به نام خدا
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
طراحی و تحلیل الگوریتم ها – نیمسال اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۸_۱۳۹۷
حل تمرین ششم

مساله اول :

الف) کلاس پیچیدگی NP شامل تمام مسائل تصمیم‌گیری است که توسط ماشین تورینگ غیرقطعی در زمان چندجمله‌ای قابل حل هستند. به زبانی دیگر، L متعلق به کلاس NP است اگر و تنها اگر الگوریتم A در زمان چندجمله‌ای وجود داشته باشد به گونه‌ای که با داشتن y به عنوان certificate بتوان درستی آن را با آن الگوریتم بررسی کرد

ب) مسئله A قابل کاهش به مسئله B است اگر الگوریتمی برای حل مسئله B در زمان چندجمله‌ای وجود داشته باشد که بتوان از آن در حل مسئله A در زمان چندجمله‌ای استفاده کرد. و می‌نویسیم

$A \leq_p B$

ج) NP Hard: مسئله H عضو کلاس np-hard است اگر و تنها اگر تمام مسائل L عضو np قابل کاهش به H در زمان چندجمله‌ای باشند.

د) NP Complete: مسئله C عضو کلاس np-complete است اگر و تنها اگر عضو np باشد و تمام مسائل دیگر عضو np قابل کاهش به این مسئله در زمان چندجمله‌ای باشند.

مساله دوم :

قسمت ۱ . نادرست است، در این حالت می توان در زمان چند جمله حل کرد نه لزوما خطی.

قسمت ۲ . نادرست است زیرا اگر یک مسئله NPC در زمان چندجمله‌ای حل شود، می توان نتیجه گرفت که سایر مسائل NP در زمان چند جمله‌ای حل می‌شوند

مساله سوم :

حل: ضرب ماتریس که ابعاد آن n باشد از مرتبه‌ی زمانی چندجمله‌ای است، پس مساله در کلاس پیچیدگی NP قرار می‌گیرد.
حال با استفاده از کاهش مساله داده شده، ثابت می‌کنیم در کلاس پیچیدگی $NP-Hard$ هم قرار می‌گیرد. ماتریس A را که $n \times n$ است در نظر می‌گیریم و هر ستون آن را یک عدد در مبنای $n+1$ در نظر می‌گیریم. با این کار به n عدد می‌رسیم، نام این مجموعه اعداد را B در نظر می‌گیریم. بردار تمام ۱ را هم معادل با عدد $(11..1)_{n+1}$ که برابر با $s = n + 1^{n-1}$ است در نظر می‌گیریم.

برای جمع کردن n عدد می‌توانیم همه‌ی آن‌ها را در مبنای $n+1$ بنویسیم و سپس هر رقم از آن‌ها را با هم جمع کنیم، چون در اینجا هر رقم حداکثر ۱ است و حداکثر n عدد داریم، پس در مجموع آن‌ها، هر رقم حداکثر n است. بنابراین حاصل جمع این اعداد همواره n رقمی است.
فرض کنیم برای ماتریس A یک جواب X وجود دارد که $AX = 1$
بردار حاصل AX برابر با جمع ستون‌های iام (که سطر iام در X برابر با یک است) از ماتریس A است.
بنابراین اگر جواب X ای وجود داشته باشد، زیر مجموعه‌ای از B وجود دارد که مجموع آن برابر با s باشد.
حال فرض کنیم زیر مجموعه‌ای از B مانند C وجود داشته باشد که مجموع آن برابر با s باشد. اگر هر یک از این اعداد را در مبنای $n+1$ بنویسیم و با هم جمع کنیم به عدد $(11..1)_{n+1}$ می‌رسیم که معادل با s است. از طرفی می‌توانیم با محاسبه مقدار AX به این عدد برسیم که در آن X برداری است که سطر iام آن یک است اگر b_i عضو C باشد.

مساله چهارم :

قسمت ۱ .

کافیست مسئله‌ی دوم را با استفاده از مسئله‌ی اول حل کنیم برای این کار بر روی تمام رئوس بخش y به تعداد رئوس بخش x (n) بعلاوه ۱ مهره قرار می دهیم و گراف ساخت شده را به حل کننده‌ی مسئله‌ی اول می‌دهیم.

