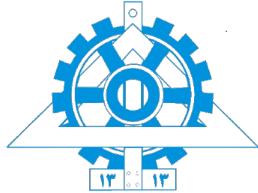


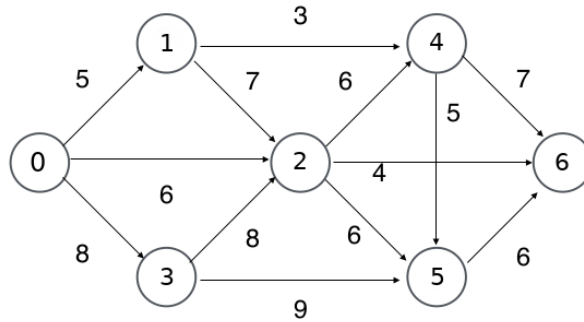
به نام خدا



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی پنجم
موعد تحویل: دوشنبه ۹ دی ۹۸، ساعت ۹:۰۰
طراح: آرمان رستمی، arman.rostami.999@gmail.com

۱. الگوریتم Ford-Fulkerson را بر روی گراف زیر با شروع از راس ۰ و ختم به راس ۶ اجرا کنید. در هر مرحله مسیر افزایشی و شبکه باقی‌مانده را رسم کنید. در انتها نیز min-cut گراف را مشخص کنید.



۲. فرض کنید گراف شبکه $G = (V, E)$ با دو راس $s \in V$ و $t \in V$ و ظرفیت یال c_e برای هر یال $e \in E$ به شما داده شده است. همچنین به شما جریان بیشینه f^* از s به t داده شده است. هدف پیدا کردن یال‌هایی است که با کاهش ظرفیت آن‌ها به میزان یک واحد، جریان بیشینه از s به t در گراف نیز کاهش یابد. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(|V||E|)$ برای این سوال ارائه دهید. در مورد درستی الگوریتم خود توضیح دهید.

۳. فرض کنید گراف شبکه $G = (V, E)$ با دو راس $s \in V$ و $t \in V$ و ظرفیت یال c_e برای هر یال $e \in E$ به شما داده شده است. همچنین به شما یک برش کمینه s - t با توجه به شرایط مسئله داده شده است. آیا در صورتی که ظرفیت هر یال به میزان یک واحد افزایش یابد، برش کمینه داده شده با توجه به ظرفیت‌های داده شده معتبر خواهد بود؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۴. فرض کنید می‌خواهیم گراف جهت‌دار G را به تعدادی دور افزایش کنیم به صورتی که اولاً دورها با یکدیگر اشتراک نداشته باشند و ثانياً تمام رئوس G را پوشش دهند. به وسیله matching الگوریتمی برای این کار پیشنهاد دهید. در مورد درستی الگوریتم خود توضیح دهید.

۵. فرض کنید گراف شبکه $G = (V, E)$ با دو راس $s \in V$ و $t \in V$ و ظرفیت یال c_e برای هر یال $e \in E$ به شما داده شده است. گراف G دارای یال‌هایی است که به منبع s وارد می‌شوند. فرض کنید f جریانی در این شبکه باشد که در آن یکی از یال‌های (v, s) که به منبع وارد می‌شود دارای جریان $f(v, s) = 1$ باشد.

(آ) ثابت کنید جریان f' برای شبکه G وجود دارد به طوری که $f'(v, s) = 0$ و $|f'| = |f|$

(ب) الگوریتمی با مرتبه زمانی $O(|V| + |E|)$ ارائه دهید که با داشتن f و فرض این که ظرفیت همه یال‌ها یک عدد صحیح است، f' را محاسبه کند.

۶. در پی برگزاری همایشی در تهران با موضوع فناوری، n سخنران درباره یک موضوع قصد سخنرانی در تعدادی سالن را دارند. به تعداد k سالن سخنرانی در نقاط مختلف شهر قرار دارند و سخنرانی‌ها در یک زمان صورت می‌گیرند. به علت غفلت مدیر همایش، اختصاص سخنران‌ها به سالن‌ها با این که فقط ۲ ساعت تا آغاز سخنرانی‌ها مانده انجام نشده. به این منظور مدیر همایش از شرکت تپسی کمک خواسته تا سخنران‌ها را در زمان کمتر از ۲ ساعت طوری به سالن‌ها برساند که هر سالن حداکثر به تعداد $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ سخنران داشته باشد تا سخنران‌ها به میزان خوبی پراکنده شده باشند. با توجه به در دسترس بودن راننده‌ها زمانی برای رسیدن راننده‌ها به سخنران‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. همچنین زمان رسیدن هر سخنران به هر سالن نیز به شما داده شده است. با استفاده از گراف شبکه راه حلی برای این مسئله بیابید، به طوری که اختصاص هر سخنران به هر سالن مشخص گردد.