



طراحی الگوریتم (بهار ۱۴۰۱)

کوئیز اول

تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۱۲/۷

مدت امتحان: ۲۰ دقیقه

**Question:** In the quicksort algorithm, suppose each time the array is divided with the ratio of  $\alpha$  and  $1 - \alpha$ , where  $\alpha$  is a constant and  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ . Show that the minimum depth (or height) of a leaf in the recursion tree is approximately  $-\log n / \log \alpha$  and the maximum depth is  $-\log n / \log(1 - \alpha)$ . Don't worry about rounding errors in integer divisions.

پاسخ:

اگر درخت اجرای بازگشتی را رسم کنید، کمترین عمق متعلق به قسمتی است که هر بار بخش کوچکتر آرایه به آن اختصاص پیدا می کند (به عبارتی، بخشی که ضریب  $\alpha$  دارد). هربار الگوریتم، اندازه‌ی آرایه را از  $n$  به  $\alpha n$  کاهش می دهد. پس از  $i$  مرحله (در عمق  $i$ )، اندازه به  $\alpha^i n$  کاهش میابد. هنگامی به برگ می رسیم که آنقدر آرایه شکسته شده باشد که طول آن یک باشد. به عبارتی،  $\alpha^m n = 1$ . این عبارت را می توانیم به صورت  $\alpha^m = \frac{1}{n}$  نیز بنویسیم. با حل این رابطه (با گرفتن لگاریتم از طرفین) خواهیم داشت:

$$m \log \alpha = -\log n \Rightarrow m = -\log n / \log \alpha$$

به طور مشابه، بیشترین عمق، مربوط به بخشی است که هربار بخش بزرگتر آرایه به آن اختصاص پیدا می کند (به عبارتی، بخشی که ضریب  $1 - \alpha$  دارد). در عمق  $M$  هنگامی به آرایه‌ای با یک عنصر می رسیم که داشته باشیم  $(1 - \alpha)^M n = 1$ . با حل این عبارت می بینیم که حداکثر عمق  $M = -\log n / \log(1 - \alpha)$  خواهد بود.

دقت کنید که این مقادیر تقریبی است. چون در هر مرحله، آرایه دقیقاً به  $\alpha$  و  $1-\alpha$  تقسیم نمی‌گردد.