



طراحی الگوریتم

تمرین اول - تقسیم و حل

شهریار عطار و امین یوسفی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۰۷/۲۵

۱. نزدیک ترین دو جفت نقطه

۱۵ نمره

فرض کنید ۵ نقطه به صورت زیر داده شده‌اند:

$$P = \{(1, 3), (2, 6), (5, 1), (4, 3), (3, 4)\}$$

با کمک روش ارائه شده در اسلایدهای درس، نزدیک ترین جفت نقطه از بین این نقاط را پیدا کنید. مراحل کار را توضیح دهید.

۲. جا به جایی

۲۰ نمره

آرایه‌ی A به طول n داده شده است؛ شبه کدی بنویسید که تعداد عناصری را که از سه برابر عنصر پیش از خود کمتر است را در مرتبه‌ی زمانی $O(n \log n)$ برگرداند. به عبارتی تعداد j و i ها به صورتی که:

$$j > i, 3A[i] > A[j]$$

۳. باشگاه مشت‌زنی

۲۰ نمره

باشگاه مشت‌زنی محله امیرآباد، n عضو دارد. هر عضو این باشگاه، یک درجه دارد که نشان دهنده قدرت آن عضو می‌باشد. مربی باشگاه می‌خواهد یک مسابقات داخلی بین افراد باشگاه برگزار کند. این مسابقه بدین صورت است که اعضای باشگاه در یک صف قرار می‌گیرند و هرکس به افرادی که در سمت راستش قرار دارند مشت می‌زند. اگر قدرت فرد مشت زننده از کسی که مشت را دریافت می‌کند بیشتر باشد، فرد دریافت کننده مشت بیهوش می‌شود. به ازای هر شخص تعیین کنید که چند نفر بر اثر مشت او بیهوش می‌شوند. هزینه راه حل شما باید از $O(n \log n)$ باشد.

۴. تیم بر جمعیت

۲۵ نمره

باشگاه آقای امینی n عضو دارد. هر عضو این باشگاه، یک درجه دارد که نشان دهنده قدرت آن عضو می باشد. اعضای باشگاه در یک صف کنار یکدیگر قرار گرفته اند. آقای امینی می خواهد یک گروه از آن ها را برای مسابقات انتخاب کند. اعضای این گروه باید در صف از چپ به راست کاملاً صعودی باشند. هرچه تعداد اعضای گروه بیشتر باشد، شانس قهرمانی آن ها در مسابقات بیشتر است. آقای امینی که به علت قهرمانی های متعدد، مسابقات برایش کسل کننده شده است، برای انتخاب گروه، شرط جدیدی وضع می کند. این شرط این است که اختلاف درجه هر دو عضو متوالی این گروه، حداکثر به اندازه k باشد. به آقای امینی کمک کنید که بهترین گروه واجد شرایط را انتخاب کند. راه حل شما باید پیچیدگی زمان اجرای $O(n \log n)$ داشته باشد.

(راهنمایی: از درخت دودویی استفاده کنید)

۵. عضو متمایز

۲۵ نمره

یک مجموعه به نام A داریم که دارای n عضو می باشد. می خواهیم مقادیر داخل این مجموعه را به صورتی پر کنیم که به ازای هر زیر رشته در آن، حداقل یک عضو وجود دارد که مقدار آن با بقیه مقادیر داخل آن زیر دنباله متفاوت است. به عبارت دیگر:

$$\forall i, j (i \leq j \implies \exists k (i \leq k \leq j \wedge \forall t (i \leq t \leq j \wedge t \neq k \implies A[k] \neq A[t])))$$

نشان دهید که می توان مقادیر داخل مجموعه را با $1 + \lceil \log_2(n) \rceil$ عدد متفاوت پر کرد، به طوری که شرط گفته شده نقض نشود.

به طور مثال فرض کنید یک مجموعه به طول 5 داریم، اگر خانه های آرایه را به شکل زیر پر کنیم هر زیر رشته دارای حداقل یک عضو است که از بقیه متمایز است:

$$[1, 2, 3, 1, 2]$$

اگر سعی کنید این آرایه را با تعداد کمتری عدد متفاوت پر کنید همواره زیر رشته ای پیدا خواهید کرد که در آن عضوی که از بقیه متمایز باشد وجود ندارد.