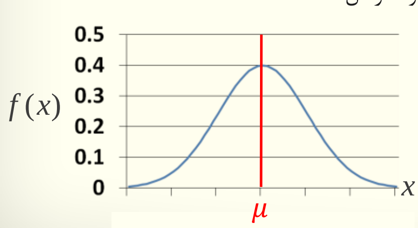
آمار و احتمال مهندسی

توزیع نرمال و توزیع نمایی

(Ross 5.4-5.5)

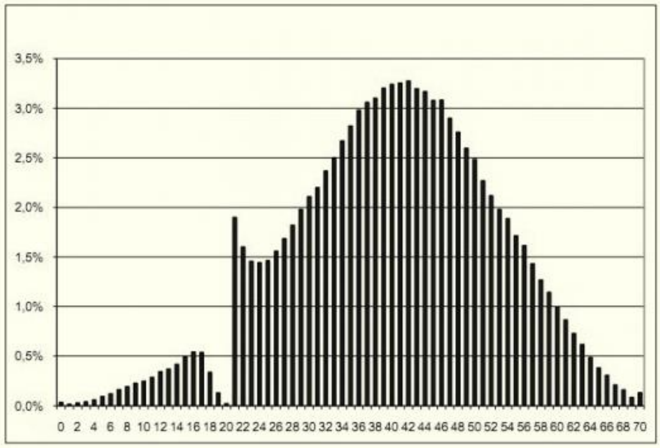
توزیع نرمال یا گاوسی (Gaussian)

- توزیع نرمال مهمترین و پرکاربردترین توزیع احتمال به شمار می‌رود. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- در بسیاری موارد عملی تقریب خوبی برای pdf یک متغیر تصادفی ناشناس عمل میکند.
  - در یک جامعهٔ همگن، پارامترهای بیومتریک انسان‌ها دارای توزیع نرمال است.
    - توزیع قد، وزن، فشار خون، ضربان قلب و ..
  - توزیع مشخصات قطعات تولیدی یک کارخانه معمولا نرمال است.
    - توزیع طول، قطر، حجم، ارتفاع، وزن و ...
  - عملکرد انسانی نیز غالباً دارای توزیع نرمال است.
    - ضریب هوشی، نمرات امتحانات و ...



$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

توزیع نمرات امتحانات نهایی در لهستان



توزیع نرمال

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

میانگین

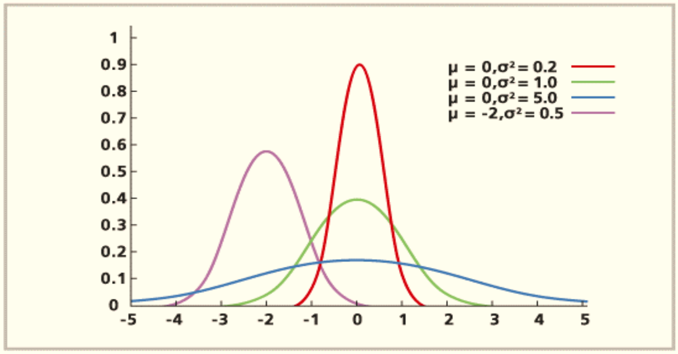
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

تابع چگالی احتمال در نقطه x

انحراف معیار

واریانس

توزیع نرمال



$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

تابع توزیع تجمعی نرمال

$$P\{a \le X \le b\} = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

- تابع CDF توزیع نرمال فرم بسته ندارد.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\ \mathrm{du} \longrightarrow \text{تابع } \Phi(\cdot)$$

- در واقع تابع Φ، تابع CDF یک توزیع نرمال با میانگین 0 و واریانس 1 است: $N(0,1)$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \ \rightarrow\ F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

