Normal and Exponential Distributions

Normal and Exponential Distributions

$X \sim c e^{-|x|}$ $\qquad -\infty < x < +\infty$

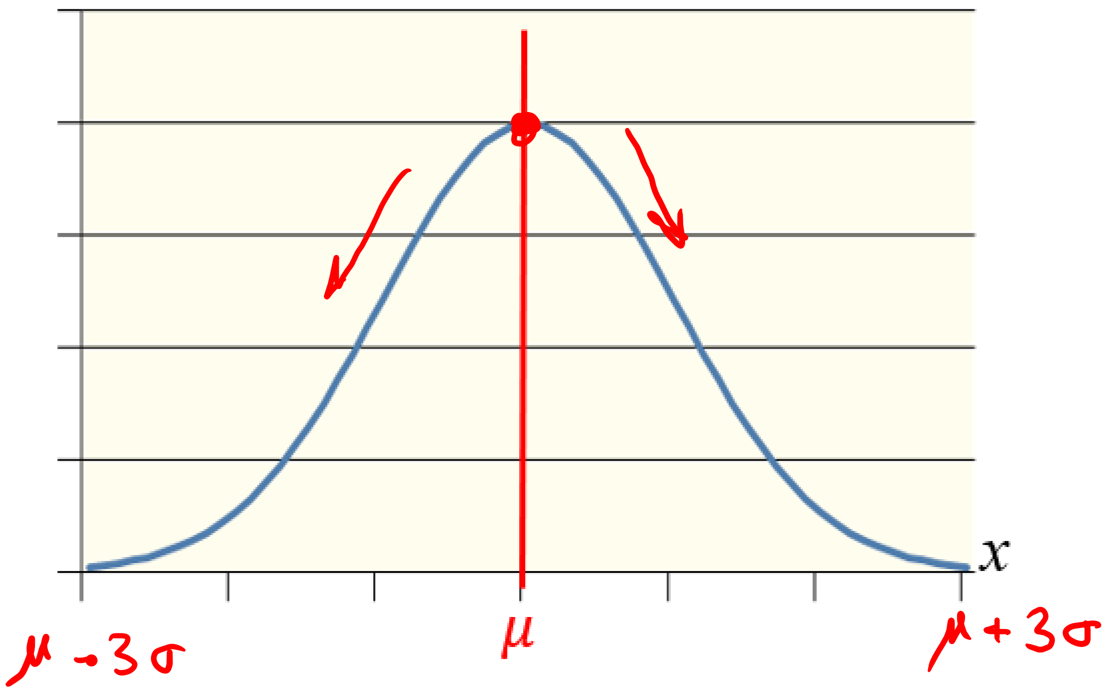
الف) $c = ?$ $\qquad f_X(x) = c e^{-|x|}$

