**پرسش یکم (۲۰ نمره):**

در مساله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد[1] یک گراف $n$ راسی داده می‌شود که فاصله‌ی دو به دوی راس‌ها در آن مشخص است و می‌خواهیم کم‌ترین وزن یک دور همیلتونی (وزن دور برابر با جمع وزن یال‌های آن است) در این گراف را پیدا کنیم.

این مساله یک مساله بهینه‌سازی[2] است.

حال مساله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

یک گراف $n$ راسی، فاصله‌ی دوبه‌دوی راس‌ها در آن و یک عدد ثابت $B$ داده شده است. می‌خواهیم مشخص کنیم که آیا دوری همیلتونی در گراف با وزن کم‌تر یا مساوی $B$ وجود دارد یا خیر.

مساله بالا یک مساله تصمیم‌گیری[3] است.

حال فرض کنید الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای[4] برای مساله دوم وجود دارد. یک الگوریتم با زمان اجرای چندجمله‌ای برای مساله اول ارایه دهید.

حل: فرض کنیم وزن یال‌های گراف مجموعه‌ی $W$ باشد و هر $w_{ij}$ وزن یال‌ها باشد. ماکسیمم $w_{ij}$ ها را $m$ در نظر می‌گیریم. وزن هر دور در این گراف حداکثر برابر با $n \times m$ است این عدد را $w$ در نظر می‌گیریم. میخواهیم با جستجوی دودویی مقدار بهینه را بیابیم. برای اینکار ابتدا مساله تصمیم گیری را با همین گراف و $B = w/2$ حل می‌کنیم. اگر جواب منفی بود یعنی کم وزن‌ترین دور هزینه ای بیش‌تر از $w/2$ دارد پس باید جستجو را در فضای $[w, w/2]$ انجام دهیم. که همانند مرحله قبل مساله را با $B = \dfrac{3}{2}w$ حل می‌کنیم. و اینکار را ادامه می‌دهیم تا به مقدار بهینه برسیم.

جستجوی دودویی پس از حداکثر $log(m)$ مرحله به جواب می‌رسد. اگر الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای برای مساله تصمیم‌گیری وجود داشته باشد، پس زمان پیدا کردن جواب بهینه هم چند جمله‌ای خواهد بود.

---

1 Traveling Salesman Problem

2 Optimization

3 Decision

4 Polynomial

**پرسش دوم ( ۲۰ نمره):**

ثابت کنید مساله‌ی زیر در کلاس پیچیدگی $NP - Complete$ قرار می‌گیرد:

گراف جهت‌دار و وزن‌دار $G = (V, E)$ داده شده است. که وزن یال‌های آن اعداد صحیح هستند. آیا این گراف دوری دارد که مجموع وزن یال‌های آن برابر با صفر شود؟

حل: اگر یک دور در اختیار داشته باشیم، با پیمایش یال‌های آن می‌توانیم مشخص کنیم که آیا مجموع وزن یال‌های این دور صفر است یا نه. پس مساله در کلاس پیچیدگی $NP$ قرار می‌گیرد.

اکنون با کاهش مساله Subset Sum به این مساله ثابت می‌کنیم در کلاس $NP - Hard$ هم قرار می‌گیرد.

فرض کنیم یک مساله Subset Sum داریم و مجموعه‌ی $X$ داده شده است. فرض کنیم اندازه‌ی $X$ برابر با $n$ باشد. یک گراف دو بخشی با بخش‌های $A$ و $B$ که هر یک $n$ راس دارند ایجاد می‌کنیم. فرض کنیم راس‌های $A$ ، $a_i$ ها و راس‌های $B$، $b_i$ ها باشند. به ازای هر عدد $x_i$ عضو $X$ یک یال جهت‌دار با وزن $x_i$ از $a_i$ به همه‌ی راس‌های بخش $B$ وصل می‌کنیم. همچنین هر راس $b_i$ را با یک یال جهت‌دار با وزن صفر به تمام راس‌های بخش $A$ وصل می‌کنیم.