تبدیل خطی توزیع نرمال

○ فرض کنید $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ یک توزیع نرمال و $Y = aX + b$ یک تبدیل خطی روی X باشد. آن‌گاه Y نیز دارای توزیع نرمال است:

$$E[Y] = E[aX + b] = aE[X] + b = a\mu + b$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X) = a^2\sigma^2$$

$$Y\sim N(a\mu + b\,, a^2\sigma^2)$$

حالت خاص تبدیل خطی توزیع نرمال

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), Y = aX + b \;\Rightarrow\; Y\sim N(a\mu + b\,, a^2\sigma^2)$$

○ تبدیل زیر یک حالت خاص این تبدیل خطی بر روی X است:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma} \quad\rightarrow\quad a = \frac{1}{\sigma}, \qquad b = -\frac{\mu}{\sigma}$$

$$Z\sim N(a\mu + b\,, a^2\sigma^2)$$

$$\sim N(\frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma}\,, \frac{1}{\sigma^2}\times\sigma^2)$$

$$\sim N(0,1)$$ $\rightarrow$ توزیع نرمال استاندارد

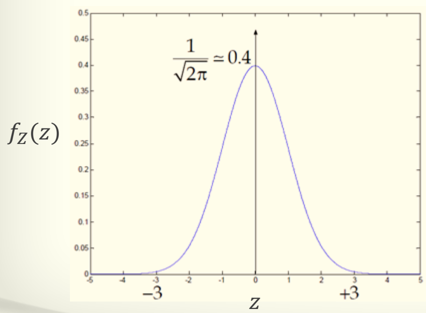
توزیع نرمال استاندارد

- متغیر تصادفی نرمال استاندارد $Z\sim N(0,1)$:

$E[Z] = \mu = 0$

$Var(Z) = \sigma^2 = 1 \ \rightarrow SD(Z) = \sigma = 1$

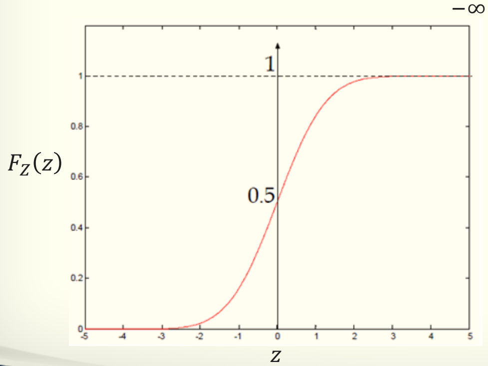
$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$



- $f(z)$ یک تابع زوج است: $f(z) = f(-z)$
- مقدار $f(z)$ در خارج از بازه (-3,3) بسیار کوچک و تقریباً برابر صفر است.
- نقاط z = -1 , 1 نقاط عطف تابع $f(z)$ هستند.

تابع CDF توزیع نرمال استاندارد

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(z)$$



$\Phi(-\infty) = 0$

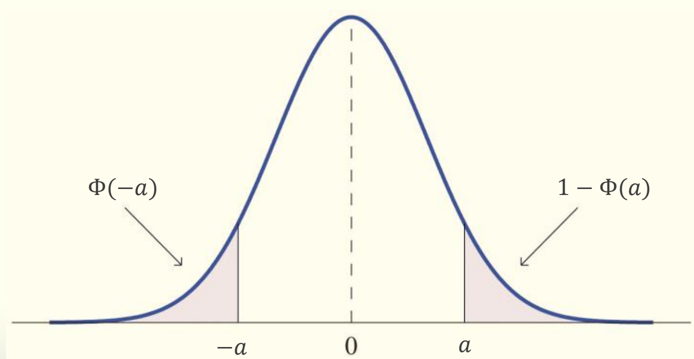
$\Phi(+\infty) = 1$

$\Phi(0) = 0.5$

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

تقارن تابع Φ

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$



جدول تابع Φ (تابع CDF نرمال استاندارد)

$P(Z \leq z) = \Phi(z)$

$P(Z \leq 1.67) = 0.9525$

$P(Z \leq -1.67) =$

$= 1 - 0.9525$

$= 0.0475$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

محاسبه CDF یک توزیع نرمال

○ توزیع نرمال $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ و تبدیل خطی $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ را در نظر بگیرید:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$
$$= P(X - \mu \le x - \mu)$$
$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)$$

○ محاسبه CDF هر توزیع نرمال X با استفاده از CDF توزیع نرمال استاندارد (تابع Φ) و میانگین و انحراف معیار X امکان‌پذیر است.

