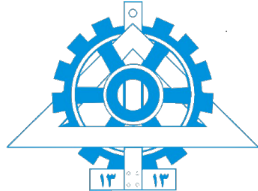


به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها



تمرین کتبی سوم

موعد تحویل: دوشنبه ۲۷ آبان ۹۸، ساعت ۹:۰۰

طراحان:

آرمان رستمی، arman.rostami.999@gmail.com

ژیوار صورتی حسن زاده، zhivarsourati@gmail.com

۱. شرکتی قصد دارد به پاس قدردانی از زحمات کارمندانش به هر کارمند بسته به امتیازشان پاداش بدهد. هر کارمند امتیازی به صورت عدد صحیح مثبت دارد. n کارمند از این شرکت برای دریافت پاداش در صفی جمع شده اند. مدیر این شرکت به کارمندان بر طبق قوانین زیر پاداش می دهد:

- هر کارمند حداقل یک واحد پاداش می گیرد
 - کارمند با امتیاز بیشتر از کارمند های مجاورش در صف بیشتر پاداش می گیرد
- الگوریتمی حریصانه ارائه دهید که حداقل میزان پاداش به کارمندان را مشخص کند. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

۲. موقعیت n نقطه در محور افقی در بازه اعداد حقیقی داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که مجموعه ای از بازه های به طول واحد ارائه دهد که تمام نقاط را شامل شود و تعداد این بازه ها کمترین باشد. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.

۳. یک لیست مرتب شده از n کلمه به شما داده شده است. طول کلمه i ام برابر w_i می باشد. می خواهیم کلمات را در تعدادی خط نمایش دهیم به طوری که هزینه کل این کار کمینه شود. طول هر خط برابر جمع طول کلمات آن خط می باشد. طول خط ایده آل برابر L می باشد و خطی با طول بیشتر از L نداریم. هزینه داشتن یک خط به طول K برابر $L - K$ می باشد. همینطور توجه داشته باشید ترتیب کلمات نباید تغییر کنند.

(آ) در صورتی که هزینه کل برابر جمع هزینه هر خط باشد، راه حلی حریصانه برای مسئله ارائه دهید. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

(ب) آیا در صورتی که هزینه کل برابر بیشینه هزینه هر خط باشد نیز راه حلی که در بخش (آ) ارائه دادید صحیح می باشد؟ در صورت درستی آن را اثبات و در غیر این صورت مثال نقض بیاورید.

۴. آرمین می خواهد برای تعطیلات آخر هفته از تهران به شیراز برود. ماشین آرمین به ازای هر لیتر بنزین یک کیلومتر راه می پیماید و گنجایش باک او C لیتر است. در مسیر تهران به شیراز n پمپ بنزین وجود دارد که پمپ بنزین i ام در فاصله d_i از تهران قرار دارد و d_i ها به صورت مرتب شده به شما داده می شوند. آرمین با باک پر شروع به سفر می کند.

(آ) آرمین می خواهد با حداقل تعداد توقف در پمپ بنزین ها سفر را به انجام برساند. الگوریتمی از مرتبه $O(n)$ ارائه دهید که به آرمین بگوید در کدام پمپ بنزین ها باید توقف کند. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

(ب) قیمت هر لیتر بنزین در پمپ بنزین i ام برابر p_i است. آرمین می خواهد با حداقل هزینه، سفرش را به اتمام برساند. الگوریتمی از مرتبه $O(n)$ ارائه دهید که به آرمین بگوید در هر پمپ بنزین باید چه مقدار بنزین خریداری کند. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.

۵. فرض کنید n پروژه باید تحویل دهید که همگی در اولین روز به شما داده می شوند. انجام پروژه i ام d_i روز زمان لازم دارد. ترتیبی برای انجام پروژه هایتان پیدا کنید که میانگین زمانی که صاحبان پروژه منتظر بوده اند که پروژه شان را انجام دهید، کمترین حالت ممکن شود. پیچیدگی الگوریتم خود را محاسبه کنید. حالا با فرض این که پروژه i ام در روز s_i به شما داده خواهد شد و شما قبل از آن روز قادر به انجام آن نیستید، سوال را جواب دهید. (فرض کنید می توانید یک پروژه را نصفه رها کنید و سراغ پروژه دیگری بروید). میانگین زمانی که صاحبان پروژه منتظر بوده اند برابر است با:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (f_i - s_i)}{n} \quad (1)$$

(f_i روزی است که پروژه i ام را تحویل می دهید و s_i روزی که پروژه را می گیرید که در بخش اول برای همه پروژه ها یک است)