

به نام خدا

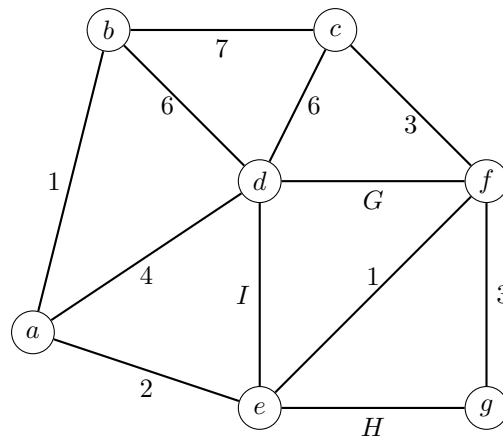
امتحان سوم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (الگوریتم‌های گراف – زمستان ۹۹)

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

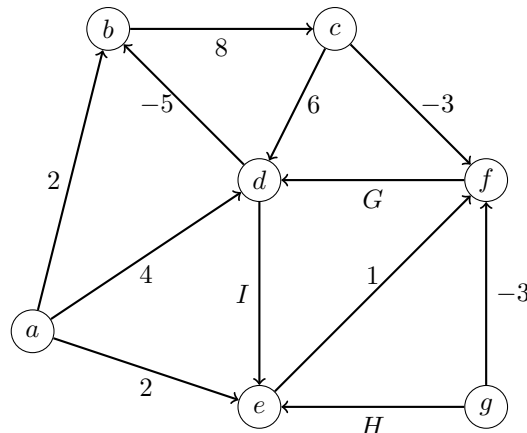
امتحان شامل سه بخش است و از هر بخش شما باید فقط و فقط یک سوال را حل کنید. برای انتخاب سوال مربوط به خود به توضیحات بالای هر بخش توجه کنید. برای انتخاب سوال خود فرض کنید شماره دانشجویی شما $ABCDEFGHI$ باشد و مقادیر A تا I را با توجه به شماره دانشجویی خود در هر بخش جایگزین کنید. برای مثال اگر شماره دانشجویی شما 894456123 است مقدار $A = 8$ و مقدار $H = 2$ خواهد بود. لطفا در بالای برگه جواب حتما علاوه بر نام و نام خانوادگی شماره دانشجویی و شماره سوال مربوط به خود را بنویسید

بخش اول (۲۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار $G + H$ را محاسبه کنید. اگر باقیمانده $G + H$ بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 1 یا 2 را حل کنید.

۱. الگوریتم Dijkstra را بر روی گراف زیر و با در نظر گرفتن راس a به عنوان مبدا اجرا کنید. دقت کنید که مقادیر G ، H و I را باید از روی شماره دانشجویی خود محاسبه و جایگزین کنید. در هر مرحله مقادیر آرایه d (ماتریس فاصله‌ها) رو به طور دقیق معین کنید.



۲. الگوریتم Bellman-Ford را بر روی گراف زیر و با در نظر گرفتن راس a به عنوان مبدا اجرا کنید. دقت کنید که مقادیر G ، H و I را باید از روی شماره دانشجویی خود محاسبه و جایگزین کنید. در هر مرحله مقادیر آرایه d (ماتریس فاصله‌ها) رو به طور دقیق معین کنید.



بخش دوم (۴۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار I را محاسبه کنید. اگر باقیمانده I بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 3 یا 4 را حل کنید.

۳. گراف وزن دار $G = (V, E)$ با n راس و m یال داده شده است. یک جنگل، گرافی است که هیچ دوری ندارد. دقت کنید که یک جنگل ممکن است همبند باشد یا نباشد. F زیرگرافی از گراف G است که جنگل است و در ورودی داده شده است. الگوریتمی با زمان اجرای $O((n+m) \log n)$ طراحی کنید که کم هزینه ترین درخت پوشای گراف G را بیابد که شامل F باشد. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

۴. گراف وزن دار $G = (V, E)$ با n راس و m یال داده شده است. ثابت کنید یال $e = (u, v)$ عضوی از یک درخت فراگیر کمینه است اگر و تنها اگر بتوان راس های گراف را به دو بخش S و T تقسیم کرد به طوریکه:

- هر راس از گراف فقط و فقط در یکی از مجموعه های S و T باشد.

- $v \in T$ و $u \in S$

- یال e کم ترین وزن را بین تمام یال های بین S و T داشته باشد.

دقت کنید که این سوال دو بخش دارد و اثبات هر دو بخش از شما خواسته شده است.

بخش سوم (۴۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار G و H را محاسبه کنید. اگر باقیمانده $G+H$ بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 5 یا 6 را حل کنید.

۵. گراف جهت دار و وزن دار $G = (E, V)$ بدون دور منفی و راس s به عنوان مبدا داده شده اند. دقت کنید که وزن یال های گراف G می تواند منفی باشد. همچنین برای هر راس $v \in V$ عدد $g[v]$ داده شده است که نشان می دهد کوتاه ترین مسیر از s به v چند یال دارد. برای مثال اگر $f[v] = 3$ باشد به این معنی است که کوتاه ترین مسیر از s به v دارای 3 یال است. الگوریتمی با زمان اجرای $O(|E| + |V|)$ طراحی کنید که با گرفتن گراف G و آرایه g اندازه تمام کوتاه ترین مسیرها از راس s به بقیه رئوس در گراف را پیدا کند.

۶. گراف جهت دار و وزن دار $G = (E, V)$ با وزن های مثبت و راس s به عنوان مبدا داده شده اند. همچنین برای هر راس $v \in V$ عدد $f[v]$ داده شده است که نشان می دهد راس v چندمین نزدیک ترین راس به راس s است. برای مثال اگر $f[v] = 1$ باشد به این معنی است که راس v نزدیک ترین راس به راس s است و اگر $f[v] = |V|$ باشد به این معنی است که راس v دورترین راس از راس s است. الگوریتمی با زمان اجرای $O(|E| + |V|)$ طراحی کنید که با گرفتن گراف G و آرایه f اندازه تمام کوتاه ترین مسیرها از راس s به بقیه رئوس در گراف را پیدا کند.