مثال

○ برای توزیع نرمال $X \sim N(3,16)$، احتمال $P(X > 0)$، $P(2 < X < 5)$، و $P(|X-3| > 6)$ را محاسبه کنید.

$$X \sim N(3,16) \rightarrow \mu = 3, \sigma^2 = 16 \rightarrow \sigma = 4$$

$$P(X > 0) = P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{0-3}{4}\right) = P(Z > -0.75)$$
$$= 1 - P(Z \le -0.75) = 1 - \Phi(-0.75)$$
$$= 1 - \big(1 - \Phi(0.75)\big) = \Phi(0.75) = 0.7734$$

مثال

$$P(2 < X < 5) = P\left(\frac{2-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{5-3}{4}\right) = P(-0.25 < Z < 0.5)$$

$$= P(Z < 0.5) - P(Z < -0.25) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.25)$$

$$= \Phi(0.5) - \big(1 - \Phi(0.25)\big) = 0.6915 - (1 - 0.5987) = 0.2902$$

$$P(|X-3| > 6) = P(X < -3) + P(X > 9) =$$

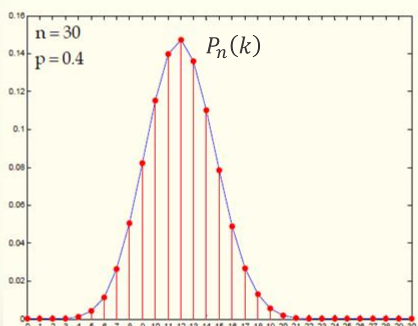
$$= P\left(Z < \frac{-3-3}{4}\right) + P\left(Z > \frac{9-3}{4}\right) = \Phi(-1.5) + (1 - \Phi(1.5))$$

$$= 2\Phi(1.5) - 1 = 2 \times (1 - 0.9332) = 0.1337$$

تقریب توزیع دوجمله‌ای با توزیع نرمال

- برای توزیع دوجمله‌ای $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ دیدیم که: $P(X=k) = P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$E[X] = np\,, \qquad Var(X) = np(1-p)$$



- دیدیم که برای n بزرگ ($n > 20$) و p کوچک ($p < 0.05$) می‌توانیم توزیع دوجمله‌ای را با توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = np$ تخمین بزنیم.

- برای تقریب زدن $P_n(k)$ برای nهای بزرگ، می‌توان از توزیع نرمال استفاده کرد.

$$np(1-p) \geq 10$$

تقریب توزیع دوجمله‌ای با توزیع نرمال

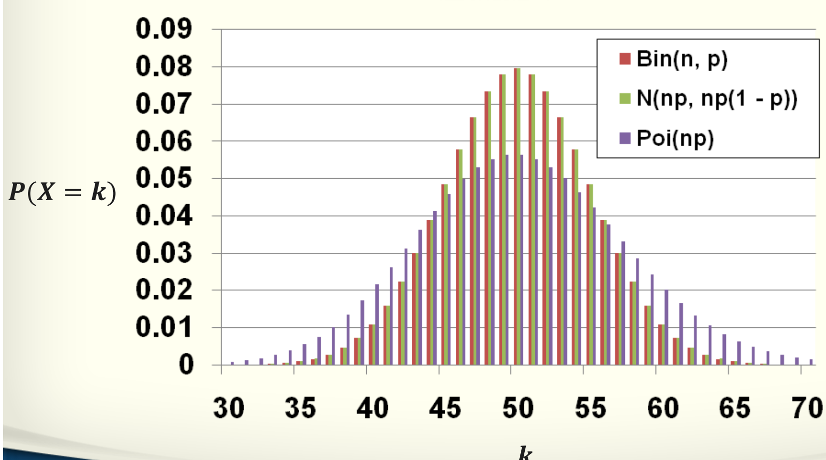
- در صورتی که n بزرگ باشد، توزیع دوجمله‌ای $X\sim\mathrm{Bin}(n,p)$ را می‌توان با توزیع نرمالی با میانگین و واریانس مشابه تخمین زد:

