آمار و احتمال مهندسی

توزیع‌های شرطی

(Ross 6.4-6.5)

توزیع شرطی گسسته

- دیدیم که برای دو پیشامد E و F، احتمال شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

- حال فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند. PMF شرطی متغیر تصادفی X با داشتن متغیر تصادفی Y (در جایی که $P_Y(y)>0$)، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{X|Y}(x|y)=P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

- به عبارت دیگر تابع جرمی احتمال X به شرط Y برابر حاصل تقسیم تابع جرمی احتمال مشترک X و Y (یا $P_{XY}(x,y)$) بر تابع جرمی احتمال Y (یا $P_Y(y)$) است.

تابع توزیع انباشته شرطی

- تابع توزیع انباشته X به شرط Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{X|Y}(a|y) = P(X \le a|Y = y) = \frac{P(X \le a, Y = y)}{P(Y = y)}$$

$$= \frac{\sum_{x \le a} P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)} = \sum_{x \le a} \frac{P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)}$$

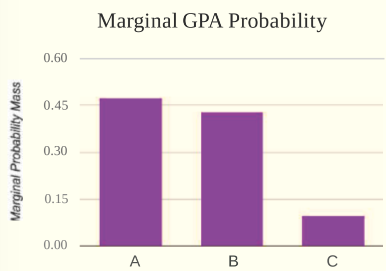
$$= \sum_{x \le a} P_{X|Y}(x|y)$$

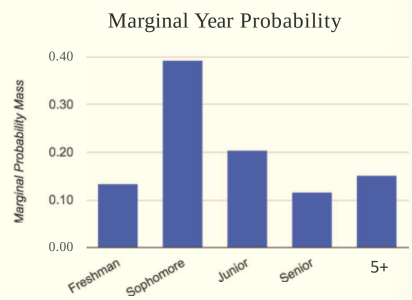
جدول احتمال (Contingency Table)

Joint Probability Table				
Year \ GPA	A	B	C	Marginal Year
Freshman	0.06	0.04	0.03	0.13
Sophomore	0.21	0.16	0.02	0.39
Junior	0.13	0.06	0.02	0.21
Senior	0.04	0.07	0.01	0.12
5+	0.04	0.09	0.03	0.15
Marginal GPA	0.47	0.43	0.10	1.00

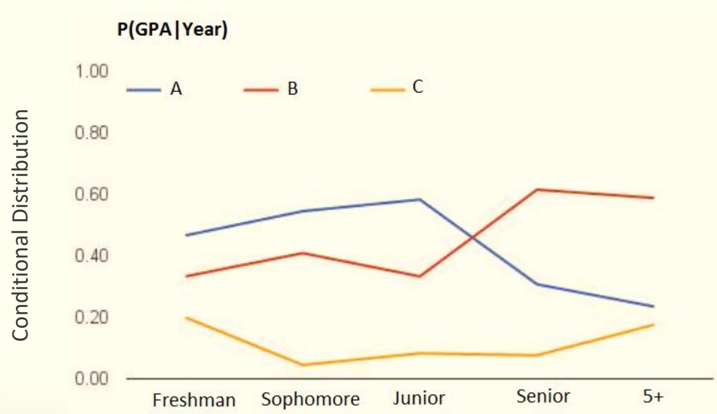
جدول توزیع احتمال مشترک سال تحصیلی و معدل

توزیع حاشیه‌ای احتمال





توزیع شرطی احتمال



مثال: وفاداری به سیستم عامل

- فرض کنید فردی دو کامپیوتر در طول زمان خریداری می‌کند:

X = متغیر تصادفی برنولی برای کامپیوتر اول ($X = 1$ اگر کامپیوتر اول PC باشد)

Y = متغیر تصادفی برنولی برای کامپیوتر دوم ($Y = 1$ اگر کامپیوتر دوم PC باشد)

- تابع جرمی احتمال مشترک X و Y به شکل زیر است:

$Y \backslash X$	0	1	$P_Y(y)$
0	0.2	0.3	0.5
1	0.1	0.4	0.5
$P_X(x)$	0.3	0.7	1.0

$$P(Y=0|X=0)=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$$

$$P(Y=1|X=0)=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=0|X=1)=\frac{0.3}{0.7}=\frac{3}{7}$$

$$P(Y=1|X=1)=\frac{0.4}{0.7}=\frac{4}{7}$$

مثال: وفاداری به سیستم عامل

$$P(Y|X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^{y}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-y}$$

$$P(Y|X=1)=\left(\frac{4}{7}\right)^{y}\left(\frac{3}{7}\right)^{1-y}$$

$$P_{Y|X}(y|x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{y}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-y}(1-x)+\left(\frac{4}{7}\right)^{y}\left(\frac{3}{7}\right)^{1-y}x$$

