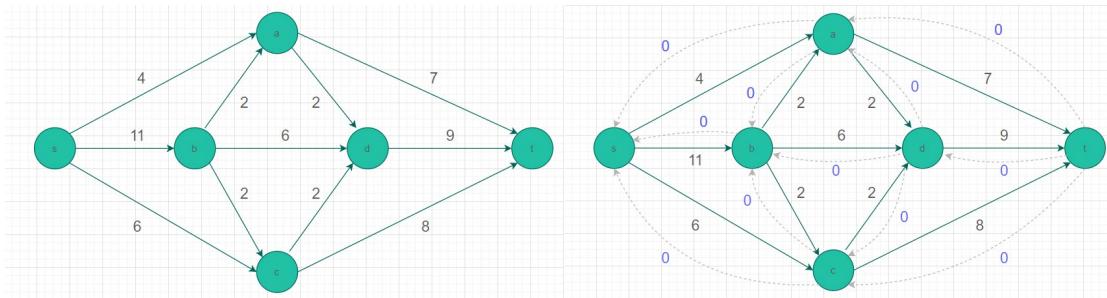
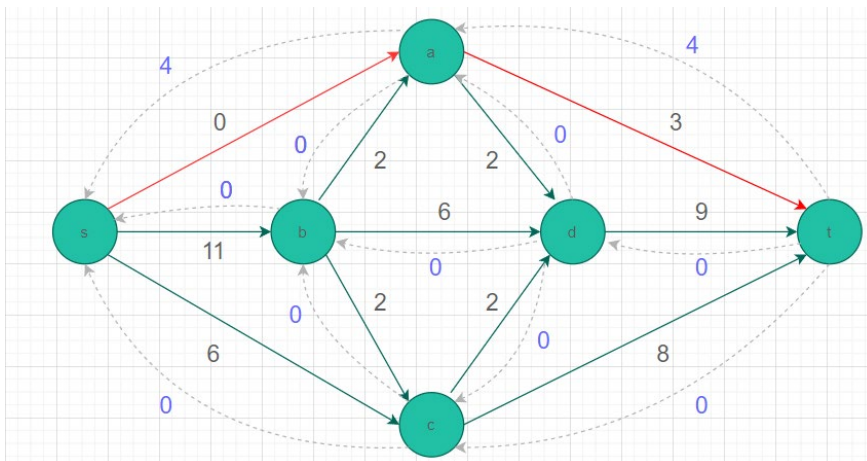


1- گراف شبکه و گراف باقی‌مانده مربوط به آن در شکل های زیر مشخص شده‌اند:

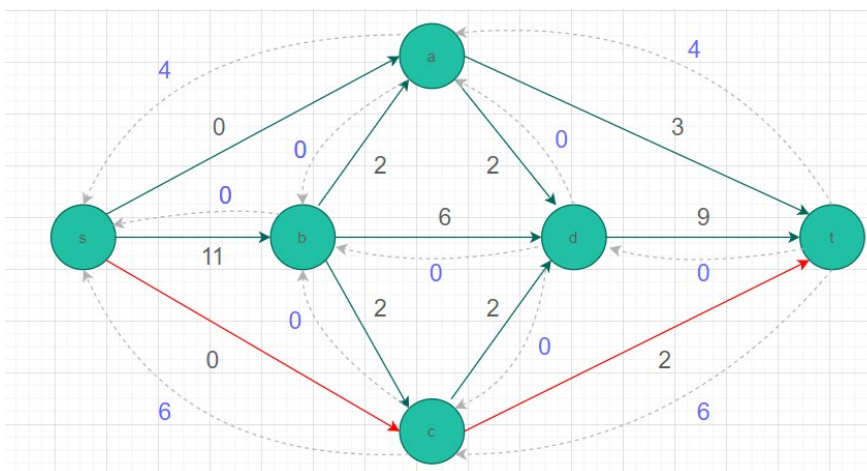


در هر مرحله تصویر گراف باقی‌مانده به همراه یال‌های عقب‌گرد آورده شده است. در هر تصویر، یال‌های عادی (Forward) با رنگ سبز و مقدار آن با رنگ مشکی مشخص شده است. همچنین یال‌های عقب‌گرد (Backward) با رنگ طوسی و به صورت خط‌چین و مقدار آن با رنگ آبی مشخص شده است. مسیر افزایشی نیز با رنگ قرمز مشخص شده است.

