



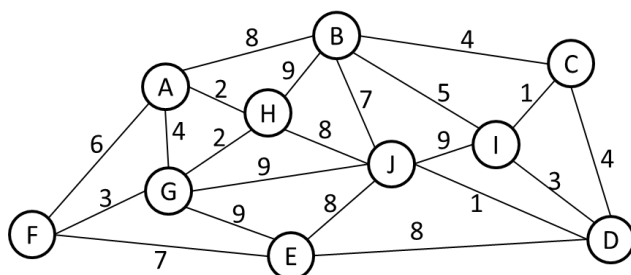
نکات خیلی مهم زیر را تک به تک و به دقت مطالعه کنید

- (۱) برگه سوالات را با دقت بخوانید و سوالات خود را در نیم ساعت اول بپرسید.
- (۲) در صورت عدم خوانایی، برگه شما تصحیح نخواهد شد. استفاده از مداد بلامانع است.
- (۳) اگر در صورت مساله مشخص نشده، میتوانید فرمت ورودی مساله را به دلخواه خود تعریف کنید.
- (۴) همه الگوریتمها باید با توضیح و اثبات کامل نوشته شود. نوشتن pseudocode تنها کافی نیست.
- (۵) در صورتی که مساله‌ای بیش از یک جواب دارد، بهترین الگوریتم از نظر مرتبه زمانی مدنظر بوده است.
- (۶) برای تمام الگوریتمهایی که ارائه میکنید باید مرتبه زمانی را نیز محاسبه کنید.
- (۷) از ۱۰ سوال زیر فقط به ۷ سوال به اختیار خودتان پاسخ دهید. در صورتی که به بیش از ۷ سوال پاسخ دهید ۷ پاسخ اول تصحیح خواهد شد.

سوال ۱- با استفاده از الگوریتم فلوید-وارشال کوتاه ترین مسیر میان کلیه نودهای یک گراف با ماتریس مجاورت زیر را بدست آورید:

0	8	∞	∞	1
3	0	∞	∞	2
∞	2	0	1	∞
∞	3	5	0	∞
∞	∞	∞	3	0

سوال ۲- درخت پوشای کمینه (Minimum Spanning Tree) را با الگوریتم Prim برای گراف زیر بدست آورید:



سوال ۳- گراف جهت دار $G=(V,E)$ به شما داده شده که در آن نودها رنگ شده‌اند. یک مسیر، k -متغیر نامیده میشود اگر رنگها در طول این مسیر k بار تغییر کنند. مثلاً مسیری که در آن نودها به ترتیب قرمز-آبی-سبز-سبز باشند ۲-متغیر و مسیر قرمز-آبی-قرمز-سبز-سبز ۳-متغیر است. توجه کنید که این مسیر لزوماً مسیر ساده نیست و نودها ممکن است بیش از یک بار در مسیر ظاهر شوند. شما باید الگوریتمی طراحی کنید که بیشترین مقدار k را که به ازای آن مسیر k -متغیر وجود دارد برگرداند و اگر

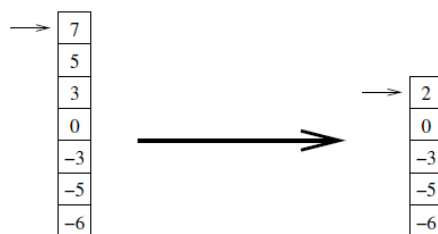


ماکزیمم وجود ندارد مقدار ∞ را برگرداند (این حالت بدین معنی است که عدد k میتواند به اندازه دلخواه بزرگ باشد). الگوریتم شما باید $O(|V| + |E|)$ باشد. فرض کنید گراف به صورت لیست مجاورت نگهداری میشود و رنگ نودها در آرایه C نگهداری میشود (رنگ نود v به صورت $C[v]$ قابل دسترسی است). (راهنمایی: مولفه‌های قویا مرتبط!)

سوال ۴- فرض کنید یک بزرگراه طولانی در کشور ساخته شده و اکنون به دنبال ساخت استراحت‌گاه‌هایی در طول مسیر هستیم. این بزرگراه به ترتیب از نقاط v_1, v_2, \dots, v_n رد میشود. هزینه ایجاد استراحتگاه در نقطه v_i مقدار c_i است. تعدادی بازه در مجموعه $I = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ به شما داده شده که هر بازه $I_j = [v_{lj}, v_{rj}]$ است که در آن $l_j \leq r_j$. این بازه میگوید حداقل یک استراحتگاه باید در بازه نقاط v_{lj} و v_{rj} ساخته شود (این بازه شامل خود نقاط هم میشود). الگوریتمی بنویسید که کمترین هزینه ساخت این استراحتگاه‌ها را مشروط بر این که در هر بازه حداقل یک استراحتگاه ساخته شود محاسبه کند (راهنمایی: راه حل برنامه نویسی پویا دارد).

