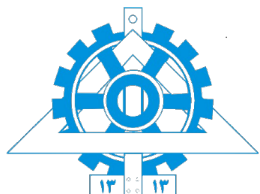


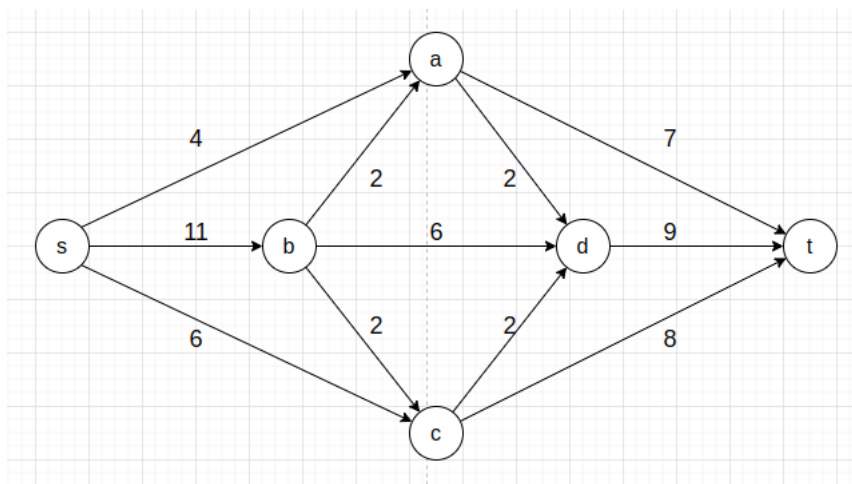
به نام خدا



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

پاسخ تمرین کتبی پنجم
طراح: محمد فرهی (mohammad.farrahi@ut.ac.ir)

۱. الگوریتم Ford-Fulkerson را بر روی گراف زیر با شروع از راس s و ختم به راس t اجرا کنید. در هر مرحله، مسیر افزایشی و شبکه باقی مانده را رسم کنید. در انتها نیز min-cut گراف را مشخص کنید.