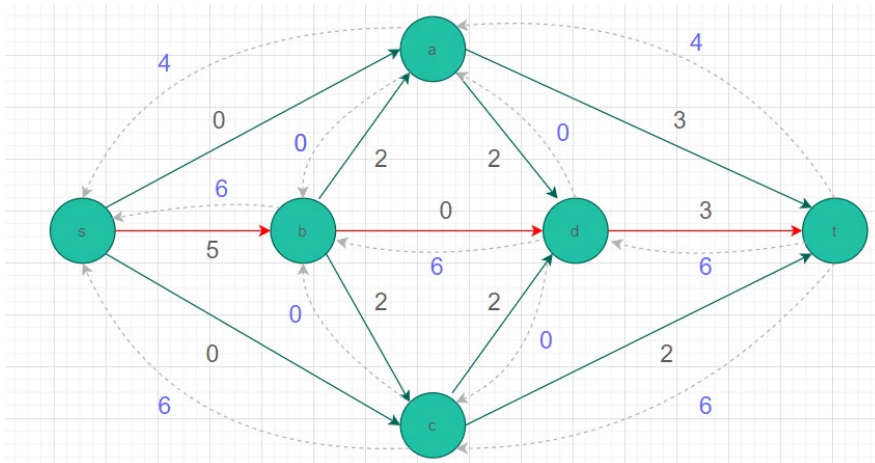
مرحله 1: در این مرحله گلوگاه مسیر یال sa است که مقدار آن برابر با 4 است.



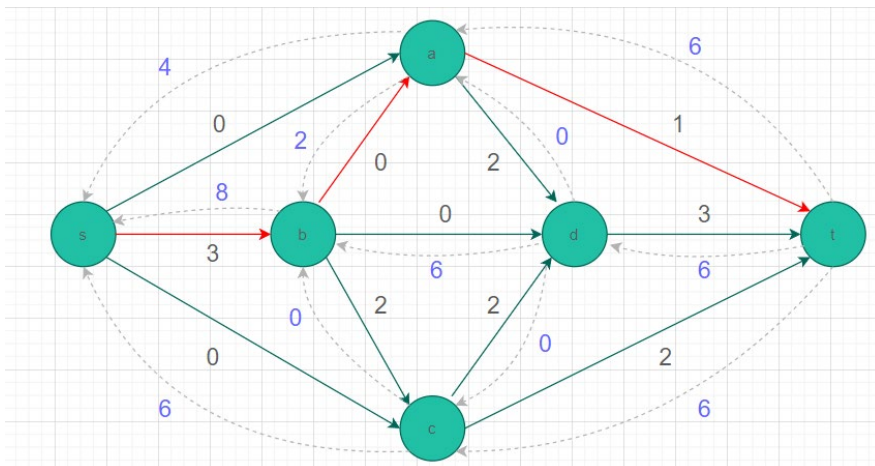
مرحله 2: در این مرحله گلوگاه مسیر یال sc است که مقدار آن برابر با 6 است.



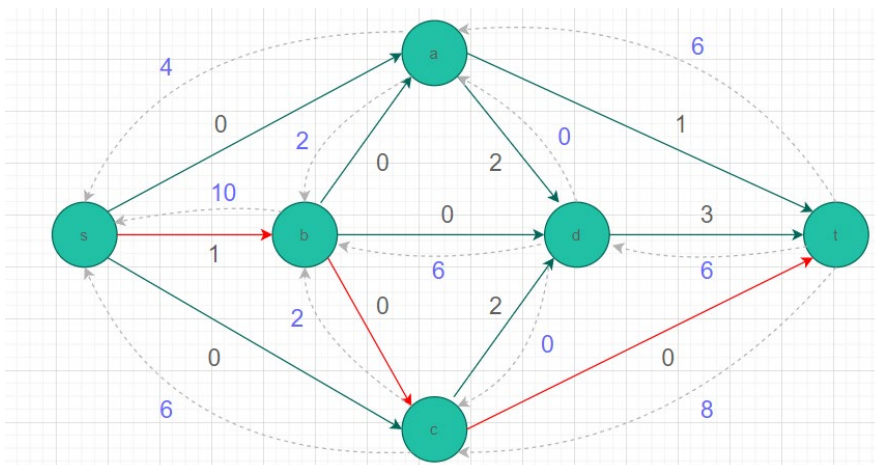
مرحله 3: در این مرحله گلوگاه مسیر یال bd است که مقدار آن برابر با 6 است.



