آمار و احتمال مهندسی

مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

(Ross 6.3 , 7.7)

مجموع دو متغیر تصادفی دوجمله‌ای

- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع دوجمله‌ای باشند:

$X \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$, $\quad Y \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$

- حاصل‌جمع این دو متغیر هم دارای توزیع دوجمله‌ای خواهد بود:

$X + Y \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$

- شهود:
  - X از n_1 آزمایش و Y از n_2 آزمایش تشکیل شده است.
    - هر آزمایش دارای احتمال موفقیت p است.
  - متغیر تصادفی Z را برابر تعداد موفقیت‌ها در $n_1 + n_2$ آزمایش در نظر می‌گیریم.
  - واضح است که Z دارای توزیع دوجمله‌ای $\mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$ است و از سوی دیگر:

$Z = X + Y$

مجموع چند متغیر تصادفی دوجمله‌ای

- در حالت کلی اگر X_iها متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای مستقل با توزیع $\text{Bin}(n_i, p)$ باشند ($1 \le i \le N$)، آنگاه با استدلال مشابهی داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) \sim \text{Bin}\left(\sum_{i=1}^{N} n_i \,, p\right)$$

- حالت خاص: اگر X_iها متغیر تصادفی برنولی با احتمال موفقیت p باشند: $X_i \sim \text{Ber}(p)$
  - توزیع برنولی حالت خاص توزیع دوجمله‌ای برای $n = 1$ است.
  - حاصل‌جمع X_iها دارای توزیع دوجمله‌ای $\text{Bin}(N, p)$ خواهد بود.

مجموع دو متغیر تصادفی پواسون

- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع پواسون باشند:

$X \sim \text{Poi}(\lambda_1), Y \sim \text{Poi}(\lambda_2)$

- حاصل‌جمع X و Y نیز دارای توزیع پواسون خواهد بود:

$X + Y \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$

اثبات:

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k\,, Y=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) \quad \leftarrow \text{استقلال } X \text{ و } Y \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \end{aligned}$$

مجموع دو متغیر تصادفی پواسون

$$P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}$$ ← بسط دوجمله‌ای

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\quad\sim \mathrm{Poi}(\lambda_1+\lambda_2)$$

جمع دو متغیر تصادفی مستقل پیوسته

- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند. تابع توزیع انباشته (CDF) متغیر تصادفی $X+Y$ برابر است با:

$$F_{X+Y}(a)=P(X+Y\le a)$$

$$=\iint_{x+y\le a} f_{XY}(x,y)dx\,dy=\iint_{x+y\le a} f_X(x)f_Y(y)dx\,dy$$ ← استقلال X و Y

$$=\int_{y=-\infty}^{\infty}\left(\int_{x=-\infty}^{a-y} f_X(x)dx\right)f_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F_X(a-y)f_Y(y)dy$$

PDF of Y

CDF of X

جمع دو متغیر تصادفی مستقل پیوسته

$$F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) dy$$

- با مشتق‌گیری نسبت به a داریم:

$$\frac{\partial}{\partial a} F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial a} F_X(a-y)\right) f_Y(y) dy$$

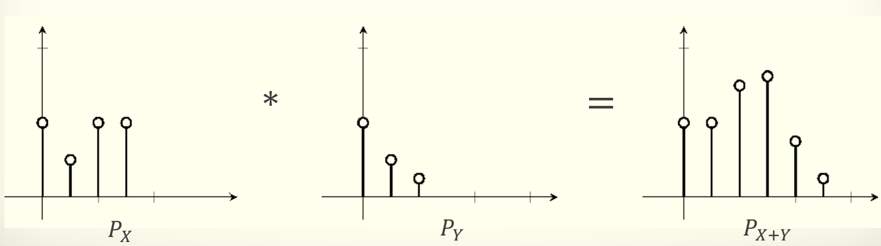
$$\Rightarrow f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y) dy$$

- انتگرال فوق را کانولوشن (convolution) یا همگشت دو تابع f_X و f_Y می‌نامیم.

