



## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی دوم

موعده آپلود: چهارشنبه ۲۸ اسفند ۹۸، ساعت ۲۳:۵۵  
طراح: آرمان رستمی، arman.rostami.999@gmail.com

به نکات زیر توجه کنید:

- راه‌حل‌های خود را به طور کامل و واضح بنویسید و موارد درست‌نویسی را در آن‌ها رعایت کنید.
  - در سؤالاتی که از شما راه‌حلی پویا خواسته شده، ارائه هر یک از راه‌حل‌های برنامه‌نویسی پویا و بازگشتی حافظه‌دار امکان‌پذیر است.
  - در سؤالاتی که راه‌حل با پیچیدگی زمانی و میزان حافظه مصرفی خواسته شده مدنظر است، در صورت نوشتن راه‌حل با پیچیدگی زمانی یا میزان حافظه مصرفی بیشتر، بخشی از نمره آن سوال را از دست خواهید داد.
۱. یک مجموعه از اعداد صحیح مثبت به شما داده شده است. هدف شکستن اعضای این مجموعه به دو بخش است به صورتی که حاصل جمع اعضای بخش اول با حاصل جمع اعضای بخش دوم برابر باشد. راه‌حلی پویا برای این مسئله ارائه دهید.
۲. رشته‌ای به شما داده شده است. هدف پیدا کردن طول بلندترین زیردنباله پالیندروم در این رشته است. رشته‌ای پالیندروم است که متقارن باشد به عبارت دیگر با برعکس خود یکسان باشد. زیردنباله، دنباله‌ای است که از دنباله دیگری با حذف صفر یا تعداد بیشتری از اعضای آن به دست می‌آید به طوری که ترتیب اعضا نیز حفظ گردد.
- (آ) راه‌حلی پویا برای این مسئله با پیچیدگی زمانی  $O(n^2)$  و میزان حافظه مصرفی  $O(n^2)$  ارائه دهید.
- (ب) راه‌حل خود در بخش قبل را طوری بهبود بخشید که میزان حافظه مصرفی آن  $O(n)$  شود.
۳. شرکتی در زمینه انرژی‌های تجدیدپذیر قصد قراردادن تعدادی توربین بادی در منطقه‌ای بادخیز از شهر را دارد. این منطقه دارای  $n$  بلوک است. با قراردادن توربین بادی در بلوک  $i$ ام به میزان  $p_i$  واحد برق تولید می‌شود. اگر در بلوکی توربین قرار گیرد در فاصله  $d \geq 1$  از آن توربین دیگری نمی‌تواند قرار بگیرد. این شرکت قصد دارد طوری توربین‌ها را در بلوک‌ها قرار دهد که مجموع میزان برق تولیدی بیشینه شود. این مسئله را یک بار به صورت بازگشتی حافظه‌دار و یک بار به صورت برنامه‌نویسی پویا حل کنید به طوری که زمان اجرا و حافظه مصرفی راه‌حل‌های ارائه شده از  $O(n)$  باشند.
۴. منطقه‌ای جنگلی وجود دارد که در آن مین‌گذاری شده. این منطقه به شکل جدولی با ابعاد  $N \times M$  تقسیم‌بندی شده است که در هر خانه آن تعدادی مین قرار دارد. تعداد این مین‌ها به صورت جدولی با ابعاد  $N \times M$  به شما داده شده است که در آن  $M_{ij}$  مشخص‌کننده تعداد مین‌ها در خانه با سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام می‌باشد. روباتی برای از کار انداختن این مین‌ها ساخته شده. این ربات قادر به از کار انداختن حداکثر  $K$  مین می‌باشد. این ربات از خانه  $(1, 1)$  که بالاترین و چپ‌ترین خانه است شروع به حرکت کرده و قصد ایجاد مسیری بدون مین تا خانه  $(N, M)$  که پایین‌ترین و راست‌ترین خانه است را دارد به طوری که بیشترین مین ممکن از کار بیفتد. طبیعتاً این ربات با رسیدن به هر خانه باید تمام مین‌های آن خانه را از کار بیندازد. این ربات می‌تواند به خانه‌های راست، پایین یا راست‌پایین حرکت کند. راه‌حلی پویا با زمان چندجمله‌ای برای این مسئله ارائه دهید که در صورت وجود جواب، حداکثر تعداد مین از کار انداخته شده را مشخص کند.
۵. دو رشته  $S_1$  و  $S_2$  به ترتیب با طول‌های  $n$  و  $m$  به شما داده شده است ( $m \leq n$ ). هدف پیدا کردن تعداد دفعاتی است که رشته  $S_2$  در رشته  $S_1$  به شکل زیردنباله تکرار شده. به طور مثال رشته  $abcacccbadb$  دارای ۶ زیردنباله به شکل  $ab$  است.

