



به نام خداوند بخشنده مهربان

تحلیل و طراحی الگوریتم ها، نیم سال اول سال تحصیلی ۹۶-۹۷

تمرین سری پنجم

- اگر از الگوریتم هایی که در کلاس بحث شده است استفاده میکنید، لازم نیست درستی آنها را اثبات کنید.
- سعی کنید الگوریتم با کمترین پیچیدگی زمانی را بدست آورید.

۱. فرض کنید شما به همراه دوستان و $n - 2$ نفر دیگر در خوابگاهی در نزدیکی دانشگاه زندگی می کنید. قرار است در n شب پیش رو، هر شب یکی از شما برای سایرین آشپزی کند به طوری که در مجموع n شب، هر فرد دقیقاً یکبار آشپزی کرده باشد. ممکن است هر یک از افراد در برخی از شب ها به دلیل داشتن مشکلاتی مانند امتحان، رفتن به کنسرت و غیره امکان آشپزی نداشته باشند، بنابراین برنامه ریزی برای آشپزی افراد در طی شب های آتی امری پیچیده و چالش برانگیز خواهد بود. فرض کنید افراد یکم تا n ام را به ترتیب با p_1 تا p_n و شب های یکم تا n ام را به ترتیب با d_1 تا d_n نشان می دهیم. به علاوه، برای فرد i ام (p_i) مجموعه ای از شب ها به صورت $S_i \subseteq \{d_1, \dots, d_n\}$ تعریف شده است که وی امکان آشپزی در آن شب ها را ندارد. بر اساس توضیحات فوق، یک برنامه ریزی قابل قبول برای آشپزی به صورتی است که در آن هر فرد دقیقاً یکبار در n شب آشپزی کند و در هر شب فردی برای آشپزی وجود داشته باشد. الگوریتمی برای ایجاد یک برنامه ریزی قابل قبول با شرایط فوق ارائه دهید.

۲. فرض کنید شبکه جریانی با ماکزیمم جریان f داریم. فرض کنید e یال e در یکی از برش های مینیمم (*minimum cut*) این گراف وجود دارد و q یال q در همه ی برش های مینیمم این گراف وجود دارد. درستی یا نادرستی عبارت های زیر را در حالت کلی مشخص کنید و آن ها را اثبات یا رد کنید.

آ . با افزایش ظرفیت e ، ماکزیمم جریان گراف افزایش می یابد.

ب . با افزایش ظرفیت q ، ماکزیمم جریان گراف افزایش می یابد.

ج . با افزایش یک واحدی ظرفیت q و کاهش یک واحدی ظرفیت e ، ماکزیمم جریان گراف ثابت می ماند.

د . با افزایش یک واحدی ظرفیت e و کاهش یک واحدی ظرفیت q ، ماکزیمم جریان گراف ثابت می ماند.

۳. مجموعه ای از کاربران یک سایت را در یک شهر در نظر بگیرید که هر کدام برای دسترسی به سایت مورد نظر به یکی از سرور های آن سایت متصل میشوند. فرض می کنیم n کاربر و k سرور در این شهر وجود دارند که مکان هر سرور و کاربر با مختصات (x, y) داده شده است. با در نظر گرفتن این نکته که هر کاربر دقیقاً باید به یک سرور متصل شود و رعایت الزامات زیر که در قالب دو پارامتر r و L توضیح داده شده اند، الگوریتمی برای مسئله فوق ارائه دهید.

r : یک کاربر تنها در صورتی می تواند به یک سرور متصل شود که حداکثر فاصله سرور از او برابر r باشد.

L : حداکثر تعداد کاربرانی که می توانند به یک سرور متصل شوند برابر L می باشد.

۴. شبکه جریانی را بین 2 راس s و t در نظر بگیرید که در آن ظرفیت هر یال برابر 1 میباشد و ماکزیمم جریان در آن f است. الگوریتمی ارائه دهید که k یال از این گراف حذف کند به طوری که تا حد ممکن ماکزیمم جریان این شبکه کاهش یابد. به عبارتی دیگر، مجموعه ای از k یال را بیابید به گونه ای که با حذف کردن یال های این مجموعه، ماکزیمم جریان این شبکه به کمترین مقدار ممکن پس از حذف k یال برسد.