جمع دو متغیر تصادفی مستقل گسسته

- در حالت گسسته انتگرال کانولوشن تبدیل به جمع کانولوشن می‌شود:

$$P_{X+Y}(a) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} P_X(a-y) P_Y(y)$$

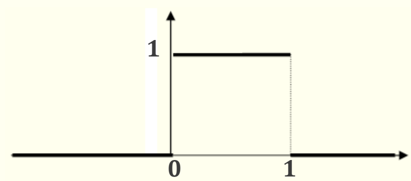


جمع دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت

- X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع $U(0,1)$ هستند:

$$f_X(x) = 1 : 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = 1 : 0 < y < 1$$



$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y) dy = \int_0^1 f_X(a-y)\ dy$$

$$0 < a - y < 1 \ \rightarrow \ y < a \ , \quad a - 1 < y$$

جمع دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت

- از طرفی $0 < y < 1$ و از طرف دیگر $a - 1 < y < a$ ، بنابراین برای داشتن محدوده صحیح y، باید محدوده a را به دو قسمت تقسیم کنیم:
- حالت اول:

$$0 < a < 1 \ \rightarrow \ 0 < y < a$$

$$f_{X+Y}(a) = \int_0^a f_X(a-y)\ dy = \int_0^a 1\, dy = y\Big|_0^a = a$$

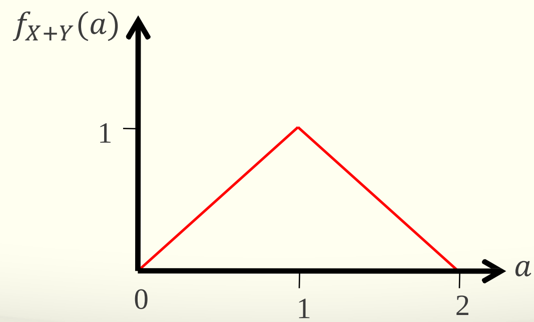
- حالت دوم:

$$1 < a < 2 \ \rightarrow \ a - 1 < y < 1$$

$$f_{X+Y}(a) = \int_{a-1}^1 f_X(a-y)\ dy = \int_{a-1}^1 1\, dy = y\Big|_{a-1}^1 = 2 - a$$

جمع دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} a & 0 < a < 1 \\ 2-a & 1 < a < 2 \end{cases}$$



جمع دو متغیر تصادفی مستقل نمایی

- X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع $\mathrm{Exp}(\lambda)$ هستند:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ : x > 0 \ \ , f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \ : y > 0$$

- برای متغیر تصادفی $Z = X + Y$ داریم:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

$$f_X: \ z - y > 0 \ \rightarrow y < z \quad , \quad f_Y: \ y > 0$$

$$\Rightarrow \ f_Z(z) = \int_0^z f_X(z-y) f_Y(y) dy = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \lambda e^{-\lambda y} \, dy$$

$$= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dy = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

- دیدیم که برای متغیرهای تصادفی X_i (چه مستقل و چه وابسته) داریم:

$$E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]$$

- برای متغیرهای تصادفی X_i در صورتی که مستقل از هم باشند، داریم:

$$Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$

- در حالت کلی اگر X_iها مستقل باشند:

$$Var(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) = a_1^2Var(X_1) + a_2^2Var(X_2) + \cdots + a_n^2Var(X_n)$$

- و در همه حالات (چه X_iها مستقل باشند و چه وابسته):

$$E[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n] = a_1E[X_1] + a_2E[X_2] + \cdots + a_nE[X_n]$$

مجموع دو متغیر تصادفی مستقل نرمال

- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل نرمال باشند:

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$
$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

- در این صورت حاصل‌جمع $X + Y$ نیز دارای توزیع نرمال خواهد بود:

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2\,, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- در حالت کلی، اگر n متغیر تصادفی مستقل نرمال $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ داشته باشیم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\,, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

