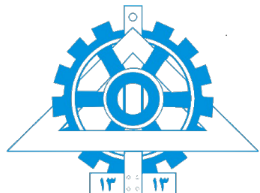


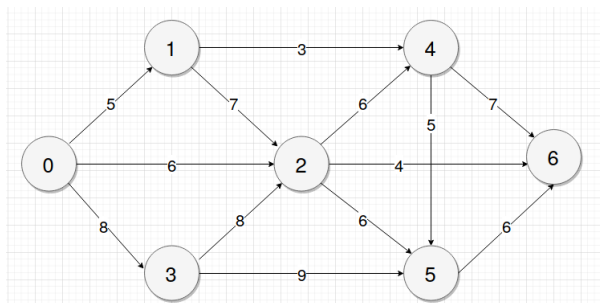
به نام خدا



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

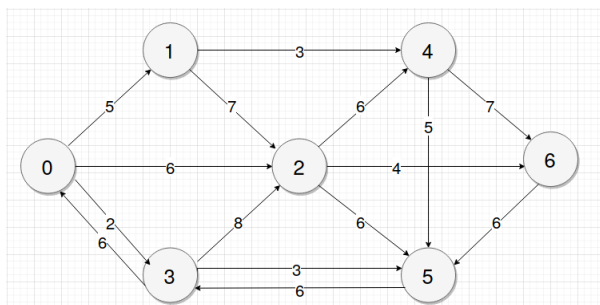
پاسخ تمرین کتبی پنجم
طراح: آرمان رستمی، arman.rostami.999@gmail.com

۱. گراف اصلی:



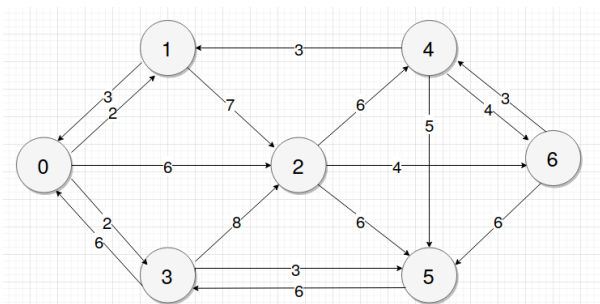
مرحله اول:

- مسیر: 0 - 3 - 5 - 6
- اندازه: ۶



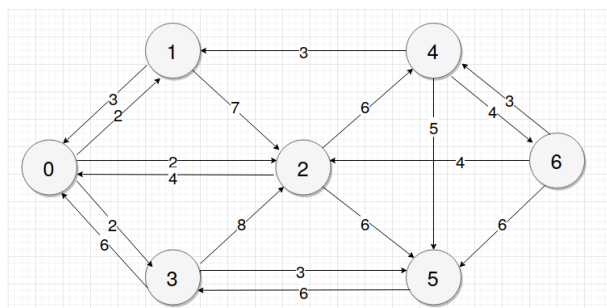
مرحله دوم:

- مسیر: 0 - 1 - 4 - 6
- اندازه: ۳



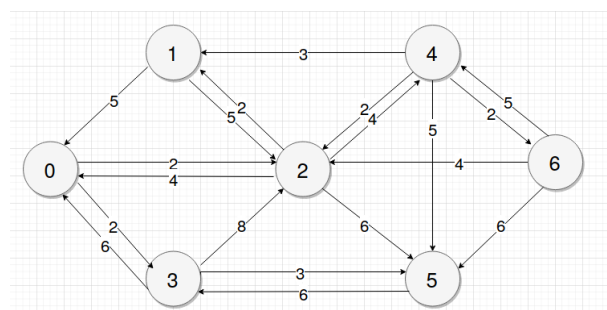
مرحله سوم:

- مسیر: 0 - 2 - 6
- اندازه: ۴



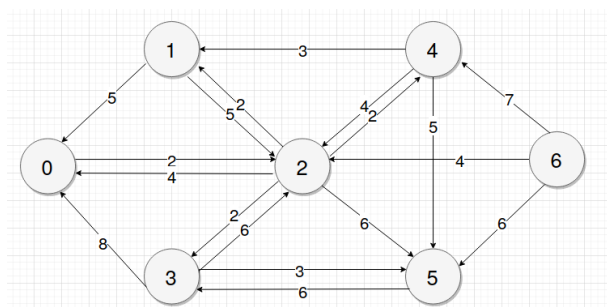
مرحله چهارم:

