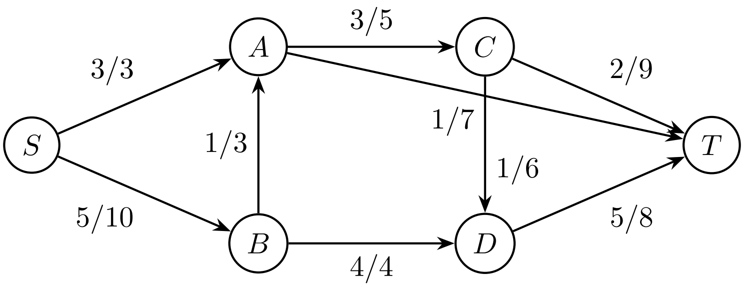
طراحی الگوریتم

تمرین پنجم - شبکه جریان

ارشیا عطائی و پارسا موبد

۱. مسئله جریان شبکه ۲۰ نمره

در نمودار زیر یک شبکه جریان داده شده است که مطابق با قوانین جریان شبکه معتبر است. ظرفیت هر یال و مقدار جریان فعلی آن در نمودار نشان داده شده است.



الف) نشان دهید این گراف یک جریان شبکه معتبر است.

ب) آیا این جریان بیشینه است؟

ج) جریان بیشینه آن را بدست آورید.

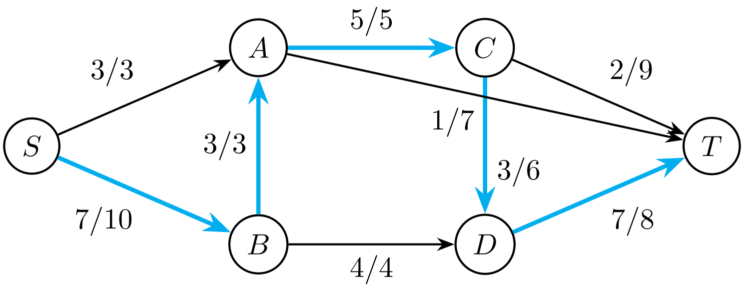
د) برش کمینه آن را بدست آورید.

پاسخ :

الف) جمع جریان ورودی و خروجی هر راس بجز سورس و سینک برابر است.

ب) خیر زیرا مسیر S, B, A, C, D, T یک مسیر افزایشی است.

ج) 10



د) $\{S, B\}, \{A, D, C, T\} = 3 + 3 + 4 = 10$

۲. نوشکیا ۲۰ نمره

نوشکیا گرافی n راسی و m یالی دارد. در این گراف هر راس یک عدد دارد که عدد راس v برابر a_v و عدد یال e برابر b_e است. ارزش یک مجموعه از راس‌ها برابر جمع b یال‌هایی که دو سر آن درون مجموعه است منهای جمع a های راس‌های درون آن مجموعه است. الگوریتمی چندجمله‌ای برحسب n طراحی کنید که بیشترین ارزش را از بین تمام مجموعه راس‌های ممکن پیدا کند.

پاسخ :

یک شبکه جریان طراحی می‌کنیم تا به کمک آن بتوان سوال را حل کرد.
ابتدا دقت کنید که عبارت خواسته شده برای زیر گراف H از گراف G را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{e\in E(G)} b_e - \sum_{e\notin E(H)} b_e - \sum_{v\in V(H)} a_v$$

ماکسیمم کردن عبارت خواسته صورت سوال معادل مینیمم کردن عبارت $\sum_{e\notin E(H)} b_e + \sum_{v\in V(H)} a_v$ است، پس در ادامه سعی می‌کنیم تا این عبارت را مینیمم کنیم.
ابتدا راس s را به عنوان $source$ و راس t را به عنوان $sink$ اضافه می‌کنیم. حال به ازای هر یال در گراف اصلی، یک راس در شبکه جریان اضافه می‌کنیم و از سورس به آن با ظرفیت b_e یک یال اضافه می‌کنیم.
حال به ازای هر راس در گراف اصلی، در گراف شبکه جریان یک راس اضافه می‌کنیم و از آن به سینک یک یال با ظرفیت a_v اضافه می‌کنیم.
در نهایت به ازای هر یال در گراف اصلی، از راس متناظر به آن در گراف شبکه جریان به دو راس متناظر رئوس متصل به آن در گراف اصلی، یک یال با وزن بی‌نهایت می‌گذاریم.
حال یک کات (S، T) را در نظر بگیرید تا هزینه این کات را بررسی کنیم.
فرض کنید به رئوس متناظر به یک یال در گراف شبکه جریان راس نوع A و به رئوس متناظر راس در شبکه جریان راس نوع B بگوییم. در ابتدا اگر یه راس از دسته A در S باشد به طوری که یکی از رئوسی که به آن یال بی‌نهایت دارد در T باشد، هزینه این کات بی‌نهایت است.
پس فرض کنید اینگونه نیست. در این صورت اگر زیر گرافمان را این صورت انتخاب کنیم که هر یالی که راس متناظر آن در S است را انتخاب کنیم و در این صورت هر دو راس متصل به آن نیز حتما در S هستند و یک زیرگراف معتبر است. هزینه این کات نیز برابر است با

