



به نام خداوند بخشنده مهربان

طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها
نیم‌سال اول سال تحصیلی ۹۶-۹۷
تمرین شماره ۱
مهر ماه ۱۳۹۶

۱. الگوریتم *mergesort* را روی آرایه‌ی $A = [15, 17, 9, 3, 1, 4, 93, 21, 2]$ اعمال کرده و آن را به صورت صعودی مرتب کنید و اجرای الگوریتم را مرحله به مرحله توضیح دهید.

۲. دو آرایه مرتب به طولهای m و n داده شده است. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(\log m + \log n)$ ارائه دهید که میانه‌ی آرایه‌ی حاصل از ادغام این دو آرایه را پیدا کند.

۳. n نقطه در صفحه‌ی دوبعدی داده شده است، می‌خواهیم کوچکترین چند ضلعی (چندضلعی با کمترین مساحت) را پیدا کنیم که راس‌هایش از این n نقطه تشکیل شده باشند و سایر نقاط نیز درون این چند ضلعی قرار بگیرند.

الگوریتمی با مرتبه زمانی به طور متوسط $O(n * \log n)$ ارائه دهید که نقاطی را که باید به عنوان راس این چند ضلعی قرار بگیرند پیدا کند.

۴. آرایه نافرם به آرایه‌ای گفته می‌شود که متشکل از یک دنباله اکیداً صعودی و به دنبال آن یک دنباله اکیداً نزولی باشد. به بیان دیگر آرایه A به طول n نافرם است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ به گونه‌ای که :

$$1\text{-} \text{برای هر } 0 \leq i \leq m \text{ داریم } A[i] < A[i+1]$$

$$2\text{-} \text{برای هر } m \leq i \leq n \text{ داریم } A[i] > A[i+1]$$

الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(\log n)$ ارائه دهید که در یک آرایه نافرם بزرگترین عنصر را بیابد.

۵. در یک آرایه n تایی، می‌گوییم جفت i و j یک جفت برنزی است اگر عضوهای i و j دارای شرایط زیر باشند:

$$j - i < 1$$

$$array[i] > (2 * array[j])$$

با استفاده از ایده تقسیم و حل الگوریتمی از مرتبه $O(n * \log n)$ ارائه دهید که تعداد جفت‌های برنزی یک آرایه را به دست آورد.

۶. n تا کتاب داریم که از 0 تا $n - 1$ شماره گذاری شده‌اند، کتاب شماره i ، $A[i]$ تا صفحه دارد. m تا دانشجو داریم و می‌خواهیم تمام کتاب‌ها را بین دانشجوها تقسیم کنیم. هر دانشجو فقط مجاز است که کتاب‌های متوالی بردارد (مثلاً می‌تواند کتاب‌های ۳ و ۴ و ۵ را بردارد ولی نمی‌تواند کتاب ۳ و ۵ را بردارد) هر طوری که کتاب‌ها را بین دانشجویان تقسیم کنیم، یک دانشجو هست که مجموع صفحات کتاب‌هایی که دارد از بقیه بیشتر است، این مقدار را در هر جایگشت $MaxPage$ می‌نامیم. می‌خواهیم کمترین مقدار $MaxPage$ را به ازای تمام روش‌هایی که می‌توان کتاب‌ها را بین دانشجویان تقسیم کرد به دست آوریم. الگوریتم شما باید از مرتبه زمانی $O(n * \log n)$ باشد.