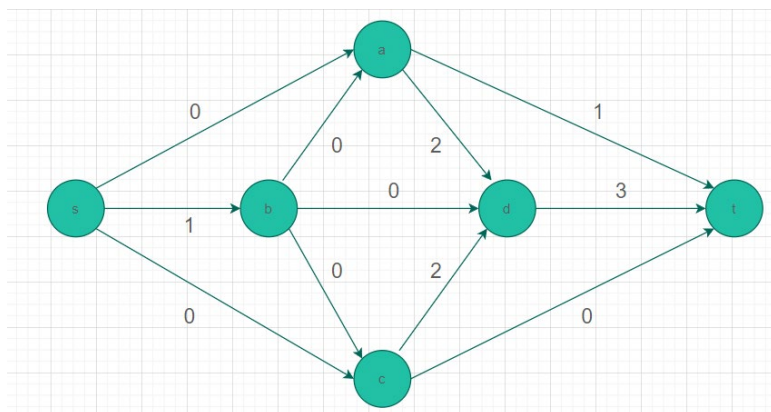
مرحله 4: در این مرحله گلوگاه مسیر یال ba است که مقدار آن برابر با 2 است.



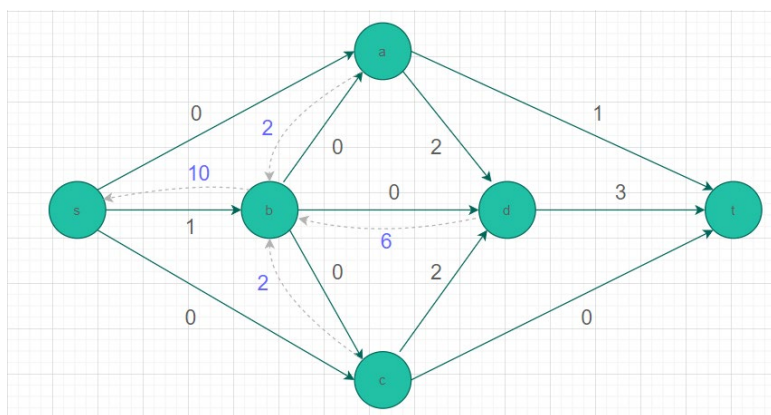
مرحله 5: در این مرحله گلوگاه مسیر یال bc است که مقدار آن برابر با 2 است.



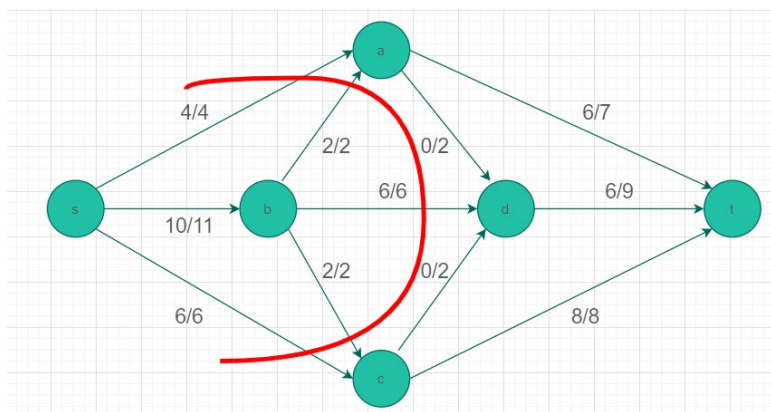
پس از این مرحله گراف باقی‌مانده بدون در نظر گرفتن یال‌های عقب‌گرد به شکل زیر خواهد بود:



همانطور که مشاهده می‌شود، تنها یال با مبدأ s که اشباع نشده است یال sb است. شکل زیر که یال‌های عقب‌گرد نیز در آن آورده شده‌اند نشان می‌دهد که هیچ یال خروجی‌ای از مبدأ b با ظرفیت بیشتر از 0 (به غیر از یال عقب‌گرد به s) وجود ندارد. از طرف دیگر در گراف اصلی سوال نشان داده شده است که مقدار یال ورودی به رأس b برابر با 11 است در صورتی که جمع ظرفیت‌های خروجی از رأس b برابر با 10 است و در نتیجه یال sb نمی‌تواند اشباع شود. پس می‌توان گفت مقدار جریان عبور داده شده ماکسیمم است.

