک یا چند روز طول بکشد. به عبارت دقیق‌تر، دوره‌ی تعطیلات  $j$  -ام به میزان  $d_j$  روز طول می‌کشد. هر پزشک می‌تواند مجموعه‌ای از روزهای تعطیل را در بیمارستان حضور داشته باشد که برای پزشک  $i$  -ام، این مجموعه روزها  $S_i$  نامیده می‌شود. با استفاده از شبکه جریان، الگوریتمی ارائه دهید که برنامه‌ای برای این چیدمان ارائه دهد به طوری که شرایط زیر را برآورده کند.

- به هر روز تعطیلی فقط یک پزشک کشیک اختصاص داده شود.
- هر پزشک حداکثر  $c$  روز از کل تعطیلات را کشیک باشد.
- در هر دوره‌ی تعطیلی، هر پزشک حداکثر 1 روز از آن را کشیک باشد.

بخش هفتم (۱۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار  $G$  و  $H$  و  $I$  را محاسبه کنید. اگر باقیمانده  $G + H + I$  بر 3 به ترتیب 0، 1 یا 2 بود به ترتیب سوال 19، 20، یا 21 را حل کنید.

۱۹. مسئله‌های SUBSET-SUM و AVG-SUM به این صورت تعریف شده‌اند:

- **مسئله SUBSET-SUM:** مجموعه  $A$  از اعداد طبیعی و عدد  $k$  به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $A$  وجود دارد که جمع اعداد آن برابر عدد  $k$  شود.
- **مسئله AVG-SUM:** مجموعه  $A$  از اعداد طبیعی ورودی داده شده‌اند. فرض کنید متوسط اعضای مجموعه  $A$  برابر  $m$  باشد و به بیانی دقیق‌تر  $m = \frac{1}{|A|} \times \sum_{x \in A} x$ . مسئله این است که آیا زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $A$  وجود دارد که جمع اعداد آن برابر عدد  $m$  شود.

ثابت کنید  $\text{SUBSET-SUM} \leq_p \text{AVG-SUM}$ .

۲۰. مسئله‌های ۳-SAT و ۰/۱-PROG به این صورت تعریف شده‌اند:

- **مسئله ۳-SAT:** تعداد  $n$  متغیر منطقی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  و  $m$  عبارت منطقی  $c_1, c_2, \dots, c_m$  داده شده‌اند. در هر عبارت منطقی حداکثر از ۳ متغیر (خود متغیر یا نقیض آن) استفاده شده است که با عملگر  $\vee$  از هم جدا شده‌اند. برای مثال یک عبارت منطقی می‌تواند به صورت  $c_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$  باشد. مسئله این است که آیا امکان مقداردهی به متغیرها وجود دارد به طوری که تمام عبارت‌های منطقی در نهایت مساوی ۱ شوند.
- **مسئله ۰/۱-PROG:** تعداد  $n$  متغیر منطقی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  و تعداد  $m$  نامساوی خطی به عنوان ورودی داده شده‌اند. هر نامساوی خطی به شکل زیر نمایش داده می‌شود (در این نمایش  $-a_i$  ها و عدد  $b$  می‌توانند هر مقدار حقیقی داشته باشند):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b \quad (۱)$$

مسئله این است که آیا مقدار دهی به متغیرهای منطقی  $x_i$  وجود دارد که تمام نامساوی‌های داده شده را ارضا کند. دقت کنید که مقدار  $-x_i$  ها 0 یا 1 می‌توانند باشند.

ثابت کنید  $\text{۳-SAT} \leq_p \text{۰/۱-PROG}$ .