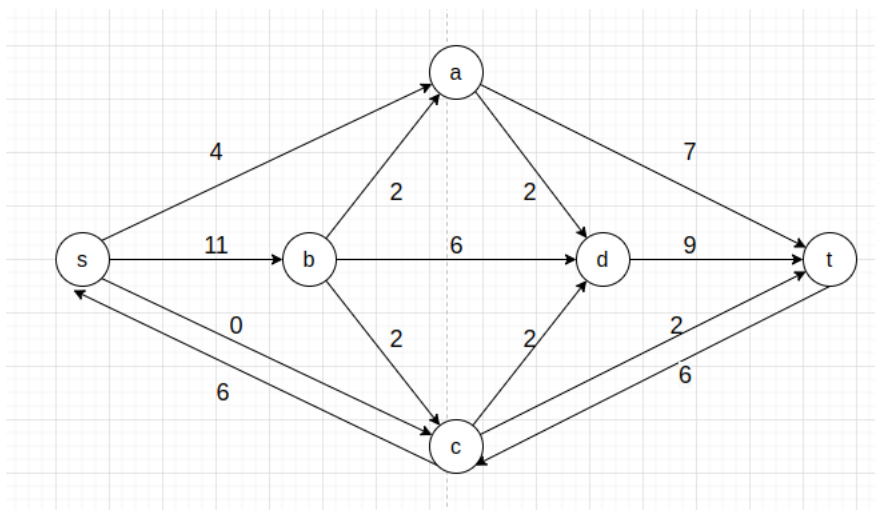


پاسخ

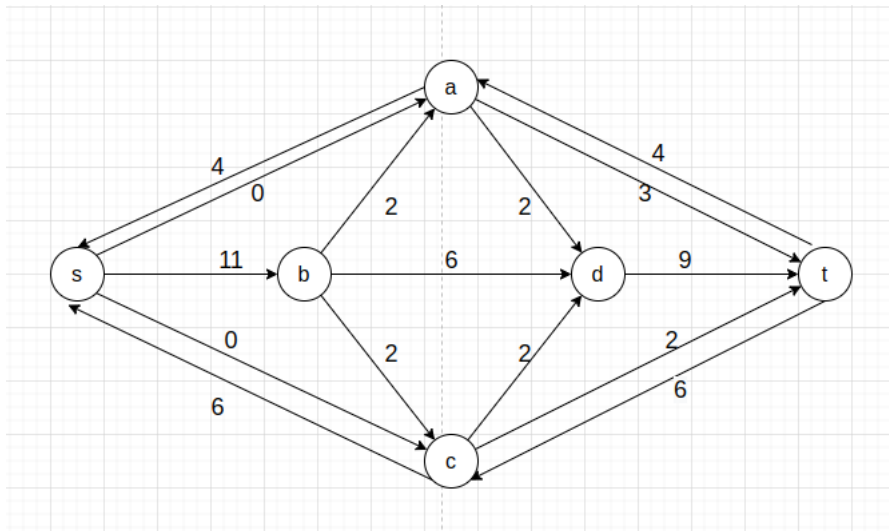
مرحله اول:

مسیر: $s \rightarrow c \rightarrow t$

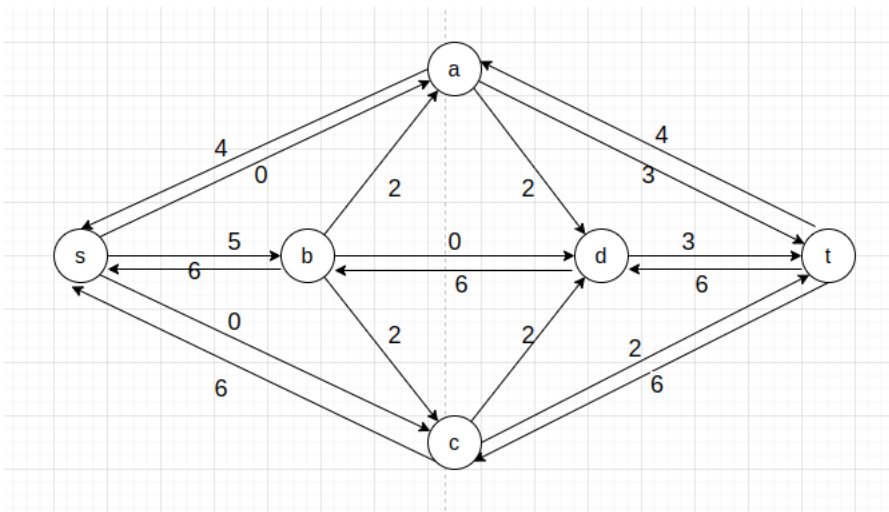
اندازه: 6



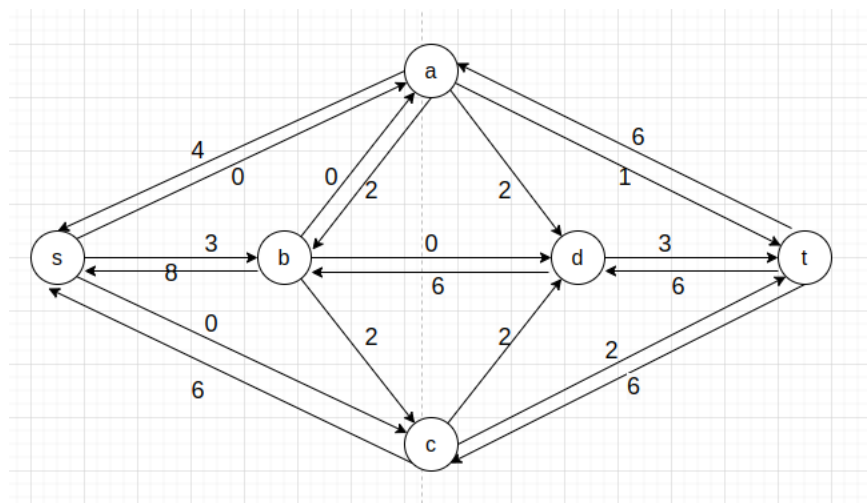
مرحله دوم:
مسیر: $s \rightarrow a \rightarrow t$
اندازه: 4