از انجا که یکی از جواب هایی که در آن زیر گراف تشکیل شده از مهره ها همبند است این است که تمام رئوس مجموعه‌ی x دارای مهره شوند پس حداکثر به n عملیات نیاز است و در هر راس مجموعه‌ی y حداقل ۱ مهره باقی می‌ماند پس در حالت بهینه .وضعیت مهره‌ها به این گونه است که تمام رئوس y دارای حداقل یک مهره هستند و تعدادی از رئوس x نیز دارای مهره هستند و از انجا که این مجموعه همبند است و رئوس در y فقط با استفاده از رئویس مهره‌دار در x به هم مسیر خواهند داست پس مجموعه‌ی همسایه‌های رئوس مهره‌دار در x برابر y است از طرفی برای این که حرکات انجام شده کمینه باشد حداکثر در هر راس از x یک مهره قرار دارد. از طرفی واضح است که تعداد رئوس انتخاب شده برابر با تعداد حرکت مهره ها است زیز هیچ مهره‌ای نیاز نیست پس از رفتن به مجموعه‌ی x دوباره به مجموعه‌ی y باز گردد. پس از انجایی که این حرکات کمینه شده است تعداد رئوس انتخابی نیز کمینه شده است.

قسمت ۲ . ثابت می‌کنیم B یک مسئله‌ی $NP-Complete$ است.

واضح است که برسی درستی چواب آن در زمان چند جمله‌ای ممکن است.

برای این که ثابت کنیم این مسئله یک مسئله‌ی $NP-Hard$ است مسئله‌ی پوشش رأسی کمینه را با آن حل می‌کنیم:

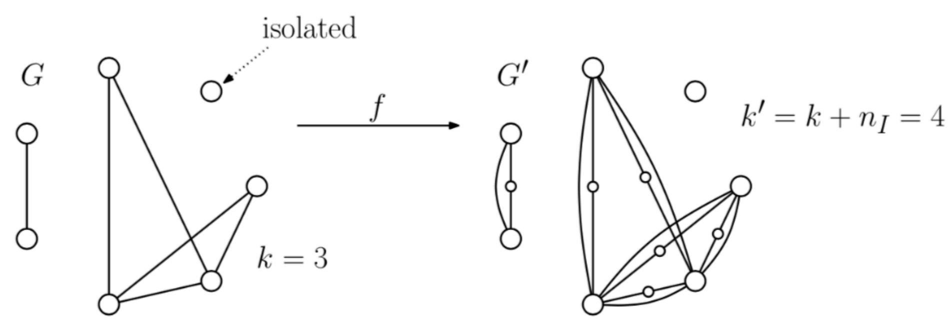
یک گراف دو بخشی به این صورت می‌سازیم:در یک بخش به ازای هر یال یک رأس قرار می‌دهم و در بخش دیگر به ازای هرراس یک راس قرار می دهیم و هر راس را به یال‌های متصل با خودش در گراف اصلی وصل می‌کنیم حال کافیست که در بخش دوم مجموعه ای از رئوس را انتخاب کنیم که تمام ریوس بخش اول همسایه ی انها باشد در این صورت عملا با انتخاب چنین مجموعه‌ای در گراف اصلی تمام یال ها حداقل یک سرشان در این مجموعه خواهد بود و عملا یک پوشش رأسی داریم. بدست اودن کوچکترین چنین مجموعه ازبخش دوم نیز دقیقا تعریف مسئله‌ی B است پس با حل شدن مسئله‌ی B مسئله‌ی پوشش راسی کمینه نیز حل می‌شود.

مساله پنجم :