abcacccbadb abcacccbadb abcacccbadb abcacccbadb abcacccbadb abcacccbadb

راه‌حلی پویا با پیچیدگی زمانی  $O(m \times n)$  و میزان حافظه مصرفی  $O(m \times n)$  برای این مسئله بیابید. استفاده از میزان حافظه بهینه  $O(n)$  برای این مسئله دارای نمره امتیازی است.

۶. شرکتی دارای  $n$  دفتر در شهر تهران است. فرض کنید دفاتر به صورت لیست  $D_1, D_2, \dots, D_n$  به شما داده شده است. این شرکت به منظور بهبود خدمات‌رسانی به مشتری‌ها، قصد قراردادن بخش خدمات پس از فروش در تعدادی از دفاتر خود را دارد. هزینه ایجاد این بخش جدید در دفتر  $i$ ام برابر عدد صحیح مثبت  $c_i$  است.

هر مشتری ممکن است به یکی از این دفاتر برای خدمات پس از فروش مراجعه کند. اگر مشتری به دفتر  $i$ ام مراجعه کرد و در آن دفتر بخش خدمات پس از فروش وجود نداشت، مشتری به ترتیب به دفتر  $i + 1$ ام تا  $n$ ام مراجعه می‌کند تا دفتری پیدا کند که خدمات پس از فروش داشته باشد. فرض می‌شود حتماً باید در دفتر  $n$ ام بخش خدمات پس از فروش وجود داشته باشد. اگر فرض کنیم مشتری با شروع از دفتر  $i$ ام به دفتر  $j$ ام برسد که در آن بخش مربوطه وجود دارد، هزینه  $p_i$  به عنوان هزینه دسترسی برای مشتری به وجود می‌آید که برابر  $i - j$  است.

حالا این شرکت قصد دارد طوری این بخش‌ها را در تعدادی از دفاتر خود ایجاد کند که مجموع هزینه‌های ایجاد بخش‌ها و هزینه دسترسی برای مشتریان کمینه شود. به عبارت دیگر حاصل عبارت پایین کمینه شود که در آن  $I \subset 1, 2, \dots, n - 1$  است که دفاتری هستند که در آن بخش مربوطه ایجاد می‌گردد.

$$TotalCost = c_n + \sum_{i \in I} c_i + \sum_{i=1}^n p_i \quad (1)$$

راه‌حلی با استفاده از برنامه‌نویسی پویا با پیچیدگی زمانی  $O(n^2)$  و میزان حافظه مصرفی  $O(n)$  برای این مسئله ارائه دهید.

۷. فروشنده‌ای به تازگی بخش فروش عتیقه را در مغازه خود راه انداخته و دارای  $n$  عتیقه در مغازه خود است که به ترتیب  $a_1, a_2, \dots, a_n$  مشخص می‌شوند. این فروشنده هر سال یکی از عتیقه‌های اول یا آخر (چپ‌ترین یا راست‌ترین) در بین عتیقه‌های خود به ترتیبی که گفته شد را می‌فروشد. قیمت عتیقه  $a_i$  برابر  $p_i$  است و قیمت هر عتیقه در سال  $y$ امی که بخش فروش عتیقه را راه انداخته در  $y$  ضرب می‌شود. یعنی قیمت عتیقه  $a_i$  در سال  $y$ ام برابر  $y \times p_i$  می‌شود. با استفاده از روشی پویا در پیچیدگی زمانی  $O(n^2)$  و میزان حافظه مصرفی  $O(n^2)$  راه‌حلی برای این مسئله بیابید که بیشترین میزان فروشی که فروشنده می‌تواند از فروش عتیقه‌ها داشته باشد و انتخاب عتیقه برای فروش در هر سال را مشخص کند. (امتیازی)