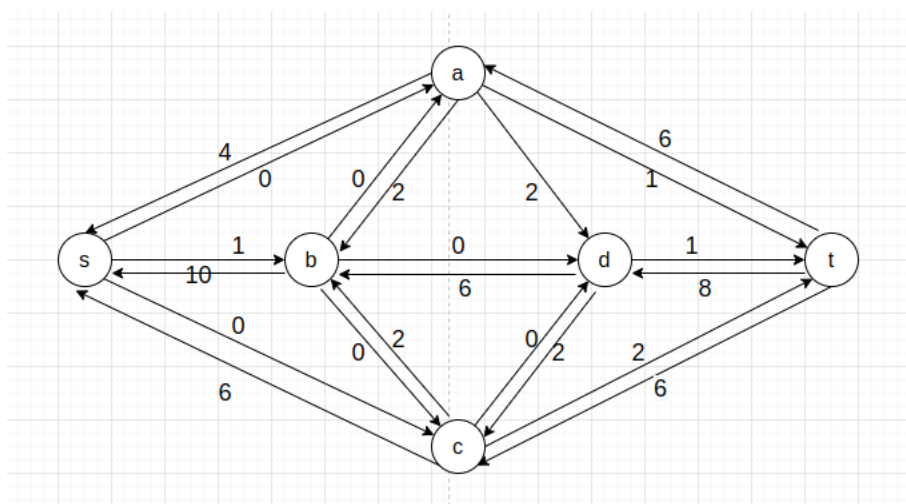
مرحله سوم:
مسیر: $s \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow t$
اندازه: 6



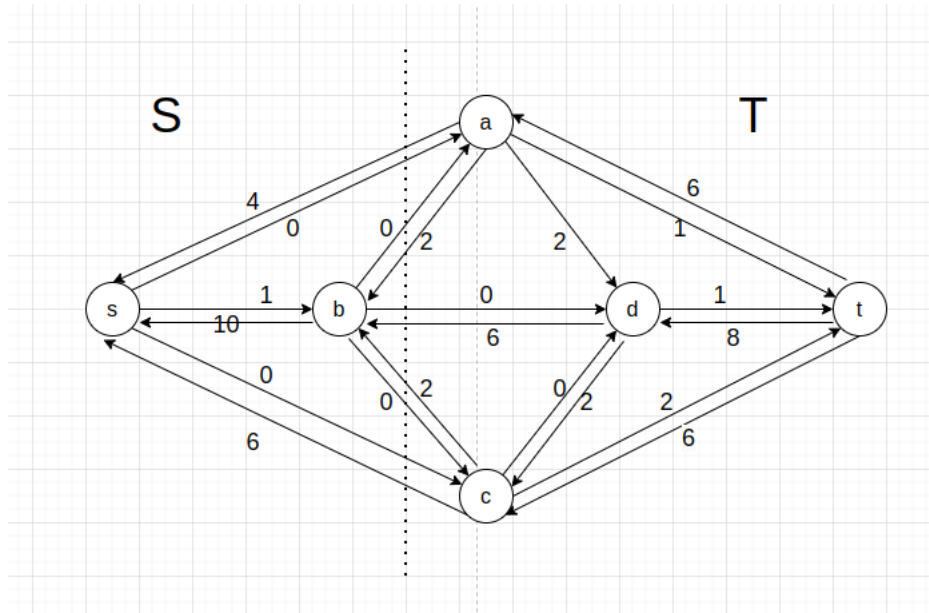
مرحله چهارم:
مسیر: $s \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow t$
اندازه: 2



مرحله پنجم:
مسیر: $s \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$
اندازه: 2