مثال

- سازمان بهداشت جهانی خود را برای مقابله با یک ویروس جدید آماده می‌کند. دو گروه در معرض ابتلا به این ویروس قرار گرفته‌اند.
- گروه اول از ۵۰ نفر تشکیل شده است، و هر فرد به طور مستقل و با احتمال $p = 0.1$ مبتلا به این ویروس شده است.
- گروه دوم از ۱۰۰ نفر تشکیل شده است، و هر فرد به طور مستقل و با احتمال $p = 0.4$ مبتلا به این ویروس شده است.
- احتمال این که در مجموع بیش از ۴۰ نفر مبتلا شده باشند چقدر است؟

$A =$ تعداد افراد مبتلا در گروه اول $\rightarrow A \sim \text{Bin}(50{,}0.1)$

$B =$ تعداد افراد مبتلا در گروه دوم $\rightarrow B \sim \text{Bin}(100{,}0.4)$

$$P(A+B>40) = ?$$

ادامه مثال

- دیدیم که در صورتی که n به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌توان توزیع دوجمله‌ای را با توزیع نرمال تقریب زد:

$$Bin(n,p) \cong N(np\,, np(1-p))$$

$$\left.\begin{array}{l} A\sim \text{Bin}(50{,}0.1) \;\cong\; X\sim N(5{,}4.5) \\ B\sim \text{Bin}(100{,}0.4) \;\cong\; Y\sim N(40{,}24) \end{array}\right\} \Rightarrow (X+Y) = W \sim N(40+5\,, 24+4.5)$$

$$P(A+B>40) \approx P(X+Y \geq 40.5) = P(W \geq 40.5)$$ تصحیح پیوستگی

$$P(W\geq 40.5) = P\left(\frac{W-45}{\sqrt{28.5}} \geq \frac{40.5-45}{\sqrt{28.5}}\right) = P(Z \geq -0.84)$$

$$= 1 - \Phi(-0.84) = 0.7995$$

$Z \sim N(0{,}1)$

گشتاورهای یک متغیر تصادفی

- گشتاور (moment) مرتبه nام متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_n = \mathrm{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\mathrm{d}x$$

- گشتاور مرکزی مرتبه nام متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_n = \mathrm{E}\big((X-\mu)^n\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n f_X(x)\mathrm{d}x$$

- روشن است که:

$$\mu = m_1 \ , \qquad \sigma^2 = \mu_2 \ , \qquad \mu_1 = 0 \ , \qquad \mu_0 = m_0 = 1$$

تابع مولد گشتاور

- در کاربردهای مختلفی از جمله محاسبه گشتاورهای یک متغیر تصادفی، تابع مولد گشتاور (یا تابع مشخصه) کمک می‌کند.
- تابع مولد گشتاور (Moment Generating Function) متغیر تصادفی X با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_X(s) = \mathrm{E}\big(e^{sX}\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)dx$$

- تابع مولد گشتاور، همان تبدیل لاپلاس تابع چگالی است (با تبدیل s به $-s$)
- در حالت گسسته، تابع مولد گشتاور به مجموع زیر تبدیل می‌شود:

$$\phi_X(s) = \mathrm{E}\big(e^{sX}\big) = \sum_i e^{sx_i} P_X(x_i)$$

خواص تابع مولد گشتاور

1) قضیه گشتاور: $m_n = E(X^n) = \Phi^{(n)}(0)$

یعنی مشتق nام تابع مولد در نقطه صفر، گشتاور nام را می‌دهد.