ب) $E[X] = ?$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

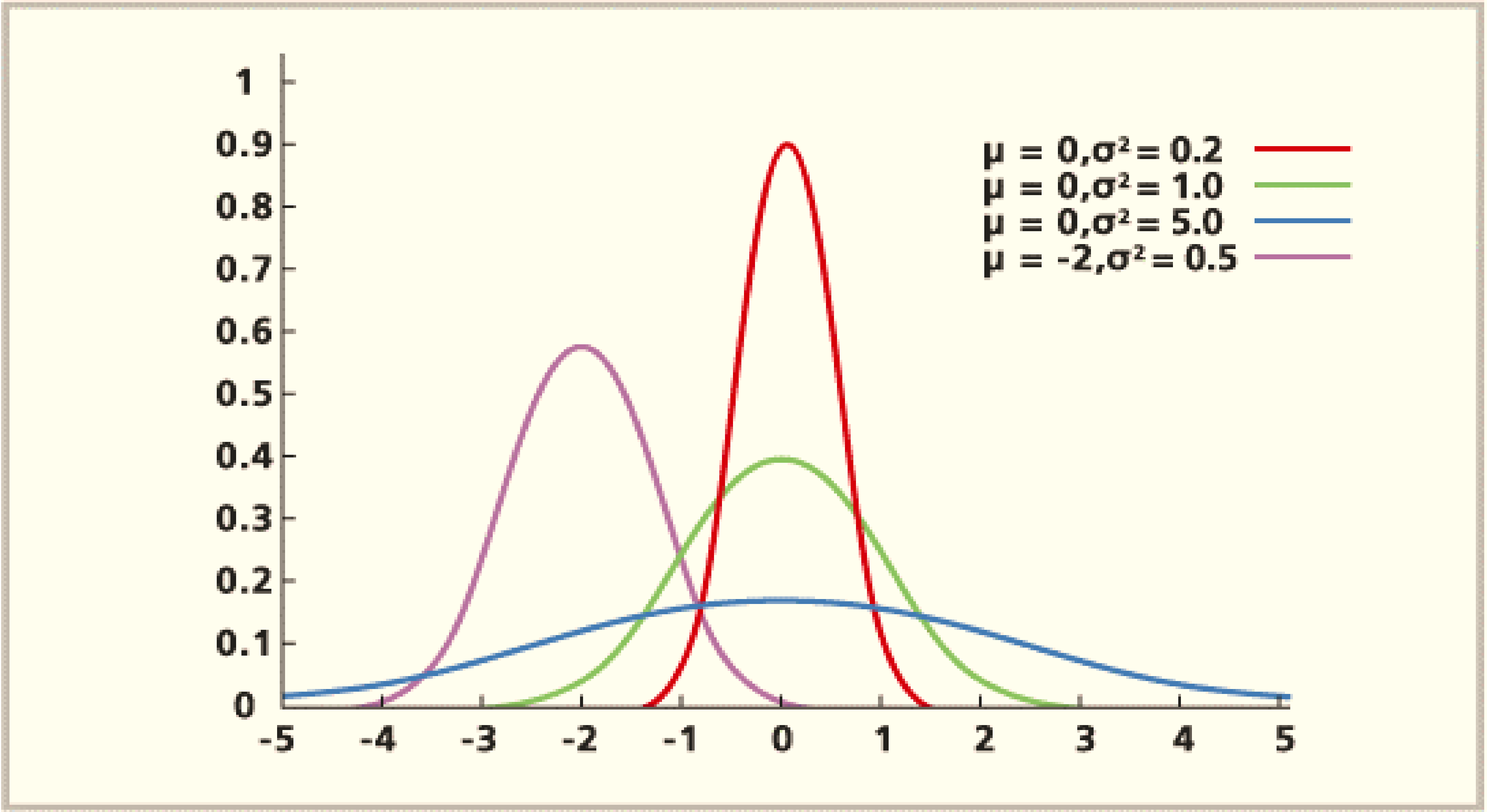
توزیع نرمال (Normal) یا گاوسی (Gaussian)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$X \sim N(\underbrace{\mu}_{\text{میانگین}}, \underbrace{\sigma^2}_{\text{واریانس}})$$

توزیع نرمال



μ = 0,σ² = 0.2
μ = 0,σ² = 1.0
μ = 0,σ² = 5.0
μ = -2,σ² = 0.5
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

مشخصات توزیع نرمال: میانگین و واریانس

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$E[X] = \mu$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \mu$$

$var(X) = \sigma^2$

تابع توزیع تجمعی نرمال

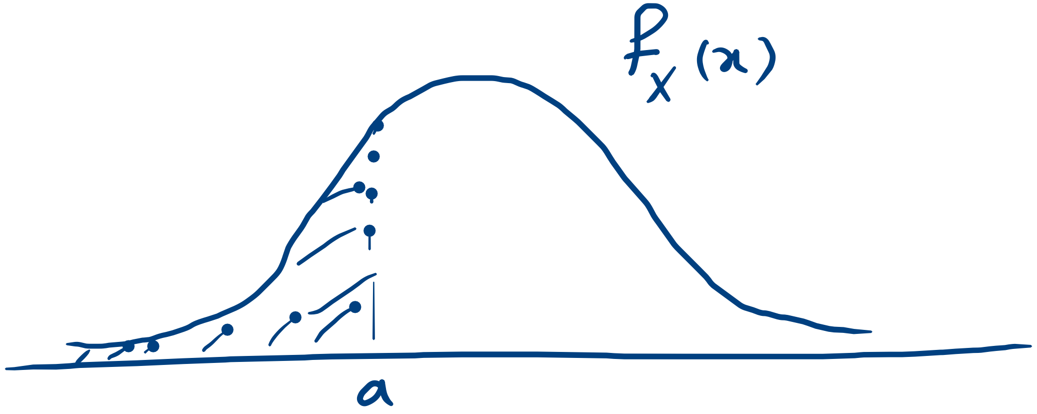
$$\underline{P\{a \le X \le b\}} = \underline{F_X(b)} - \underline{F_X(a)} = \underline{\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx}$$

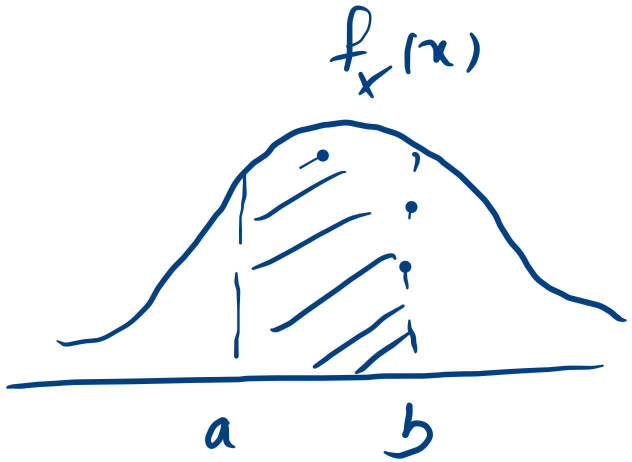
- CDF توزیع نرمال، فرم بسته ندارد!

