پاسخ امتحان پنجم - شبکه جریان

طراحی الگوریتم - بهار ۱۴۰۰

سوال اول:

با افزایش ظرفیت یک یال قطعا شار بیشینه کاهش نمی یابد (همان شار قبلی را خواهیم داشت) بیشتر از یک واحد نیز افزایش پیدا نخواهد کرد. (وگرنه اگر این ۱ ظرفیت را دوباره برداریم حداکثر ۱ واحد از شار بیشینه کم می شود که از شار بیشینه قبلی بیشتر است و این تناقض است) پس اگر شار بیشینه شبکه اصلی F باشد، شار بیشینه شبکه جدید F یا F+1 خواهد بود.

برای هر یال شار فعلی (مربوط به شار بیشینه در شبکه قبلی) را از ظرفیت آن کم می کنیم و به ظرفیت یال برعکس آن اضافه می کنیم. این وضعیت گراف پسماند در الگوریتم فورد فالکرسون پس از اتمام الگوریتم در شبکه اصلی است. حال فقط یک بار الگوریتم مسیر افزایشی را دوباره اجرا می کنیم. اگر یک شار عبور پیدا کرد جواب F+1 وگرنه F خواهد بود. چون الگوریتم فورد فالکرسون درست است و هر مرحله یک مسیر دلخواه را انتخاب می کند پس انگار ابتدای الگوریتم را قبلا اجرا کرده ایم. و قبلا دقیقا طی فورد فالکرسون رفتیم پس کل الگوریتم ما درست است.

ابتدا برای هر یال باید ظرفیت آن را با مرتبه $O(m)$ بدست بیاوریم. سپس مسیر افزایشی را با پیمایش dfs پیدا می کنیم که مرتبه آن $O(n + m)$ است.

سوال دوم:

یک شبکه جریان می سازیم. در دسته اول n راس که هر راس آن متناظر یک خانواده است قرار می دهیم. راس سورس را با یال هایی با ظرفیت a_i به راس i آن وصل می کنیم. (جهت از سورس به دسته است) در دسته دوم m راس که هر راس متناظر یک میز است قرار می دهیم. راس i ام این دسته را با یالی با ظرفیت b_i به سینک وصل می کنیم. برای همه nm حالت یال ممکن بین دو دسته را نیز یالی با ظرفیت ۱ قرار می دهیم. (اینگونه به هر خانواده به اندازه تعداد نفراتش شار می رسد. ه خانواده به هر میز حداکثر یک عضو را می تواند اختصاص دهد و به هر میز حداکثر باید به تعداد ظرفیتش عضو اختصاص یابد)

سپس الگوریتم شار بیشینه (max flow) را اجرا می کنیم و اگر مقدار آن برابر مجموع a_i ها شود یعنی برای هر نفر یک میز با شرایط سوال پیدا کرده ایم و اگر نه یعنی مساله جواب ندارد. (پس از اتمام الگوریتم با شار هر یال نیز می توان فهمید افراد هر میز از چه خانواده ای هستند و از هیچ خانواده ای دو نفر سر یک میز نمی نشینند)

برای حساب شار بیشینه الگوریتم های چند جمله ای مانند ادموند کارپ و دینیک وجود دارد. (البته طبق اطلاعیه حین امتحان می توانستید فرض کنید الگوریتم شار بیشینه چند جمله ای است و نیازی به اشاره به این الگوریتم ها نبود)

توجه کنید که فقط از چند جمله ای بودن الگوریتم شار بیشینه می توانید استفاده کنید. این سوال راه حلی حریصانه دارد که مرتبه آن به مجموع اعضا خانواده ها بستگی دارد و کامل نیست. علاوه بر این راه حل های حریصانه نیاز به اثبات دارند.

سوال سوم:

(راه حل های شهودی برای این سوال مورد پذیرش نیستند و اثبات شما باید دقیق باشد)

شبکه جریان این گراف که راس s مبدا و راس u مقصد باشد در نظر بگیرید. (حالت سوم مربوط به f_3) یک برش کمینه آن را به صورت S,U در نظر می گیریم. (طبق تعریف $s \in S$ و $u \in U$) چون برش افرازی از رئوس گراف است پس راس t نیز در یکی از این دو دسته قرار می گیرد. پس دو حالت داریم:

- $t \in S$. پس t در دسته S و u در دسته U است. پس همین برش (افراز رئوس به دو دسته) یک برش معتبر برای حالتی که مبدا s و مقصد u باشد خواهد بود. (حالت دوم مربوط به f_2) طبق قضیه معروف min-cut=max-flow می دانیم اندازه این برش برابر f_3 است. همچنین چون یک برش معتبر برای حالت دوم است پس که کوچکترین برش است حداکثر به مقدار f_3 است، یعنی $f_3 \geq f_2$. پس حکم سوال ($f_3 \geq min(f_1, f_2)$) برقرار است.
- $t \in U$. این حالت نیز مانند حالت قبلی فقط با f_1 بررسی می کنیم. پس s در درسته S و t در درسته U است. پس همین برش، یک برش معتبر برای حالتی که مبدا s و مقصد t باشد خواهد بود. (حالت اول مربوط به f_1) پس $f_3 \geq f_1$ یعنی $f_3 \geq min(f_1, f_2)$.

در دو حالت حکم مساله را ثابت کردیم پس آن در حالت کلی برقرار است.