۲۱. مسئله‌های IND-SET و ۰/۱-PROG به این صورت تعریف شده‌اند:

- **مسئله IND-SET:** یک گراف و یک عدد  $k$  به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا می‌توان  $k$  راس از رئوس گراف  $G$  را انتخاب کرد به طوری که بین هیچ دو راس انتخاب شده‌ای یال وجود نداشته باشد.
- **مسئله ۰/۱-PROG:** تعداد  $n$  متغیر منطقی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  و تعداد  $m$  نامساوی خطی به عنوان ورودی داده شده‌اند. هر نامساوی خطی به شکل زیر نمایش داده می‌شود (در این نمایش  $-a_i$  ها و عدد  $b$  می‌توانند هر مقدار حقیقی داشته باشند):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b \quad (۲)$$

مسئله این است که آیا مقدار دهی به متغیرهای منطقی  $x_i$  وجود دارد که تمام نامساوی‌های داده شده را ارضا کند. دقت کنید که مقدار  $-x_i$  ها 0 یا 1 می‌توانند باشند.

ثابت کنید  $\text{IND-SET} \leq_p \text{۰/۱-PROG}$ .

بخش هشتم (۱۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار  $H$  را محاسبه کنید. اگر باقیمانده  $H$  بر 3 به ترتیب 0، 1 یا 2 بود به ترتیب سوال 22، 23 یا 24 را حل کنید.

۲۲. درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. برای ادعای خود دلیل مختصری ارائه دهید.

- (آ) اگر مسئله  $A \in \text{NP-Hard}$  و  $A \leq_p B$  آنگاه می‌توان نتیجه گرفت  $B \in \text{NP-Hard}$
- (ب) در صورتی که یک مسئله از کلاس  $\text{NP-Complete}$  در زمان خطی حل شود، آنگاه تمام مسئله‌های کلاس  $\text{NP}$  در زمان خطی حل خواهد شد. منظور از زمان خطی یک چند جمله‌ای درجه یک از اندازه ورودی است.
- (ج) در صورتی که  $A \leq_p B$  و  $B \leq_p C$  آنگاه  $A \leq_p C$ .
- (د) اگر گراف ورودی الگوریتم Dijkstra دور منفی داشته باشد، ممکن است الگوریتم Dijkstra متوقف نشود.
- (ه) برای پیدا کردن طولانی‌ترین مسیر بین دو راس  $s$  و  $t$  در گراف  $G$  در زمان چند جمله‌ای کافی است تمام وزن‌های گراف رو در  $-1$  ضرب کنید و سپس با استفاده از الگوریتم کوتاهترین مسیر، کوتاهترین مسیر بین  $s$  و  $t$  را در گراف جدید حساب کنید.
- (و) در یک شبکه جریان ظرفیت تمام یال‌ها بیش از یک است و مقدار جریان بیشینه شبکه نیز  $|f|$  است. اگر با افزایش ظرفیت همه‌ی یال‌ها به میزان یک واحد مقدار جریان بیشینه به  $|f| + x$  افزایش پیدا کند و با کاهش ظرفیت همه‌ی یال‌ها به میزان یک واحد مقدار جریان بیشینه به  $|f| - y$  کاهش پیدا کند، آنگاه  $x \leq y$ .
۲۳. درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. برای ادعای خود دلیل مختصری ارائه دهید.

(آ)  $\text{NP-Complete} \subseteq \text{NP-Hard}$

- (ب) در صورتی که یک مسئله از کلاس  $\text{NP}$  در زمان چندجمله‌ای حل شود آنگاه  $\text{P} = \text{NP}$ .
- (ج) در صورتی که یک مسئله از کلاس  $\text{NP-Complete}$  در زمان خطی حل شود، آنگاه تمام مسئله‌های کلاس  $\text{NP}$  در زمان خطی حل خواهد شد. منظور از زمان خطی یک چند جمله‌ای درجه یک از اندازه ورودی است.
- (د) الگوریتم Floyd-Warshall بروی گراف با دور منفی به درستی کار می‌کند و کوتاهترین مسیرها را به دست می‌آورد.
- (ه) در یک شبکه جریان ظرفیت تمام یال‌ها بیش از یک است و مقدار جریان بیشینه شبکه نیز  $|f|$  است. اگر با افزایش ظرفیت همه‌ی یال‌ها به میزان یک واحد مقدار جریان بیشینه به  $|f| + x$  افزایش پیدا کند و با کاهش ظرفیت همه‌ی یال‌ها به میزان یک واحد مقدار جریان بیشینه به  $|f| - y$  کاهش پیدا کند، آنگاه  $x \leq y$ .
- (و) در شبکه جریان  $G$ ، در صورتی که یک جریان از راس  $s$  به راس  $t$  به اندازه  $k$  وجود داشته باشد و در صورتی که در همین شبکه جریان، یک جریان از راس  $t$  به راس  $r$  به اندازه  $k$  وجود داشته باشد، آنگاه در همین شبکه جریان یک جراین از راس  $s$  به راس  $r$  به اندازه  $k$  وجود دارد.
۲۴. درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. برای ادعای خود دلیل مختصری ارائه دهید.