$$X \approx Y\sim N\big(E[X], Var(X)\big) = N(np\,, np(1-p))$$

- این تقریب برای pهای نزدیک به 0.5 بهتر است و هرچه p به صفر یا یک نزدیک شود، تقریب خرابتر می‌شود و n بزرگتری برای بهتر کردن تقریب لازم خواهد بود.

- علت: منحنی نرمال همواره متقارن است، ولی برای p نزدیک به صفر یا یک تقارن منحنی دوجمله‌ای از بین می‌رود.

تخمین توزیع دوجمله‌ای Bin(100,0.5)



قضیهٔ دموآور-لاپلاس (DeMoivre-Laplace)

- قضیه دموآور-لاپلاس: اگر S_n تعداد موفقیت‌ها (با احتمال p) در n آزمایش مستقل باشد، داریم:

$$P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(b) - \Phi(a)$$

به عبارت دیگر:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx P\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

مثال

- مدیر یک وبسایت خبری معروف برای آزمایش طراحی جدید این وبسایت، این طراحی را در اختیار ۱۰۰ نفر از کاربران قرار می‌دهد و مدت زمانی که این افراد در وبسایت می‌گذرانند را اندازه‌گیری می‌کند.
- فرض کنید X تعداد افرادی باشد که مدت زمان بیشتری را نسبت به گذشته بر روی این سایت سپری می‌کنند.
- طراحی جدید تنها در صورتی مورد قبول مدیر واقع می‌شود که $X \geq 65$.
- فرض کنید طراحی جدید اثری در مدت زمان کاربری سایت نداشته باشد، به عبارت دیگر احتمال این که یک کاربر زمان بیشتری را روی سایت بگذراند $p = 0.5$ باشد.
- احتمال این که طراحی جدید مورد قبول مدیر قرار بگیرد چقدر است؟

$$X \sim \text{Bin}(100, 0.5) \quad \rightarrow \quad P(X \geq 65) = ?$$

مثال

$X \sim \text{Bin}(100,0.5)$

$np = 50\,, \qquad np(1-p) = 25\,, \qquad \sqrt{np(1-p)} = 5$

با استفاده از تقریب نرمال داریم:

$Y \sim N(50,25)$

$$P(Y \geq 65) = P\left(\frac{Y-50}{5} \geq \frac{65-50}{5}\right) = P(Z \geq 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

- با استفاده از کامپیوتر و توزیع دوجمله‌ای اصلی به مقدار دقیق زیر می‌رسیم:

$P(X \geq 65) = 0.0018$

- هنوز تقریب دقت بالایی ندارد.

تصحیح پیوستگی (continuity correction)

- علت خطای حاصله در تقریب نرمال این است که توزیع گسسته دوجمله‌ای را توسط توزیع پیوسته نرمال تخمین می‌زنیم.
- برای مقادیر گسسته تنها ارتفاع در نمودار اهمیت دارد، اما در توزیع پیوسته علاوه بر ارتفاع، باید به پهنا نیز توجه شود.

گسسته	پیوسته
$X = 6$	$5.5 < X < 6.5$
$X > 6$	$X > 6.5$
$X \geq 6$	$X > 5.5$
$X < 6$	$X < 5.5$
$X \leq 6$	$X < 6.5$

- بنابراین وقتی توزیع گسسته را با توزیع پیوسته تقریب می‌زنیم، باید اطراف نقطه شروع و نقطه پایان را نیز در نظر بگیریم.
- به این منظور به مقادیر گسسته X نیم واحد اضافه و یا کم می‌کنیم که به این عمل تصحیح پیوستگی گفته می‌شود.