۵. وقوع حوادث غیرمنتظره مانند سیل، علاوه بر ایجاد خسارات مالی فراوان، موجب می شود تا تعداد زیادی از افراد در طی مدت زمانی کوتاه به مناطق امن و دور از حادثه جابجا گردند. بر این اساس، فرض کنید در اثر وقوع سیل در یک ناحیه، تعداد n نفر که در سراسر این ناحیه جغرافیایی آسیب دیده اند باید سریعاً به بیمارستان منتقل گردند. تعداد بیمارستان های موجود در این ناحیه برابر k بوده و امکان انتقال هر فرد تنها به بیمارستان هایی وجود دارد که در فاصله زمانی نیم ساعت از محل قرار گرفتن آن ها قرار داشته باشد (فاصله زمانی هر فرد تا هر بیمارستان داده شده است). بنابراین هر فرد با توجه به محلی که در آن قرار دارد، امکان انتخاب بیمارستان های مختلفی را دارد. به علاوه، برای جلوگیری از ازدحام در بیمارستان ها، هر بیمارستان حداکثر به تعداد $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ بیمار را پذیرش می کند. الگوریتمی ارائه دهید که تشخیص دهد آیا پاسخی با شرایط فوق وجود دارد یا خیر. در صورت وجود، مشخص کنید هر فرد آسیب دیده به کدام بیمارستان منتقل می شود.

۶. یک سازمان که در حوزه آب و هوا فعالیت میکند، قصد دارد ویژگی های آب و هوایی یک شهر را اندازه گیری کند. مجموعه ویژگی های آب و هوایی این شهر C میباشد که تعداد اعضای آن برابر n است

(c_1, c_2, \dots, c_n) . برای این کار، این شرکت از m بالن مختلف (b_1, b_2, \dots, b_n) استفاده میکند. هر بالن میتواند تعدادی از n ویژگی آب و هوایی شهر مورد نظر را اندازه گیری کند؛ به عبارت دیگر، بالن b_i میتواند مجموعه ویژگی های C_i را اندازه گیری کند که C_i زیرمجموعه ای از C میباشد. این سازمان قصد دارد به گونه ای برنامه ریزی کند که:

الف) هر بالن حداکثر 2 تا از شرایط را اندازه گیری کند. به عبارت دیگر، هر یک از b_i ها حداکثر 2 تا از c_i ها را انتخاب کند.

ب) هر یک از شرایط آب و هوایی با استفاده از دقیقاً k بالن اندازه گیری شود.

حال الگوریتمی ارائه دهید که در صورت امکان برنامه ریزی مورد نظر این سازمان را انجام دهد به طوری که همه شرایط گفته شده برآورده شوند.

7. مسئله قبل را در نظر بگیرید. فرض کنید هر یک از بالن ها توسط یکی از 3 شرکت M_1, M_2, M_3 ساخته شده اند. حال با اضافه شدن شرط زیر به شروط مسئله قبل، الگوریتمی برای برنامه ریزی این سازمان ارائه دهید:

به ازای هر i, c_i نباید توسط بالن هایی اندازه گیری شود که همگی توسط یک شرکت ساخته شده اند. به عبارت دیگر، در اندازه گیری یک c_i باید بالن هایی استفاده شوند که همگی ساخته شده توسط یک شرکت خاص نباشند.

8. (امتیازی) گرافی با n راس و m یال داریم که رئوس آن از 1 تا n شماره گذاری شده اند. همچنین هر یال e_i وزن صحیحی برابر با c_i دارد. میخواهیم طول کوتاهترین مسیر از راس 1 به راس n افزایش یابد. برای این کار باید تعدادی از یال های این گراف را حذف کنیم. هزینه حذف هر یال برابر وزن آن است. الگوریتمی ارائه دهید که با صرف کردن کمترین هزینه، بتوان طول کوتاهترین مسیر بین دو راس 1 و n را حداقل یک واحد افزایش داد. (دقت کنید که یال ها بدون جهت هستند)