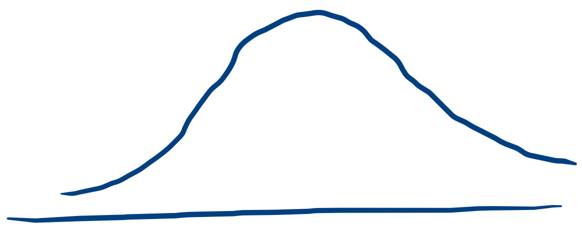
قضیه حد مرکزی

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$\tilde{X} \sim N(\mu, \sigma)$$

ریاضی $\quad \bar{X}_1 \quad \bar{X}_2 \quad \cdots \quad \bar{X}_{100} \longrightarrow$



Joint Distribution

دو متغیر تصادفی

X

$$P_X(x) = P(X = x)$$

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x)}$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

X, Y

$$P_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

$$= P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \, \partial y}$$

توزیع احتمال مشترک (توأم) (joint pmf)

$$P_{XY}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

$$\sum_{i}\sum_{j} P_{XY}(x_i, y_j) = 1$$

توزیع احتمال حاشیه‌ای (Marginal pmf)

$P_{XY}(x,y)$

$P_X(x)$

$P_Y(y)$

marginal dist.

$P_{X|Y}(x|y)$

$P_{Y|X}(y|x)$

X: دما

Y: ارتفاع

$$P_X(x) = P(X=x) = P(\{X=x, Y=y_1\} \cup \{X=x, Y=y_1\} \cup \dots \cup \{X=x, Y=y_n\})$$

$$= \sum_j P_{XY}(x, y_j)$$

$$P_Y(y) = \sum_i P_{XY}(x_i, y)$$

جدول توزيع توأم (Contingency Table)

$P_{XY}(x,y)$

Y \ X	0	1	2	3	$P_Y(y)$
0	0.16	0.12	0.07	0.04	0.39
1	0.13	0.14	0.12	0	0.39
2	0.07	0.11	0	0	0.18
3	0.04	0	0	0	0.04
$P_X(x)$	0.40	0.37	0.19	0.04	1.00

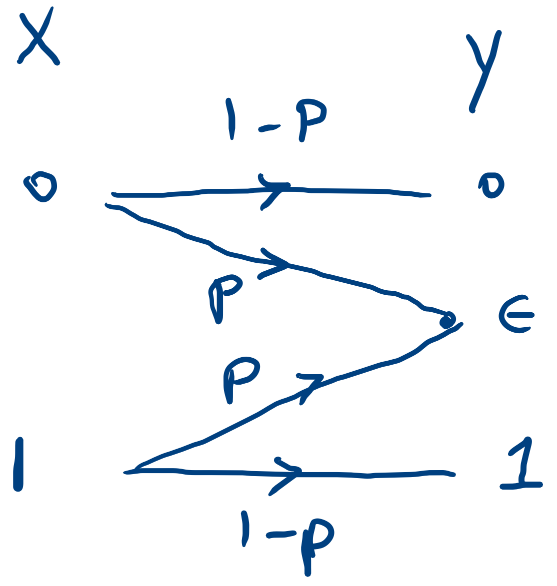
$P(X=2) = 0.19$

$\rightarrow P(X=0, Y=1) = 0.13$

$P(X=2|Y=1) = \dfrac{P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{0.12}{0.39}$

$P(Y=0|X=3) =$

مثال: کانال مخابراتی



$X \backslash Y$	0	1	ϵ	P_X
0	$\frac{1}{2}(1-p)$	$\frac{1}{2}\times 0$	$\frac{1}{2}p$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}\times 0$	$\frac{1}{2}(1-p)$	$\frac{1}{2}p$	$\frac{1}{2}$
P_Y	$\frac{1}{2}(1-p)$	$\frac{1}{2}(1-p)$	p	

0110 0 10..

