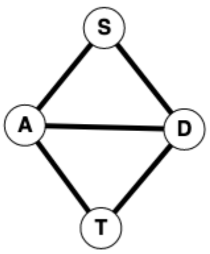
حل تمرین پنجم

سوال اول

1. 0-2-6 گنجایش کمینه: ۵
2. 0-1-2-6 گنجایش کمینه: ۲
3. 0-1-4-6 گنجایش کمینه: ۳
4. 0-3-5-6 گنجایش کمینه: ۲
5. 0-1-2-5-6 گنجایش کمینه: ۱
6. 0-3-2-5-6 گنجایش کمینه: ۱

در انتها از راس 0 به رئوس 0 تا 4 مسیر افزایشی داریم پس min-cut برابرست با یال های از این رئوس به رئوس 5 و 6.

سوال دوم



روش اول (ماکسیمال)
هر بار با یک dfs یا bfs یک مسیر s-t یافته و یال‌های آن را حذف میکنیم تا جایی که مسیری وجود نداشته باشد.
این روش ماکسیمم را نمیدهد. مثال نقض : گراف روبرو. اگر مسیر اول حذف شده S-A-D-T باشد دیگر مسیری نمی‌توان یافت در حالی که حالت ماکسیمم دو مسیر دارد.

روش دوم (ماکسیمم)
طبق قضیه منگر (Menger's Theorem) بیشینه تعداد مسیرهای یال مجزا برابر برش یالی کمینه است. به ازای هر یال بی جهت uv دو یال جهت دار uv و vu را با گنجایش ۱ اضافه میکنیم. برش کمینه این گراف با گراف اولیه برابر است (چرا؟). الگوریتم جریان بیشینه را روی گراف جدید اجرا میکنیم تا اندازه برش کمینه و در نتیجه حداکثر تعداد مسیرها را بیابیم. به ازای هر یال بی جهت uv بررسی میکنیم اگر از هر دو یال جهت دار uv و vu جریانی گذشته بود آنگاه جریان هر دو را صفر میکنیم. (مشخص است که مجموع جریان s به t تغییری نمیکند.) حال یال هایی که جریانی از آنها نمیگذرد را حذف میکنیم. حال روش اول را روی این گراف اجرا می‌کنیم. میتوان ثابت کرد تعداد مسیرهای پیدا شده برابر جریان بیشینه خواهد بود (علت: غیر از رئوس s و t تعداد یال های ورودی هر راس با خروجی آن برابر است و برابر می‌ماند).

سوال سوم

به ازای هر گروه خونی دو راس a_i و b_i قرار میدهیم سپس دو راس s و t را جداگانه اضافه میکنیم. از راس s به همه a_i ها یالی به گنجایش x_i اضافه میکنیم. از همه‌ی b_i ها به راس t یالی به گنجایش y_i اضافه میکنیم. اگر خون با گروه a_i را میتوان به بیمار با گروه خونی b_j انتقال داد آنگاه a_i را به b_j با گنجایش بی نهایت وصل میکنیم. اگر جریان بیشینه از s به t برابر مجموع y_i ها بود یعنی ذخیره خون به اندازه کافیست.

سوال چهارم

با اضافه کردن ظرفیت یال ها تمامی برش های یالی بزرگتر می‌شوند یا ثابت می‌مانند. برش یالی کمینه از s به t را درنظر بگیرید، طبق قضیه max-flow min-cut میدانیم جریان گذرنده از تمامی یال های این برش برابر ظرفیتشان است. در نتیجه طبق فرض سوال گنجایش یال های این برش ثابت می‌ماند در نتیجه اندازه این برش ثابت می‌ماند و همچنان برش کمینه خواهد بود در نتیجه اندازه جریان بیشینه تغییر نمی‌کند. واضح است جریان f همچنان جریانی معتبر است پس جریان f جریان بیشینه این گراف است.

سوال پنجم

الف)

روش اول: یک راس جدید s’ اضافه میکنیم و با یالی با گنجایش d به s متصل میکنیم و جریان بیشینه از s’ به t را پیدا میکنیم. اگر کمتر از d بود جریان مورد نظر وجود ندارد.

