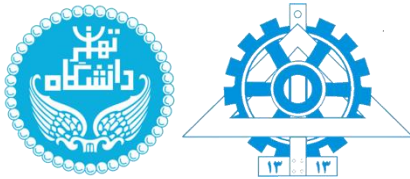


به نام خدا



طراحی الگوریتم (بهار ۱۴۰۱)

کوئیز ششم

تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۳/۲۳

مدت امتحان: ۲۵ دقیقه

مسئله ۱: گراف وزن دار G و راس r به عنوان ریشه به شما داده شده است. یک درخت پوشا در G که فاصله همه‌ی یال‌های آن از ریشه حداکثر ۲ یال باشد، درخت پوشای دو گام نامیده می‌شود. در مسئله‌ی درخت پوشای دو گام، می‌خواهیم بدانیم آیا درخت پوشای دو گامی در G می‌توان یافت که مجموع وزن یال‌های آن حداکثر k شود؟

مسئله ۲: برای افزایش کیفیت اینترنت خوابگاه، دانشگاه می‌خواهد در هر اتاق یک روتر نصب کرده یا اتاق را با کابل شبکه به اتاق دیگری که در آن روتر نصب شده متصل کند (اتصال کابل بین دو اتاق بدون روتر بی‌فایده است). هزینه نصب روتر در اتاق i برابر r_i و هزینه نصب کابل از اتاق i به اتاق j برابر $c_{ij} = c_{ji}$ است. مسئول خوابگاه می‌خواهد بداند آیا می‌توان با (حداکثر) بودجه k ، اینترنت با کیفیت را به همه‌ی اتاق‌ها رساند؟

اگر بدانیم مسئله ۱، NP-hard است، ثابت کنید مسئله ۲ نیز NP-hard است.

پاسخ: (۱۰ نمره تشخیص جهت تقلیل، ۴۰ نمره ساخت گراف G ، ۲۰ نمره طرف اول و ۲۰ نمره طرف دوم)

دوم تقلیل) باید ثابت کنیم که مسئله ۲ \leq_p مسئله ۱ یا به عبارتی مسئله ۱ در زمان چند جمله‌ای قابل تقلیل به مسئله ۲ است. برای اینکار گراف وزن دار G را که در آن r مشخص شده در نظر می‌گیریم. از روی این گراف، گراف G' را به صورت مقابل می‌سازیم. هزینه نصب روتر r_i برای اتاق i برابر وزن یال (r, i) در صورت وجود در گراف G و برابر ∞ در صورت عدم وجود یال خواهد بود. مقدار $c_{ji} = c_{ij}$ نیز برابر وزن یال بین (i, j) در صورت وجود در گراف G و برابر ∞ در صورت عدم وجود یال خواهد بود. در نهایت راس r را از گراف حذف می‌کنیم. با توجه به نحوه‌ی ساخت G' ، می‌بینیم که ورودی مناسبی برای مسئله ۲ است. حال باید ثابت کنیم گراف G درخت پوشای دوگامی به وزن حداکثر k خواهد داشت اگر و تنها اگر در گراف G' بتوان اینترنت با کیفیت را به همه‌ی اتاق‌ها با حداکثر بودجه k رساند.

الف) اگر در گراف G' بتوان اینترنت با کیفیت را به همه‌ی اتاق‌ها با حداکثر بودجه k رساند در نتیجه گراف G درخت پوشای دوگامی به وزن حداکثر k خواهد داشت.

در این حالت درخت پوشای دوگامی در گراف G ، شامل یال بین r و رئوسی که روتر در آن‌ها نصب شده به علاوه یال‌هایی که به روترها متصل شده‌اند (yal بین اتاق بدون روتر و با روتر) می‌باشد. این گراف پوشا است

چون در G' همه اتاق ها به اینترنت متصل شده اند (به عبارتی به r راهی دارند). هزینه اش حداکثر k است چون در گراف G' چنین است و یال های با وزن بی نهایت که در گراف G وجود نداشته اند انتخاب نمی شوند چون در غیر اینصورت قید وزنی k نقض می شود. اگر در درخت پوشای حاصل دور وجود داشت (در صورتی که پاسخ گراف اول بهینه نباشد ولی قید وزنی در آن رعایت شده باشد) می توان دورها را در گراف در زمان چند جمله ای بررسی و حذف کرد. دقت کنید در این حالت پاسخ در صورت وجود جواب در مسئله ۲، در مسئله ۱ نیز وجود خواهد داشت.

ب) اگر گراف G درخت پوشای دوگامی به وزن حداکثر k داشته باشد، در نتیجه در گراف G' می توان اینترنت با کیفیت را به همه ی اتاق ها با حداکثر بودجه k رساند.

در این حالت، برای رساندن اینترنت، در رئوسی که در درخت پوشای دوگامی به r متصل هستند در گراف G' ، یک روتر گذاشته و به ازای بقیه یال ها کابل بین اتاق با روتر و بدون روتر اضافه می کنیم. هزینه رساندن اینترنت با توجه به نحوه ساخت حداکثر k بوده و با توجه به محدودیت فاصله دو گام از ریشه، شرط اتصال هر اتاق بدون روتر به یک اتاق با روتر برقرار خواهد شد. با توجه به پوشا بودن جواب در گراف G ، اینترنت به همه ی اتاق ها خواهد رسید.