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$$P(X,Y) = P(X)\,P(Y|X)$$

Joint CDF

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$F_{XY}(+\infty, +\infty) = P(X \leq +\infty, Y \leq +\infty) = 1$$

$$F_{XY}(-\infty, y) = P(X \leq -\infty, Y \leq y) = 0$$

$$F_{XY}(x, -\infty) = 0$$

$$F_{XY}(x, +\infty) = P(X \leq x, Y \leq +\infty) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

$$F_{XY}(+\infty, y) = F_Y(y)$$

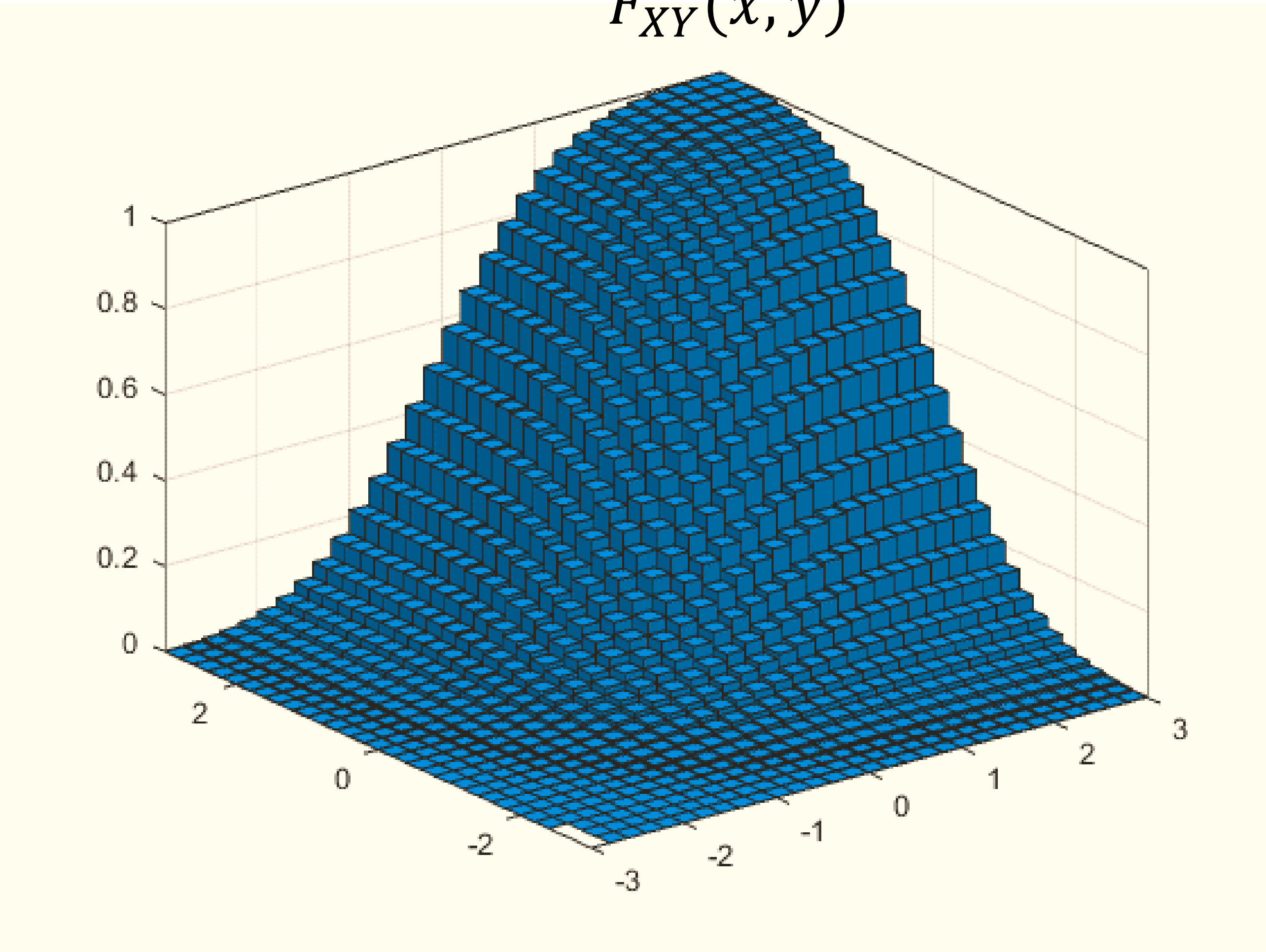
$$P(X \le x,\ y_1 < Y \le y_2) = F_{xy}(x, y_2) - F_{xy}(x, y_1)$$