مین کات

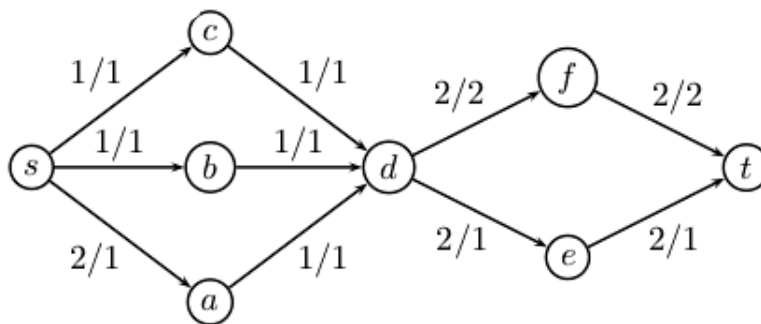


۲. در یک شبکه جریان، یالی که حذف آن باعث بیشترین کاهش در جریان بیشینه در شبکه شود را یال ارزشمند می نامیم. موارد زیر را اثبات یا با مثال نقض رد کنید.

- (آ) یک یال ارزشمند یالی است با بیشترین مقدار ظرفیت در شبکه.
- (ب) یک یال ارزشمند یالی است با بیشترین مقدار جریان گذرنده از آن در شبکه
- (ج) یک یال ارزشمند یالی است که جزء یال های یک $\min s-t$ cut بوده و بیشترین جریان گذرنده را از بین یال های cut دارد.
- (د) یالی که متعلق به یک $\min s-t$ cut نباشد نمی تواند یک یال ارزشمند باشد.
- (ه) یک شبکه می تواند چند یال ارزشمند داشته باشد.

پاسخ)

به شبکه جریان زیر توجه کنید :



این شبکه جریان، یک مثال نقض برای موارد الف، ب، ج و د است و همچنین یک مثال برای مورد ه است. این شبکه جریان مشخص شده، یک جریان بیشینه با اندازه ۳ است. حذف هر یک از یال ها، جریان شبکه را به اندازه یک واحد کاهش می دهد. پس همه یال ها یک یال ارزشمند هستند (درستی مورد ه). یال (s, b) نه بیشترین مقدار ظرفیت در شبکه را دارد و نه دارای بیشترین مقدار جریان گذرنده در شبکه است، اما یک یال ارزشمند است (مثال نقض الف و ب). یال (s, a) با وجود ارزشمند بودن متعلق به هیچ $\min cut$ ای نیست (مثال نقض مورد د و ج).

۳. فرض کنید M یک جدول $x \times y$ باشد که در هر خانه از جدول یک عدد حقیقی نامنفی وجود دارد به طوری که مجموع اعداد هر سطر و ستون عددی صحیح است. ثابت کنید جدولی $x \times y$ وجود دارد به طوری که در هر خانه از جدول یک عدد صحیح نامنفی وجود دارد و مجموع اعداد هر سطر و ستون آن، همانند جدول M است.

(پاسخ)

فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_x به ترتیب جمع ردیف های ۱ تا x و همچنین b_1, b_2, \dots, b_y به ترتیب جمع ستون های ۱ تا y جدول M باشند. یک گراف دو بخشی شامل دسته راس های p_1, p_2, \dots, p_x متناظر با ردیف ها و دسته راس های q_1, q_2, \dots, q_y متناظر با ستون ها تشکیل می دهیم. از هر راس دسته اول یک یال جهت دار به تمام راس های دسته دوم با ظرفیت بی نهایت وصل می کنیم. راس s و t را به عنوان منبع و مقصد در نظر می گیریم که s به راس های p_i با ظرفیت a_i متصل می شود. همچنین هر راس q_i با ظرفیت b_i به راس t به وصل می شود.

الگوریتم فورد-فالکرسون را روی این شبکه اجرا می کنیم. واضح است که اندازه min cut یا همان جریان بیشینه برابر $a_1 + a_2 + \dots + a_x = b_1 + b_2 + \dots + b_y$ است. از آنجا که ظرفیت تمام یال ها عدد صحیح است، جریان بیشینه شبکه نیز در یال ها صحیح خواهد بود. برای به دست آوردن عدد صحیح خانه (i, j) جدول جدید کافی است جریان گذرنده از یال (p_i, q_j) را در نظر بگیریم.

