

به نام خدا



## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی ششم  
موعد تحویل: زمان جلسه پایان ترم  
طراح: سینا نادی nadi@ut.ac.ir

۱. به سوالات زیر پاسخ دهید.

- کلاس پیچیدگی NP را تعریف کنید.
- کاهش چندجمله‌ای را تعریف کنید.
- مسائل NP-Hard را تعریف کنید.
- مسائل NP-Complete را تعریف کنید.

۲. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

- اگر یک مساله NP-Complete در زمان خطی حل شود، تمام مسائل NP-Complete را می‌توان در زمان خطی حل کرد.
- اگر یک مساله NP در زمان چندجمله‌ای حل شود، تمام مسائل NP را می‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد.
- اگر مساله‌ای در کلاس پیچیدگی NP باشد و بتوانیم مساله‌ای NP-Complete را به آن کاهش دهیم، آنگاه آن مساله NP-Complete است.

۳. ثابت کنید مساله زیر در کلاس پیچیدگی NP-Complete قرار می‌گیرد.  
گراف جهتدار و وزندار G داده شده است به طوری که وزن یال‌های آن اعداد صحیح هستند. آیا این گراف دوری دارد که مجموع وزن یال‌های آن برابر صفر باشد؟

(آ) ثابت کنید مساله مورد نظر در کلاس پیچیدگی NP قرار دارد.

(ب) مساله Subset-Sum را به مساله مورد نظر کاهش چندجمله‌ای دهید.

۴. ثابت کنید مساله زیر در کلاس پیچیدگی NP-Complete قرار می‌گیرد.  
گراف جهتدار G و عدد K داده شده است. آیا می‌توان با حذف حداکثر K راس از G آن را خالی از دور کرد؟

(آ) ثابت کنید مساله مورد نظر در کلاس پیچیدگی NP قرار دارد.

(ب) مساله Vertex-Cover را با استفاده از مساله مورد نظر حل کنید. (Polynomial-Reduction)

۵. ثابت کنید مساله زیر در کلاس پیچیدگی NP-Hard قرار می‌گیرد.  
گراف ساده G و عدد K داده شده است. آیا زیرمجموعه‌ای از رئوس G مانند V با اندازه K وجود دارد به گونه‌ای که خالی از مثلث باشد؟ (خالی از مثلث یعنی به ازای هر سه راس متمایز از V حداکثر میان دو زوج از آن‌ها یالی در G وجود داشته باشد)  
(راهنمایی: مساله Independent-Set را به مساله مورد نظر کاهش چندجمله‌ای دهید.)

۶. ریچارد کارپ (Richard Karp) در مقاله‌ای نشان داد ۲۱ مساله که به Karp's ۲۱ Problems مشهور هستند، NP-Complete هستند. در مورد این مسائل تحقیق کرده و به دلخواه یکی از مسائلی که در کلاس درس و تمرین ارائه نشده است را انتخاب کرده و ثابت کنید در کلاس پیچیدگی NP-Complete قرار می‌گیرد.

I know NP-Complete jokes but once you've heard one you've heard them all .