$$P(x_1 < X \le x_2,\ Y \le y) = F_{xy}(x_2, y) - F_{xy}(x_1, y)$$

$$P(x_1 < X \le x_2,\ y_1 \le Y \le y_2)$$

تابع CDF مشترک متغیرهای تصادفی گسسته

$F_{XY}(x, y)$

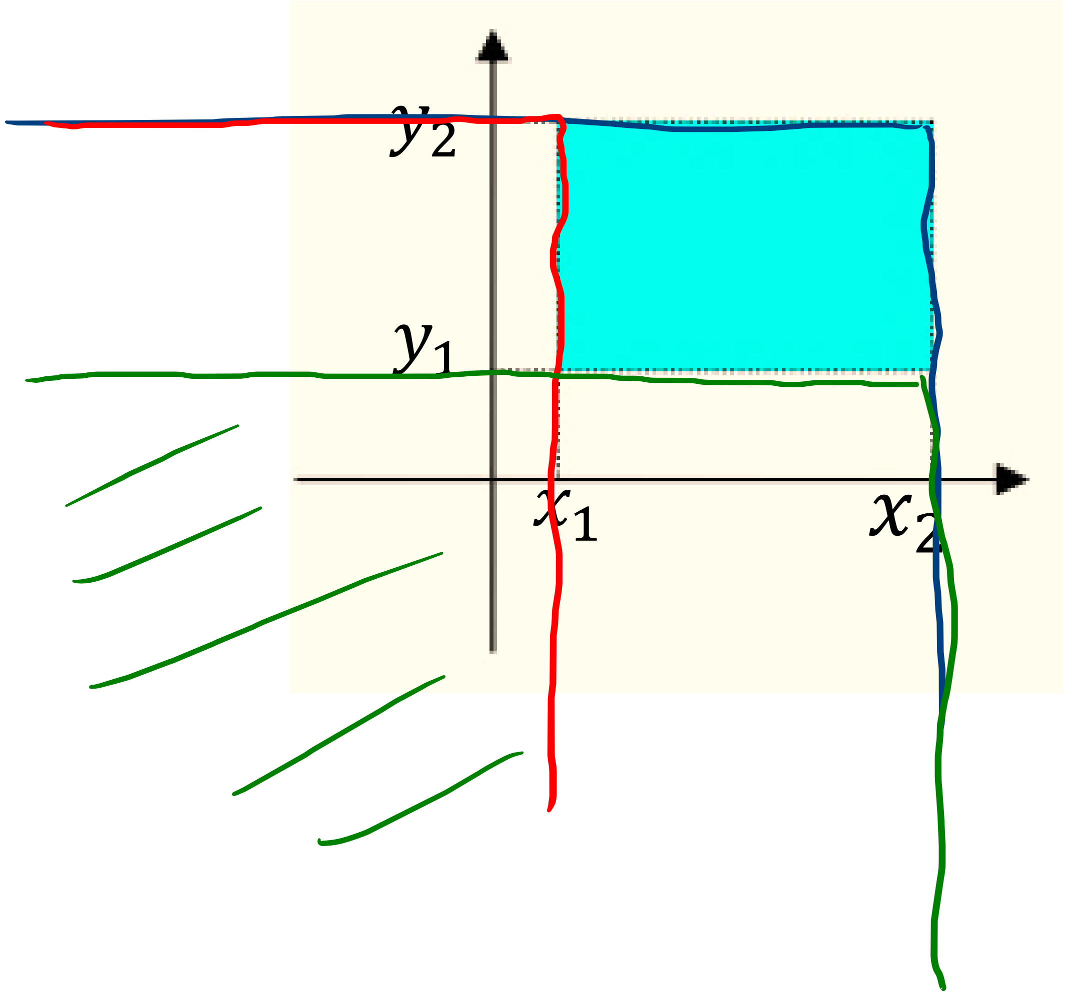


خواص joint CDF

$$P(x_1 < X \le x_2 ,\ y_1 < Y \le y_2) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2)$$

$$- F_{XY}(x_2, y_1)$$

$$+ F_{XY}(x_1, y_1)$$



احتمال نقطه و خط در حالت پیوسته

$$\mathrm{P}\{X = x, Y = y\} = 0$$

$$\mathrm{P}\{\underbrace{X = x,}\, Y \leq y\} = 0$$

تابع چگالی احتمال مشترک joint pdf

$$f_{XY}(x,y) \to f_X(x), \quad f_{XY}(x,y) \to f_Y(y), \quad f_{XY}(x,y) \to f_{X|Y}(x|y), \quad f_{XY}(x,y) \to f_{Y|X}(y|x)$$