مثال

$X \sim \mathrm{Bin}(100,0.5)$

$np = 50\,, \qquad np(1-p) = 25\,, \qquad \sqrt{np(1-p)} = 5$

- با استفاده از تقریب نرمال داریم:

$Y \sim N(50,25)$

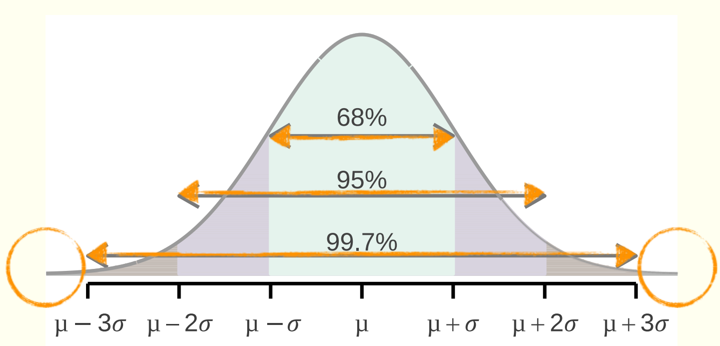
$$P(X \geq 65) \approx P(Y > 64.5) = P\left(\frac{Y-50}{5} \geq \frac{64.5-50}{5}\right) = P(Z \geq 2.9)$$

$$= 1 - 0.9981 = 0.0019$$

- تقریب فوق به مقدار دقیق زیر بسیار نزدیکتر است:

$P(X \geq 65) = 0.0018$

Empirical Rule (68 - 95 - 99.7% rule)

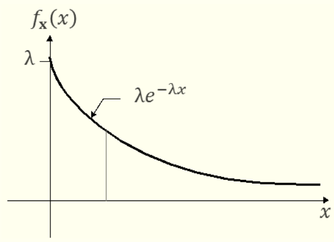


توزیع نمایی (Exponential)

- توزیع نمایی $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$ با تابع چگالی زیر تعریف می‌شود:

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}:x\geq 0\ ,\lambda>0$$

- $\lambda>0$ را نرخ توزیع نمایی می‌نامیم.



- و یا با استفاده از تابع پله:

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}u(x)$$

$$F_X(x)=\left(1-e^{-\lambda x}\right)u(x)$$

- خاصیت مهم: فاصلهٔ بین دو نقطهٔ تصادفی با توزیع پواسون، دارای توزیع نمایی است.
  - برای مثال طول یک مکالمه تلفنی

توزیع نمایی

- T می‌تواند مقادیر بین صفر تا بینهایت را اختیار کند.

$$f_T(\tau)\mathrm{d}\tau=P\{\tau\leq T\leq\tau+\mathrm{d}\tau\}$$

- T وقتی بین τ و $\tau+\mathrm{d}\tau$ خواهد بود که تا قبل از τ مکالمه‌ای رخ نداده باشد و بین τ و $\tau+\mathrm{d}\tau$ یک مکالمه اتفاق افتد.

$$P\left\{\text{نقطه در }\tau\ k\right\}=e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}$$

$$f_T(\tau)\mathrm{d}\tau=P\left\{\text{عدم وقوع در فاصله }\tau\right\}P\left\{\text{یک بار وقوع در }\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$=e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^0}{0!}e^{-\lambda\mathrm{d}\tau}\frac{(\lambda\mathrm{d}\tau)^1}{1!}$$

$$f_T(\tau)\mathrm{d}\tau=\lambda e^{-\lambda(\tau+\mathrm{d}\tau)}\mathrm{d}\tau$$

و با میل دادن $\mathrm{d}\tau$ به سمت صفر داریم: $f_T(\tau)=\lambda e^{-\lambda\tau}$

