



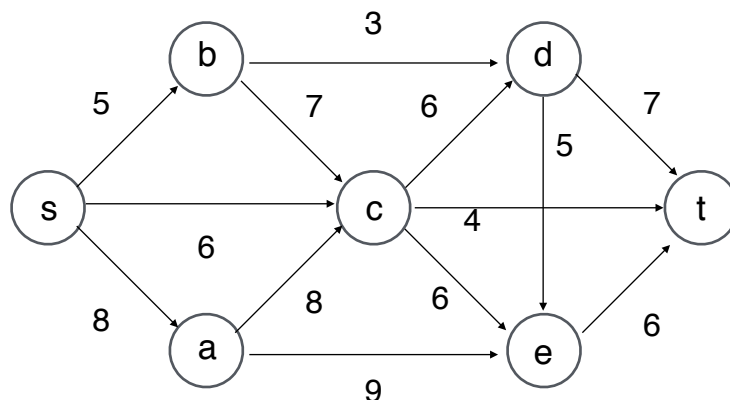
به نام خدا

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران
طراحی و تحلیل الگوریتمها، نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۶-۹۷
تمرین شماره ۵ (flow and matching)



موعد تحویل: ۲۴ اردیبهشت

سوال ۱) الگوریتم edmond-karp را بر روی گراف شبکه‌ای زیر اجرا کنید، در هر مرحله مسیر افزایشی و residual network را مشخص کنید. سپس اندازه‌ی جریان ماکزیمم و رئوس موجود در مجموعه‌های S و T (در min-cut) را تعیین کنید.



سوال ۲) در گراف جریان شبکه‌ای G ثابت کنید اگر یک جریان از راس u به راس v به اندازه‌ی f وجود داشته باشد، هم چنین یک جریان با همان اندازه‌ی f از راس v به راس w وجود داشته باشد، آنگاه حتماً یک جریان از راس u به راس w به اندازه‌ی f وجود دارد.

سوال ۳) فرض کنید گراف جریان شبکه‌ای G را داریم و G دارای یال‌هایی است که به منبع s وارد می‌شوند. فرض کنید f جریانی در این شبکه باشد که در آن یکی از یال‌های (v, s) که به منبع وارد می‌شود، دارای جریان $f(v, s) = 1$ باشد.

الف) ثابت کنید جریان f' برای شبکه‌ی G وجود دارد به طوری که $f'(v, s) = 0$ و $|f'| = |f|$.
ب) الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی $O(E)$ ارائه دهید که با داشتن f و فرض این که ظرفیت همه‌ی یال‌ها یک عدد صحیح است، f' را محاسبه کند.

سوال ۴) فرض کنید می‌خواهیم گراف جهت دار G را به تعدادی دور افراز کنیم به صورتی که اولاً دورها با یکدیگر اشتراک نداشته باشند و ثانیاً تمام رئوس G را پوشش دهند. به وسیله matching الگوریتمی برای این کار پیشنهاد دهید.

سوال ۵) یک path cover برای یک گراف جهت دار $G = (V, E)$ مجموعه‌ی P از مسیرهای مجزا است به طوری که هر راس از V دقیقاً در یکی مسیرهای مجموعه‌ی P قرار بگیرد. مسیرها می‌توانند از هرکجا آغاز شوند و در هرجایی تمام شوند. هم چنین مسیر به طول ۰ هم می‌توانیم داشته باشیم. minimum path cover برای گراف G دارای حداقل تعداد مسیر می‌باشد.

الف) الگوریتمی ارائه دهید که minimum path cover را برای گراف جهتدار بدون دور $G = (V, E)$ پیدا کند.

(راهنمایی: با فرض اینکه $V = \{1, 2, \dots, n\}$ گراف $G' = (V', E')$ را به گونه ای بسازید که:

$$V' = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_0, y_1, \dots, y_n\},$$

$$E' = \{(x_0, x_i) : i \in V\} \cup \{(y_i, y_0) : i \in V\} \cup \{(x_i, y_j) : (i, j) \in E\},$$

سپس بر روی آن الگوریتم maximum-flow را اجرا کنید)

ب) آیا الگوریتم شما بر روی گراف جهتداری که شامل دور هم می‌شود، کار می‌کند؟ توضیح دهید.

سوال ۶) بیمارستانی می‌خواهد برنامه ی حضور پزشکان کشیک خود را برای تعطیلات کل سال ساماندهی کند. به گونه ای که هر روز از تعطیلات یک پزشک کشیک در بیمارستان وجود داشته باشد. فرض می‌کنیم H مجموعه‌ی تمام روزهای تعطیل سال است. H به k زیرمجموعه افزاز می‌شود که هر زیرمجموعه، مجموعه‌ای از چند روز تعطیلی پشت‌سر هم (به عبارتی یک دوره‌ی تعطیلات) است. یعنی در کل k دوره ی تعطیلات وجود دارد و هر دوره ممکن است یک یا چند روز طول بکشد. (دوره ی تعطیلات j ام $D(j)$ روز طول می‌کشد.) هر پزشک می‌تواند مجموعه ای از روزهای تعطیل را در بیمارستان حضور داشته باشد که برای پزشک i ام $h(i)$ نامیده می‌شود و $h(i)$ زیرمجموعه ی H است. الگوریتمی ارائه دهید که برنامه ای برای این چیدمان ارائه دهد به طوری که شرایط زیر برآورده شود:

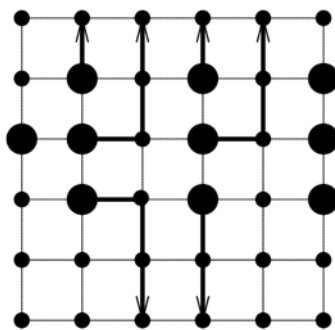
الف) به هر روز تعطیلی فقط یک کشیش اختصاص داده شود.

ب) هر پزشک حداکثر C روز از کل تعطیلات را کشیش باشد.

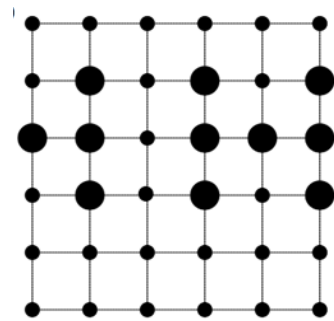
ج) در هر دوره‌ی تعطیلی هر پزشک حداکثر ۱ روز آن را کشیش باشد.

سوال ۷) همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، یک ماتریس $n \times n$ داریم به صورت یک گراف غیرجهتدار که دارای n ستون و n سطر از رئوس است. راس موجود در سطر i ام و ستون j ام را به صورت (i, j) نشان می‌دهیم. هر راس به غیر از رئوس مرزی در این ماتریس دارای چهار همسایه می‌باشد. رئوس مرزی رئوسی هستند به صورت (i, j) که در آن‌ها $i=1$ یا $i=n$ و $j=1$ یا $j=n$.

اگر به تعداد $m \leq n^2$ راس شروع به صورت $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ در ماتریس داشته باشیم الگوریتمی طراحی کنید که نشان دهد آیا m تا مسیر مجزا از هر یک از این m نقطه به m نقطه‌ی مرزی مختلف وجود دارد یا نه. به عنوان مثال مسئله برای شکل (۱) حل می‌شود در حالی برای شکل (۲) نمی‌توان مسئله را حل کرد.



شکل ۱



شکل ۲