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = \frac{d^2 F_{XY}(x,y)}{dx\,dy}}$$

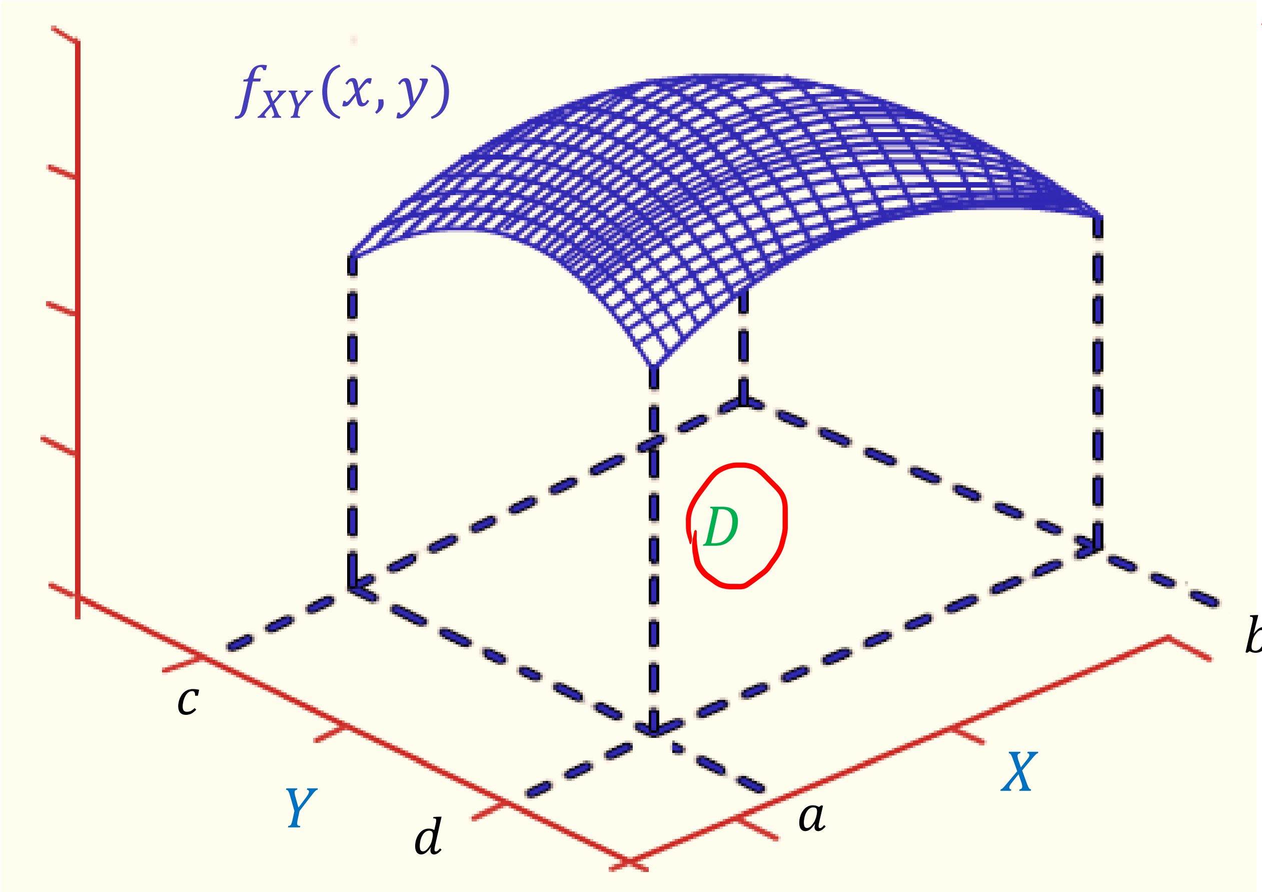
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

