



### پرسش یکم (۲۰ نمره):

در مساله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد<sup>۱</sup> یک گراف  $n$  راسی داده می‌شود که فاصله‌ی دو به دوی راس‌ها در آن مشخص است و می‌خواهیم کم‌ترین وزن یک دور همیلتونی (وزن دور برابر با جمع وزن یال‌های آن است) در این گراف را پیدا کنیم.

این مساله یک مساله بهینه‌سازی<sup>۲</sup> است.

حال مساله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

یک گراف  $n$  راسی، فاصله‌ی دوبه‌دوی راس‌ها در آن و یک عدد ثابت  $B$  داده شده است. می‌خواهیم مشخص کنیم که آیا دوری همیلتونی در گراف با وزن کم‌تر یا مساوی  $B$  وجود دارد یا خیر.

مساله بالا یک مساله تصمیم‌گیری<sup>۳</sup> است.

حال فرض کنید الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای<sup>۴</sup> برای مساله دوم وجود دارد. یک الگوریتم با زمان اجرای چندجمله‌ای برای مساله اول ارائه دهید.

### پرسش دوم (۲۰ نمره):

ثابت کنید مساله‌ی زیر در کلاس پیچیدگی  $NP - Complete$  قرار می‌گیرد:

گراف جهت‌دار و وزن‌دار  $G = (V, E)$  داده شده است. که وزن یال‌های آن اعداد صحیح هستند. آیا این گراف دوری دارد که مجموع وزن یال‌های آن برابر با صفر شود؟

### پرسش سوم (۲۰ نمره):

برنامه ریزی یک سالن کنسرت به شما سپرده شده است. برای همین برنامه‌ی  $n$  کنسرت در سال جاری به شما داده شده. برنامه‌ی هر کنسرت یک زمان شروع و یک زمان پایان دارد. از شما خواسته شده تا مشخص کنید آیا امکان دارد  $k$  کنسرت در امسال برگزار شود یا خیر؟ (از میان هر دو کنسرتی که برنامه‌ی آن‌ها تداخل دارد فقط یکی از آن‌ها در می‌تواند برگزار شود)

ثابت کنید این مساله در کلاس پیچیدگی  $NP - Complete$  قرار می‌گیرد.

<sup>1</sup> Traveling Sales Person

<sup>2</sup> Optimization

<sup>3</sup> Decision

<sup>4</sup> Polynomial

#### پرسش چهارم (۲۰ نمره):

ثابت کنید مساله مجموعه‌ی چیره<sup>۵</sup>، در کلاس پیچیدگی  $NP - Complete$  قرار می‌گیرد.  
مساله‌ی مجموعه‌ی چیره: گراف ساده‌ی  $G$  و عدد  $K$  داده شده است. آیا زیرمجموعه‌ای از رئوس  $G$  مانند  $V'$  به اندازه‌ی  $K$  وجود دارد که هر راس از  $G$  که در  $V'$  نیست با حداقل یکی از رئوس  $V'$  مجاور باشد.

#### پرسش پنجم (۲۰ نمره):

مساله‌ی زیر در کلاس پیچیدگی  $NP - Complete$  قرار می‌گیرد:  
یک ماتریس  $n \times n$  با درایه‌های ۰ و ۱ داده شده است. می‌خواهیم بردار  $X$  به طول  $n$  با درایه‌های ۰ و ۱ را پیدا کنیم که داشته باشیم:  $AX = 1$   
با استفاده از کاهش مساله بالا ثابت کنید مساله زیر هم در کلاس  $NP - Complete$  قرار می‌گیرد:  
مجموعه  $A$  از اعداد طبیعی و عدد  $K$  داده شده است، می‌خواهیم دریابیم که آیا زیرمجموعه‌ای از  $A$  وجود دارد که مجموع اعضای آن برابر با  $K$  باشد؟

---

<sup>5</sup> Dominating Set