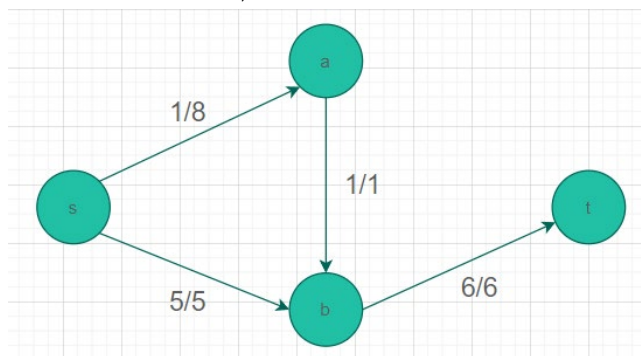


تصویر زیر Min-Cut را نشان می‌دهد:

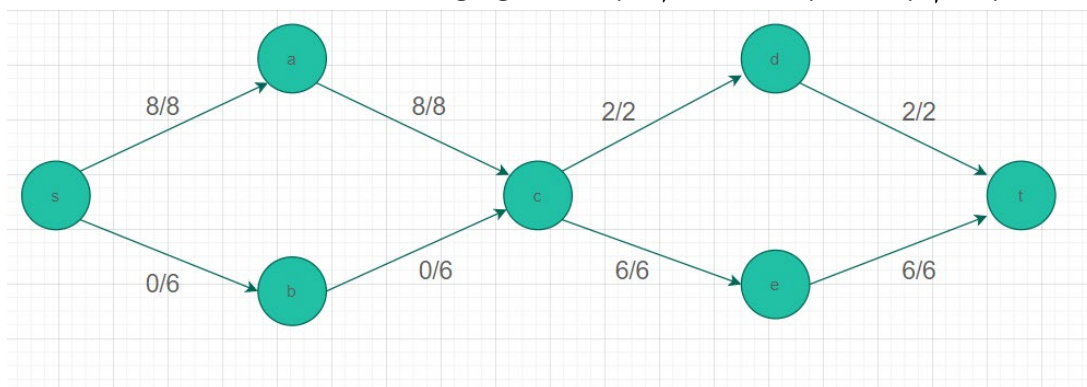


مقدار جریان ماکسیمم برابر است با جمع جریان‌های خروجی از رأس s که مقدار آن 20 واحد است.

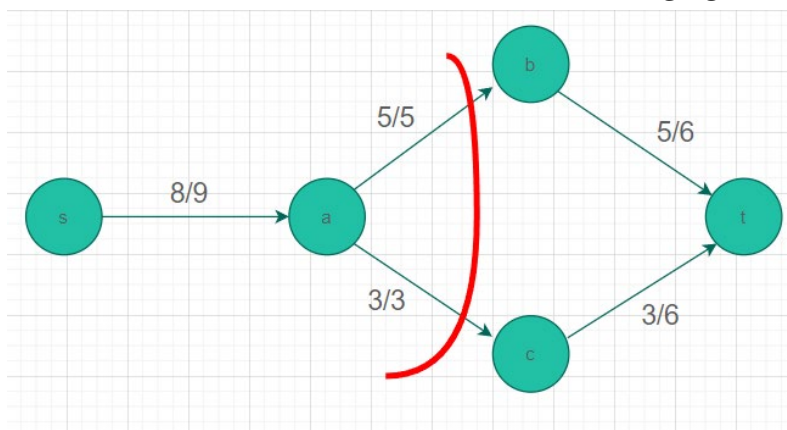
2- (آ) این مورد غلط است. در شکل زیر نشان داده شده است که یال با بیشترین ظرفیت یال sa (با ظرفیت 8) است که حذف آن سبب کاهش 1 واحدی جریان ماکسیمم می‌شود. در صورتی که یال ارزشمند یال bt (با ظرفیت 6) است که حذف آن سبب کاهش 6 واحدی جریان ماکسیمم می‌شود.



