

به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها



تمرین کتبی سوم

موعد تحویل: پنج شنبه ۲۹ فروردین ۹۸

طراح: سینا کچویی sina95kachoei@gmail.com

1. دو string به شما داده شده است. با فقط استفاده از سه عملیات زیر، می‌خواهیم String 1 را به String 2 تبدیل کنیم. الگوریتمی ارائه دهید که کمترین تعداد عملیات را برای این کار پیدا کند.

عملیات مورد استفاده: Insert, Remove, Replace

مثلا برای تبدیل cat به cute ابتدا a را با u، Replace می‌کنیم سپس e را Insert می‌کنیم. (الگوریتم پویا)

2. N کامیون در یک طرف از خیابان قرار دارند و آرایش خطی دارند. در طرف دیگر خیابان n پارکینگ قرار دارند و می‌خواهیم هر کامیون را در یک پارکینگ پارک کنیم. هر کامیون در مکان x برای پارک کردن در پارکینگی در مکان x' باید به اندازه $|x' - x|$ مسافت طی کند. مکان کامیون‌ها و پارکینگ‌ها را داریم. (الگوریتم حریصانه)

الف) با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ برای هر کامیون یک پارکینگ تعیین کنید به طوری که میانگین فاصله ی طی شده توسط کامیون‌ها کمترین مقدار ممکن شود.

ب) اگر بخواهیم که بیشترین فاصله ی طی شده توسط کامیون‌ها با $O(n \log n)$ کمترین مقدار ممکن شود چه تفاوتی ایجاد می‌شود؟

3. می‌خواهیم n معجون را که در یک ردیف در کنار هم چیده شده‌اند را با یکدیگر مخلوط کنیم. برای این کار فقط می‌توانیم در هر مرحله، هر دو معجون را با یکدیگر مخلوط کرده و ظرف خالی را از صف خارج کنیم. هر معجون یک انرژی درونی دارد و هر دو معجونی که با یکدیگر مخلوط شوند، مقداری از انرژی درونی خود را آزاد می‌کنند. معجونی که از مخلوط کردن حاصل می‌شود، دارای انرژی درونی برابر با جمع انرژی درونی دو معجون مخلوط شده به پیمانه ی 100 است. همچنین انرژی آزاد شده، برابر با ضرب انرژی درونی دو معجون است. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n^3)$ ارائه دهید که توسط آن، همه ی معجون‌ها را با یکدیگر مخلوط کرده و در انتها فقط یک معجون باقی بماند و کمترین انرژی آزاد شده را داشته باشیم.

4. امتحانی در روز شنبه و در بازه ی زمانی $[a, b]$ برگزار می‌شود. تعداد n مراقب برای حضور در امتحان اعلام آمادگی کردند به صورتی که مراقب i -ام می‌تواند در بازه ی زمانی $[S_i, F_i]$ این مسئولیت را قبول کند. حداقل یک مراقب در

هر لحظه از زمان باید در محل حضور داشته باشد. مطلوب است الگوریتمی با مرتبه ی زمانی $O(n \log n)$ که کمترین تعداد مراقب را برای این کار محاسبه کند. (الگوریتم حریصانه)

5. تعدادی نا متناهی سکه به ارزش های $V = \{V_1, V_2, \dots\}$ داریم. می خواهیم کمترین تعداد سکه را برداریم به طوری که به وسیله های آن ها بتوانیم تمام ارزش های 1 تا C را بسازیم.
برای مثال اگر $V = \{1, 2, 5, 10\}$ و $C = 20$ باشد آن گاه با داشتن سکه های $\{1, 2, 5, 10\}$ میتوان تمام ارزش های 1 تا 20 را ساخت. الگوریتمی از مرتبه ی زمانی $O(v \log v)$ برای انجام این کار ارائه دهید که v تعداد سکه ها است. (الگوریتم حریصانه)

6. آرمین میخواهد برای تعطیلات آخر هفته از تهران به شیراز برود. ماشین آرمین به ازای هر یک لیتر بنزین یک کیلومتر راه میپیماید و گنجایش باک او C لیتر است. در مسیر تهران به شیراز شمار n پمپ بنزین وجود دارد که پمپ بنزین i ام در فاصله ی d_i از تهران قرار دارد و d_i ها به صورت مرتب شده به شما داده می شوند. پویا با باک پر شروع به سفر میکند.

الف) آرمین میخواهد با حداقل تعداد توقف در پمپ بنزین ها سفر را به انجام برساند. الگوریتمی از مرتبه $O(n)$ ارائه دهید که به آرمین بگوید در کدام پمپ بنزین ها باید توقف کند. درستی الگوریتم خود را ثابت کنید. (الگوریتم حریصانه)

ب) قیمت هر لیتر بنزین در پمپ بنزین i ام برابر p_i است. آرمین میخواهد با حداقل هزینه سفرش را به اتمام برساند. الگوریتمی از مرتبه $O(n)$ ارائه دهید که به آرمین بگوید در هر پمپ بنزین باید چه مقدار بنزین خریداری کند. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید. (الگوریتم حریصانه)

7. (امتیازی) فردی برای دزدی به تولیدی فلزات با ارزش رفته است. در آنجا متوجه می شود که در انبار تولیدی، n فلز وجود دارد. هر گرم فلز iام ارزش v_i را دارد و در کل m_i گرم از آن در انباری موجود است. او کوله ای به گنجایش M گرم ماده را به همراه خود برداشته است و می خواهد داخل آن را با فلزات انبار پر کند. الگوریتمی با $O(n)$ ارائه دهید تا دزد ما بیشترین سود را بکند. (تمامی اعداد طبیعی هستند)