



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی سوم
موعد تحویل: دوشنبه، ۳۰ فروردین، ساعت ۲۳:۵۹
طراح: علیرضا توکلی، AlirezaTa3akoli@gmail.com

سوالاتی که اثبات خواسته نشده فقط ارائه الگوریتم کافی است و در باقی موارد اثبات‌ها باید دقیق باشند.

۱. یکی از معروف‌ترین مسئله‌های الگوریتمی، مسئله‌ی کوله‌پشتی می‌باشد. در این مسئله، دزد به خانه‌ای رفته و در خانه n شیء می‌بیند. شیء i ارزش c_i و حجم v_i دارد. هم‌چنین می‌دانیم که او کوله‌پشتی با حجم V دارد و می‌خواهد بیش‌ترین ارزش ممکن را جمع‌آوری کند.

(آ) دو روش حریصانه برای انتخاب اشیاء مطرح کرده و برای هر یک مثال نقضی ارائه دهید. (۵ نمره)

(ب) اگر فرض کنیم که از هر شیء به تعداد دل‌خواه در خانه وجود داشته باشد، الگوریتم حریصانه‌ای ارائه دهید که جواب آن حداقل به اندازه‌ی نصف جواب واقعی باشد. الگوریتم باید از مرتبه‌ی $O(n \log n)$ باشد. هم‌چنین اثبات آن را نیز بنویسید. (۱۵ نمره)

۲. بهار n گربه دارد که وزن گربه‌ی i ام برابر با w_i است. هم‌چنین می‌دانیم که w_i ها طبیعی و بزرگ‌تر از ۳ هستند. تا مسابقه‌ی بزرگ تنها یک هفته مانده است و او برای آماده‌سازی گربه‌های خود از رژیم به‌خصوصی از لازانیا استفاده می‌کند؛ او می‌تواند به هر گربه آن‌قدر لازانیا بدهد که وزن گربه $1 +$ شود یا می‌تواند وزن هر گربه را همان مقدار نگه دارد و یا مدتی به گربه‌اش نان و گوجه بدهد و وزنش را $1 -$ کند. او برای بالا بردن شانس خود در مسابقات نیاز دارد گربه‌هایی با وزن‌های متفاوت داشته باشد. الگوریتمی برای او طراحی کنید که در مرتبه زمانی $O(n \log n)$ بتواند حداکثر تعداد گربه‌هایی که در روز مسابقه وزنشان با یک‌دیگر متفاوت است را بگوید. (۱۰ نمره)

۳. زهرا n ماشین اسباب‌بازی دارد. او این ماشین‌ها را در یک ردیف پشت هم چیده است. ماشین i ام از نوع a_i است. یک بازه از ماشین‌ها «اسکلتی» است اگر حداقل دو ماشین از یک نوع در آن بازه وجود داشته باشد. زهرا می‌خواهد این n ماشین را بدون تغییر مکان آن‌ها به بازه‌هایی افراز کند که تعداد بازه‌های «اسکلتی» آن بیشینه شود. فرض کنید a_i ها کوچک هستند و می‌توانید حافظه‌ای به طول بزرگ‌ترین a_i داشته باشید. الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n)$ ارائه دهید که به زهرا کمک کند. (۱۵ نمره)

۴. علی دو آرایه‌ی A و B به طول n از اعداد طبیعی دارد. او می‌تواند آرایه‌ی A را جایگشت دهد. پس از جایگشت، به ازای هر $0 \leq i < n$ که $A[i] > B[i]$ باشد، یک بستنی دریافت می‌کند. الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که در آن علی بیش‌ترین تعداد بستنی ممکن را دریافت می‌کند. (۱۰ نمره)

جایگشت دادن: عوض کردن ترتیب عناصر آرایه به طور دل‌خواه.

۵. ساجده به همراه $n - 1$ نفر از دوستانش روی خط $x = 0$ هستند. y هر کدام از این افراد با بقیه‌ی افراد فرق می‌کند. آن‌ها که کله‌پاچه را از هر چیزی بیش‌تر دوست دارند، در مقابل خود m طبخ‌ی مشاهده می‌کنند. طبخ‌ی‌ها روی خط $x = 1$ قرار دارند و y هیچ دو طبخ‌ی یکسان نیست. هر طبخ‌ی فقط به اولین آدم‌هایی که وارد شوند، کله‌پاچه مجانی می‌دهد. مثلاً اگر ۳ نفر به طور هم‌زمان وارد طبخ‌ی شوند، هر سه کله‌پاچه مجانی می‌گیرند. اما اگر این سه نفر با تأخیر نسبت به هم وارد طبخ‌ی شوند، نفر اول کله‌پاچه مجانی می‌گیرد و دو نفر دیگر باید پول کله‌پاچه‌ی خود را حساب کنند.

هر فرد تنها به یک طبخ‌ی سر می‌زند و پس از آن به طبخ‌ی دیگری نمی‌رود. سرعت افراد با هم برابر است؛ پس بین دو نفر فردی زودتر به طبخ‌ی می‌رسد که به آن نزدیک‌تر باشد. آن‌ها از بین طبخ‌ی‌های موجود، نزدیک‌ترین طبخ‌ی ممکن را برای مقصد خود انتخاب می‌کنند. در صورتی که چندین حالت برای انتخاب نزدیک‌ترین طبخ‌ی وجود داشت، حالتی را انتخاب می‌کنند که با انتخاب آن تعداد افرادی که کله‌پاچه مجانی می‌خورند بیشینه شود.

الگوریتمی بنویسید که در مرتبه زمانی $O(n \log n + m \log m)$ مقصد هر فرد و تعداد افرادی که کله‌پاچه مجانی می‌خورند را محاسبه کند. برای این سوال نیاز است الگوریتم خود را ثابت کنید. (۲۰ نمره)

۶. کورانوف که به ریاضیات علاقه پیدا کرده است، روزهای خود را با دنباله‌ای از ۰ها (به معنی روزی که در آن ریاضی نخوانده است) و ۱ها (به معنی روزی که در آن ریاضی خوانده است) نشان می‌دهد. او به دنباله‌ای از روزهای خود «روزهای گورخری» می‌گوید اگر اولین و آخرین روز را ریاضی نخوانده باشد و بین این دو را یکی در میان ریاضی خوانده باشد و نخوانده باشد. مثلاً: ۰، ۱۰، ۰ و ۱۰۱۰ روزهای گورخری هستند و ۱، ۰۱۱۰ و ۰۱۰۰ روزهای گورخری نیستند.

سلمان که از دوستان اوست، او را مشتاق می‌کند که ببیند آیا می‌توان دنباله‌ی روزهایش را به تعدادی زیردنباله‌ی «گورخری» افزایش داد یا خیر. اگر تعداد روزهای دنباله n باشد، به او کمک کنید و الگوریتمی ارائه دهید که از مرتبه‌ی زمانی $O(n)$ بتواند مشکل او را حل کند. برای این سوال نیاز است الگوریتم خود را اثبات کنید. (۲۵ نمره)

برای مثال دنباله ۰۰۰۱۱۰۱۱۰۰۰ قابل افزایش به زیردنباله‌ی ۰۱۰۱۰ و دو زیردنباله‌ی ۰۱۰ است که همه‌ی آن‌ها گورخری هستند. پس جواب بله است.

زیردنباله: به دنباله‌ای که از حذف صفر یا تعدادی از عناصر دنباله به وجود می‌آید، زیردنباله‌ی آن دنباله می‌گویند.