اکنون ثابت می‌کنیم گراف یک دور به وزن صفر دارد اگر و تنها اگر یک زیر مجموعه از $X$ با مجموع اعضای صفر وجود داشته باشد.

فرض کنیم یک زیرمجموعه مانند $Y$ از $X$ وجود داشته باشد که مجموع اعضای آن صفر باشد. فرض کنیم اعضای مجموعه‌ی $Y$ به ترتیب $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}$ باشند. اکنون یک دور متناظر با این اعداد در گراف پیدا می‌کنیم. از راس $a_{i_1}$ شروع می‌کنیم و به راس $b_{i_1}$ می‌رویم. سپس از $a_{i_1}$ به $a_{i_2}$ می‌رویم و این روند را ادامه می‌دهیم تا به راس $b_{i_k}$ برسیم. در این مرحله از $b_{i_k}$ به $a_{i_1}$ می‌رویم تا دور کامل شود. در نهایت یال‌های $a_{i_1}b_{i_1}$ با وزن $x_{i_1}$ و یال‌های $b_{i_1}a_{i_1}$ با وزن صفر در دور وجود دارند، پس مجموع وزن یال‌های دور برابر با مجموع وزن اعضای $Y$ است.

حال فرض کنیم یک دور با مجموع اعضای صفر در گراف وجود دارد. چون وزن یال‌ها از مجموعه‌ی $B$ به $A$ صفر است، پس می‌توانیم مجموع وزن یال‌های دور را برابر با مجموع وزن یال‌هایی از آن که از $A$ به $B$ هستند در نظر بگیریم. وزن هر یک از این یال‌ها برابر با وزن یکی از اعضای مجموعه‌ی $X$ است، همچنین هر یک از اعضای مجموعه‌ی $X$ حداکثر یک‌بار در این مجموع ظاهر می‌شوند (چون هر راس حداکثر یک‌بار در دور وجود دارد). پس زیر مجموعه‌ای از $X$ وجود دارد که مجموع اعضای آن صفر باشد.

**پرسش سوم (۲۰ نمره):**

برنامه ریزی یک سالن کنسرت به شما سپرده شده است. برای همین برنامه‌ی n کنسرت در سال جاری به شما داده شده. برنامه‌ی هر کنسرت یک زمان شروع و یک زمان پایان دارد. از شما خواسته شده تا مشخص کنید آیا امکان دارد k کنسرت در امسال برگزار شود یا خیر؟ (از میان هر دو کنسرتی که برنامه‌ی آن‌ها تداخل دارد فقط یکی از آن‌ها در می‌تواند برگزار شود)

ثابت کنید این مساله در کلاس پیچیدگی $NP - Complete$ قرار می‌گیرد.

حل: با استفاده از الگوریتم حریصانه می‌توان حداکثر تعداد کنسرت‌هایی که در این سال می‌تواند برگزار شود را پیدا کرد که هزینه‌ی زمانی آن از مرتبه‌ی چندجمله‌ای است. بنابراین با بررسی اگر k از حداکثر تعداد کنسرت‌های قابل اجرا در این سال بزرگتر باشد، جواب خیر و در غیر این صورت جواب بله است. پس مساله در کلاس پیچیدگی P قرار دارد و NP-Complete نیست.

**پرسش چهارم (۲۰ نمره):**

ثابت کنید مساله مجموعه‌ی چیره[5]، در کلاس پیچیدگی $NP - Complete$ قرار می‌گیرد.

مساله‌ی مجموعه‌ی چیره: گراف ساده‌ی $G$ و عدد $K$ داده شده است. آیا زیرمجموعه‌ای از رئوس $G$ مانند $V'$ به اندازه‌ی $K$ وجود دارد که هر راس از $G$ که در $V'$ نیست با حداقل یکی از رئوس $V'$ مجاور باشد.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم مساله مجموعه‌ی چیره در کلاس پیچیدگی $NP$ قرار دارد.