$$\sum_{e\notin E(H)} b_e + \sum_{v\in V(H)} a_v$$

که دقیقا همان چیزی است که می‌خواستیم. حال واضح است که مین‌کات این شبکه جریان همان هدف مورد نظر ما برای حل این مسئله است که می‌دانیم معادل همان مسئله مکس‌فلو است که راه حلی چند جمله‌ای برحسب n دارد.

۳. دور دور　　　　۲۰ نمره

گرافی جهت دار n راسی و m یالی داریم. به یک گراف دور دوری می‌گوییم، اگر بتوان تمام راس‌های آن را به تعدادی دور جهت دار افراز کرد. الگوریتمی چندجمله‌ای برحسب n طراحی کنید، که تشخیص دهد گراف مورد نظر دور دوری است یا خیر.

پاسخ :

یک گراف دو بخشی که در هر بخش n راس وجود دارد میسازیم و به ازای یال جهت دار v به u یک یال از راس v بخش اول، به راس u بخش دوم وصل میکنیم. در گراف ایجاد شده، هر افراز دوری معادل یک تطابق کامل در گراف دو بخشی ساخته شده است زیرا در یک افراز دوری به این صورت است که تعدادی یال از گراف اصلی برداشته شود به طوریکه درجه خروجی و ورودی هرکس دقیقا یک باشد که در گراف دو بخشی متناظر به این صورت است که هر راسی یکبار در بخش بالا یک یال برایش انتخاب شده باشد(درجه خروجی برابر ۱) و یک بار در بخش پایین برای آن یک یال انتخاب شده باشد (درجه ورودی ۱) که معادل یک تطابق کامل در این گراف دوبخشی است.
پس سوال به پیدا کردن بلندترین تطابق در یک گراف دو بخشی تبدیل میشود که با شبکه جریان در مرتبه زمانی چندجمله‌ای قابل حل است.

۴. دوباره یک سوال آرایه　　　　۲۰ نمره

یک آرایه به طول n از اعداد طبیعی به همراه m جفت عدد (i_k, j_k)، $1 \leq i_k, j_k \leq n$، $1 \leq k \leq m$، به شما داده شده، که به ازای هر جفت، این شرط برقرار است که $i_k + j_k$ عددی فرد است. در هر عملیات می‌توان یک جفت از این m جفت را انتخاب کرد و a_{i_k} و a_{j_k} را بر یک عدد بزرگتر از ۱ که بر هر دوی آنها بخش‌پذیر است تقسیم کرد. با فرض اینکه اعداد حداکثر ۱۰ رقمی هستند، الگوریتمی چندجمله‌ای پیدا کنید که بیشترین تعداد عملیاتی که می‌شود روی این آرایه انجام داد را بدست آورد.

پاسخ :

