



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی اول
موعد تحویل: دو شنبه ۲۲ مهر ۹۸، سر کلاس درس
طراح: سینا کچویی sina95kachoei@gmail.com

۱. در یک آرایه ی n تایی، می گوئیم جفت i, j یک جفت برنزی است اگر عضو های i, j دارای شرایط زیر باشند:

$$i < j \quad (\text{آ})$$

$$\text{array}[i] > 2 * \text{array}[j] \quad (\text{ب})$$

با استفاده از ایده ی تقسیم و حل الگوریتمی از مرتبه ی $O(n \log n)$ ارائه دهید که تعداد جفت های برنزی یک آرایه را به دست آورد.

۲. دو آرایه ی مرتب به طول های n, m داریم. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(\log m + \log n)$ ارائه دهید که میانه ی آرایه ی حاصل از ادغام این دو آرایه را پیدا کند.

۳. یک مرکز تشویق جوانان به ازدواج که تا امروز اطلاعات زوج های تحت تشویقش را در یک آرایه از اطلاعات نگه می داشت که در این آرایه ابتدا اطلاعات مربوط به بانوان و سپس اطلاعات مربوط به آقایان آمده بود، با شکایاتی از سمت زوج ها روبرو شده است. زوج ها دوست دارند که اطلاعاتشان در آرایه مذکور کنار همدیگر واقع شود! اگر بدانیم که در کل n زوج داریم (طول آرایه ای که داریم 2^n می باشد). و برای هر بانویی که اطلاعاتش در ایندکس i م آرایه ی مربوط به اطلاعات قرار دارد، اطلاعات همسرش در ایندکس $i + n$ قرار داشته باشد، الگوریتمی با هزینه زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید تا بدون نیاز به حافظه اضافی اطلاعات زوج ها را در خانه های کنار هم قرار دهد. (با استفاده از $swap$ کردن این کار را انجام دهید).

* توجه کنید که ترتیب قرارگیری اطلاعات خانم ها در آرایه نباید به هم بخورد، به این معنی که اگر اطلاعات خانمی زودتر از اطلاعات خانمی دیگر ثبت شده باشد پس از اجرای الگوریتم نیز این ترتیب باید رعایت شده باشد و نیز همچنین برای هر زوج ابتدا اطلاعات زن قرار گرفته و در خانه بعدی اطلاعات مرد باید قرار گیرد.

۴. n تا ورق بازی داریم که روی هر کدام یک عدد نوشته شده است. در هر مرحله می توانیم دو ورق انتخاب کرده عدد روی آن ها را مقایسه کنیم تا ببینیم با هم برابرند یا نه. می خواهیم بفهمیم که آیا بیشتر از نصف ورق ها عدد یکسانی دارند یا نه.

(آ) الگوریتمی بر مبنای تقسیم و غلبه ارائه دهید که با انجام $O(n \log n)$ مقایسه این کار را برای ما انجام دهد.

(ب) الگوریتمی ارائه دهید که این کار را با $O(n)$ مقایسه انجام دهد.

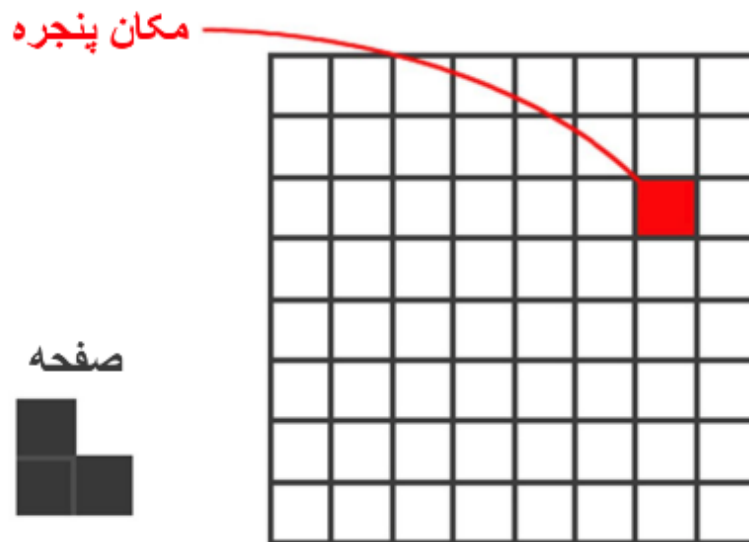
۵. آرایه ی نافرمانی به آرایه ای گفته می شود که متشکل از یک دنباله ی اکیدا صعودی و به دنبال آن یک دنباله ی اکیدا نزولی باشد. به بیان دیگر آرایه ی A به طول n نافرمان است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ به گونه ای که:

$$A[i] < A[i+1] \quad 0 < i < m \quad \text{داریم} \quad (\text{آ})$$

$$A[i] > A[i+1] \quad m < i < n \quad \text{داریم} \quad (\text{ب})$$

الگوریتمی از مرتبه ی $O(\log n)$ ارائه دهید که در یک آرایه ی نافرمان بزرگترین عنصر را بیابد.

۶. قصد داریم یک دیوار $2^n * 2^n$ را با تعدادی صفحه سنگی تزیین کنیم. یکی از خانه‌های این دیوار متعلق به یک پنجره است که نباید پوشانده شود. صفحه‌های سنگی‌ای که در اختیار داریم که L شکل هستند و سه خانه یک در یک را میپوشانند. الگوریتمی از مرتبه $O(2^{2n})$ برای تزیین کردن این دیوار با صفحه‌های داده شده ارایه کنید.



β