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx \longrightarrow$$ فرم بسته ندارد





$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

تبدیل خطی توزیع نرمال

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Y = aX + b$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

$$\mu_y = a\mu + b \qquad \sigma_y^2 = a^2\sigma^2$$

تبدیل متغیر تصادفی نرمال به نرمال استاندارد

$Z \sim N(0,1)$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

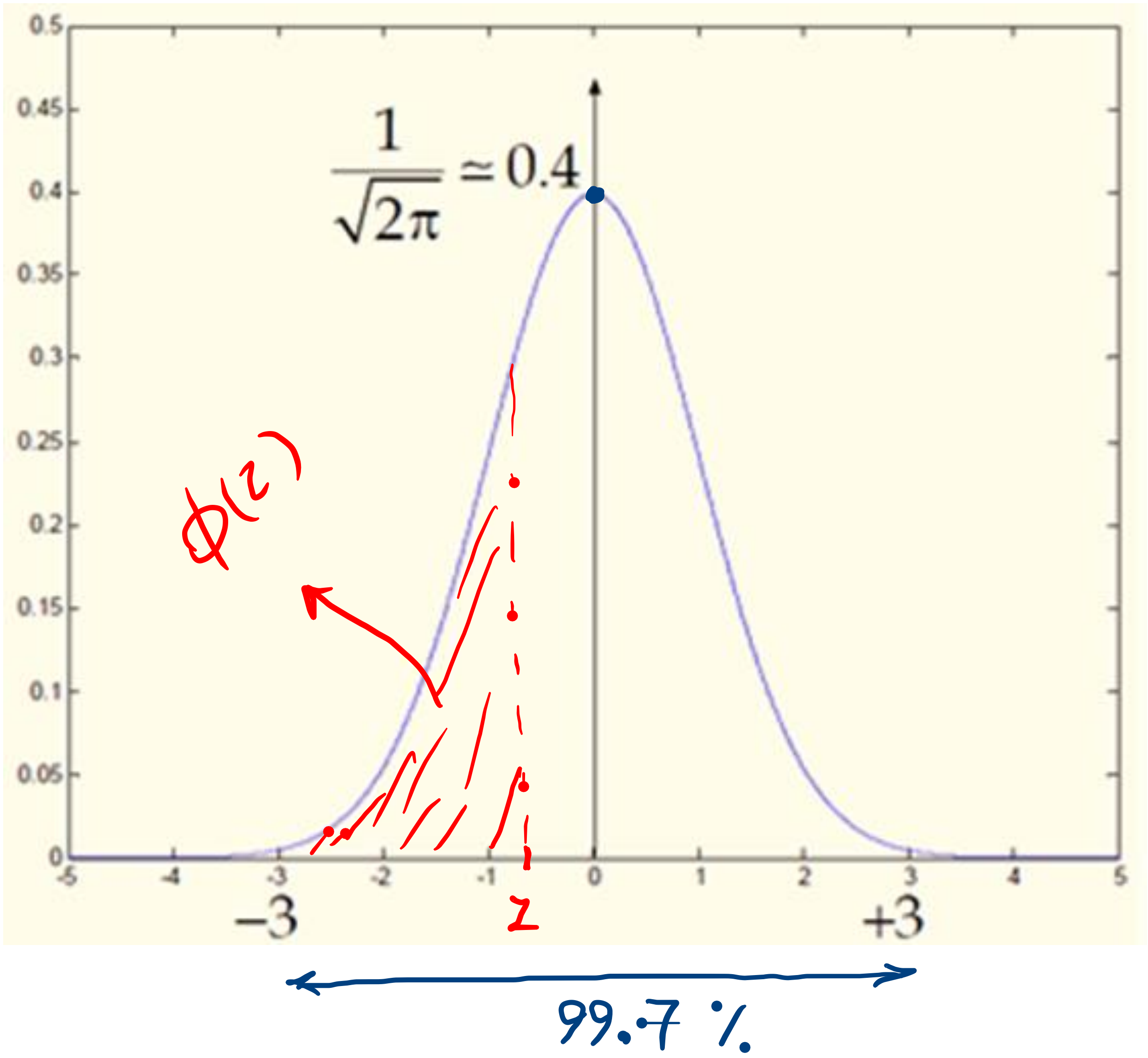
$Z = aX + b$

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}} = \underbrace{\frac{1}{\sigma}}_{a} X - \underbrace{\frac{\mu}{\sigma}}_{b}$$