از آنجایی که عددها حداکثر ۱۰ رقمی هستند، هر عدد را در $O(1)$ می‌توان تجزیه کرد. ابتدا عددها را به عوامل اولشان تجزیه می‌کنیم. می‌دانیم هر جفت با توجه به شرط سوال حتما بین یک اندیس زوج و یک اندیس فرد است، حال مسئله را به این صورت به یک مسئله شبکه جریان تبدیل می‌کنیم:
دو راس s و t را به ترتیب به عنوان منبع و چاه در این گراف قرار می‌دهیم.
به ازای هر عدد در آرایه مثل a_i که تجزیه آن به صورت $a_i = {p_1}^{w_1} \times {p_2}^{w_2} \times \ldots \times {p_k}^{w_k}$ است ، k راس به ازای هر عامل اول آن قرار می‌دهیم. حال اگر اندیس i زوج بود، از s به این عامل (مثلا p_j) یالی با وزن w_j قرار می‌دهیم، و اگر i فرد بود یالی با همین وزن از این عامل به راس t قرار می‌دهیم.
حالا برای هر جفت که می‌دانیم بین اندیس‌های زوج و فرد است به ازای هر عامل اول مشترکی که بین عدد این دو اندیس در آرایه وجود دارد یک یال با ظرفیت بی‌نهایت (یال با ظرفیت بیشترین w_j همین خاصیت را خواهد داشت) بین راس عامل اول این دو اندیس قرار می‌دهیم که جهت آن از اندیس زوج به اندیس فرد است. حال روی این گراف بیشینه جریان را پیدا می‌کنیم، زیرا هر یک واحد جریان معادل یک عملیات در مسئله اصلی است (و بر عکس).
چون تعداد عامل‌های اول یک عدد ۱۰ رقمی از $O(1)$ است، این راه حل مسئله را در زمان چندجمله‌ای حل می‌کند.

۵. هانسل و گرتل ۲۰ نمره

یک مغازه شکلات‌فروشی به شکل یک جدول $n \times n$ داریم که در خانه (i, j) آن $a_{i,j}$ شکلات قرار گرفته. علی قصد دارد به این شکلات‌ها دستبرد بزند؛ اما صاحب مغازه به ازای هر سطر و هر ستون یک سیستم امنیتی به کار برده است. اما سیستم دزدگیر این سطرها و ستون‌ها یک باگ عجیب دارد. اگر به ازای هر سطر به دقیقا r_i و به ازای هر ستون به دقیقا c_j خانه از آن دستبرد زده شود، سیستم دزدگیر قابلیت تشخیص این دستبرد به جدول را نخواهد داشت. بیشترین میزان شکلاتی که علی می‌تواند از این مغازه بدزدد بدون اینکه گیر بیفتد چقدر است؟

این مسئله را برای علی در زمان چندجمله‌ای حل کنید. همچنین لیست $[r_1, r_2, ..., r_n]$ و $[c_1, c_2, ..., c_n]$ به شما داده می‌شود. $(0 \leq r_i, c_j \leq n)$

پاسخ :

ابتدا، می‌دانیم که اگر جمع r_iها با جمع c_iها برابر نباشد دزدی علی در هر صورت ناموفق خواهد بود. در غیر این صورت، این مسئله را به صورت زیر به مسئله شبکه جریان تبدیل می‌کنیم:

گراف را به این صورت تشکیل می‌دهیم که به ازای هر سطر و ستون یک راس قرار می‌دهیم. سطرها را به منبع و ستون‌ها را به چاه وصل می‌کنیم. یال‌های متصل به منبع در جهت خروج از منبع جهت‌دهی می‌کنیم و یال‌های متصل به چاه راب در جهت ورود به چاه جهت‌دهی می‌کنیم. ظرفیت یال‌ها را برای سطرها برابر با r_i آن سطر، و برای ستون‌ها برابر با c_j آن ستون قرار می‌دهیم و هزینه استفاده از این یال‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم. حال بین هر سطر و هر ستون یک یال با ظرفیت یک قرار می‌دهیم که این یال نشان دهنده شکلاتی است که در محل تقاطع این سطر و ستون قرار گرفته، و جریان گذرنده از این یال نشان دهنده این است که این شکلات را انتخاب می‌کنیم یا خیر، در نتیجه هزینه استفاده از این یال‌را هم برابر با تعداد شکلات‌های داخل این خانه قرار می‌دهیم(چون اگر به یک خانه دستبرد می‌زنیم قطعا تمام شکلات‌های آن را بر می‌داریم.) حال با توجه به شرط سوال که می‌خواهد دقیقا از هر سطر و ستون دقیقا r_i و c_i شکلات برداریم داریم بین حالت‌های بیشینه شار، در گراف ساخته شده دنبال پرارزش ترین شار می‌گردیم (با توجه به اینکه بین هر سطر و ستون یالی با ظرفیت یک قرار دارد می‌توان نشان داد در شار بیشینه تمام یال‌های متصل به منبع و چاه از تمام ظرفیتشان استفاده شده). پس به این ترتیب الگوریتم max-cost flow را در این گراف اجرا می‌کنیم و به جواب می‌رسیم (همان min-cost flow با منفی کردن هزینه‌ها).

برای مطالعه بیشتر مسئله min-cost flow به این لینک مراجعه کنید.