۴. در یک جشن بزرگ و خاص، n نفر به مهمانی دعوت شده اند. برای انجام پذیرایی، افراد باید دور میز های دایره ای شکل بنشینند. افرادی که مجاور هم می نشینند باید شرایط خاصی داشته باشند. دو نفر تنها در صورتی می توانند کنار هم بنشینند که مجموع سن آن ها عددی اول باشد. با فرض اینکه تعداد نامحدودی میز دایره ای برای استفاده وجود دارد و در هر میز استفاده شده باید حداقل ۳ نفر دور آن نشسته باشند، الگوریتمی چند جمله ای ارائه دهید که طرز نشستن مهمانان را مشخص کند یا مشخص کند این کار ممکن نیست. سن افراد مهمانی بین ۲ تا ۱۰۰ سال است.

(پاسخ)

توجه داشته باشید که هیچ دو مهمانی با زوجیت سن یکسان نمی توانند کنار هم بنشینند زیرا جمع سن آنها عددی زوج است و تنها عدد زوج اول عدد ۲ می باشد ولی حداقل مجموع سن مهمان ها ۴ سال است.

هر مهمان با سن زوج دو همسایه با سن فرد دارد و هر مهمان با سن فرد دو همسایه با سن زوج دارد. در نتیجه اگر تعداد مهمان های فرد و زوج با هم برابر نباشد جوابی نداریم.

مهمان ها را بر اساس زوجیت سن تقسیم بندی می کنیم. گرافی می سازیم که رئوس آن ها مهمان ها باشند و بین هر دو مهمان یال با ظرفیت ۱ می گذاریم اگر و تنها اگر جمع سن آن ها عددی اول باشد. این گراف دو بخشی خواهد شد: یک دسته از راس ها مهمانان با سن زوج و یک دسته از راس ها مهمانان با سن فرد. راس جدید s را اضافه می کنیم و آن را به تمامی رئوس گروه زوج، با یک یال با ظرفیت ۲ وصل می کنیم. یک راس جدید t نیز اضافه می کنیم و به تمامی رئوس گروه فرد با یالی با ظرفیت ۲ آن را وصل می کنیم. سپس شار بیشینه s به t را محاسبه می کنیم. در صورتی که شار بیشینه با مقدار $(2 * \text{تعداد مهمان ها زوج})$ داشتیم، آنگاه جواب داریم. حال گراف دوبخشی شامل یال هایی که از آن ها جریان ۱ رد شده است را در نظر می گیریم. هر دور تشکیل شده در این گراف، یک میز برای مهمان هاست. هر مهمان در دقیقاً یک دور آمده و طول هر دور، حداقل ۴ است.

۵. فرض کنید گراف شبکه $G = (V, E)$ با دو راس seV و teV و ظرفیت یال c_e برای هر یال eeE به شما داده شده است. گراف G دارای یال هایی است که به منبع s وارد می شوند. فرض کنید f جریانی در این شبکه باشد که در آن یکی از یال های (v, s) که به منبع وارد می شود دارای جریان $f(v, s) = 1$ باشد.

(آ) ثابت کنید جریان f' برای شبکه G وجود دارد به طوری که $|f'| = |f|$ و $f'(v, s) = 0$

(ب) الگوریتمی با مرتبه زمانی $O(|V| + |E|)$ ارائه دهید که با داشتن f و فرض اینکه ظرفیت همه یال ها یک عدد صحیح است، f' را محاسبه کند.

(پاسخ)

به دلیل وابستگی دو مورد سوال با هم، الف و ب با هم پاسخ داده می شوند.

از آنجا که جریانی از راس v خارج شده، بنا به پایستگی جریان، همان مقدار جریان نیز باید به v وارد شود. در نتیجه از آنجا که تنها منبع شبکه s است، مسیری از s به v وجود دارد که با توجه به وجود یال (v, s) ، پس دوری داریم که شامل یال (v, s) است. و مقدار جریان گذرنده در این دور ۱ واحد است. با حذف کردن جریان عبوری از این دور، به f' می رسیم.