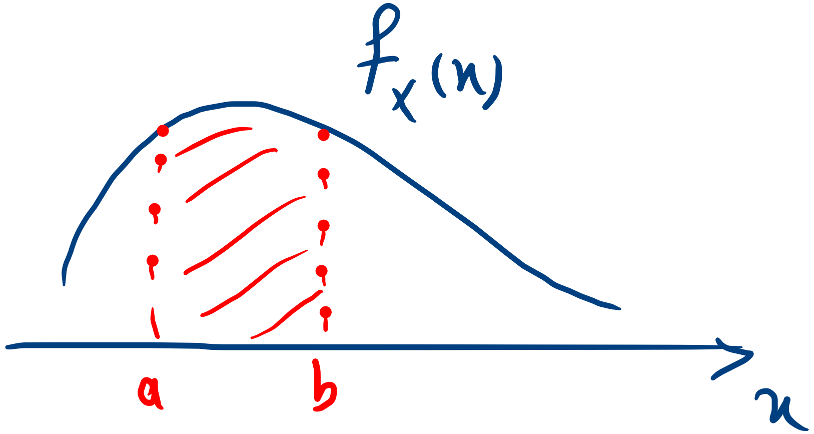
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dF_{XY}(x,y)}{dy}\right)$$

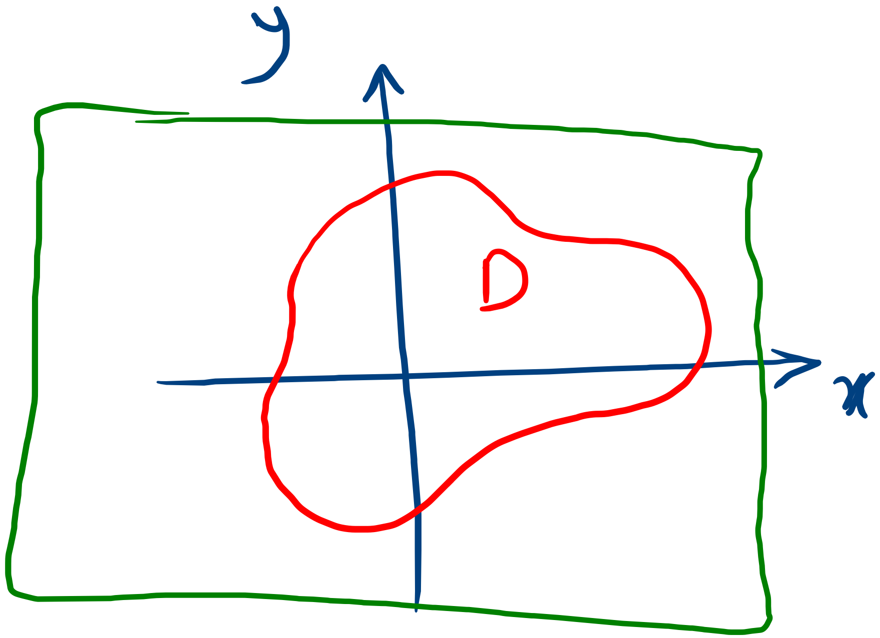
محاسبه احتمال با استفاده از joint pdf

$$P\{a \le X \le b, c \le Y \le d\} = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$





$$P\big((X,Y) \in D\big) = \iint_D f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$



$$\cancel{P\big((X,Y) \in D\big) = \frac{|D|}{|\Omega|}}$$

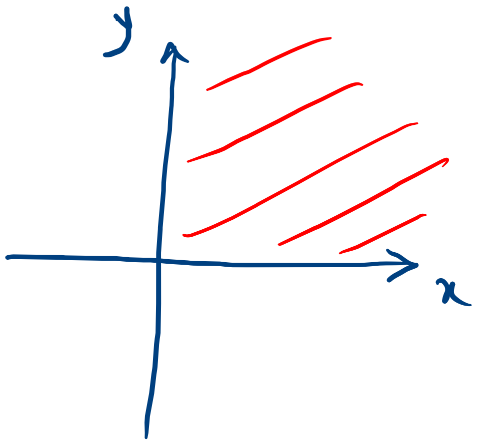
محاسبه CDF از pdf

$$\mathrm{F}_{XY}(x,y) = P\{X \leq x\ , Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای