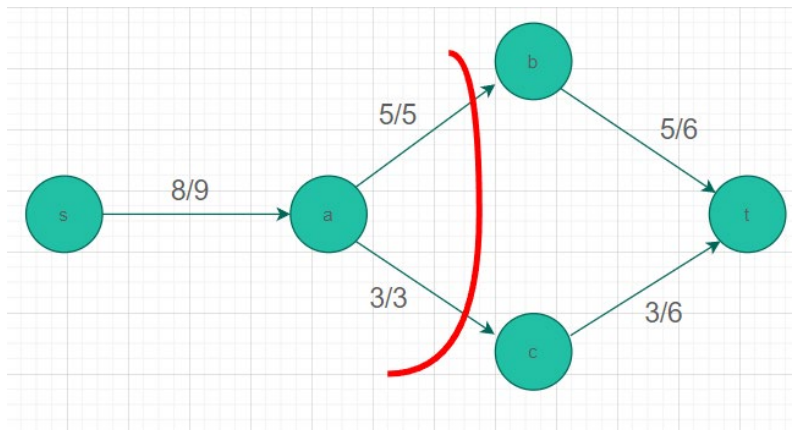
(ب) این مورد نیز غلط است. در شکل زیر یال‌ها با بیشترین جریان عبوری sa و ac (با جریان عبوری 8) هستند که با حذف یکی از آن‌ها جریان می‌تواند از طریق یال‌های sb و bc عبور کند که در این صورت جریان ماکسیمم 2 واحد کاهش می‌یابد. اما یال‌های ارزشمند et و ce (با جریان عبوری 6) هستند که با حذف هر کدام از آن‌ها جریان ماکسیمم 6 واحد کاهش می‌یابد.



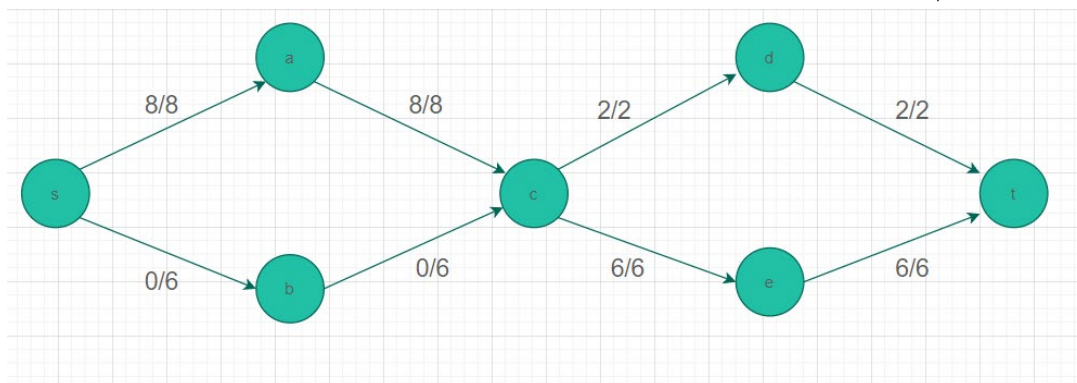
(ج) این مورد غلط است. در شکل زیر یال ارزشمند sa است که با حذف آن جریان ماکسیمم 8 واحد کاهش می‌یابد، اما یال با بیشترین جریان عبوری که در Min-Cut قرار دارد برابر است با یال ab که با حذف آن جریان عبوری 5 واحد کاهش می‌یابد.



د) این مورد نیز غلط است. شکل زیر که مربوط به مورد (ج) است نشان می‌دهد که یال ارزشمند (sa) می‌تواند در Min-Cut قرار نداشته باشد.



ه) این مورد صحیح است. شکل زیر که مربوط به مورد (ب) است نشان می‌دهد که یک شبکه می‌تواند چند یال ارزشمند داشته باشد. برای مثال حذف هر کدام از یال‌های ce و et سبب کاهش 6 واحدی جریان ماکسیمم می‌شود و در نتیجه هر 2 این یال‌ها ارزشمند هستند.