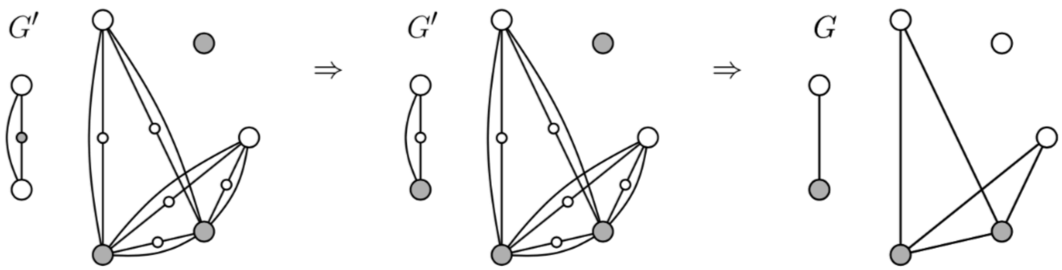
حل: اگر یک دور در اختیار داشته باشیم، با پیمایش یال‌های آن می‌توانیم مشخص کنیم که آیا مجموع وزن یال‌های این دور صفر است یا نه. پس مساله در کلاس پیچیدگی NP قرار می‌گیرد.
اکنون با کاهش مساله Subset Sum به این مساله ثابت می‌کنیم در کلاس $NP - Hard$ هم قرار می‌گیرد.
فرض کنیم یک مساله Subset Sum داریم و مجموعه‌ی X داده شده است. فرض کنیم اندازه‌ی X برابر با n باشد. یک گراف دو بخشی با بخش‌های A و B که هر یک n راس دارند ایجاد می‌کنیم. فرض کنیم راس‌های A ، a_i ها و راس‌های B، b_i ها باشند. به ازای هر عدد x_i عضو X یک یال جهت‌دار با وزن x_i از a_i به همه‌ی راس‌های بخش B وصل می‌کنیم. همچنین هر راس b_i را با یک یال جهت‌دار با وزن صفر به تمام راس‌های بخش A وصل می‌کنیم.
اکنون ثابت می‌کنیم گراف یک دور به وزن صفر دارد اگر و تنها اگر یک زیر مجموعه از X با مجموع اعضای صفر وجود داشته باشد.
فرض کنیم یک زیرمجموعه مانند Y از X وجود داشته باشد که مجموع اعضای آن صفر باشد. فرض کنیم اعضای مجموعه‌ی Y به ترتیب $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}$ باشند. اکنون یک دور متناظر با این اعداد در گراف پیدا می‌کنیم. از راس a_{i_1} شروع می‌کنیم و به راس b_{i_1} می‌رویم. سپس از a_{i_1} به a_{i_2} می‌رویم و این روند را ادامه می‌دهیم تا به راس b_{i_k} برسیم. در این مرحله از b_{i_k} به a_{i_1} می‌رویم تا دور کامل شود. در نهایت یال‌های $a_{i_1}b_{i_1}$ با وزن x_{i_1} و یال‌های $b_{i_1}a_{i_1}$ با وزن صفر در دور وجود دارند، پس مجموع وزن یال‌های دور برابر با مجموع وزن اعضای Y است.
حال فرض کنیم یک دور با مجموع اعضای صفر در گراف وجود دارد. چون وزن یال‌ها از مجموعه‌ی B به A صفر است، پس می‌توانیم مجموع وزن یال‌های دور را برابر با مجموع وزن یال‌هایی از آن که از A به B هستند در نظر بگیریم. وزن هر یک از این یال‌ها برابر با وزن یکی از اعضای مجموعه‌ی X است، همچنین هر یک از اعضای مجموعه‌ی X حداکثر یک‌بار در این مجموع ظاهر می‌شوند (چون هر راس حداکثر یک‌بار در دور وجود دارد). پس زیر مجموعه‌ای از X وجود دارد که مجموع اعضای آن صفر باشد.

مساله ششم :

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم مساله مجموعه‌ی چیره در کلاس پیچیدگی NP قرار دارد.
فرض کنیم مجموعه‌ی V از راس‌های گراف G به ما داده شده است. برای این که بررسی کنیم آیا مجموعه‌ی داده شده یک مجموعه‌ی چیره در گراف G است یا خیر، کافی است مجموع تعداد راس‌های مجموعه‌ی V و راس‌های مجاور آن که متمایز باشند را به دست آورده و آن را با تعداد کل راس‌های گراف G مقایسه کنیم. که این الگوریتم از مرتبه‌ی V^2 است پس از مرتبه‌ی چندجمله‌ای است.
حال ثابت می‌کنیم این مساله در کلاس پیچیدگی $NP-Hard$ قرار دارد.
برای این کار از کاهش مساله پوشش راسی به این مساله استفاده می‌کنیم.
در مساله‌ی پوشش راسی فرض می‌کنیم گراف G و عدد k داده شده است، و باید مشخص کنیم که آیا مجموعه‌ای با اندازه کوچک‌تر یا مساوی k وجود دارد که یک پوشش راسی در گراف G باشد یا خیر.
ابتدا گراف جدید G' را از روی گراف G به شیوه‌ی زیر می‌سازیم:
به ازای هر یال مثل wu در گراف G که بین دو راس w و u قرار دارد، یک راس جدید v_{wu} اضافه می‌کنیم و آن را به راس‌های u, w وصل می‌کنیم (به این راس‌ها راس اضافی می‌گوییم).



