

به نام خدا

## امتحان ششم درس طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (تیر ۱۴۰۰)

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

۱. (۳۰ نمره) درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. برای ادعای خود اثبات مختصری ارائه دهید.

(آ) اگر یک از مسئله‌های کلاس NP-Hard در زمان چندجمله‌ای حل شود، آنگاه تمام مسائل کلاس NP-Complete در زمان چندجمله‌ای حل خواهند شد.

(ب)  $NP-Hard \subseteq NP$

(ج) اگر مسئله  $A \in NP-Complete$  و  $A \leq_p B$  آنگاه می‌توان نتیجه گرفت  $B \in NP-Complete$

(د) اگر مسئله  $B \in NP-Hard$  و  $A \leq_p B$  آنگاه می‌توان نتیجه گرفت  $A \in NP-Complete$

(ه) در صورتی که یک مسئله از کلاس NP-Complete در زمان چندجمله‌ای حل شود آنگاه  $P = NP$ .

(و) کلاس  $PSPACE$  شامل تمام مسئله‌هایی است که برای آن‌ها می‌توان یک الگوریتم با حافظه چند جمله‌ای طراحی کرد. در این صورت  $NP \subseteq PSPACE$ .

۲. (۳۰ نمره) مسئله‌های ZERO-SUM و ZERO-CYCLE به این صورت تعریف شده‌اند:

- مسئله ZERO-SUM: مجموعه  $A$  از اعداد صحیح به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $A$  وجود دارد که جمع اعداد آن برابر صفر شود.

- مسئله ZERO-CYCLE: گراف جهت‌دار و وزن‌دار  $G$  به عنوان ورودی داده شده است به طوری که وزن تمام یال‌ها یک عدد صحیح است. مسئله این است که آیا این گراف دوری دارد که مجموع وزن یال‌های آن برابر صفر باشد.

ثابت کنید  $ZERO-SUM \leq_p ZERO-CYCLE$ .

۳. (۴۰ نمره) مسئله‌های IND-SET و INTEGER-PROG به این صورت تعریف شده‌اند:

- مسئله IND-SET: گراف بدون جهت  $G$  و یک عدد  $k$  به عنوان ورودی داده شده‌اند. مسئله این است که آیا می‌توان  $k$  راس از رئوس گراف  $G$  را انتخاب کرد به طوری که بین هیچ دو راس انتخاب شده‌ای یال وجود نداشته باشد.

- مسئله ۰/۱-PROG: تعداد  $n$  متغیر منطقی  $x_1, x_2, \dots, x_n$  و تعداد  $m$  نامساوی خطی به عنوان ورودی داده شده‌اند. هر نامساوی خطی به شکل زیر نمایش داده می‌شود (در این نمایش  $-a_i$  ها و عدد  $b$  ورودی‌های مسئله هستند و می‌توانند هر مقدار حقیقی داشته باشند):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b \quad (۱)$$

مسئله این است که آیا مقدار دهی به متغیرهای منطقی  $x_i$  وجود دارد که تمام نامساوی‌های داده شده را ارضا کند. دقت کنید که مقدار  $x_i$  ها ۰ یا ۱ می‌توانند باشند.

(آ) ثابت کنید  $0/1-PROG \in NP$

(ب) ثابت کنید  $IND-SET \leq_p 0/1-PROG$ .