3- با توجه به اینکه جدول ذکر شده دارای x سطر و y ستون است، می‌توانیم جمع مقادیر سطر i -ام را با r_i ($1 \leq i \leq x$) و جمع مقادیر ستون j -ام را با c_j ($1 \leq j \leq y$) نمایش دهیم و می‌دانیم r_i و c_j مقادیر صحیح نامنفی هستند. حال دو مجموعه راس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_x\}$ و $U = \{u_1, u_2, \dots, u_y\}$ را به صورتی در نظر می‌گیریم که v_i معادل سطر i -ام و u_j معادل ستون j -ام باشد. یک گراف دو بخشی را با رئوس $U \cup V$ در نظر می‌گیریم. از هر راس v_i یک یال جهت‌دار به مقصد هر راس u_j با ظرفیت ∞ قرار می‌دهیم. یک راس مبدا s و یک راس مقصد t به گراف اضافه می‌کنیم. از راس s به هر راس v_i یک یال جهت‌دار و با ظرفیت r_i قرار می‌دهیم. از هر راس u_j نیز یک یال جهت‌دار به مقصد t و با ظرفیت c_j قرار می‌دهیم. حال بیشترین جریان عبوری ممکن از مبدا s و به مقصد t را پیدا می‌کنیم. با توجه به اینکه تمام ظرفیت‌ها صحیح و نامنفی هستند، طبق الگوریتم Ford-Fulkerson بیشینه جریانی با مقادیر صحیح وجود دارد. جدول N را به این صورت در نظر می‌گیریم که مقدار N_{ij} را برابر با اندازه جریان عبوری از راس v_i به u_j در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه تمامی جریان‌های عبوری صحیح و نامنفی هستند، مقادیر N_{ij} نیز صحیح و نامنفی خواهند بود. از طرفی مجموع مقادیر سطر i -ام جدول N برابر است با مجموع جریان‌های خروجی از راس v_i که طبق نحوه عملکرد الگوریتم (مطابق قانون KCL)، با مقدار r_i برابری می‌کند. این مورد در مورد ستون j -ام نیز صادق است. در نتیجه تمام شروط مسئله رعایت شده و جدول N مطلوب مسئله است.

4- با این فرض که سن هیچ کدام از مهمانان از 2 سال کمتر نیست، با توجه به اینکه مجموع سن دو فردی که در کنار هم نشسته‌اند عددی اول است، می‌توان گفت سن یکی از این 2 نفر زوج و سن دیگری فرد است. پس می‌توان این نتیجه را گرفت که تعداد افراد دور یک میز همیشه عددی زوج خواهد بود زیرا در غیر این صورت، دو فرد که در مجاور همدیگر نشسته‌اند دارای زوجیت سنی یکسانی خواهند بود. نتیجه دیگری که می‌توان از این مورد گرفت این است که تعداد افرادی که سن زوج دارند با تعداد کسانی که سن فرد دارند برابر است زیرا در غیر این صورت مسئله پاسخ نخواهد داشت. می‌توانیم افرادی که سن فرد دارند را با $O = \{o_1, o_2, \dots, o_m\}$ و افرادی که سن زوج دارند را با $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ نشان دهیم که $n = 2m$ خواهد بود. برای اینکه مسئله را با شبکه جریان مدل کنیم، یک گراف 2 بخشی در نظر می‌گیریم که راس‌های یک بخش متناظر با افرادی هستند که سن زوج دارند و راس‌های بخش دیگر متناظر با افرادی هستند که سن فرد دارند. یک راس مبدا s و یک راس مقصد t نیز به گراف اضافه می‌کنیم. با توجه به اینکه هر نفر با سن زوج باید با دو نفر با سن فرد match شود (در کنار هم بنشینند) و همچنین هر نفر با سن فرد باید با دو نفر با سن زوج match شود، از راس s به هر راس e_i (سن زوج) یک یال با اندازه 2 قرار می‌دهیم و همچنین از هر راس o_j (سن فرد) به راس t نیز یک یال با اندازه 2 قرار می‌دهیم. همچنین از راس e_i تنها در صورتی یک یال به راس o_j و با اندازه 1 قرار می‌دهیم که مجموع سن این 2 فرد عددی اول باشد. حال الگوریتم Ford-Fulkerson را از راس s و به مقصد راس t اجرا می‌کنیم و بیشینه جریان شبکه را پیدا می‌کنیم. مسئله تنها در صورتی پاسخ دارد که از هر راس o_j جریانی به اندازه 2 خارج شود یا به عبارت دیگر جریان ورودی به راس t دو برابر تعداد افراد با سن فرد ($2m = n$) باشد. برای بازنویسی طرز نشستن مهمانان نیز کافیست پس از رسم گراف جریان عبوری، هر دوری که در گراف 2 بخشی تشکیل شده است را دور یک میز قرار دهیم. مرتبه زمانی انجام الگوریتم نیز برابر الگوریتم Ford-Fulkerson (چند جمله‌ای) است.