اثبات:

$$\phi_X(s) = \mathrm{E}\left(e^{sX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^n \phi(s)}{\mathrm{d}s^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{sx} f_X(x) \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}^n \phi(s)}{\mathrm{d}s^n}\right|_{s=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) \mathrm{d}x = m_n$$

خواص تابع مولد گشتاور

۲) اگر $Y = aX + b$ باشد، داریم:

$$\phi_Y(s) = e^{bs} \phi_X(as)$$

اثبات:

$$\phi_Y(s) = \mathrm{E}\left(e^{(aX+b)s}\right) \underset{\text{خطی بودن E}}{\downarrow}= e^{bs} \mathrm{E}\left(e^{asX}\right) = e^{bs} \phi_X(as)$$

۳) اگر $Y = g(X)$، بدون محاسبه f_Y، می‌توان $\phi_Y(s)$ را محاسبه کرد:

$$\phi_Y(s) = \mathrm{E}\left(e^{sY}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sy} f_Y(y) \mathrm{d}y \underset{\text{قضیه اساسی امید ریاضی}}{\downarrow}= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sg(x)} f_X(x) dx$$

مثال: توزیع نمایی

- تابع مولد گشتاور توزیع نمایی را به دست آورید.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{u}(x)$$

$$\phi(s) = \int_0^{+\infty} e^{sx}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - s)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - s}\ :\ \ s < \lambda$$

- میانگین و واریانس توزیع نمایی به کمک تابع مولد گشتاور:

$$\phi'(s) = \frac{\lambda}{(\lambda - s)^2}\ \Rightarrow\ E[X] = \phi'(0) = \frac{\lambda}{(\lambda)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\phi''(s) = \frac{2\lambda}{(\lambda - s)^3}\ \Rightarrow\ E[X^2] = \phi''(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda)^3} = \frac{2}{\lambda^2}\ \Rightarrow\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال: توزیع دوجمله‌ای

$$\mathrm{P}_X(k) = \mathrm{P}\{X = k\} = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}\ :\ k = 0,1,\dots,n$$

$$\phi(s) = \sum_i e^{sx_i}P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} e^{sk}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^s)^k q^{n-k}$$

$$\phi(s) = (pe^s + q)^n$$

$$\mu = \left.\frac{\mathrm{d}\phi(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} = n(pe^s + q)^{n-1}pe^s\Big|_{s=0} = n(p+q)^{(n-1)}p = np$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\phi(s)}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0} = npq + n^2p^2\ \Rightarrow\ \sigma^2 = npq$$

مثال: توزیع پواسون

$$P_X(k) = P\{X = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}: \quad k = 0,1,2,\dots$$

$$\phi_X(s) = \sum_i e^{sx_i}P(x_i) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\phi_X(s) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^s)^k}{k!} = e^{-\lambda}\times e^{\lambda e^s}$$

$$\phi_X(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$$

مثال: توزیع پواسون

$$\phi_X(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$$

$$\phi_X'(s) = \lambda e^s . e^{\lambda(e^s-1)}$$

$$E[X] = \phi_X'(0) = \lambda e^0 . e^{\lambda(e^0-1)} = \lambda \times 1 \times e^{\lambda(0)} = \lambda$$

$$\phi_X''(s) = \lambda\left(e^s . e^{\lambda(e^s-1)} + \lambda e^{2s} . e^{\lambda(e^s-1)}\right)$$

$$E[X^2] = \phi_X''(0) = \lambda\left(e^0 . e^{\lambda(e^0-1)} + \lambda e^0 . e^{\lambda(e^0-1)}\right) = \lambda(1+\lambda)$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda(1+\lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

مثال

○ میزان فروش ماهیانه بازی *FIFA 16* از شرکت *EA* یک متغیر تصادفی با تابع مولد گشتاور $\phi_X(s) = \frac{0.16}{0.16-s}$ است. در صورتی که سود خالص شرکت از این بازی ۸۰٪ فروش ماهیانه آن باشد، تابع مولد گشتاور سود را بیابید.

متغیر تصادفی Y را برابر سود خالص حاصل از این بازی و X را فروش ماهیانه می‌گیریم.

