

به نام خدا

امتحان چهارم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها - زمستان ۹۹

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

امتحان شامل سه بخش است و از هر بخش شما باید فقط و فقط یک سوال را حل کنید. برای انتخاب سوال مربوط به خود به توضیحات بالای هر بخش توجه کنید. برای انتخاب سوال خود فرض کنید شماره دانشجویی شما $ABCDEFGHI$ باشد و مقادیر A تا I را با توجه به شماره دانشجویی خود در هر بخش جایگزین کنید. برای مثال اگر شماره دانشجویی شما 894456123 است مقدار $A = 8$ و مقدار $H = 2$ خواهد بود. لطفا در بالای برگه جواب حتما علاوه بر نام و نام خانوادگی شماره دانشجویی و شماره سوال مربوط به خود را بنویسید

بخش اول (۳۰ نمره): توجه به شماره دانشجویی خود مقدار H را محاسبه کنید.
اگر باقیمانده H بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 1 یا 2 را حل کنید.

۱. درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. برای ادعای خود اثبات مختصری ارائه دهید.

(آ) اگر مسئله $A \in \text{NP-Hard}$ و $A \leq_p B$ آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $B \in \text{NP-Hard}$

(ب) اگر یک از مسئله‌های کلاس NP-Complete در زمان چندجمله‌ای حل شود، آن‌گاه تمام مسائل کلاس NP-Complete در زمان چندجمله‌ای حل خواهند شد.

(ج) $\text{NP-Complete} \subseteq \text{NP-Hard}$

(د) در صورتی که یک مسئله از کلاس NP-Complete در زمان خطی حل شود، آن‌گاه تمام مسئله‌های کلاس NP در زمان خطی حل خواهد شد.

۲. درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. برای ادعای خود اثبات مختصری ارائه دهید.

(آ) $\text{NP-Complete} \subseteq \text{NP}$

(ب) اگر مسئله $A \in \text{NP-Complete}$ و $A \leq_p B$ آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $B \in \text{NP-Complete}$

(ج) اگر یک از مسئله‌های کلاس NP-Hard در زمان چندجمله‌ای حل شود، آن‌گاه تمام مسائل کلاس NP-Hard در زمان چندجمله‌ای حل خواهند شد.

(د) در صورتی که یک مسئله از کلاس NP در زمان چندجمله‌ای حل شود آن‌گاه $P = \text{NP}$.

بخش دوم (۳۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار $H + I$ را محاسبه کنید.
اگر باقیمانده $H + I$ بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 3 یا 4 را حل کنید.

۳. مسئله‌های SET-COVER و VERTEX-COVER به این صورت تعریف شده‌اند:

• مسئله **SET-COVER**: مجموعه U ، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های U به نام A ، و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا زیرمجموعه‌ای S از A با k عضو وجود دارد که مجموعه U را پوشش دهد. به بیان دقیق‌تر آیا $S \subseteq A$ وجود دارد که خواص زیر را داشته باشد:

$$|S| = k -$$

$$\bigcup_{s \in S} s = U -$$

• مسئله **VERTEX-COVER**: گراف بدون جهت G و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا می‌توان k راس از گراف را رنگ کرد به طوری که از هر یال حداقل یکی از دو سر آن یال رنگ شده باشد.

ثابت کنید $\text{VERTEX-COVER} \leq_p \text{SET-COVER}$.

۴. مسئله‌های SUBSET-SUM و KNAPSACK به این صورت تعریف شده‌اند:

- مسئله SUBSET-SUM: مجموعه A از اعداد طبیعی و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا زیرمجموعه‌ای از مجموعه A وجود دارد که جمع اعداد آن برابر عدد k شود.
- مسئله KNAPSACK: تعداد n کالا، یک کوله‌پشتی با حجم V ، و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. می‌دانیم حجم کالای i برابر v_i و ارزش آن برابر w_i است. مسئله این است که آیا زیر مجموعه‌ای از کالاها وجود دارد که مجموع حجم آنها کمتر مساوی V و مجموع ارزش آنها بیشتر مساوی k شود.

ثابت کنید $\text{SUBSET-SUM} \leq_p \text{KNAPSACK}$.

بخش سوم (۴۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار $G + H$ را محاسبه کنید. اگر باقیمانده $G + H$ بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 5 یا 6 را حل کنید.

۵. مسئله‌های IND-SET و TRIANGLE-FREE به این صورت تعریف شده‌اند:

- مسئله TRIANGLE-FREE: گراف ساده و بدون جهت G و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا زیر مجموعه‌ای از رئوس G با اندازه k وجود دارد که مثلث نداشته باشد. یک گراف مثلث ندارد اگر بین هر سه رأس آن حداکثر دو یال وجود داشته باشد.
- مسئله IND-SET: گراف ساده و بدون جهت G و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا زیر مجموعه‌ای از رئوس G با اندازه k وجود دارد که هیچ یالی نداشته باشد.

هدف از این سوال این است که اثبات کنید مسئله TRIANGLE-FREE در کلاس NP-Complete قرار دارد.

(آ) ثابت کنید $\text{TRIANGLE-FREE} \in \text{NP}$.

(ب) ثابت کنید $\text{IND-SET} \leq_p \text{TRIANGLE-FREE}$.

۶. مسئله‌های FANCY-SET و 3-SAT به این صورت تعریف شده‌اند:

- مسئله FANCY-SET: مجموعه S و مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های S ، به نام C به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا می‌توان افزایشی از اعضای مجموعه S به دو زیر مجموعه S_1 و S_2 پیدا کرد به طوری که هیچ عضوی از C زیر مجموعه‌ی S_1 یا S_2 نباشد. می‌گوییم مجموعه‌های S_1 و S_2 را افزایش می‌کنند اگر اشتراک S_1 و S_2 برابر تهی و اجتماع آنها برابر S باشد.
- مسئله 3-SAT: تعداد n متغیر منطقی x_1, x_2, \dots, x_n و m عبارت منطقی c_1, c_2, \dots, c_m داده شده‌اند. در هر عبارت منطقی حداکثر از ۳ متغیر (خود متغیر یا نقیض آن) استفاده شده است که با عملگر \vee از هم جدا شده‌اند. برای مثال یک عبارت منطقی می‌تواند به صورت $c_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$ باشد. مسئله این است که آیا امکان مقداردی به متغیرها وجود دارد به طوری که تمام عبارت‌های منطقی در نهایت مساوی ۱ شوند.

هدف از این سوال این است که اثبات کنید مسئله FANCY-SET در کلاس NP-Complete قرار دارد.

(آ) ثابت کنید $\text{FANCY-SET} \in \text{NP}$.

(ب) ثابت کنید $\text{3-SAT} \leq_p \text{FANCY-SET}$.