مثال ۱

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ce^{-x}e^{-2y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



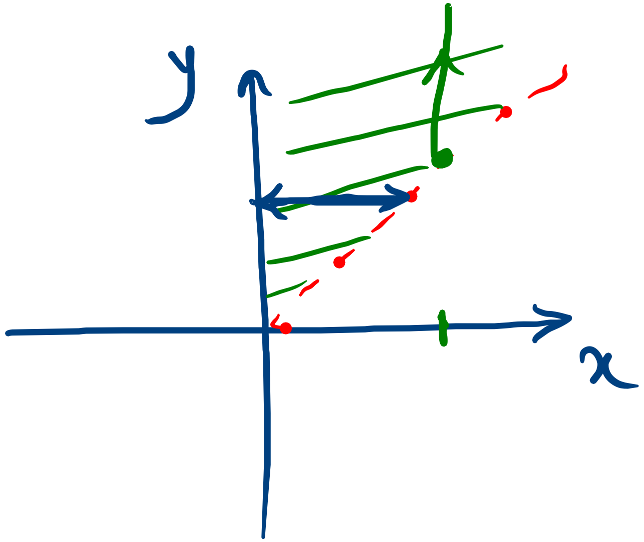
$$c = ?$$

$$P\{X < Y\} = ?$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} ce^{-x}e^{-2y}\,dy\,dx = c\left(-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}\right)\left(\frac{-1}{2}e^{-2y}\Big|_0^{+\infty}\right)$$

$$= c\,(1)\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \implies c = 2$$

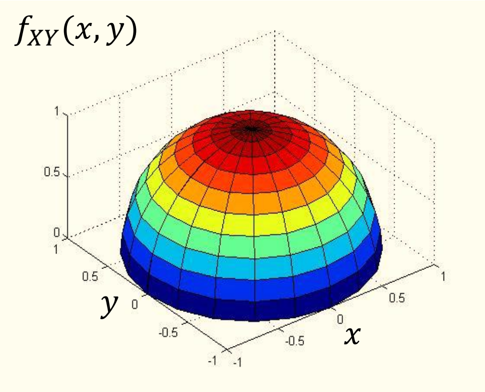


$P(X<Y)$

$$\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{+\infty}\int_{x}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

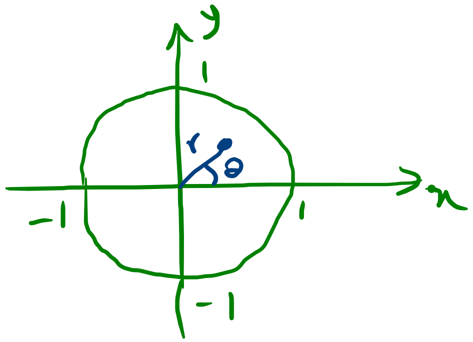
y x x y

مثال



برای تابع چگالی احتمال زیر، مقدار c، تابع $f_X(x)$، و مقدار $P\{X^2+Y^2<\frac{1}{2}\}$ را محاسبه کنید.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c(1-x^2-y^2) & 0<x^2+y^2<1 \\ 0 & x^2+y^2>1 \end{cases}$$



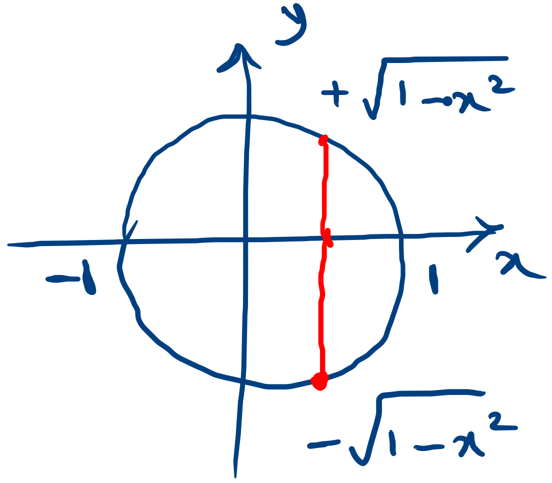
$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\} \rightarrow r^2=x^2+y^2$$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

$$\iint_{\text{دایره واحد}} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 c(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta = c(2\pi)\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{c\pi}{2}=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{2}{\pi}}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dy$$