با الگوریتم DFS این دور را پیدا می به این شکل که پیمایش را از راس s شروع می کنیم. هر وقت که به راس v رسیدیم یک فلگ را یک کرده و بازگشتی را بر می گردیم مسیر این راس تا ریشه به علاوه یال v به s دور مورد نظر را تشکیل می دهد. کنیم. این کار حداکثر

$O(|E| + |V|)$ طول می کشد. حال جریان تمامی یال های موجود در دور را به اندازه یک واحد کم می کنیم ($O(|V|)$). این کار باعث می شود اندازه جریان همان مقدار قبلی باقی بماند. پس جریان همچنان بیشینه است. این کار شرط محدودیت گنجایش یالی را نقض نمی کند زیرا تمامی یال های واقع در دور، قبل از این که مقدار جریان شان را کم کنیم، دارای جریان بیشتر از صفر بودند و در نهایت پایداری جریان نقض نخواهد شد زیرا برای هر راس، جریان یک یال ورودی و خروجی از آن را به یک اندازه کم کرده ایم.

۶. یک مزرعه مستطیل شکل داریم که می توان به آن همانند جدول نگاه کرد؛ به این شکل که در تعدادی از قسمت های مزرعه (خانه های جدول) درخت کاشته شده است و دیگر قسمت های آن (بقیه خانه های جدول) که خالی هستند، دارای خاک مرطوب مناسب برای کاشت درخت است. قرار است قسمت هایی که در آن ها درخت وجود دارد را از قسمت هایی که خاک دارند با حصار جدا کنیم. هزینه کشیدن حصار بین هر دو خانه مجاور x تومان است. هدف این است که این هزینه کمینه شود. برای رسیدن به این مهم، این قابلیت وجود دارد که درختی در یک خانه خالی کاشته شود یا درختی در یک خانه از مزرعه قطع شود. هزینه کاشت یا قطع درخت در یک خانه از مزرعه برابر y تومان است. الگوریتمی چند جمله ای ارائه دهید که خالی یا دارای درخت بودن هر خانه از مزرعه را طوری تعیین کند که در نهایت مجموع هزینه برای عملیات حصار کشی کمینه شود. دقت کنید که نیازی به حصار کشیدن بین خانه های کناری مزرعه و بیرون مزرعه نیست.

(پاسخ)

به ازای هر خانه از جدول یک راس در شبکه در نظر می گیریم. همچنین راس s و t را به عنوان منبع و سینک به شبکه اضافه می کنیم. s را به تمام رئوسی که خالی هستند و همچنین تمام رئوسی که دارای درخت هستند را به t هر دو با ظرفیت y متصل می کنیم. همچنین هر راس خانه خالی را به راسی از خانه دارای درخت با ظرفیت x وصل می کنیم اگر و تنها اگر با هم مجاورت داشته باشند. با اجرای الگوریتم $\min \text{ cut}/\max \text{ flow}$ و به دست آوردن $\min \text{ cut}$ آن رئوسی که در نهایت در مجموعه S قرار بگیرند، خانه های خالی خواهند بود و آن رئوسی که در T قرار بگیرند باید در نهایت دارای درخت شوند. هزینه کمینه کل نیز برابر اندازه جریان بیشینه (مین کات) خواهد بود.

دقت کنید هر نوع سیاست دیگری برای تعیین نوع خانه ها را می توان با یک cut از این شبکه مدل کرد. اگر رئوسی که ابتدا در قسمت S باشند، در cut نهایی در قسمت T قرار بگیرند یال بین آن ها و راس s میان cut قرار خواهد گرفت و نشان دهنده هزینه تغییر نوع خانه جدول خواهند بود (همچنین برای رئوسی که در ابتدا در سمت T هستند و در کات، سمت S قرار خواهند گرفت). همچنین رئوسی که در ابتدا و در کات گروه شان تغییر نمی کند (مثلا همان S باقی می ماند) اگر در مجاورت با خانه ای از جنس دیگر باشند یال متناظر نشان دهنده این مجاورت، بین کات قرار خواهد گرفت و نشان دهنده هزینه حصار خواهد بود. پس ظرفیت هر کات متناظر با هزینه یک سیاست برای حصار کشی و تغییر خانه های جدول خواهد بود و با $\min \text{ cut}$ کمترین هزینه را به دست می آوریم.