مثال

- درخواست‌های دریافت‌شده در یک سرور در طول روز از جانب انسان‌ها و بات‌ها انجام می‌گیرند:
  - $X =$ تعداد درخواست‌های انسان‌ها: $X \sim Poi(\lambda_1)$
  - $Y =$ تعداد درخواست‌های بات‌ها: $Y \sim Poi(\lambda_2)$
- از آنجایی که X و Y مستقل از هم هستند، تعداد کل درخواست‌ها نیز دارای توزیع پواسون است: $X + Y \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $P(X = k|X + Y = n)$ چقدر است؟

$$P(X = k|X + Y = n) = \frac{P(X = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(X + Y = n)}$$

مثال

$$P(X = k|X + Y = n) = \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = k)\,P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)}$$

$$= \frac{\dfrac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!} \times \dfrac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}$$

$$(X|X + Y = n) \sim \mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

توزیع شرطی پیوسته

- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند. تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط Y (در جایی که $f_Y(y) > 0$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

- مفهوم چگالی:

$$f_{X|Y}(x|y)dx = \frac{f_{XY}(x,y)dx\,dy}{f_Y(y)dy}$$

$$= \frac{P(x < X < x + dx\,,\; y < Y < y + dy)}{P(y < Y < y + dy)}$$

$$= P(x < X < x + dx \mid y < Y < y + dy)$$

تابع CDF شرطی

- تابع CDF شرطی X به شرط Y (جایی که $f_Y(y) > 0$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{X|Y}(a|y) = P(X \le a | Y = y) = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y)dx$$

- توجه کنید که با این که $P(Y = y) = 0$ است، اما تابع به شرط $Y = y$ قابل تعریف است، زیرا در واقع عملیات به صورت حدی انجام می‌شود:

$$P(Y = y) \approx P\left(y - \frac{\epsilon}{2} \le Y \le y + \frac{\epsilon}{2}\right) = \int_{y-\frac{\epsilon}{2}}^{y+\frac{\epsilon}{2}} f_Y(t)dt = \epsilon\, f_Y(y)$$

$$F_{X|Y}(a|y) = \lim_{\epsilon \to 0} P\left(X \le a \middle| Y \in (y - \frac{\epsilon}{2}, y + \frac{\epsilon}{2})\right)$$

مثال ۱

○ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال مشترک زیر باشند:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{12}{5}x(2-x-y) & 0<x,y<1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

چگالی شرطی $f_{X|Y}(x|y)$ را محاسبه کنید.

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_{XY}(x,y)}{\int_0^1 f_{XY}(x,y)dx}=\frac{\frac{12}{5}x(2-x-y)}{\int_0^1\frac{12}{5}x(2-x-y)dx}$$

ادامه مثال ۱

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{x(2-x-y)}{\int_0^1 x(2-x-y)dx}$$

$$=\frac{x(2-x-y)}{\left(x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2y\right)|_0^1}$$

$$=\frac{x(2-x-y)}{\frac{2}{3}-\frac{y}{2}}$$

$$=\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}\quad:\quad 0<x<1$$

مثال ۲

- مقدار $P\{X > 1|Y = y\}$ را برای توزیع زیر پیدا کنید:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ابتدا باید $f_{X|Y}(x|y)$ را به دست آوریم:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int_0^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{e^{-y}\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx} = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$$

ادامه مثال ۲

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}} : \quad x > 0$$

- توزیع شرطی $(X|Y = y)$ یک توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{y}$ است.
- بنابراین داریم:

$$P\{X > 1\,|Y = y\} = \int_1^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx$$

$$p\{X > 1|Y = y\} = -e^{-\frac{x}{y}}\Big|_1^{+\infty} = e^{-\frac{1}{y}}$$

- هر چه y بزرگتر شود، احتمال $P\{X > 1|Y = y\}$ بیشتر می‌شود.

توزیع شرطی و استقلال

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته مستقل باشند، داریم:

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(Y=y)}=P(X=x)$$

$$\Rightarrow P_{X|Y}(x|y)=P_X(x)$$

- به طور مشابه برای متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل داریم:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x)$$

استقلال شرطی

- n متغیر تصادفی گسسته $X_1,\dots,X_n$ مستقل شرطی به شرط Y نامیده می‌شوند، اگر برای هر $x_1,x_2,\dots,x_n,y$ داشته باشیم:

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n|Y=y)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i|Y=y)$$

- به طور مشابه برای متغیرهای تصادفی پیوسته، استقلال شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(X_1\le a_1,X_2\le a_2,\dots,X_n\le a_n|Y=y)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\le a_i|Y=y)$$

$$\forall a_1,a_2,\dots,a_n,y$$

قضیه احتمال کل

قضیه احتمال کل: اگر پیشامدهای B_i، که $1 \leq i \leq m$ ، افرازی از فضای نمونه Ω باشند، برای هر پیشامد دلخواه A از Ω داریم:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)$$

- قضیه فوق برای توابع جرمی احتمال شرطی هم برقرار است.
- دیدیم که:

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} \quad \Rightarrow \quad P_{XY}(x,y) = P_{Y|X}(y|x)P_X(x)$$