- مسیر: 0 - 1 - 2 - 4 - 6
- اندازه: ۲

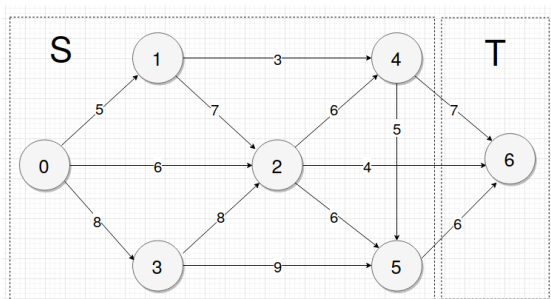


مرحله پنجم:

- مسیر: 0 - 3 - 2 - 4 - 6
- اندازه: ۲



برش کمیته:



میزان بیشینه جریان: $6 + 3 + 4 + 2 + 2 = 17$

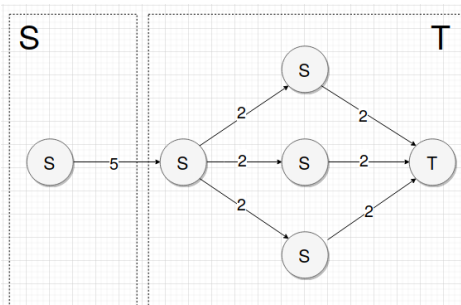
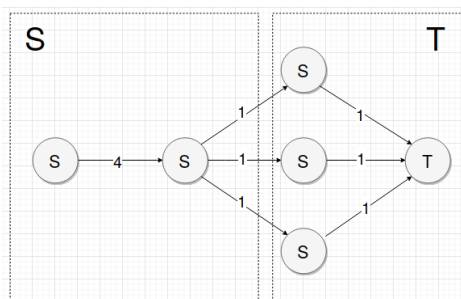
۲. یال‌هایی با کاهش ظرفیتشان به میزان یک واحد باعث کاهش جریان بیشینه می‌شوند که هم از کل ظرفیت آن‌ها استفاده شده باشد و هم بین دو راس آن‌ها مسیری جایگزین با جهت متناظر و ظرفیت حداقل یک واحد نباشد. منظور از ظرفیت مسیر حداقل ظرفیت یال‌های موجود در مسیر است.

در صورتی که از تمام ظرفیت یال مورد نظر استفاده نشده باشد، با توجه به صحیح بودن ظرفیت یال‌ها، یال مورد نظر حداقل یک واحد ظرفیت استفاده نشده دارد. در صورت کاهش ظرفیت این یال با توجه به ظرفیت استفاده نشده هنوز هم می‌توان جریانی با میزان قبلی داشت که از این یال بگذرد و تاثیری روی میزان جریان بیشینه نداشته باشد.

در صورتی که مسیر جایگزین با ظرفیت حداقل یک واحد وجود داشته باشد، با کاهش ظرفیت یال فعلی به میزان یک واحد، می‌توان یک واحد جریان کاسته شده را از مسیر جایگزین عبور داد و تغییری در میزان جریان بیشینه به وجود نخواهد آمد.

برای پیدا کردن این یال‌ها می‌توان از گراف القایی استفاده کرد. در ابتدا گراف القایی را با پیچیدگی زمانی $O(|V| + |E|)$ می‌سازیم. سپس از این گراف القایی یال‌های متناظر با یال‌هایی که در جریان بیشینه f^* به طور کامل پر شده‌اند را با پیچیدگی زمانی $O(|E|)$ حذف می‌کنیم. سپس با استفاده از الگوریتم BFS به ازای هر راس، راس‌هایی که می‌توان با مسیری به آن‌ها رسید را در زمان $O(|V| + |E|)$ پیدا می‌کنیم. حال به ازای هر یالی که در شبکه جریان f^* به طور کامل از ظرفیتش استفاده کرده باشد، بررسی می‌کنیم که مسیر جایگزینی بین راس‌های یال مورد نظر وجود دارد یا خیر. این بررسی را می‌توان با اطلاعات نگه‌داشته شده در مرحله قبل در زمان کل $O(|E|)$ انجام داد.