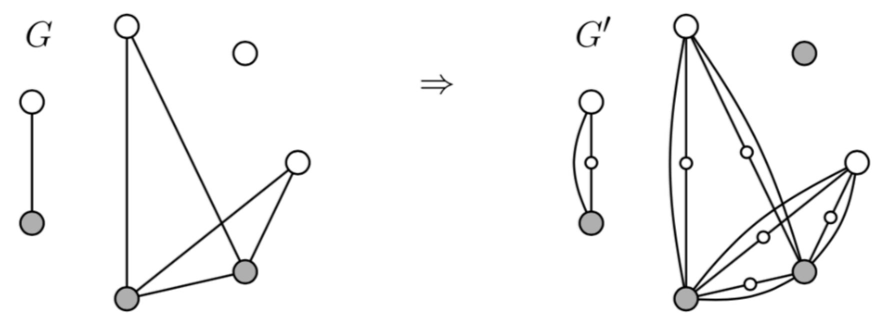
اکنون مساله‌ی مجموعه‌ی چیره را در گراف G' و با مقدار $k' = k + n_I$ حل می‌کنیم (که n_I تعداد راس‌های ایزوله در گراف G است) . حال باید ثابت کنیم مساله مجموعه چیره با مقدار k' جواب دارد اگر و تنها اگر مساله‌ی پوشش راسی در گراف G با مقدار k جواب داشته باشد.
فرض کنیم V' یک مجموعه‌ی چیره با اندازه‌ی k' در G' باشد. ممکن است V چند راس اضافی داشته باشد. این راس اضافی دقیقا با دو راس مجاور است، مثلا فرض کنیم راس v_{wu} یک راس در V' باشد. v_{wu} بر دو راس w و u چیره است. حال اگر v_{wu} را از V' حذف کنیم و راس w (یا u) را اضافه کنیم V' همچنان یک مجموعه‌ی چیره در G' است (چون w با v_{wu} و u مجاور است). پس می‌توانیم با حذف راس‌های اضافی از V' به مجموعه‌ای برسیم که هیچ راس اضافی‌ای ندارد. حال راس‌های ایزوله را هم از V' حذف می‌کنیم تا به مجموعه‌ی V برسیم. اکنون V یک پوشش راسی در گراف G است. اگر این گونه نباشد پس یالی مثل wu در G وجود دارد که به هیچ راسی در V متصل نیست. اما در G' به ازای این یال راس v_{wu} وجود دارد که با فرض مجموعه‌ی چیره بودن V' در G' در تناقض است (V هیچ راس اضافی‌ای ندارد، پس راس v_{wu} با یکی از راس‌های V مجاور است).



G' has a dominating set of size k' — G' has a dominating set of size k' using regular vertices — G has a vertex cover of size $k = 3$

اکنون فرض می‌کنیم V یک پوشش راسی با اندازه‌ی k در G باشد. ثابت می‌کنیم V' (که با اضافه کردن راس‌های ایزوله G به V به دست می‌آید) یک مجموعه‌ی چیره در G' است. چون V یک پوشش راسی در G است، پس هر یالی در G به یک راس در V' متصل است. حال راس‌های اضافی در G' را در نظر می‌گیریم، چون هر یک از این راس‌متناظر با یک یال هستند، و یال متناظر با آن‌ها به یکی از راس‌های V' متصل است، پس این راس هم با یکی از راس‌های V' مجاور است.

حال اگر بقیه‌ی راس‌های G' را در نظر بگیریم، یا این راس‌ها ایزوله‌اند که در V' قرار دارند یا این ایزوله نیستند پس حداقل به یک یال متصل هستند، پس یا خود این راس‌ها در V' قرار دارند یا با یکی از راس‌های V' مجاور اند، پس V' یک مجموعه‌ی چیره در G' است.



G has a vertex cover of size $k = 3$ — G' has a dominating set of size $k' = k + 1 = 4$