$\mu_Z = 0$

$\sigma^2 = 1$

توزیع نرمال استاندارد

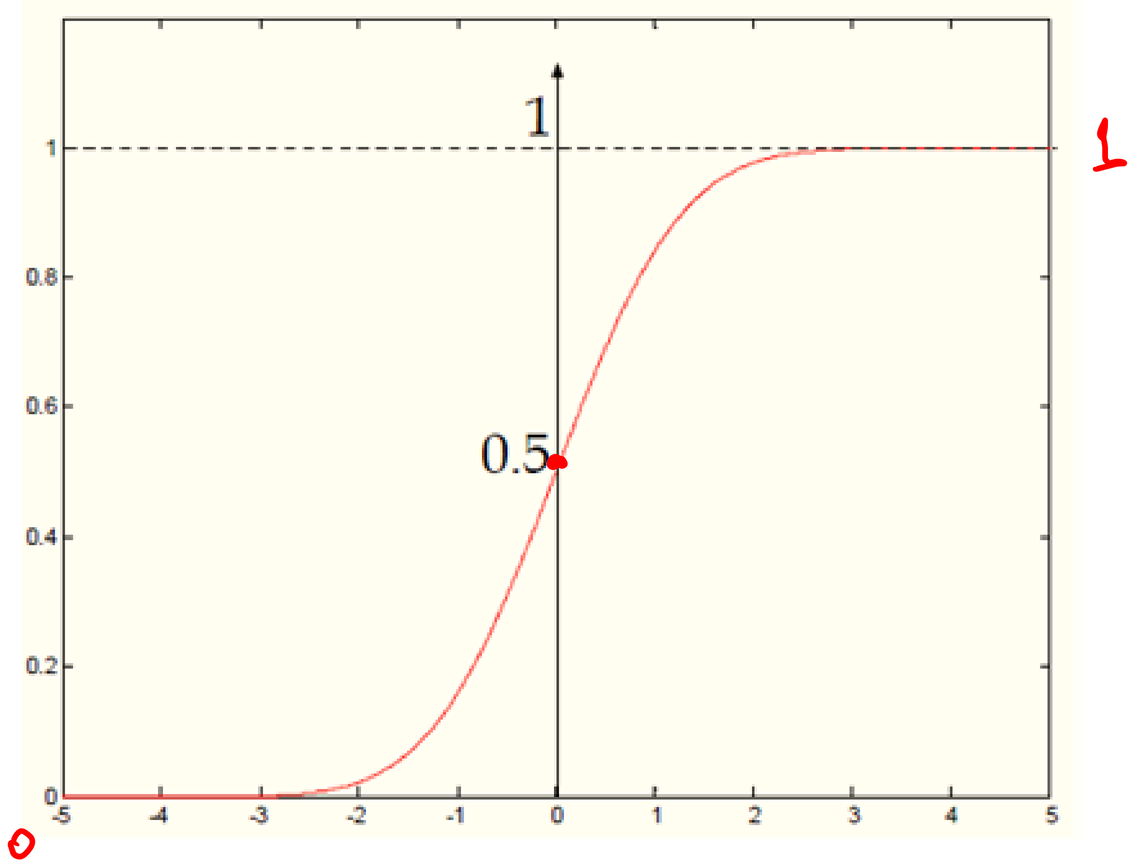


$\Phi(z) \longrightarrow$ CDF نرمال استاندارد

$\Phi(z) = F_Z(z) = P(Z \leq z)$

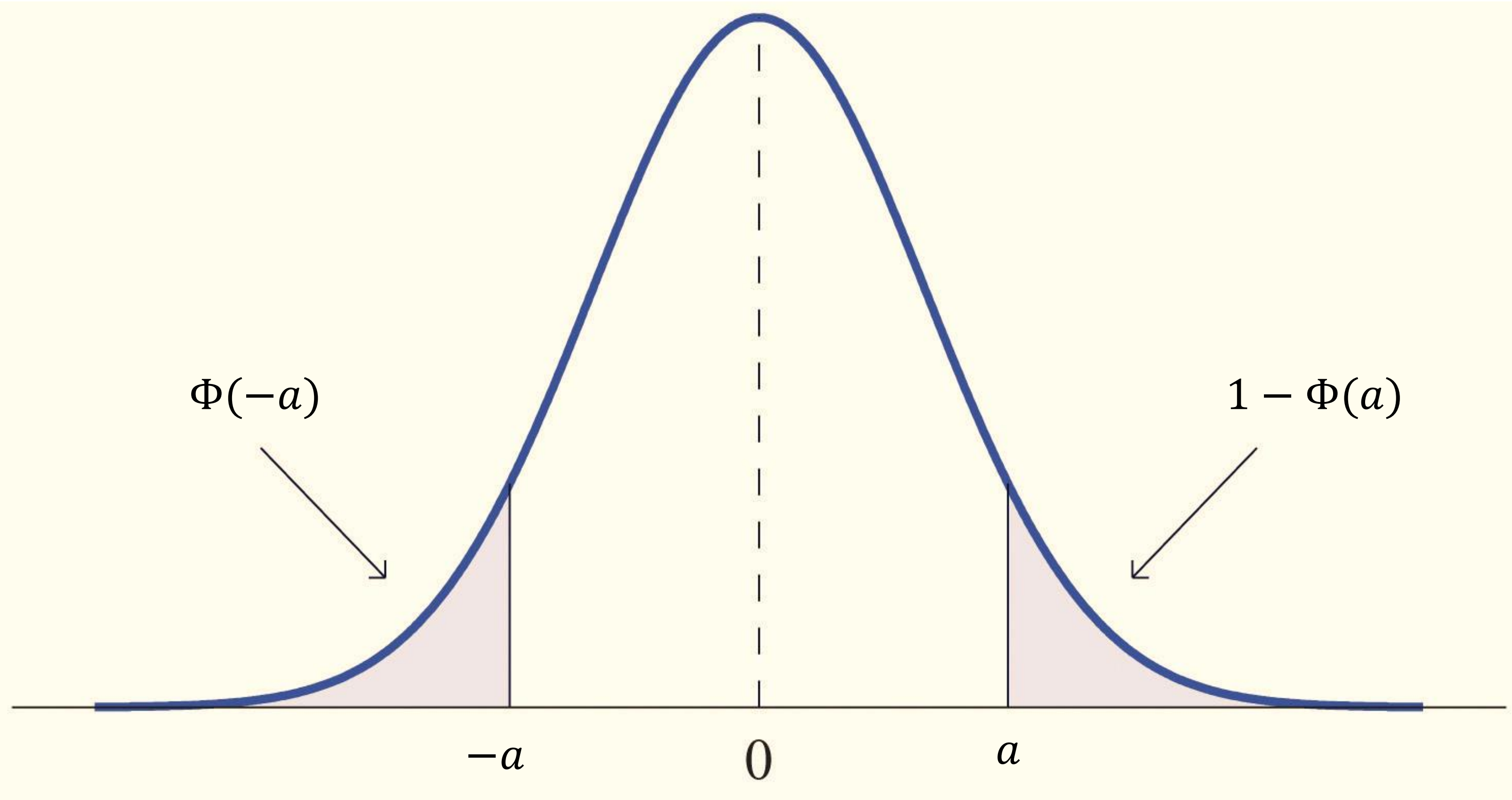
تابع CDF توزیع نرمال استاندارد

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(z)$$



تقارن توزیع نرمال استاندارد حول صفر

$$\phi(-0.6) = 1 - \underbrace{\phi(0.6)}$$



جدول تابع Φ (تابع CDF نرمال استاندارد)

