



به نام خدا

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران

طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها، نیم‌سال اول سال تحصیلی ۹۶-۹۷

تمرین شماره ۲ (برنامه‌نویسی پویا) موعد تحویل: ۱۴ آبان ۱۳۹۶



- ۱- عدد  $S$  به شما داده می‌شود، تعداد اعداد بین ۱ تا  $2^{32}$  که مجموع ارقام آن‌ها برابر  $S$  می‌باشد را بیابید. زمان اجرا:  $\log(S)$
- ۲- عدد پنج را به صورت زیر می‌توان به ۶ شکل به صورت جمع اعداد کوچک‌تر از خود نوشت.

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 + 2$$

$$1 + 2 + 2$$

$$2 + 3$$

$$1 + 1 + 3$$

$$1 + 4$$

- عدد  $n$  را به چند شکل می‌توان به صورت جمع اعداد کوچک‌تر از خود نوشت؟  $n = O(10^3)$
- ۳- در یک کارخانه برای این که یک چوب را به  $k$  قسمت (با اندازه دلخواه) تقسیم کنند،  $C_k$  پول می‌گیرند.  $k$  عددی بین ۱ تا  $n$  می‌باشد. برای این که یک تکه چوب را به  $n$  قسمت تقسیم کنند، کمترین پول چقدر هست؟  $O(n^3)$
- ۴- روی محور  $x$ ،  $n$  نقطه داده شده است. قصد داریم با  $k$  بازه بسته تمام نقاط را بپوشانیم. (یک بازه می‌تواند به طول صفر و فقط شامل یک نقطه باشد یا این که به طول بسیار بزرگ و شامل تمامی نقاط باشد) اگر این کار را به صورتی انجام دهیم که مجموع طول بازه‌ها کمینه شود، این طول چنده؟  $O(nk)$
- ۵- در هر خانه از خانه‌های شطرنجی به ابعاد  $n \times m$  عددی مثبت یا منفی قرار گرفته است. ما از خانه پایین سمت چپ جدول شروع کرده و در آن حرکت می‌کنیم. در هر مرحله مجاز هستیم به یکی از خانه‌های مجاور حرکت کنیم. به هر خانه که می‌رسیم معادل عدد داخل آن امتیاز دریافت می‌کنیم. حداکثر امتیازی که می‌توانیم جمع کنیم چه قدر است؟
- الف) مسئله را برای حالتی حل کنید که فقط به خانه بالایی یا به خانه بالا سمت راست می‌توانیم و یا خانه بالا سمت چپ می‌توانیم برویم.  $O(nm)$
- ب) مسئله را در حالتی حل کنید که علاوه بر خانه‌های قسمت قبل به خانه‌های راست و چپ هم می‌توانیم حرکت کنیم (تنها حرکت به سمت پایین غیر مجاز است).  $O(n^2m)$  (امتیازی)
- ۶- در یک درخت تعدادی از رئوس به رنگ سیاه درآمده‌اند. می‌خواهیم  $k$  یال از یال‌های درخت را حذف کنیم به طوری که درخت به  $k+1$  درخت کوچک‌تر تقسیم شود به طوری که در هر درخت به وجود آمده دقیقاً یک راس سیاه وجود داشته باشد. الگوریتمی ارائه دهید که در  $O(n)$  تعداد حالات ممکن برای این کار را محاسبه کند.
- ۷- دو عدد  $a$  و  $b$  به همراه عدد  $d$  به شما داده می‌شود. جفت اعداد  $x$  و  $y$  به صورتی که شروط زیر برقرار باشد، چه تعداد هستند؟ (امتیازی)

$$\gcd(x, y) = d, x \leq a, y \leq b$$

الف) برای  $d=1$  مسئله را حل کنید.

محدودیت زمانی: اگر  $k$  تعداد عوامل اول کوچک‌تر از  $b$  باشد زمان اجرا باید  $O(b * 2^k)$  باشد.

ب) مسئله را برای حالت کلی حل کنید.

$$o(\sqrt{n}(n \lg n + b \lg b))$$

توضیح:  $\gcd$  به معنای بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد است. برای مثال  $\gcd$  بین ۴ و ۶، ۲ می‌باشد.

پیروز و سربلند باشید