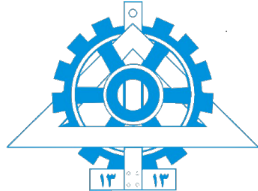




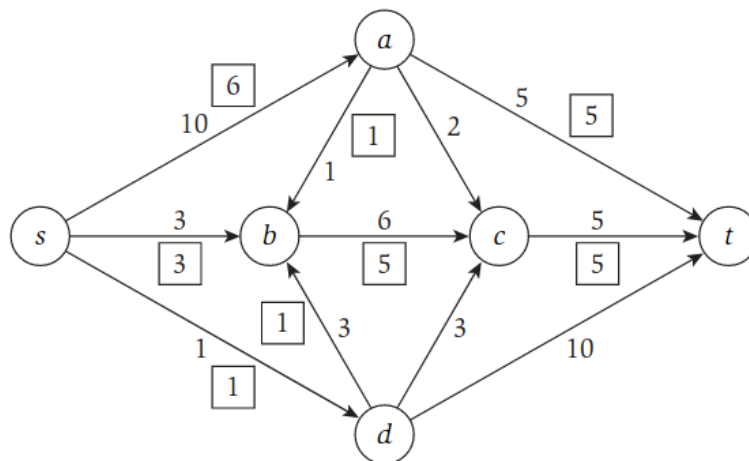
به نام خدا



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی پنجم
موعد تحویل: شنبه ۳ خرداد، ساعت ۲۳:۵۵
طراح: حسنا سادات آذرمنسا، hsazarmsa@gmail.com

۱. شبکه جریان زیر را در نظر بگیرید. عددهای کنار هر یال ظرفیت یال و عددهای داخل کادر جریانی که از یال عبور می‌کند را نشان می‌دهد. (۱۵ نمره)



- (آ) ابتدا بررسی کنید آیا جریان مشخص شده جریانی معتبری هست یا نه. دلایل خود را بیان کنید. در صورت معتبر بودن جریان، مقدار آن را مشخص کنید. (۴ نمره)
- (ب) آیا این جریان، جریان بیشینه است؟ ادعای خود را با کمک الگوریتم Ford-Fulkerson ثابت کنید. (در هر مرحله مسیر افزایشی و شبکه باقیمانده را رسم کنید). (۸ نمره)
- (ج) min-cut گراف را مشخص کنید. (۳ نمره)

۲. فرض کنید گراف شبکه $G = (V, E)$ با دو راس $s \in V$ و $t \in V$ ، ظرفیت یال c_e برای هر یال $e \in E$ و جریان f به شما داده شده است. درستی یا نادرستی موارد زیر را در این شبکه جریان با ذکر دلیل مشخص کنید. (۲۰ نمره)

(آ) با افزایش ظرفیت هر یال به میزان یک واحد، برش کمینه مربوط به این شبکه همچنان معتبر خواهد بود. (برش کمینه تغییری نمی‌کند).

(ب) در گراف شبکه حداقل یک یال وجود دارد که با افزایش ظرفیت آن، جریان بیشینه افزایش می‌یابد.

(ج) اگر ظرفیت یال $(u, v) \in E$ را یک واحد افزایش دهیم، جریان بیشینه یا ثابت می‌ماند یا یک واحد افزایش می‌یابد.

۳. فرض کنید $G(V, E)$ گرافی جهت دار که گنجایش یال e آن برابر c_e باشد و f جریان بیشینه از s به t را مشخص کند. حال فرض کنید گنجایش یال‌ها را به صورت زیر تغییر می‌دهیم. ثابت کنید f همچنان جریان بیشینه باقی می‌ماند. (۱۵ نمره)

$$\forall e \in E, c'_e \geq c_e \bullet$$

$$\forall e \in E, f_e = c_e \Rightarrow c'_e = c_e \bullet$$

۴. فرض کنید گراف $G(V, E)$ گرافی جهت‌دار است که گنجایش یال e آن برابر c_e باشد و $s, t \in V$ دو راس از آن باشند. (۲۵ نمره)

(آ) الگوریتمی ارائه دهید که جریان f را برای هر یال طوری محاسبه کند که جریانی با اندازه‌ی دقیقاً d که d عددی حقیقی است از s به t ایجاد شود، یا اعلام کند وجود ندارد. (۱۲ نمره)

(ب) فرض کنید برای هر یال علاوه بر حد بالای c یک حد پایین l نیز برای جریان آن یال متصوریم. قسمت بالا را با این شرط حل کنید. (۱۳ نمره)

۵. به علت بیماری کرونا تصمیم گرفته شده است امتحانات به صورت غیرحضورى برگزار شود. به همین دلیل استاد درس طراحی الگوریتم تصمیم گرفته است برای هر دانشجو مجموعه سوالات امتحانی متفاوتی طرح کند. در این ترم استاد n دانشجو دارد و می‌خواهد هر برگه امتحانی c سوال داشته باشد. استاد درس تصمیم می‌گیرد مجموعه‌ای سوال از هر مبحث طرح کرده و سپس آن‌ها بین برگه‌ها تقسیم کند. به طوری که یک سوال دقیقاً به یک دانشجو داده شود. تعداد مباحث درسی را p و تعداد کل سوالاتی که استاد طرح کرده است را nc در نظر بگیرید. هر سوال به یک مبحث درسی تعلق دارد و همچنین مبحث هر سوال مشخص است.

استاد با ذهن هوشمند و تجربه زیادش می‌تواند دقیق پیش‌بینی کند که هر دانشجو کدام سوالات را در زمان امتحان با فکر کردن می‌تواند حل کند. به همین دلیل استاد می‌داند هر دانشجو به کدام سوالات می‌تواند پاسخ درست دهد. از آنجایی که استاد دوست دارد تمام دانشجویانش نمره کامل در درس بیاورند می‌خواهد طوری سوالات را در برگه دانشجویانش پخش کند که به هر دانشجو فقط سوالاتی بیفتد که می‌تواند حل کند. (۲۵ نمره)

(آ) استاد می‌خواهد بداند که آیا می‌تواند سوالات را به این صورت پخش کند یا نه. اما از آنجایی که سرش شلوغ است از شما کمک خواسته است.

الگوریتمی ارائه دهید در صورت وجود راه‌حل روش تقسیم‌بندی را در اختیار استاد بگذارد یا آنکه اعلام کنید همچنین راه‌حلی وجود ندارد.

ابتدا داده‌ها، خواسته‌ها و محدودیت‌های مسئله را مشخص کنید. سپس سعی کنید این مسئله را به یک گراف شبکه مدل کنید. (۱۰ نمره)

(ب) از آنجایی که استاد دوست دارد سوالات هر برگه متنوع باشد، تصمیم می‌گیرد از هر مبحث درسی در یک برگه حداکثر یک سوال بیاورد. سوال قسمت قبل را با محدودیت جدید حل کنید. (۱۵ نمره)

repetitive 3 times