۳. خیر. مثال نقض:



۴. گراف دوبخشی H را از روی G به این شکل می‌سازیم: به ازای هر راس v در G ، دو راس v_{in} و v_{out} را قرار می‌دهیم. هم‌چنین به ازای هر یال (u, v) در G یال (v_{in}, u_{out}) را در H قرار می‌دهیم. ادعا می‌کنیم که عملیات خواسته شده امکان‌پذیر است اگر و تنها اگر H دارای یک perfect matching باشد.

(آ) اگر H دارای یک perfect matching باشد، متناظر یال‌های matching را در گراف G انتخاب کرده و بقیه یال‌ها را از آن حذف می‌کنیم. گراف جدید ساخته شده از روی گراف G را G' می‌نامیم. از آن‌جا که در matching ما به ازای هر راس تنها یک یال انتخاب شده است (طبق تعریف matching)، در G' به ازای هر راس دقیقاً یک راس ورودی و دقیقاً یک راس خروجی داریم و با این کار گراف G' را به تعدادی دور افراز کرده‌ایم که با هم اشتراکی ندارند.

(ب) اگر بتوان گراف G را به تعدادی دور افراز کرد که با هم اشتراکی ندارند (گراف به دست آمده از این افراز را G' می‌نامیم)، به سادگی می‌توان یک perfect matching در H از روی آن به دست آورد. به ازای هر یال u از v به G' یال u_{out} به v_{in} را در H به یکدیگر match می‌کنیم. این matching یک perfect matching است زیرا اولاً تمام رئوس پوشش داده شده‌اند، ثانیاً به ازای هر راس دقیقاً یک یال در matching آمده است. (در G' هر راس دقیقاً یک خروجی و یک ورودی دارد)

۵. از آن‌جا که هر راس در یک مسیر شروع‌شونده از s قرار دارد، باید دوری وجود داشته باشد که شامل یال (v, s) باشد. با استفاده از الگوریتم DFS این دور را که در آن هیچ یالی دارای جریان صفر نمی‌باشد را پیدا می‌کنیم. این دور حتماً وجود دارد زیرا f شرایط جریان را برآورده می‌کند. از آن‌جا که گراف همبند است، این کار $O(|E|)$ طول می‌کشد. حال جریان تمامی یال‌های موجود در دور را به اندازه یک واحد کم می‌کنیم. این کار باعث می‌شود اندازه جریان همان مقدار قبلی باقی بماند، پس جریان همچنان بیشینه است. این کار شرط محدودیت گنجایش یالی را نقض نمی‌کند زیرا تمامی یال‌های واقع در دور، قبل از این که مقدار جریانشان را کم کنیم، دارای جریان بیشتر از صفر بودند و در نهایت پایداری جریان نقض نخواهد شد زیرا برای هر راس، جریان یک یال وارد شونده به آن و یک یال خارج شونده از آن را به یک اندازه کم کرده‌ایم.

۶. گراف شبکه را به این شکل می‌سازیم که به ازای هر سخنران یک راس و در مجموع n راس برای سخنران‌ها و به ازای هر سالن یک راس و در مجموع k راس برای سالن‌ها در نظر می‌گیریم. دسته اول محدودیت‌ها مربوط به ظرفیت سالن‌هاست. به این منظور یک راس t در نظر می‌گیریم و از هر سالن یک یال با ظرفیت $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ به آن رسم می‌کنیم. دسته دوم محدودیت‌ها مربوط به این مورد است که هر سخنران قرار است حداکثر در یک سالن سخنرانی کند. به این منظور یک راس S در نظر می‌گیریم و از آن به هر کدام از راس‌های سخنران‌ها یک یال با ظرفیت یک واحد اضافه می‌کنیم. دسته سوم محدودیت‌ها مربوط به زمان رسیدن هر سخنران به هر سالن می‌باشد. به ازای هر سخنران، به ازای سالن‌هایی که سخنران می‌تواند در زمان کمتر از دو ساعت به آن‌ها برسد یک یال به ظرفیت یک واحد از راس سخنران به راس سالن در نظر می‌گیریم. جواب بیشینه جریان شبکه از راس s به t در این گراف جواب مسئله می‌باشد. هم‌چنین یال‌هایی از سخنران‌ها به سالن‌ها که از تمام ظرفیت آن‌ها استفاده شده است بیانگر اختصاص سخنران به سالن مربوطه می‌شوند. اثبات درستی جواب و اثبات کاهش مسئله به سادگی با توجه به محدودیت‌ها قابل نمایش است.