$$P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

$$P(Z \leq 1.67) = 0.9525$$

$$P(Z \leq -1.67) =$$

$$= 1 - 0.9525$$

$$= 0.0475$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

محاسبه CDF یک توزیع نرمال

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

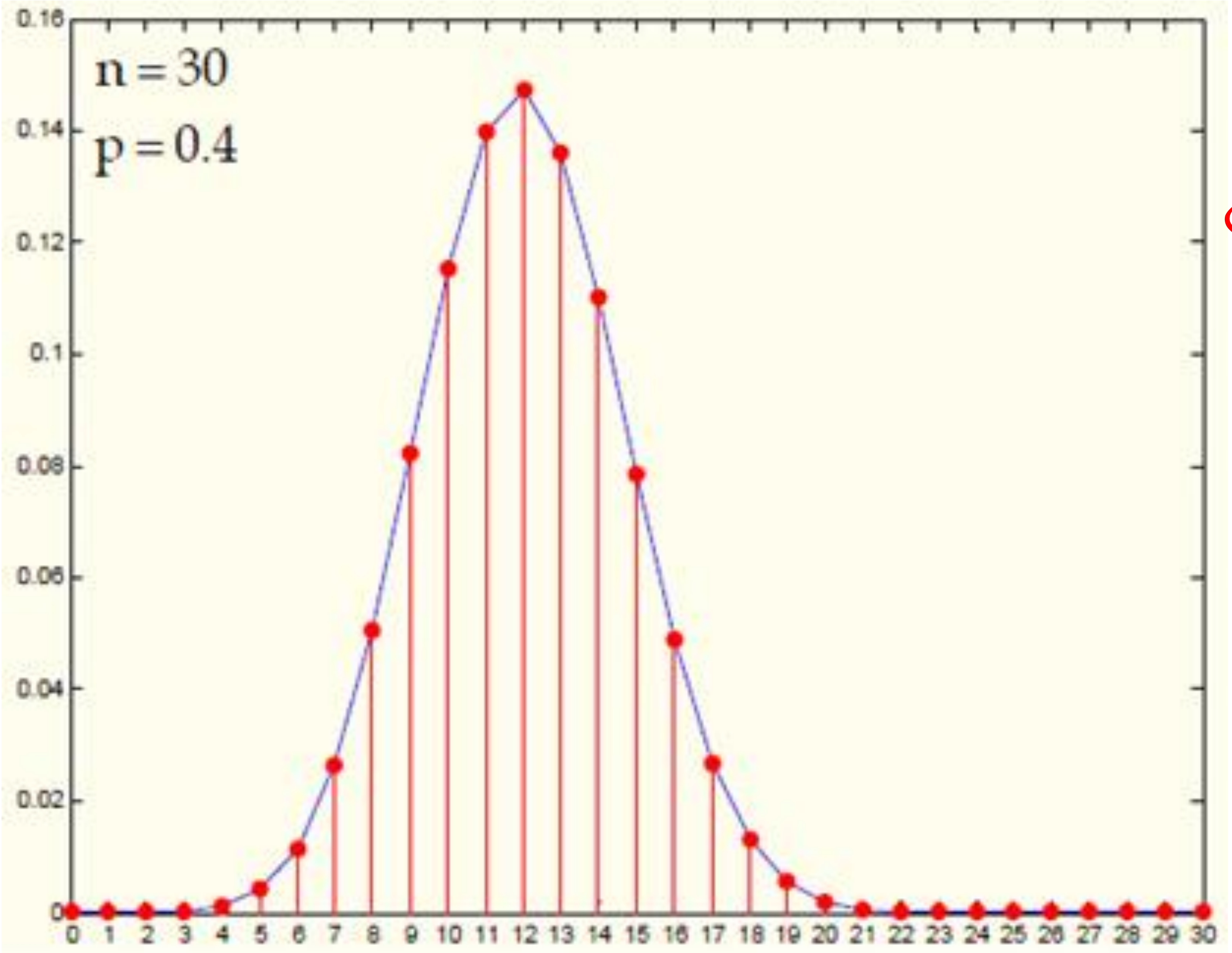
$$Pr(a \le X \le b) = Pr(a-\mu \le X-\mu \le b-\mu)$$