فرض کنیم مجموعه‌ی $V$ از راس‌های گراف $G$ به ما داده شده است. برای این که بررسی کنیم آیا مجموعه‌ی داده شده یک مجموعه‌ی چیره در گراف $G$ است یا خیر، کافی است مجموع تعداد راس‌های مجموعه‌ی $V$ و راس‌های مجاور آن که متمایز باشند را به دست آورده و آن را با تعداد کل راس‌های گراف $G$ مقایسه کنیم. که این الگوریتم از مرتبه‌ی $V^2$ است پس از مرتبه‌ی چندجمله‌ای است.

حال ثابت می‌کنیم این مساله در کلاس پیچیدگی $NP - Hard$ قرار دارد.

برای این کار از کاهش مساله پوشش راسی به این مساله استفاده می‌کنیم.

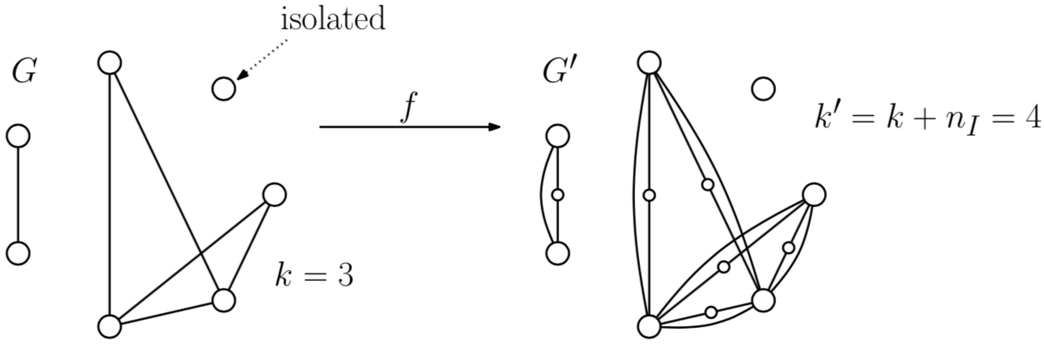
در مساله‌ی پوشش راسی فرض می‌کنیم گراف $G$ و عدد $k$ داده شده است، و باید مشخص کنیم که آیا مجموعه‌ای با اندازه کوچک‌تر یا مساوی $k$ وجود دارد که یک پوشش راسی در گراف $G$ باشد یا خیر.

ابتدا گراف جدید $G'$ را از روی گراف $G$ به شیوه‌ی زیر می‌سازیم:

به ازای هر یال مثل $wu$ در گراف $G$ که بین دو راس $w$ و $u$ قرار دارد، یک راس جدید $v_{wu}$ اضافه می‌کنیم و آن را به راس‌های $u, w$ وصل می‌کنیم (به این راس‌ها راس اضافی می‌گوییم).