سوال ۵- یک پشته ترتیب‌دار (Ordered Stack)، پشته‌ای است که عناصر آن به صورت صعودی از پایین به بالا مرتب شده باشند. این نوع پشته باید اعمال زیر را پشتیبانی کند:

- $Init(S)$: یک پشته خالی ایجاد کند.
- $Destroy(S)$: تمام عناصر پشته را حذف کند.
- $Pop(S)$: عنصر بالای پشته را حذف و آن را برگرداند.
- $Push(S, x)$: در ابتدا عناصر پشته را از بالای آن حذف کند تا به عنصری برسد که از x بزرگتر نباشد و سپس x را به بالای پشته اضافه کند. به عنوان مثال شکل زیر $Push(S, 2)$ را نشان می‌دهد که در آن عناصر ۷، ۵ و ۳ از بالای پشته حذف شده و ۲ به بالای آن اضافه می‌شود.



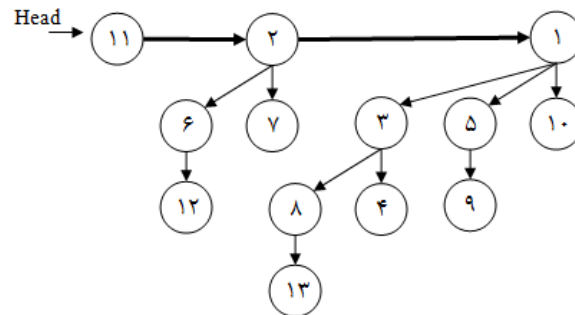
فرض کنید پشته ترتیب‌دار با یک لیست زنجیره‌ای دو طرفه پیاده سازی شده و اشاره‌گر به عنصر بالای پشته (top) نیز نگهداری می‌شود.

- مرتبه اجرای چهار عمل فوق در بدترین حالت چقدر است؟
- ثابت کنید هزینه سرشکن اعمال فوق از مرتبه $O(1)$ است.



سوال ۶- فرض کنید در یک Fibonacci heap عمل DecreaseKey به گونه ای تغییر کند که هر نود پدر پس از برش k فرزندش بریده (cut) شود. هزینه سرشکن اعمال DecreaseKey و ExtractMin را محاسبه کنید.

سوال ۷- عمل ExtractMin را روی Binomial Heap زیر اجرا کنید:



سوال ۸- یک شبکه مرتب ساز با جزییات کامل مقایسه‌گرها رسم کنید که آرایه‌ای با طول ۸ را با روش merge sort مرتب نماید.

سوال ۹- در دانشگاه قرار است کمیته ویژه‌ای برای انتخاب رییس دانشگاه تشکیل شود. می‌خواهیم از هر گروه آموزشی (مثلاً گروه نرم افزار، گروه سخت افزار و ...) دقیقاً یک استاد به عنوان نماینده حضور داشته باشد. برخی از اساتید ممکن است عضو بیش از یک گروه آموزشی باشند اما هیچ یک نمی‌توانند نماینده‌ی بیش از یک گروه آموزشی باشند. همچنین می‌خواهیم تعداد استاد تمام‌ها، دانشیاران و استادیاران در این کمیته برابر باشند. الگوریتمی برای انتخاب این کمیته ارائه دهید.

سوال ۱۰- مساله کاهش مسیر پستی (Postal Route Reduction=PRR) بدین صورت تعریف میشود: فرض کنید یک گراف جهت دار $G=(V,E)$ و مجموعه $S=\{R_1, R_2, \dots, R_L\}$ از تعداد L سیکل نامه رسانی به شما داده شده است. این سیکلها از نود آغازین s که محل جمع‌آوری نامه‌های پستی است شروع شده و به همین نود خاتمه می‌یابد. می‌خواهیم بدانیم آیا زیرمجموعه‌ای k عضوی از S وجود دارد که از تمام نودهای گراف رد شود (این k سیکل ممکن است از یک نود بیش از یک بار رد شوند). ثابت کنید این مساله NP-Complete است. (راهنمایی: می‌توانید از Vertex-Cover یا 3-CNF-SAT استفاده کنید)