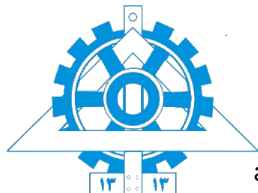


به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها



تمرین کتبی دوم
موعد تحویل: دوشنبه ۱۵ فروردین ۱۴۰۱، ساعت ۲۳:۵۹
طراح: امیرحسین عباسکوهی amirhossein.abaskohi@gmail.com

۱. (۲۰ نمره) با توجه به روی بورس بودن ارز های دیجیتال هادی تصمیم گرفته است تا از این طریق به سود برسد. او قیمت اتریوم در n روز از سال را به صورت آرایه p_1, p_2, \dots, p_n دارد. الگوریتمی پویا با مرتبه زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید تا بیشترین سودی که می توان با خرید و فروش های متوالی در روز های مختلف به دست آورد را محاسبه کند. دقت کنید که هر روز حداکثر یک اتریوم می توانیم داشته باشیم، در حقیقت زمانی می توان یک اتریوم خرید که در حال حاضر اتریومی نداشته باشیم. این سوال را با استفاده از الگوریتم بازگشتی حافظه دار نیز حل نمایید.

۲. (۱۵ نمره) علی که مدیر تیم استارتاپی خود است، برای افزایش انرژی تیم تصمیم گرفته با تایم هر ماه یکبار به کوه نوردی بروند. متأسفانه اعضای تیم در برنامه ریزی افتضاح هستند که به این ترتیب یک روز کاملاً تصادفی را برای کوه نوردی انتخاب می کنند و هیچ خبری هم تا قبل از روز مشخص شده به علی نمی دهند. متأسفانه علی هم باید قبل از رفتن با کوه نوردی، برنامه را با سرمایه گذار پروژه هماهنگ کند تا مرخصی بگیرند. این موضوع باعث می شود که علی هر روز برای روز بعد خود تصمیم بگیرد که آیا باید از مرخصی خود استفاده کند یا خیر. فرض کنید علی فقط k روز برای مرخصی در m ماه بعدی دارد. بیشترین امید ریاضی تعداد روز هایی که علی می تواند همراه با تیمش به کوه نوردی برود چه مقداری است؟ برای سادگی تمامی ماه ها را ۳۰ روزه در نظر بگیرید (پیچیدگی زمانی راه حل شما باید $O(km)$ باشد). شبهه کد پاسخ خود را بنویسید.

۳. (۲۰ نمره) فرض کنید به شما یک درخت با n راس به همراه m یال (جدای از یال های درخت) که هزینه هر کدام از آن ها مشخص است، به شما داده شده است. می خواهیم بیشترین هزینه این یال هایی که می توانند به درخت یاد شده اضافه بشوند به طوری که در گراف نهایی دور به طول زوج تشکیل نشود را پیدا کنیم. راه حل خود را بر اساس روش برنامه ریزی پویا با محدودیت زمانی $O(n^2m)$ ارائه دهید.

۴. (۱۵ نمره) به ما یک عدد n و یک آرایه به طول m از اعداد بین ۱ و $2n$ داده شده است. می خواهیم تعداد تمامی حالاتی که می توان تعداد $2n$ پرانتز های باز و بسته را به صورت متعادل کنار هم (هر پرانتز باز بسته شده باشد) قرار داد به طوری که در خانه های آرایه داده شده فقط پرانتز های باز قرار بگیرد را پیدا کنیم. این مسئله را با استفاده از روش برنامه ریزی پویا با محدودیت زمانی $O(n^2)$ و محدودیت حافظه $O(n^2)$ حل کنید. سپس سعی کنید میزان حافظه مصرفی برنامه خود را به $O(n)$ کاهش دهید.

۵. (۱۵ نمره) فروشنده ای یک مغازه پنیر فروشی دارد. در فروش پنیر مسئله ای که وجود دارد این است که هر چه قدر که از زمان آماده شدن پنیر بگذرد، پنیر کیفیت و ارزش بالاتری را پیدا می کند. فروشنده در مغازه خود n پنیر دارد. این فروشنده هر سال یکی از پنیر های خود از اول یا آخر (چپ ترین و یا راست ترین) را می فروشد. قیمت

پنیر i ام برابر c_i است و قیمت آن پس از x سال x برابر می شود. با استفاده از روشی پویا در مرتبه زمانی $O(n^2)$ و میزان حافظه مصرفی $O(n^2)$ راه حلی برای این مسئله بیابید که بیشترین سود فروشنده و پنیر هایی که باید در هر سال بفروشد را مشخص کند. در ادامه مسئله را با استفاده از روش بازگشتی حافظه دار نیز حل کنید و شبهه کد پاسخ خود را بنویسید.

۶. (۱۵ نمره) حسابداری قصد دارد برای افزایش سرعت محاسبه خود، از این به بعد در هنگام محاسبات دست خود را از روی کیبورد بر ندارد. او برای تسلط به اینکار برای خود تمرینی تعبیه کرده است. او قصد دارد تمامی حالتی که می تواند رشته هایی به طول n با شروع از هر کدام از کلید ها موجود را تنها با حرکت به چپ، بالا، راست و پایین حرکت کند بسازد. روشی پویا برای این مسئله ارائه دهید تا تعداد رشته هایی که می توان ساخت را بتوان محاسبه کرد. در ابتدا مسئله را با محدودیت حافظه $O(n)$ حل کنید و سپس حافظه را به $O(1)$ کاهش دهید. صفحه کلید را ۳ در ۳ از اعداد ۱ تا ۹ در نظر بگیرید. (مرتبه زمانی راه حل شما باید $O(n)$ باشد).