



به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

طراحی و تحلیل الگوریتم ها، نیمسال اول سال تحصیلی 96-97

حل تمرین سری چهارم

2- یک گراف جهت دار تشکیل می دهیم که رئوس آن حروف هستند و اگر بتوان حرف x را به حرف y با هزینه c تبدیل کرد، یک یال جهتدار از راس x به راس y با وزن c می کشیم. حال کافیهست برای هر جایگاه در دو رشته (فرض کنید حرف اول رشته اول p و حرف اول رشته دوم q باشد) کوتاه ترین مسیر را بین آن ها پیدا کنیم (کوتاه ترین مسیر از p به q) و این کار را برای تمامی جفت حرف ها در دو رشته تکرار میکنیم. هزینه برابر جمع هزینه این کوتاه ترین مسیر ها خواهد بود.

3- لم : راس v در جنگل عمق اول گراف G نواده راس u است اگر و تنها اگر :

$$u.d < v.d < v.f < u.f$$

الف) اگر داشته باشیم $u.d < v.d < v.f < u.f$ ، مطابق لم بالا راس v یا مستقیما فرزند u است که در این حالت (u,v) یال درخت و یا نواده آن است که در این حالت یال جلویی است.

ب) بر عکس حالت الف.

پ) اگر هیچ کدام از حالت های بالا نباشد یال ضربدری خواهیم داشت که برای آن این حالات وجود دارد $(v.d < v.f \text{ و } u.d < u.f)$:

- $u.d < v.d < u.f < v.f$ که امکان ندارد زیرا اگر بعد از u وارد v شده باشیم، امکان ندارد قبل از v از u خارج شویم.

- $v.d < v.f < u.d < u.f$ که همان حالت صورت مساله است.

4- گراف G' را به این شکل می سازیم : هر کدام از مولفه های همبندی F را یک راس در نظر میگیریم و رئوسی که در هیچ مولفه همبندی نیستند به همان شکل می گذاریم. یال های بین رئوس عادی را به همان شکل میگذاریم و یال بین یک راس عادی و یک راس نماینده مولفه همبندی را یال با کمترین وزن بین آن راس و رئوس آن مولفه همبندی در نظر میگیریم. اگر بین رئوس یک مولفه همبندی با رئوس یک مولفه همبندی دیگر یال وجود داشته باشد، یال با کمترین وزن را به عنوان یال بین 2 راس آن دو مولفه همبندی در گراف G' در نظر میگیریم. حال کافیسست MST را در گراف G' پیدا کنیم. برای پیاده سازی می توان ابتدا وزن یال های F را صفر کرد سپس از کروسکال یا پرایم استفاده کرد.

5- از یک راس دلخواه BFS می زنیم و دورترین راس به آن راس را پیدا می کنیم (v). راس v قطعاً یک سر یک بلندترین مسیر درون درخت خواهد بود. حال از v یک BFS دیگر میزنیم و دورترین راس را به v پیدا میکنیم (u). مسیر بین u و v بلند ترین مسیر در درخت خواهد بود.

6- الف) ابتدا با استفاده از BFS روی T کوتاه ترین مسیر بین u و v را (تعداد یال ها) در T به دست می آوریم. حال اگر وزن یال اضافه شده از وزن تمامی یال های این مسیر بیشتر باشد، T همچنان MST است در غیر این صورت خیر.

ب) در همان قسمت الف یالی از مسیر که بیشترین وزن را دارد حذف میکنیم و یال جدید را به T اضافه می کنیم. (هر دو این الگوریتم ها در $O(|V|)$ انجام می شوند چون آن ها را روی درخت T که $|V| - 1$ دارد انجام می دهیم.

7- الف) به هر کدام از یال ها یک مقدار ناچیز اضافه می کنیم و سپس الگوریتم دایکسترا را اجرا می کنیم (مقدار اضافه شده به هر یال باید کمتر از $1/(v-1)$ باشد)

ب) برای هر راس علاوه بر $v.d$ که نشان دهنده فاصله از s است یک مقدار $v.c$ نیز نگه می داریم که نشان دهنده تعداد یال از s به v است. حال هنگام relax کردن یال (u,v) قرار می دهیم :

$$v.c = u.c + 1$$

و شرط c کمتر را هم به شروط relax کردن اضافه میکنیم (در حالتی که شرط d مساوی داریم)