$$= Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$Z$$

$$= \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

تقریب توزیع دوجمله‌ای با توزیع نرمال



$X \sim Bin(n, p)$

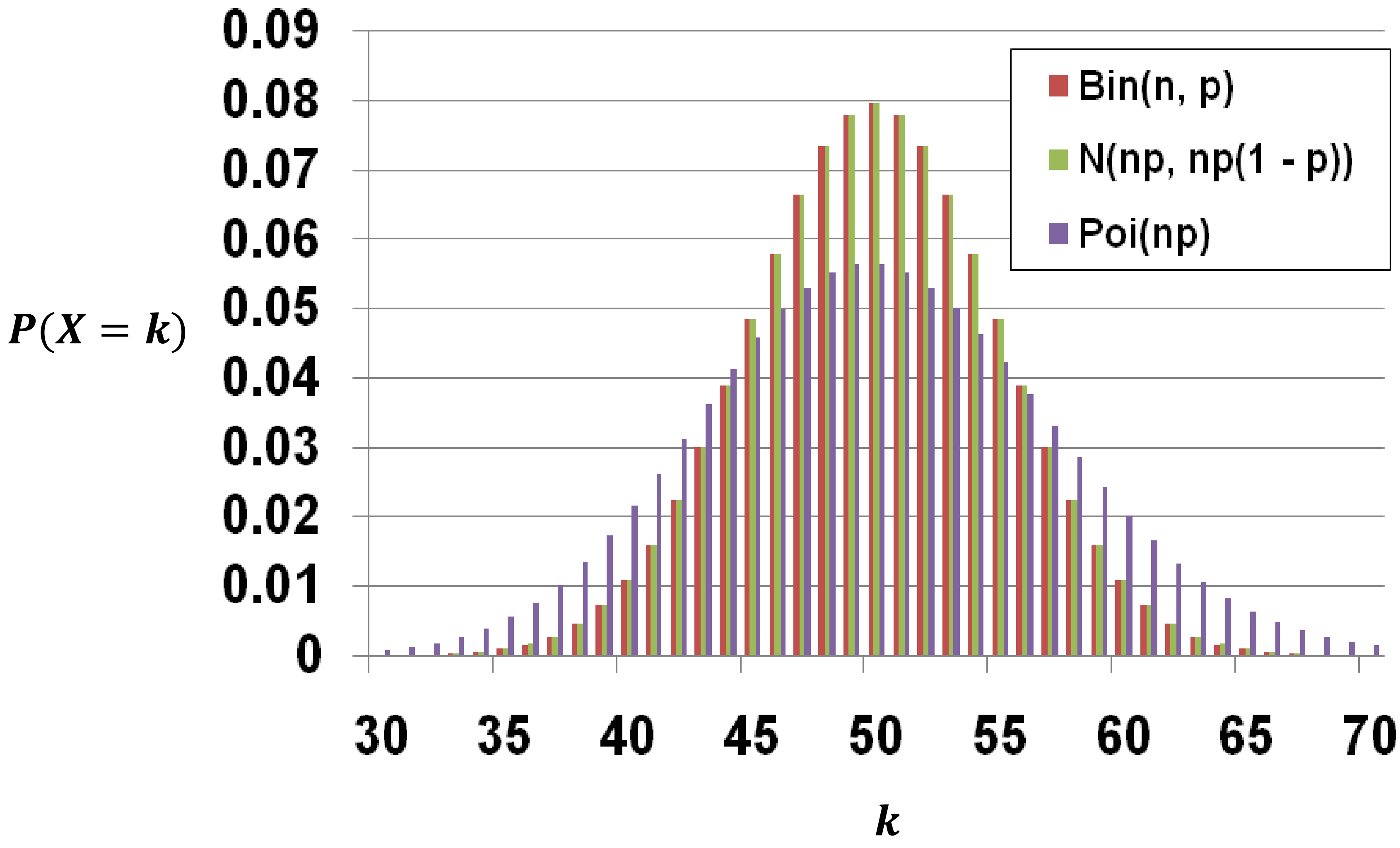
$$\left.\begin{array}{l} n \to \infty \\ p \to 0 \\ np \to \lambda \end{array}\right\}$$

$$\boxed{p \simeq 0.5}$$

تقریب توزیع دوجمله‌ای با توزیع نرمال

- این تقریب برای pهای نزدیک به 0.5 بهتر است.

تخمین توزیع دوجمله‌ای $\text{Bin}(\underbrace{100}_{n},\underbrace{0.5}_{p})$



قضیهٔ دموآور-لاپلاس (DeMoivre-Laplace)

○قضیه دموآور-لاپلاس: اگر S_n تعداد موفقیت‌ها (با احتمال p) در n آزمایش مستقل باشد، داریم:

binomial

$$P\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\boxed{S_n \sim Bin(n, p)} \longrightarrow \boxed{Y \sim N(np, np(1-p))}$$

$$P(a \leq S_n \leq b) \cong P(a \leq \underline{\underline{Y}} \leq b)$$

$$\boxed{= P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{Y-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)}$$

مثال

$X \sim Bin(\underline{100}, \underline{0.5}) \rightarrow \underline{P(X \geq 65)} = ?$

$P(X > 65)$

$P(Y \geq 64.5)$

$P(Y > 65.5)$

$Y \sim N(50, 25)$

$$P(X \geq 65) \cong P(Y \geq 65) = P\Big(\underbrace{\frac{Y-50}{5}}_{Z} \geq \frac{65-50}{5}\Big)$$

$$= P(Z \geq 3) \cong 0.001$$

Central limit — حد مرکزی

$$S_n = \underline{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$$

$n \to \infty \qquad S_n \to \mathcal{N}$

تصحیح پیوستگی (Continuity Correction)