(آ) اگر مسئله  $A \in \text{NP-Hard}$  و  $A \leq_p B$  آنگاه می‌توان نتیجه گرفت  $B \in \text{NP-Hard}$

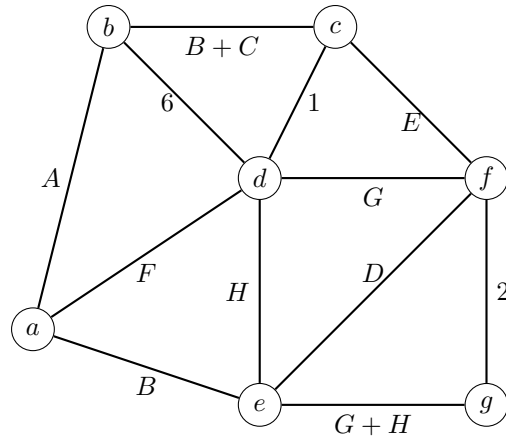
- (ب) در صورتی که یک مسئله از کلاس  $\text{NP}$  در زمان چندجمله‌ای حل شود آنگاه  $\text{P} = \text{NP}$ .
- (ج) در صورتی که  $A \leq_p B$  و  $B \leq_p C$  آنگاه  $A \leq_p C$ .
- (د) فرض کنید  $T$  درخت فراگیر کمینه گراف وزن‌دار و بدون جهت  $G$  باشد. برای هر زوج رئوس  $s$  و  $t$  کوتاهترین مسیر بین  $s$  و  $t$  دقیقاً همان مسیر بین این دو راس در درخت  $T$  است.
- (ه) فرض کنید مسیر  $P$  کوتاهترین مسیر بین راس‌های  $s$  و  $t$  در گراف  $G$  باشد. اگر وزن تمام یال‌های گراف  $G$  را دو برابر کنیم، در این صورت مسیر  $P$  همچنان کوتاهترین مسیر بین راس‌های  $s$  و  $t$  است.
- (و) در شبکه جریان  $G$ ، در صورتی که یک جریان از راس  $s$  به راس  $t$  به اندازه  $k$  وجود داشته باشد و در صورتی که در همین شبکه جریان، یک جریان از راس  $t$  به راس  $r$  به اندازه  $k$  وجود داشته باشد، آنگاه در همین شبکه جریان یک جراین از راس  $s$  به راس  $r$  به اندازه  $k$  وجود دارد.

---

بخش نهم (۱۰ نمره): مستقل از شماره دانشجویی خود سوال زیر را حل کنید. دقت کنید که در ساخت گراف سوال به شماره دانشجویی خود احتیاج دارید.

---

۲۵. گراف وزن‌دار زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید شماره دانشجویی شما  $ABCDEFGHI$  باشد و مقادیر  $A$  تا  $I$  را با توجه به شماره دانشجویی خود در این گراف جایگزین کنید. برای مثال اگر شماره دانشجویی شما 894456123 است مقدار  $A = 8$  و مقدار  $H = 2$  خواهد بود.



- (آ) الگوریتم کروسکال را بروی این گراف اجرا کنید و به طور مشخص معین کنید که در هر مرحله کدام یال انتخاب می‌شود.
- (ب) الگوریتم پریم را با شروع از راس  $a$  بروی گراف این اجرا کنید و به طور مشخص معین کنید که در هر مرحله کدام یال انتخاب می‌شود.