- از طرفی طبق تعریف توابع احتمال حاشیه‌ای:

$$P_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P_{XY}(x,y)$$

قضیه احتمال کل

- بنابراین خواهیم داشت:

$$P_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P_{Y|X}(y|x)P_X(x)$$

- به طور مشابه برای حالت پیوسته داریم $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$ و از طرفی

$$f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$$

بنابراین:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$$

مثال ۱

- متغیر تصادفی N یک متغیر تصادفی گسسته یکنواخت است که مقادیر $\{2,3,4\}$ را اختیار می‌کند. متغیر تصادفی X با توزیع $X \sim Geo(1/N)$ انتخاب می‌شود. تابع جرمی احتمال متغیر تصادفی X را به دست آورید.

$$P(N=n)=\frac{1}{3}\ :\ n\in\{2,3,4\}$$

$$P_{X|N}(x|n)=Geo\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$P_X(x)=\sum_{n=2}^{4}P_{X|N}(x|n)P(N=n)=\sum_{n=2}^{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\ :\ x=1,2,\ldots$$

مثال ۲

- متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه (0,1) است. متغیر تصادفی Y با احتمال یکنواخت در بازه $(0,X)$ انتخاب می‌شود. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را به دست آورید.

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}1/x & 0<y<x\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

طبق قضیه احتمال کل:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx=\int_y^1\frac{1}{x}\times 1\,dx=\ln(x)\Big|_y^1$$

$$f_Y(y)=\ln(1)-\ln(y)=-\ln(y)\ :\ \ 0<y<1$$

قضیه بیز

○ قضیه بیز: اگر مجموعه‌های B_i، که $1 \leq i \leq m$ ، افرازی از Ω باشند، برای هر پیشامد دلخواه A از Ω داریم:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)}$$

○ مشابه قضیه بیز برای پیشامدها، برای توابع جرمی احتمال داریم:

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)}$$

$$= \frac{P_{X|Y}(x|y)P_Y(y)}{\sum_{y=-\infty}^{\infty} P_{X|Y}(x|y)P_Y(y)}$$

قضیه بیز

○ به طور مشابه برای توابع چگالی احتمال شرطی متغیرهای تصادفی پیوسته داریم:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx}$$

مثال

برای مثال قبل داریم:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1/x & 0 < y < x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = -\ln(y): \quad 0 < y < 1$$

بنابراین با استفاده از قضیه بیز داریم:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{x} \times 1}{-\ln(y)} = -\frac{1}{x\ln(y)} \; : \; y < x < 1$$

ترکیب شرطی متغیرهای پیوسته و گسسته

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته و N یک متغیر تصادفی گسسته باشد.
- تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط داشتن N به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{X|N}(x|n) = \frac{P_{N|X}(n|x)f_X(x)}{P_N(n)}$$

- قضیه احتمال کل در این حالت به شکل زیر است:

$$P_N(n) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{N|X}(n|x)f_X(x)dx$$

- قضیه بیز در این حالت:

$$f_{X|N}(x|n) = \frac{P_{N|X}(n|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P_{N|X}(n|x)f_X(x)dx}$$

ترکیب شرطی متغیرهای پیوسته و گسسته

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته و N یک متغیر تصادفی گسسته باشد.
- تابع جرمی احتمال شرطی N به شرط داشتن X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{N|X}(n|x) = \frac{f_{X|N}(x|n)P_N(n)}{f_X(x)}$$

- قضیه احتمال کل در این حالت به شکل زیر است:

$$f_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{X|N}(x|n)P_N(n)$$

- قضیه بیز در این حالت:

$$P_{N|X}(n|x) = \frac{f_{X|N}(x|n)P_N(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{X|N}(x|n)P_N(n)}$$

مثال

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد، و B یک متغیر تصادفی برنولی با احتمال موفقیت p باشد:

$X \sim N(0,1)$, $B \sim Ber(p)$

- متغیر تصادفی Y به صورت مقابل تعریف می‌شود: $Y = X(2B-1)$. تابع چگالی احتمال Y را به دست آورید.

طبق قضیه احتمال کل داریم:

$$f_Y(y) = f_{Y|B}(y|B=0)P(B=0) + f_{Y|B}(y|B=1)p(B=1)$$

ادامه مثال

$B = 1 \Rightarrow Y = X \Rightarrow f_{Y|B}(y|B = 1) = f_X(y)$

$B = 0 \Rightarrow Y = -X \Rightarrow f_{Y|B}(y|B = 0) = \frac{f_X(-y)}{|-1|} = f_X(-y)$

از آنجایی که f_X (تابع چگالی نرمال استاندارد) یک تابع زوج است: $f_X(-y) = f_X(y)$، پس:

$f_Y(y) = f_{Y|B}(y|B = 0)P(B = 0) + f_{Y|B}(y|B = 1)p(B = 1)$

$f_Y(y) = (1 - p)f_X(y) + pf_X(y) = f_X(y)$

- به عبارت دیگر توزیع X و Y یکسان و برابر با $N(0,1)$ است.