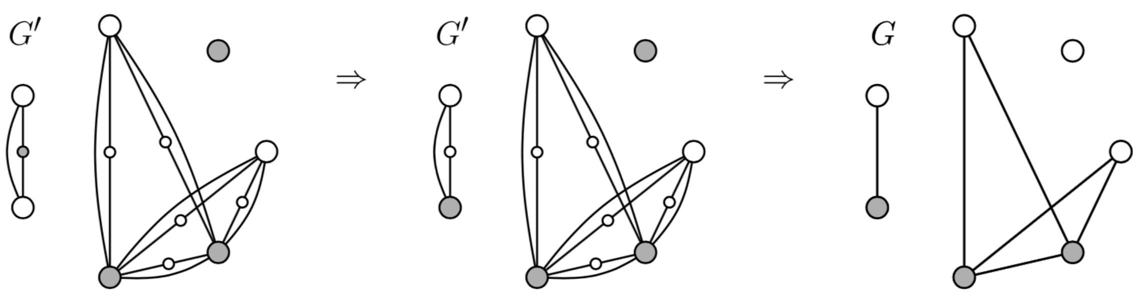
---

[5] Dominating Set




اکنون مساله‌ی مجموعه‌ی چیره را در گراف $G'$ و با مقدار $k' = k + n_I$ حل می‌کنیم (که $n_I$ تعداد راس‌های ایزوله در گراف $G$ است) . حال باید ثابت کنیم مساله مجموعه چیره با مقدار $k'$ جواب دارد اگر و تنها اگر مساله‌ی پوشش راسی در گراف $G$ با مقدار $k$ جواب داشته باشد.

فرض کنیم $V'$ یک مجموعه‌ی چیره با اندازه‌ی $k'$ در $G'$ باشد. ممکن است $V$ چند راس اضافی داشته باشد. این راس اضافی دقیقا با دو راس مجاور است، مثلا فرض کنیم راس $v_{wu}$ یک راس در $V'$ باشد. $v_{wu}$ بر دو راس $w$ و $u$ چیره است. حال اگر $v_{wu}$ را از $V'$ حذف کنیم و راس $w$ (یا $u$) را اضافه کنیم $V'$ همچنان یک مجموعه‌ی چیره در $G'$ است (چون $w$ با $v_{wu}$ و $u$ مجاور است). پس می‌توانیم با حذف راس‌های اضافی از $V'$ به مجموعه‌ای برسیم که هیچ راس اضافی‌ای ندارد. حال راس‌های ایزوله را هم از $V'$ حذف می‌کنیم تا به مجموعه‌ی $V$ برسیم. اکنون $V$ یک پوشش راسی در گراف $G$ است. اگر این گونه نباشد پس یالی مثل $wu$ در $G$ وجود دارد که به هیچ راسی در $V$ متصل نیست. اما در $G'$ به ازای این یال راس $v_{wu}$ وجود دارد که با فرض مجموعه‌ی چیره بودن $V'$ در $G'$ در تناقض است ($V$ هیچ راس اضافی‌ای ندارد، پس راس $v_{wu}$ با یکی از راس‌های $V$ مجاور است).

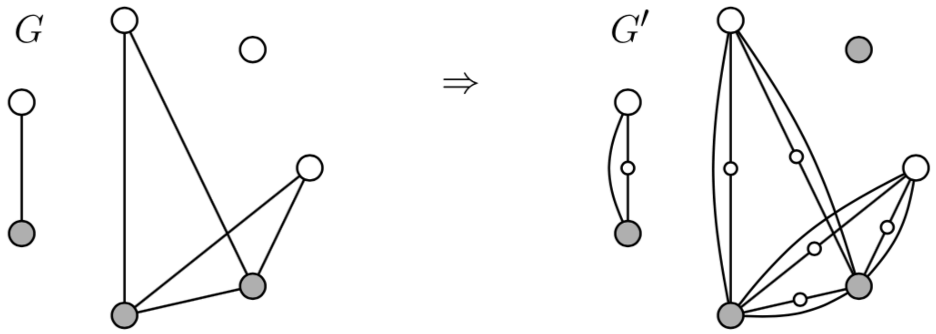



$G'$ has a dominating set of size $k'$ | $G'$ has a dominating set of size $k'$ using regular vertices | $G$ has a vertex cover of size $k = 3$

اکنون فرض می‌کنیم $V$ یک پوشش راسی با اندازه‌ی $k$ در $G$ باشد. ثابت می‌کنیم $V'$ (که با اضافه کردن راس‌های ایزوله $G$ به $V$ به دست می‌آید) یک مجموعه‌ی چیره در $G'$ است. چون $V$ یک پوشش راسی در

$G$ است، پس هر یالی در $G$ به یک راس در $V'$ متصل است. حال راس‌های اضافی در $G'$ را در نظر می‌گیریم، چون هر یک از این راس‌متناظر با یک یال هستند، و یال متناظر با آن‌ها به یکی از راس‌های $V'$ متصل است، پس این راس هم با یکی از راس‌های $V'$ مجاور است.

