



طراحی الگوریتم

تمرین چهارم - الگوریتم‌های گراف

فاطمه کرمی و هستی کریمی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۰۹/۲۳

۱. فاصله‌ها

۱۵ نمره

یک درخت با n راس و عدد k به شما داده شده است. تعداد جفت گره‌هایی را پیدا کنید که فاصله بین آن‌ها دقیقاً برابر k باشد.



۲. جهت‌دهی گراف

۱۵ نمره

یک گراف بی‌جهت با n راس و m یال به شما داده شده است. یال‌های این گراف را به گونه‌ای جهت‌دار کنید که از هر رأس بتوان با پیمودن مسیری به هر رأس دیگر گراف رسید.

۳. مسیرپوشی

۲۰ نمره

یک گراف جهت‌دار با n رأس و m یال وزن‌دار با وزن‌های مثبت به شما داده می‌شود. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O((n+m) \log(n))$ طراحی کنید که برای دو رأس مشخص a و b ، بررسی کند هر رأس دیگر گراف در همه کوتاه‌ترین مسیرها از a به b حضور دارد، فقط در برخی از آن‌ها حضور دارد یا اصلاً در هیچ کدام حضور ندارد.

۴. درخت کریسمس

۲۰ نمره

درختی داریم که هر رأس آن با یک بازه مشخص می‌شود. رأس i با دو مقدار l_i و r_i معرفی شده و بازه‌ی $[l_i, r_i]$ را مشخص می‌کند. برای تزئین درخت کریسمس، قصد داریم از هر رأس یک گوی شیشه‌ای آویزان کنیم که عددی روی آن نوشته شده باشد. این عدد برای رأس i باید در بازه‌ی $[l_i, r_i]$ قرار داشته باشد، یعنی $l_i \leq a_i \leq r_i$.

زیبایی درخت کریسمس بدین صورت تعریف می‌شود: برای هر یال (u, v) درخت، مقدار $|a_u - a_v|$ محاسبه می‌شود. زیبایی کل درخت برابر با مجموع این مقادیر برای تمام یال‌های درخت است.

اکنون یک درخت به شما داده می‌شود. وظیفه شما این است که به مناسبت نزدیک بودن کریسمس، بیشینه زیبایی ممکن این درخت را محاسبه کنید.

۵. آزمون ماز

۱۵ نمره

پروفسور مک‌گوناگل برای به چالش کشیدن هری پاتر، یک ماز طراحی کرده است که شامل n اتاق است. بین هر دو اتاق، دو راهرو (در دو جهت) وجود دارد. در هر یک از این راهروها یک روح قرار گرفته است که شکست دادن آن نیازمند درجه سختی مشخصی است. درجه سختی هر مسیر در ماز برابر است با مجموع درجه سختی ارواح موجود در راهروهای آن مسیر.

اما مشکل اینجاست که پیوز، روح بدعشق هاگوارتز، در هر مرحله یکی از اتاق‌ها و تمام راهروهای متصل به آن را محو می‌کند. پیش از هر بار که پیوز این کار را انجام می‌دهد، هری باید مجموع درجه سختی کم‌چالش‌ترین مسیر بین هر دو اتاق باقی‌مانده را در ماز محاسبه کند. کم‌چالش‌ترین مسیر می‌تواند از هر اتاق باقی‌مانده‌ای در آن مرحله عبور کند.

الگوریتمی طراحی کنید که هری بتواند این کار را در زمان $O(n^3)$ انجام دهد. فرض کنید ترتیب محو کردن اتاق‌ها توسط پیوز از ابتدا مشخص است.

۶. آلیس در تالگی وود

۱۵ نمره

آلیس در حال قدم زدن در تالگی‌وود (جنگل واندلرند) متوجه مسیرهای درخشانی می‌شود که قارچ‌های جنگل را به یکدیگر متصل می‌کنند. این مسیرها به‌گونه‌ای هستند که بین هر دو قارچ a و b دقیقاً یک مسیر یکتا وجود دارد. هر قارچ یک سطح خاصیت جادویی مشخص دارد که به‌صورت عددی روی آن حک شده است.

اما جادوی واقعی در مسیرهای بین قارچ‌ها نهفته است: مقدار جادوی یک مسیر بین دو قارچ a و b برابر با اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین سطح جادویی در میان قارچ‌های این مسیر (شامل خود a و b) است.

آلیس قصد دارد مقدار کل جادوی جنگل را محاسبه کند. به این صورت که برای هر جفت قارچ در جنگل، مقدار جادوی مسیر بین آن دو را محاسبه کرده و همه این مقادیر را با یکدیگر جمع کند.

اگر جنگل تالگی‌وود n قارچ داشته باشد، الگوریتمی طراحی کنید که آلیس بتواند این محاسبه را در زمان $O(m \log n)$ انجام دهد.