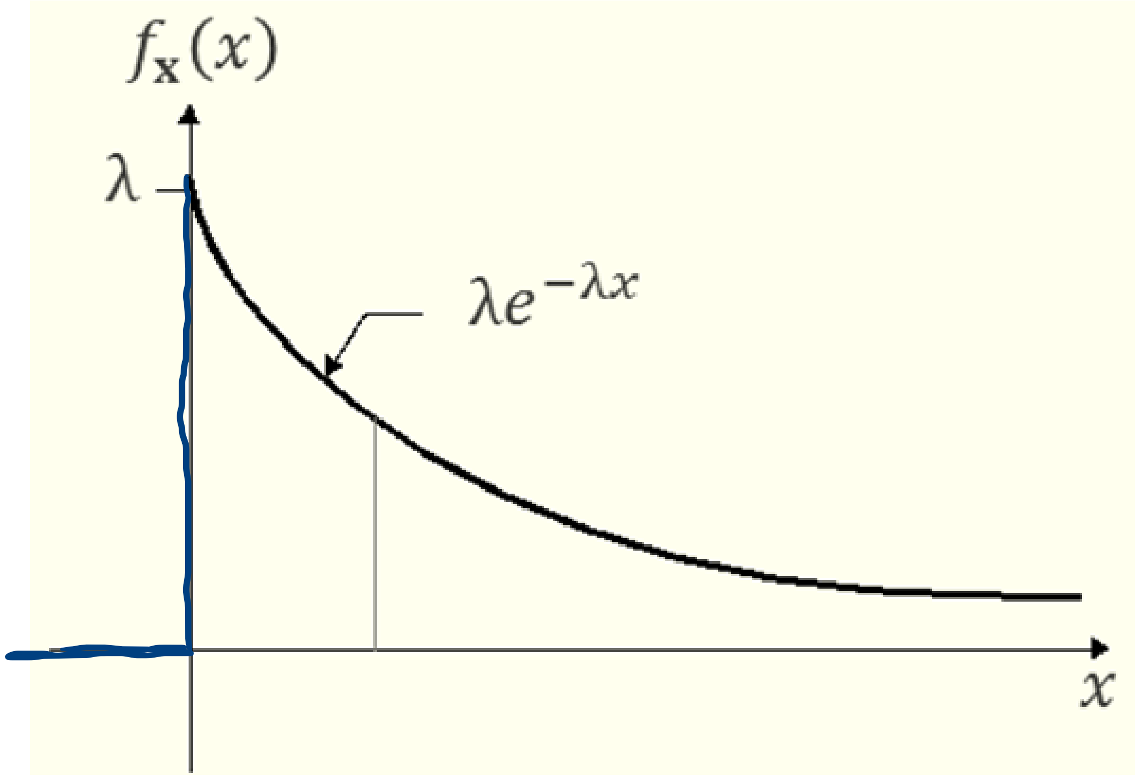
اطراف نقطه شروع و نقطه پایان را باید در نظر داشت.

گسسته	پیوسته
$X = 6$	$5.5 < X < 6.5$
$X > 6$	$X > 6.5$
$X \geq 6$	$X > 5.5$
$X < 6$	$X < 5.5$
$X \leq 6$	$X < 6.5$

$$P(X=6) \simeq \boxed{P(5.5 < Y < 6.5)}$$

توزیع نمایی (Exponential)

توزیع نمایی $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ با تابع چگالی زیر تعریف می‌شود:

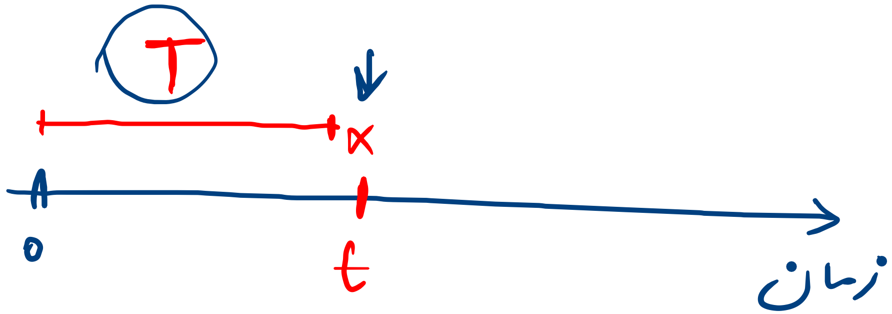


$$\boxed{f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ : \ x \geq 0}$$

$\lambda > 0$ را نرخ توزیع نمایی می‌نامیم.

توزیع نمایی و پواسون

فاصلهٔ بین دو نقطهٔ تصادفی با توزیع پواسون، دارای توزیع نمایی است.



(λ)

$f_T(t)$

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(K_t \ge 1) = 1 - P(K_t = 0)$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\boxed{f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$$

10 min

1

$\boxed{\lambda = 1}$

$\boxed{p = 1/10}$

بی‌حافظگی توزیع نمایی

$$P\{X > t + s | X > t\} = P\{X > s\}$$

$$P(X>t+s|X>t) = \frac{P(\{X>t+s\} \cap \{X>t\})}{P(X>t)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)}$$

$$= \frac{1-F_X(t+s)}{1-F_X(t)} = \frac{1-1+e^{-\lambda(t+s)}}{1-1+e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X>s)$$

گشتاور توزیع نمایی

$$E[X^n] = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء می‌توان نشان داد:

$$\boxed{E[X^n] = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}]} \rightarrow \boxed{E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \underbrace{E[X^0]}_{1} = \frac{1}{\lambda} \qquad E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$