روش دوم: در الگوریتم Ford–Fulkerson هر بار با یافتن مسیر افزایشی اگر کم‌ظرفیت ترین یال ظرفیت r داشت و اگر جمع جریان مسیرهای افزایشی پیدا شده قبل از این مرحله F بود اگر F+r < d بود به طور عادی جریان r را میگذرانیم در غیر اینصورت جریان d-F را از این مسیر می گذرانیم و الگوریتم را پایان می‌دهیم.

ب) ابتدا جریان l_e را از تمامی یال ها میگذرانیم. حال برآیند جریان ورودی هر راس را محاسبه میکنیم (جمع l_e یال های ورودی منهای l_e یال های خروجی)، آن را d_v می‌نامیم (حاصل جمع آنها صفر است). حال ظرفیت یال ها را برابر $c_e - l_e$ قرار میدهیم. باید جریانی در گراف جدید بیابیم که برآیند جریان ورودی راس های غیر از s و t برابر $-d_v$ بشود تا با اضافه کردن جریان های l_e برآیندشان صفر بشود، برای s برابر $-d - d_v$ تا برآیند آن d- بشود و برای t برابر $d - d_v$ تا برآیند آن d بشود، این برآیند مورد نظر را برای هر راس a_v می‌نامیم (حاصل جمع آنها صفر است). برای یافتن این جریان دو راس s’ و t’ اضافه میکنیم. از s’ به تمامی رئوسی که a_v منفی دارند یال با گنجایش $-a_v$ اضافه میکنیم و از تمامی رئوسی که a_v مثبت دارند یالی با گنجایش a_v به t’ اضافه میکنیم. حال جریان بیشینه را روی این گراف محاسبه میکنیم اگر برابر حاصلجمع a_v های مثبت شد میتوان بعد از حذف s’ و t’ این جریان را با جریان l_e جمع کرد و به عنوان پاسخ مساله اعلام کرد. در غیر اینصورت مساله پاسخ ندارد.

سوال ششم (برای علاقه‌مندان)

مساله را به مساله min-cost max-flow کاهش می‌دهیم. هزینه اینکه یک بسته در روز i خریداری و در روز j فروخته شود برابر است با قیمت خرید روز i به علاوه حاصل جمع هزینه‌های نگهداری از روز i تا روز قبل از j. گراف G را طوری می‌سازیم که هر جریان از s به t به منزله خرید بسته در یک روز و فروش آن بسته در یک روز دیگر باشد و جمع هزینه‌ی یال ها در این مسیر برابر هزینه های مربوط به خرید و نگهداری آن بسته باشد؛ به ازای هر روز دو راس b_i و a_i قرار می‌دهیم. که a_i به معنای روز خرید بسته و b_i به معنای روز فروش بسته می‌باشد. پس یک یال با ظرفیت بی‌نهایت از a_i به b_j قرار میدهیم اگر j<=i، و هزینه‌ی آن یال را برابر حاصل جمع هزینه های نگهداری در این بازه قرار میدهیم. راس s را اضافه میکنیم و آن را به تمامی a_i ها متصل میکنیم با ظرفیت بی‌نهایت و هزینه‌ی هر یال را برابر قیمت خرید کالا در آن روز می‌گذاریم. راس t را اضافه میکنیم و تمامی b_i ها را به آن وصل میکنیم ظرفیت هر یال را برابر میزان فروش در آن روز قرار میدهیم و هزینه هر یال را صفر در نظر می‌گیریم. الگوریتم min-cost max-flow را اجرا میکنیم میزان جریان برابر حاصل جمع میزان فروش در روزهای مختلف است (با توجه به برش یالی کمینه گراف). هزینه این جریان نیز برابر با کمینه هزینه‌ی قابل دستیابی است. مقادیر خرید در هر روز را نیز میتوانیم از جریان گذرنده از هر یال از s به a_i تعیین کنیم.