حال اگر بقیه‌ی راس‌های $G'$ را در نظر بگیریم، یا این راس‌ها ایزوله‌اند که در $V'$ قرار دارند یا این ایزوله نیستند پس حداقل به یک یال متصل هستند، پس یا خود این راس‌ها در $V'$ قرار دارند یا با یکی از راس‌های $V'$ مجاور اند، پس $V'$ یک مجموعه‌ی چیره در $G'$ است.




$G$ has a vertex cover of size $k = 3$ — $G'$ has a dominating set of size $k' = k + 1 = 4$

**پرسش پنجم (۲۰ نمره):**

مساله‌ی زیر در کلاس پیچیدگی $NP - Complete$ قرار می‌گیرد:

یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های ۰و ۱ داده شده است. می‌خواهیم بردار $X$ به طول $n$ با درایه‌های ۰ و۱ را پیدا کنیم که داشته باشیم: $AX = 1$

با استفاده از کاهش مساله بالا ثابت کنید مساله زیر هم در کلاس $NP - Complete$ قرار می‌گیرد:

مجموعه $A$ از اعداد طبیعی و عدد $K$ داده شده است، می‌خواهیم دریابیم که آیا زیرمجموعه‌ای از $A$ وجود دارد که مجموع اعضای آن برابر با $K$ باشد؟

حل: ضرب ماتریس که ابعاد آن $n$ باشد از مرتبه‌ی زمانی چندجمله‌ای است، پس مساله در کلاس پیچیدگی $NP$ قرار می‌گیرد.

حال با استفاده از کاهش مساله داده شده، ثابت می‌کنیم در کلاس پیچیدگی $NP - Hard$ هم قرار می‌گیرد. ماتریس $A$ را که $n \times n$ است در نظر می‌گیریم و هر ستون آن را یک عدد در مبنای $n + 1$ در نظر می‌گیریم. با این کار به $n$ عدد می‌رسیم، نام این مجموعه اعداد را $B$ در نظر می‌گیریم. بردار تمام ۱ را هم معادل با عدد $(11..1)_{n+1}$ که برابر با $s = n + 1^{n-1}$ است در نظر می‌گیریم.

برای جمع کردن $n$ عدد می‌توانیم همه‌ی آن‌ها را در مبنای $n + 1$ بنویسیم و سپس هر رقم از آن‌ها را با هم جمع کنیم، چون در اینجا هر رقم حداکثر ۱ است و حداکثر $n$ عدد داریم، پس در مجموع آن‌ها، هر رقم حداکثر $n$ است. بنابراین حاصل جمع این اعداد همواره $n$ رقمی است.

فرض کنیم برای ماتریس $A$ یک جواب $X$ وجود دارد که $AX = 1$

بردار حاصل $AX$ برابر با جمع ستون‌های $i$ام (که سطر $i$ام در $X$ برابر با یک است) از ماتریس $A$ است.

بنابراین اگر جواب $X$ ای وجود داشته باشد، زیر مجموعه‌ای از $B$ وجود دارد که مجموع آن برابر با $s$ باشد.

حال فرض کنیم زیر مجموعه‌ای از $B$ مانند $C$ وجود داشته باشد که مجموع آن برابر با $s$ باشد. اگر هر یک از این اعداد را در مبنای $n + 1$ بنویسیم و با هم جمع کنیم به عدد $(11..1)_{n+1}$ می‌رسیم که معادل با $s$ است. از طرفی می‌توانیم با محاسبه مقدار $AX$ به این عدد برسیم که در آن $X$ برداری است که سطر $i$ام آن یک است اگر $b_i$ عضو $C$ باشد.