کاربردهای توزیع نمایی

- یا به عبارت دیگر:

$$F_T(\tau) = P\{T \le \tau\} = P\left\{\text{حداقل یک نقطه در فاصله } \tau\right\} = P\{k \ge 1\}$$
$$= 1 - P\{k = 0\} = 1 - e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda\tau} : \ \tau \ge 0$$

- کاربردهای توزیع نمایی:
  - فاصله بین دو پیشامد تصادفی همجنس
    - فاصله بین دو زمین‌لرزه متوالی و مستقل، فاصله بین دو بار خراب شدن یک دستگاه و ... (با فرض استقلال از هم و متساوی‌الاحتمال بودن در تمام زمان‌ها) توزیع نمایی دارند.
  - طول عمر قطعات الکترونیکی
  - مدت زمان سرویس‌دهی در یک سرور یا روتر در شبکه
  - مکالمات تلفنی: تعداد این نقاط در یک بازهٔ زمانی مشخص دارای توزیع پواسون است، اما فاصلهٔ بین آنها توزیع نمایی دارد.

مثال

- فرض کنید سرور یک سایت به طور متوسط در هر ۱۵ ثانیه از یک کاربر درخواستی دریافت می‌کند. احتمال این که بیش از یک دقیقه بین دو درخواست دریافتی توسط سرور فاصله بیافتد چقدر است؟

- واحد زمان را دقیقه فرض می‌کنیم:

$\lambda =$ تعداد نقاط در واحد زمان = 60/15 = 4

بنابراین فاصله بین نقاط دارای توزیع نمایی با پارامتر ۴ است: $F_X(x) = 1 - e^{-4x}$

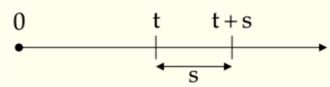
در نتیجه:

$$P(X > 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F_X(1)$$
$$= 1 - (1 - e^{-4}) = 0.0183$$

خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی

- یکی از خواص جالب توزیع نمایی بدون حافظه بودن آن است، یعنی:

$$P\{X > t + s | X > t\} = P\{X > s\}$$



اثبات:

$$P\{X > t + s | X > t\} = \frac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$
$$= 1 - F_X(s) = P\{X > s\}$$

- می‌توان نشان داد که تنها تابع توزیع پیوسته دارای خاصیت بی‌حافظگی، توزیع نمایی است.

گشتاور توزیع نمایی

- گشتاور مرتبه n-ام توزیع نمایی:

$$E[X^n] = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

- با استفاده از روش جزء به جزء برای انتگرال‌گیری داریم:

$$\int x^n \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -x^n e^{-\lambda x} + \int n\, x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx$$

- توزیع نمایی:

$$E[X^n] = -x^n e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty n x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx$$
$$= 0 + \frac{n}{\lambda} \int_0^\infty x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}]$$

میانگین و واریانس توزیع نمایی

- رابطه بازگشتی برای گشتاور توزیع نمایی:

$$E[X^n] = \frac{n}{\lambda}E[X^{n-1}]$$

بنابراین داریم:

$$E[X^0] = E[1] = 1$$

$$E[X^1] = \frac{1}{\lambda}E[X^0] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \frac{2}{\lambda}E[X^1] = \frac{2}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال

- مدت زمانی که یک کاربر روی یک وبسایت می‌گذراند را با متغیر تصادفی X که دارای توزیع نمایی است نمایش می‌دهیم.
- بررسی‌ها نشان می‌دهد که هر کاربر به طور متوسط ۵ دقیقه بر روی این وبسایت باقی می‌ماند.

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 5 \rightarrow \lambda = \frac{1}{5} \rightarrow X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{5}\right)$$

- احتمال این که یک کاربر بیش از ۱۰ دقیقه بر روی وبسایت زمان بگذارد چقدر است؟

$$P(X > 10) = 1 - F_X(10) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{5}\times 10}\right) = e^{-2} \approx 0.1353$$