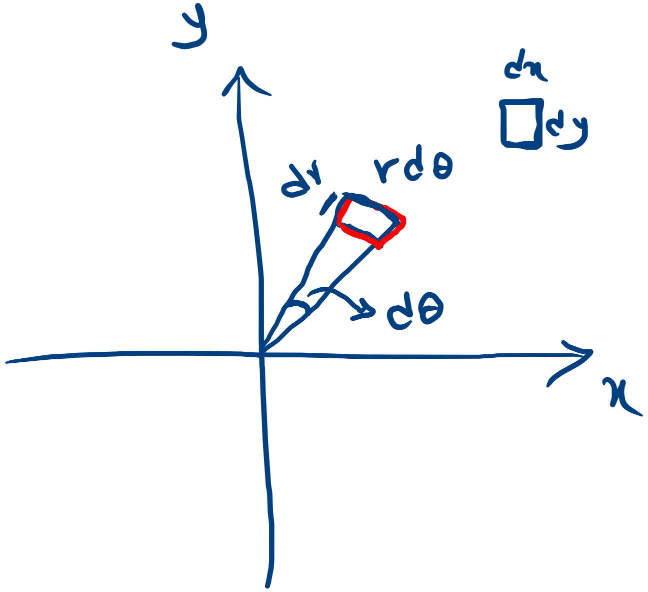
$$= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\left(1-x^2-y^2\right) dy$$

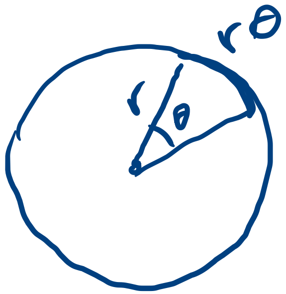
$$= \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-x^2-y^2\right) dy = \frac{4}{\pi}\left((1-x^2)\,y - \frac{1}{3}y^3 \Big|_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(1-x^2\right)^{3/2} \times \frac{2}{3}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{3\pi}\left(1-x^2\right)^{3/2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$P\left(x^2+y^2<\frac{1}{2}\right)=\iint_{\text{دایره به شعاع } \frac{1}{\sqrt{2}}} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{2}{\pi}(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$





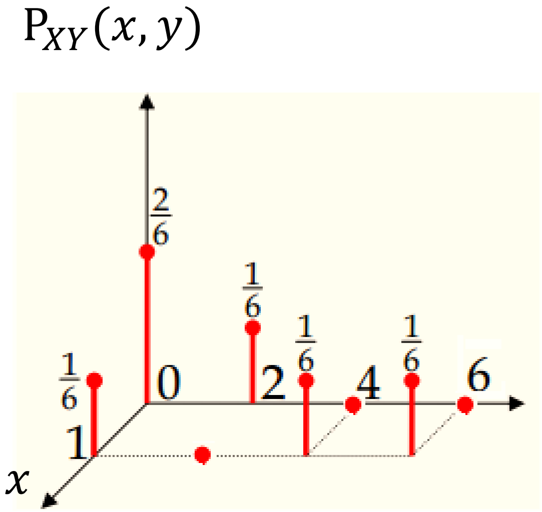
$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

