

به نام خدا

امتحان دوم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (پاییز ۹۹)

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

امتحان شامل چهار بخش است و از هر بخش شما باید فقط و فقط یک سوال را حل کنید. برای انتخاب سوال مربوط به خود به توضیحات بالای هر بخش توجه کنید. برای انتخاب سوال خود فرض کنید شماره دانشجویی شما $ABCDEFGHI$ باشد و مقادیر A تا I را با توجه به شماره دانشجویی خود در هر بخش جایگزین کنید. برای مثال اگر شماره دانشجویی شما 894456123 است مقدار $A = 8$ و مقدار $H = 2$ خواهد بود. لطفا در بالای برگه جواب حتما علاوه بر نام و نام خانوادگی شماره دانشجویی و شماره سوال مربوط به خود را بنویسید

بخش اول (۲۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود سوال زیر را حل کنید

۱. در این سوال هدف اجرای الگوریتم پیدا کردن کد هافمن (huffman code) است. فرض کنید تعداد ۸ کاراکتر با فراوانی‌های زیر به عنوان ورودی داده شده‌اند. الگوریتم پیدا کردن کد هافمن را بر روی این ورودی اجرا کنید، مراحل رسیدن به جواب را به طور دقیق مشخص کنید و کد نهایی هر کاراکتر را تعیین کنید
دقت کنید که مقادیر I ، G و H را باید از روی شماره دانشجویی خود محاسبه و جایگزین کنید.

f_a	f_b	f_c	f_d	f_e	f_f	f_g	f_h
H	1	7	$I + H$	10	$G \times H + 1$	$I + G$	2

بخش دوم (۲۵ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار I را محاسبه کنید. اگر باقیمانده I بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 2 یا 3 را حل کنید.

۲. یک آرایه به طول n از اعداد صحیح و $k \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ مهره به شما داده شده است. هدف این است که تعدادی از k مهره را روی خانه‌های آرایه قرار دهیم به طوری که:

- روی هر خانه‌ی آرایه حداکثر 1 مهره قرار گیرد.
- در هیچ جایی از آرایه بیشتر از 3 خانه خالی پشت‌سرهم وجود نداشته باشد.

الگوریتمی با زمان اجرای $O(nk)$ طراحی کنید که طوری مهره‌ها را روی خانه‌های آرایه قرار دهد که دو خاصیت بالا را داشته باشد و در ضمن جمع اعداد خانه‌هایی که مهره روی آن‌ها قرار گرفته است بیشینه شود. شبه کد مربوط به الگوریتم خود را بنویسید.

۳. یک ماتریس با n ستون و $k \leq n$ سطر از اعداد صحیح به شما داده شده است. می‌خواهیم از هر سطر این ماتریس دقیقا یک خانه انتخاب کنیم به طوری که برای هر $k \geq i > 1$ خانه انتخاب شده در سطر i سمت راست خانه انتخاب شده در سطر $i - 1$ باشد. الگوریتمی با زمان اجرای $O(nk)$ ارائه دهید که طوری خانه‌ها را انتخاب کند که جمع آن‌ها بیشینه شود. شبه کد مربوط به الگوریتم خود را بنویسید.

بخش سوم (۲۵ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار I و H را محاسبه کنید. اگر باقیمانده $I + H$ بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 4 یا 5 را حل کنید.

۴. تعداد n کار داریم که زمان اجرای کار i - ام برابر t_i است. فرض کنید که ترتیبی برای انجام تمام کارها تعیین کرده‌ایم. با توجه به ترتیب تعیین شده زمان معطلی کار i - ام برابر خواهد بود با مجموع زمان اجرای کارهایی که قبل از آن انجام شده‌اند. الگوریتمی طراحی کنید که ترتیبی را تعیین کند که متوسط زمان معطلی کارها کمینه شود. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.

۵. دو آرایه A و B به طول n را در نظر بگیرید. می‌گوییم آرایه $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ از آرایه $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ از نظر الفبایی کوچک‌تر است اگر و تنها اگر یک اندیس i وجود داشته باشد به طوری که:

- برای تمام $i < j$ داشته باشیم $a_j = b_j$.
- $a_i < b_i$

برای مثال آرایه $A = (5, 1, 4, 3, 2)$ از آرایه $B = (5, 2, 1, 3, 4)$ از نظر الفبایی کوچک‌تر است (با در نظر گرفتن $i = 2$). آرایه A از اعداد طبیعی به طول n و عدد k داده شده‌اند. در هر مرحله می‌توان جای دو عنصر مجاور در آرایه A را با هم عوض کنیم. هدف این است که در طی k مرحله آرایه A را طوری تغییر دهیم که از نظر الفبایی کوچک‌ترین حالت ممکن را داشته باشد. الگوریتمی برای این مسئله طراحی کنید. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.

برای مثال برای آرایه ورودی $A = (5, 1, 4, 3, 2)$ و $k = 3$ بهترین جواب $(1, 3, 5, 4, 2)$ است.

بخش چهارم (۳۰ نمره): با توجه به شماره دانشجویی خود مقدار I ، H و G را محاسبه کنید. اگر باقیمانده $G + H + I$ بر 2 به ترتیب 0، 1 بود به ترتیب سوال 6 یا 7 را حل کنید.

۶. درخت جستجوی دودویی درختی است که دارای خواص زیر است:

- به هر راس یک عدد نسبت داده شده است.
- به غیر از ریشه، هر راس یک پدر دارد. همچنین هر راس حداکثر دو فرزند دارد که آنها را فرزند سمت چپ و راست می‌نامیم.
- به ازای هر راس، عدد نسبت داده شده به آن از تمام اعداد زیردرخت سمت چپ آن بزرگتر است و از تمام اعداد زیر درخت سمت راست آن بزرگتر نیست.

عدد جالب یک درخت جستجوی دودویی به این صورت محاسبه می‌شود: ابتدا روی هر یال حاصل ضرب عددهای دو سر آن را می‌نویسیم. سپس حاصل جمع اعداد نوشته شده روی یال‌ها را محاسبه می‌کنیم تا عدد جالب درخت جستجوی دودویی بدست آید.

n عدد $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ داده شده‌اند. الگوریتمی چند جمله‌ای طراحی کنید که درختی جستجوی دودویی با این اعداد درست کند که عدد جالب آن بیشینه شود.

۷. اعداد صحیح a_1, a_2, \dots, a_n در یک ردیف نوشته شده‌اند. می‌خواهیم بدون بهم زدن ترتیب عددها بین آنها عملگرهای $+$ ، \times ، $()$ قرار دهیم به طوری که حاصل نهایی بیشینه شود. الگوریتم چند جمله‌ای برای این منظور طراحی کنید.

برای مثال اگر اعداد ورودی $-5, 2, -5, -2$ جواب بیشینه 70 به این صورت بدست می‌آید: $(-5 + (-2)) \times 2 \times -5$