5- (آ) در این حالت مقدار $|f|$ برابر با $f_{out}(S) - f_{in}(S)$ خواهد بود. با توجه به اینکه جریانی به راس v رسیده است می‌توان گفت مسیری از راس S به راس v وجود داشته است و در نتیجه با عبور جریان از راس v به راس S یک دور ایجاد شده است. اگر این دور را به شکل $C = \{S, v_1, v_2, \dots, v_n, v, S\}$ در نظر بگیریم، با کاهش مقدار هر یک از یال‌های $(S, v_1), (v_i, v_{i+1} \mid 1 \leq i < n), (v_n, v)$ و (v, S) به میزان یک واحد، اولاً جریان یال (v, S) برابر با 0 خواهد شد، همچنین مقدار $|f|$ برابر با $(f_{out}(S) - 1) - (f_{in}(S) - 1)$ خواهد بود که با ساده کردن عبارت ذکر شده به مقدار $f_{out}(S) - f_{in}(S)$ می‌رسیم که نشان می‌دهد مقدار $|f|$ تغییر نکرده است. از طرفی با توجه به اینکه مقدار تمام یال‌های دور را یک واحد کم کردیم، مقدار جریان خروجی از هر راس همچنان برابر با جریان ورودی به آن راس برابر خواهد بود که این مورد نشان می‌دهد جریان بدست آمده یک جریان قابل قبول است و در نتیجه به مطلوب سوال رسیدیم.

ب) با توجه به اینکه با انجام الگوریتم DFS از مبدا S ممکن است به مسیری که سبب ایجاد دور C شده است نرسیم، برای پیدا کردن مسیر صحیح کافیست الگوریتم DFS را از مبدا v اجرا می‌کنیم با این تفاوت که فقط یال‌های Backward را برای الگوریتم در نظر می‌گیریم (یال‌هایی Backward که مقدار آن‌ها برابر با 0 است را در نظر نمی‌گیریم). با توجه به اینکه مسیری از راس S به راس v وجود داشته است، قطعاً معکوس این مسیر از طریق یال‌های Backward وجود دارد. با انجام الگوریتم ذکر شده این مسیر معکوس را پیدا کرده و از مقدار هر یال Backward مسیر یک واحد کم کرده و همچنین یک واحد به مقدار یال Forward متناظر در گراف Residual اضافه می‌کنیم. همین کار را با یال (v, S) نیز انجام می‌دهیم. پس از این کار، مقدار تمام یال‌های دور C یک واحد کاهش پیدا کرده است و مقدار جریان عبوری از راس v به راس S برابر با 0 شده است. جریان محاسبه شده در این حالت همان f خواهد بود. مرتبه زمانی انجام این الگوریتم برابر با مرتبه زمانی انجام الگوریتم DFS است که برابر با $O(|V| + |E|)$ است.

در صورتی که گراف جریان عبوری به ما داده شده باشد (بین هر 2 راس تنها در صورتی یال جهت‌دار با مقدار x وجود داشته باشد که جریانی معادل با x از راس اول به راس دوم داشته باشیم)، این گراف معکوس گراف یال‌های Backward خواهد بود که در این صورت الگوریتم DFS را از راس S شروع می‌کنیم تا به راس v برسیم و در این صورت مقدار تمام یال‌های مسیر را یک واحد کاهش می‌دهیم.

6- هدف مسئله محاسبه Min-Cut است. در واقع باید مسئله را با یک مسئله Max-Flow مدل کنیم و پس از پیدا کردن Min-Cut (که گلوگاه مسیر است)، مقدار جریان عبوری از Cut را پیدا کنیم.