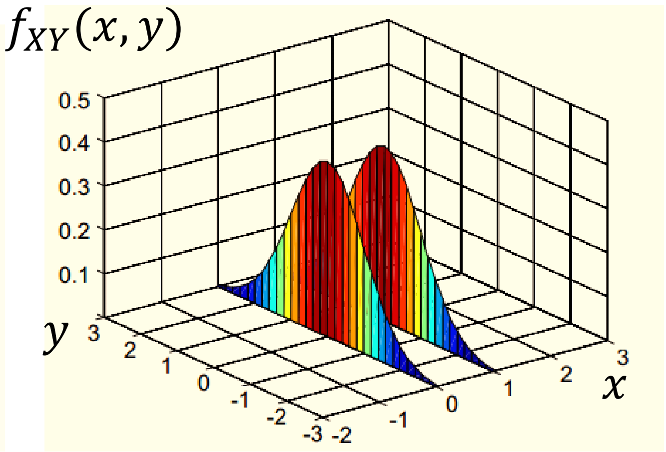
$$J=\begin{array}{c|cc} & r & \theta \\ \hline x & \cos\theta & -r\sin\theta \\ y & \sin\theta & r\cos\theta \end{array}$$

$$dx\,dy=|J|\,dr\,d\theta$$

انواع توزیع مشترک



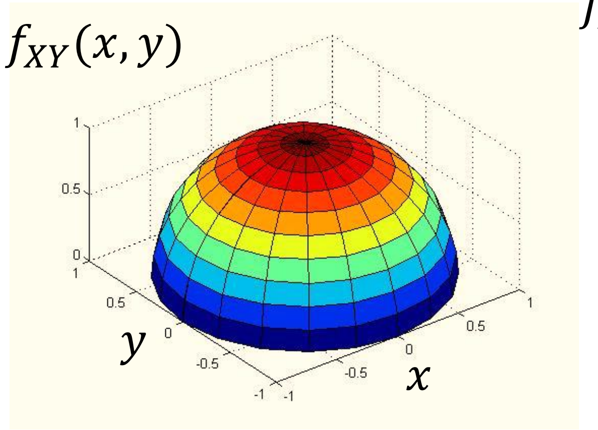
X و Y هر دو گسسته



X گسسته ولی Y پیوسته

$X = 0, 1$

$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$



X و Y هر دو پیوسته

توزیع مشترک برای n متغیر تصادفی

$X \quad Y \quad Z$

$$P_{XYZ}(x,y,z) = P(X=x,\ Y=y,\ Z=z)$$

$$F_{XYZ}(x,y,z) = P(X\leq x,\ Y\leq y,\ Z\leq z)$$

$$F_{XYZ}(+\infty,y,z) = F_{YZ}(y,z)$$

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \frac{\partial^3 F_{XYZ}(x,y,z)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$P_{\vec{X}}(\vec{x}) = P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{d^n F_{\vec{X}}(\vec{x})}{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}$$

توزیع چند جمله‌ای (Multinomial)

نتیجه آزمایش

$$
\text{نتیجه آزمایش} \;\begin{cases} \to 1 & p_1 \\ \to 2 & p_2 \\ \;\vdots & \\ \to m & p_m \end{cases}
$$

$$
P_{X_1X_2\cdots X_m}(X_1=c_1,\ X_2=c_2,\ \ldots,\ X_m=c_m) = \binom{n}{c_1, c_2, \ldots, c_m} p_1^{c_1}\, p_2^{c_2} \cdots p_m^{c_m}
$$

$$
\binom{n}{c_1}\binom{n-c_1}{c_2}\cdots\binom{n-c_1-c_2-\cdots}{c_m}
$$

توزیع چندجمله‌ای (multinomial)

فرض کنید n آزمایش مستقل داشته باشیم که نتیجه هر آزمایش یکی از m خروجی ممکن باشد و احتمال خروجی‌ها p_1، p_2، ...، p_m باشد که $\sum_i p_i = 1$.

- متغیر تصادفی X_i را برابر با تعداد آزمایش‌های با خروجی i تعریف می‌کنیم. داریم:

$$P(X_1 = c_1, X_2 = c_2, \dots, X_m = c_m) = \binom{n}{c_1, c_2, \dots, c_m} p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_m^{c_m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = n \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

مثال

تاسی را ۷ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این که یک بار ۱، یک بار ۲، دو بار ۴، و سه بار ۶ بیاید چقدر است؟

$X_i =$ تعداد دفعاتی که i می‌آید

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 2, X_5 = 0, X_6 = 3) =$$

$$\frac{7!}{1!\,1!\,0!\,2!\,0!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{420}{6^7}$$

Joint CDF

Joint pdf

Marginal pdf