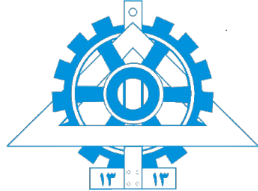


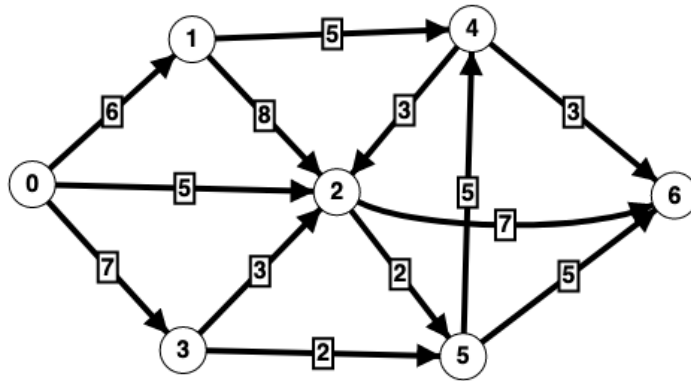
به نام خدا



## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی پنجم  
موعد تحویل: دوشنبه ۶ خرداد ۹۸،  
طراح: نوید رحیمی دانش ndanesh@outlook.com

۱. الگوریتم Edmond-Karp را بر روی گراف زیر اجرا کنید. فرض کنید در BFS همسایه‌های هر راس را به ترتیب شماره راس ملاقات می‌کنیم. در هر مرحله شبکه‌ی باقیمانده را رسم کنید. در انتها نیز min-cut گراف را مشخص کنید.



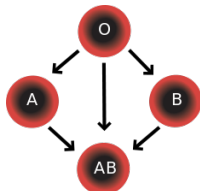
۲. فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف ساده باشد و  $s, t \in V$  دو راس از آن باشند.

(آ) الگوریتمی چند جمله‌ای ارائه دهید که مجموعه‌ای ماکسیمال از مسیرهای از  $s$  به  $t$  بدهد که مسیرها یال مشترک نداشته باشند. ماکسیمال نیز یعنی به خروجی الگوریتمتان نمی‌توان مسیری با این شرایط اضافه کرد.

(ب) آیا الگوریتم شما بیشینه تعداد مسیرها را می‌دهد یا صرفاً یک مجموعه ماکسیمال می‌دهد؟ اثبات یا رد کنید.

۳. در بیمارستانی می‌خواهیم بررسی کنیم آیا خون کافی برای انتقال داریم یا خیر. از هر گروه خونی میزان مشخص  $x_i$  واحد در بیمارستان موجود است و برای هر گروه خونی به تعداد  $y_i$  بیمار با آن گروه خونی منتظر انتقال خون هستند. سازگار بودن گروه‌های خونی نیز مطابق شکل روبرو است برای مثال خون با گروه O قابل استفاده برای تمامی بیماران میباشد.

الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن مقادیر  $x_i$  و  $y_i$  تشخیص دهد میزان خون موجود کافی‌ست یا خیر.



۴. فرض کنید  $G(V, E)$  گرافی جهت دار که گنجایش یال  $e$  آن برابر  $c(e)$  باشد و  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  جریان بیشینه از راس  $s$  به  $t$  باشد با توجه به گنجایش های  $c$ . حال فرض کنید گنجایش یال ها را به  $c'(e)$  تغییر می دهیم به طوری که شروط زیر برقرار باشد:

$$\bullet \quad \forall e \in E, \quad c'(e) \geq c(e)$$

$$\bullet \quad \forall e \in E, \quad f(e) = c(e) \implies c'(e) = c(e)$$

ثابت کنید  $f$  همچنان جریان بیشینه باقی می ماند.

۵. فرض کنید  $G(V, E)$  گرافی جهت دار است که گنجایش یال  $e$  آن برابر  $c(e)$  باشد و  $s, t \in V$  دو راس از آن باشند.

(آ) الگوریتمی ارائه دهید که جریان  $f$  را برای هر یال طوری محاسبه کند که جریانی با اندازه ی دقیقاً  $d$  که  $d$  عددی حقیقی است از  $s$  به  $t$  ایجاد شود، یا اعلام کند وجود ندارد.

(ب) فرض کنید برای هر یال علاوه بر حد بالای  $c$  یک حد پایین  $l$  نیز برای جریان آن یال متصوریم. قسمت بالا را با این شرط حل کنید.

۶. یک شرکت پخش مواد غذایی به این صورت فعالیت میکند که در هر روز میزان مشخصی  $u_i$  بسته مواد غذایی فروش دارد. این شرکت یک انبار نیز دارد که ظرفیت نامحدودی دارد اما به ازای هر بسته ی داخل انبار در هر روز میزان مشخصی  $c_i$  هزینه ی نگهداری میدهد. برای پخش این محصولات هر روز یک میزان خرید میتواند انجام دهد  $b_i$  و آن را در انبار نگهداری کند تا زمانی آن را بفروشد. فرض کنید قیمت خرید هر بسته در هر روز میزان مشخصی باشد  $p_i$ . مساله پیدا کردن مقادیر  $b_i$  است تا جمع هزینه های خرید و نگهداری کمینه شود. برای مثال اگر دو بسته در روز اول بخریم و آن را در روز سوم بفروشیم هزینه مان برابر است با  $2 * (u_1 + c_1 + c_2)$ .

فرض کنید مقادیر  $c_i, u_i, p_i$  به ازای  $n$  روز متوالی داده شده است و در روز اول انبار خالی است (برای تحویل بسته های هر روز میتوان از بسته های خریداری شده ی همان روز استفاده کرد). الگوریتمی چند جمله ای بر حسب  $n$  ارائه دهید که مقادیر بهینه  $b_i$  را محاسبه میکند.