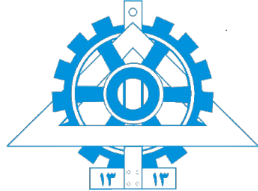


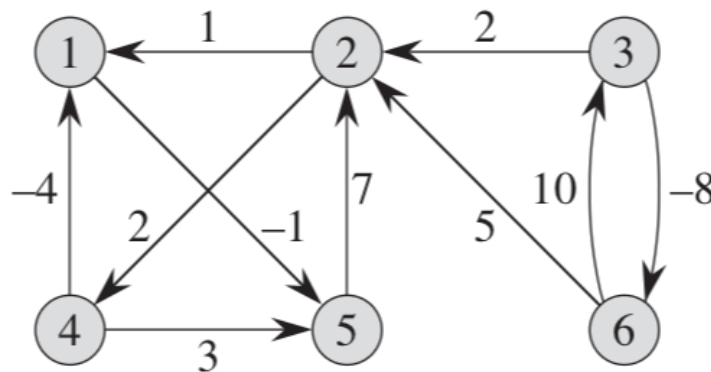
به نام خدا



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی چهارم
موعد تحویل: دوشنبه ۱۶ اردیبهشت ۹۸، ساعت ۹:۰۰
طراح: امیرمحمد رنجبر پازکی، iamirranjbar@gmail.com

۱. الگوریتم فلوید-وارشال را روی گراف وزن‌دار زیر اجرا کنید. در هر مرحله (هر بار حلقه بیرونی)، ماتریس حاصل را بنویسید.



۲. وزارت راه‌سازی شهرستان تصمیم گرفته است تا خط آهنی جامع در این کشور بسازد. برای پرهیز از هزینه اضافی این خط آهن هیچ گونه دوری ندارد. برای تخمین هزینه‌ها، از شما خواسته شده الگوریتمی ارائه دهید که طولانی‌ترین مسیر (در میان مسیرهای کمینه) محاسبه کنید. (هزینه زمانی الگوریتم خود را محاسبه کنید).

۳. رها به تازگی بازی نصب کرده است که در آن دو رشته هم طول روی صفحه نشان داده می‌شود و از کاربر می‌خواهد با تعدادی حرکت مجاز (با کمترین هزینه) این دو رشته را یکسان کند. حرکات مجاز و هزینه آن‌ها نیز داده شده است. هر حرکت مجاز می‌تواند یکی از حروف یکی از رشته‌ها را با پرداخت هزینه‌ای (بزرگتر مساوی صفر) به یک حرف دیگری تبدیل کند. رها به اشتباه نسخه چینی برنامه را نصب کرده است. او حالا وسط بازی گیر کرده است و از شما برای حل این بازی کمک خواسته است. با داشتن حرکات مجاز و رشته‌ها، الگوریتمی با کمترین هزینه برای برابر ساختن رشته‌ها ارائه دهید. (هزینه زمانی الگوریتم خود را محاسبه کنید).

۴. رها عمیقاً در حال فکر روی الگوریتم DFS است. او روی گرافی این الگوریتم را اجرا کرده است و این چالش‌ها برای او ایجاد شده است. به عنوان یک دوست خوب به او کمک کنید. می‌خواهم ثابت کنم یال (u, v)

(آ) یال درخت و یا یال جلویی است اگر و تنها اگر: $u.d < v.d < v.f < u.f$

(ب) یال عقبی است اگر و تنها اگر: $v.d < u.d < u.f < v.f$

(ج) یال ضربدری است اگر و فقط اگر: $v.d < v.f < u.d < u.f$

۵. در یک بازار ارز، برای تبدیل هر دو واحد پول، یک ضریب تبدیل وجود دارد. مثلاً اگر ضریب تبدیل واحد پول a به واحد پول b برابر ۳ باشد، در ازای فروش ۱۰ واحد a میتوان ۳۰ واحد b دریافت کرد. (توجه کنید که ضریب تبدیل b به a لزوماً معکوس ۳ یعنی یک سوم

نیست). فرض کنید هیچ محدودیتی در مقدار خرید و فروش یک واحد پول نیست. بسته به نرخ های تبدیل، بعضی اوقات امکان سود نا متناهی در بازار وجود دارد. مثلاً در مثال بالا، اگر نرخ تبدیل b به c برابر ۲ و نرخ تبدیل c به a برابر ۱۵ باشد، می توان ۳۰ واحد b حاصل در مثال فوق را با ۶۰ واحد c مبادله کرد و ۶۰ واحد c را با ۱۲ واحد a مبادله کرد. بنابراین با شروع از ۱۰ واحد a و دو تبدیل میتوان به ۱۲ واحد a رسید. یک فرد سودجو به دنبال یافتن چنین چرخه هایی از تبدیل های سودآور است. الگوریتمی طراحی کنید که با داشتن نرخ تبدیل هر دو واحد پولی یک چرخه ی سودآور در صورت وجود پیدا کند.

۶. N متغیر و تعدادی نامساوی با استفاده از این n متغیر داده شده است که ضریب هر متغیر ۰، ۱ یا ۱- است. با دانستن نامساوی ها، آیا می توان به متغیرها به نحوی مقدار داد تا تمام نامساوی ها درست باشند؟ یک مثال از این دستگاه نامعادلات در زیر نشان داده شده است.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & \leq & 0, \\ x_1 - x_5 & \leq & -1, \\ x_2 - x_5 & \leq & 1, \\ x_3 - x_1 & \leq & 5, \\ x_4 - x_1 & \leq & 4, \\ x_4 - x_3 & \leq & -1, \\ x_5 - x_3 & \leq & -3, \\ x_5 - x_4 & \leq & -3. \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$