$Y = 0.8X$

دیدیم که اگر $Y = aX + b$ باشد، داریم:

$\phi_Y(s) = e^{bs}\phi_X(as)$

$$Y = 0.8X \quad \rightarrow \quad \phi_Y(s) = \phi_X(0.8s) = \frac{0.16}{0.16-0.8s} = \frac{0.2}{0.2-s}$$

مثال

○ متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور زیر است:

$$\phi_X(s) = \frac{1}{6}e^{-2s} + \frac{1}{3}e^{-s} + \frac{1}{4}e^{s} + \frac{1}{4}e^{2s}$$

احتمال $P(|X| \le 1)$ چقدر است؟

از ظاهر تابع مولد گشتاور مشخص است که متعلق به یک توزیع گسسته است:

$$\phi_X(s) = \mathrm{E}\left(e^{sX}\right) = \sum_i e^{sx_i}P_X(x_i) = \frac{1}{6}e^{-2s} + \frac{1}{3}e^{-s} + \frac{1}{4}e^{s} + \frac{1}{4}e^{2s}$$

$$P(X=-2) = \frac{1}{6}, P(X=-1) = \frac{1}{3}, P(X=1) = \frac{1}{4}, P(X=2) = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow P(|X| \le 1) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

تابع MGF حاصل‌جمع دو متغیر تصادفی مستقل

- اگر دو متغیر تصادفی X و Y مستقل باشند و $Z = X + Y$ باشد، داریم:

$$\phi_Z(s) = \phi_X(s)\phi_Y(s)$$

اثبات:

- اگر X و Y مستقل از هم باشند، تابع چگالی احتمال $X + Y$ برابر کانولوشن توابع چگالی احتمال X و Y است.
- تابع مولد گشتاور در واقع تبدیل لاپلاس تابع چگالی احتمال با تبدیل s به $-s$ است.
- تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع برابر حاصلضرب تبدیل لاپلاس آن دو تابع است.

مثال ۱

- برای توزیع دوجمله‌ای $\text{Bin}(n,p)$ دیدیم که تابع مولد گشتاور به شکل زیر است:

$$\phi(s) = (pe^s + q)^n$$

- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع دوجمله‌ای باشند:

$$X \sim \text{Bin}(n_1, p) \quad , \qquad Y \sim \text{Bin}(n_2, p)$$

- اگر $Z = X + Y$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\phi_Z(s) &= \phi_X(s)\phi_Y(s) \\ &= (pe^s + q)^{n_1}(pe^s + q)^{n_2} \\ &= (pe^s + q)^{n_1+n_2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$$

مثال ۲

- برای توزیع پواسون $\mathrm{Poi}(\lambda)$ دیدیم که تابع مولد گشتاور به شکل زیر است:

$$\phi(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$$

- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع پواسون باشند:

$$X\sim\mathrm{Poi}(\lambda_1)\ ,\qquad Y\sim\mathrm{Poi}(\lambda_2)$$

- اگر $Z = X + Y$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\phi_Z(s) &= \phi_X(s)\phi_Y(s)\\ &= e^{\lambda_1(e^s-1)}e^{\lambda_2(e^s-1)}\\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^s-1)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z\sim\mathrm{Poi}(\lambda_1+\lambda_2)$$

حاصل‌جمع متغیرهای تصادفی i.i.d

- فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی i.i.d با توزیع یکسان X باشند.
- اگر $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$، آنگاه:

$$\begin{aligned}\phi_Y(s) &= \phi_{X_1}(s)\phi_{X_2}(s)\dots\phi_{X_n}(s)\\ &= \phi_X(s)\phi_X(s)\dots\phi_X(s)\\ &= [\phi_X(s)]^n\end{aligned}$$

- مثال: دیدیم که متغیر دوجمله‌ای $Y\sim Bin(n,p)$ را می‌توان به صورت حاصل‌جمع n متغیر برنولی مستقل X_i با توزیع $X\sim Ber(p)$ نوشت:

$$\phi_X(s) = p\times e^{s\times 1} + (1-p)\times e^{s\times 0} = pe^s + q$$

$$\Rightarrow \phi_Y(s) = (pe^s+q)^n$$

مثال

- می‌خواهیم تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $Y \sim \mathrm{NegBin}(r, p)$ را به دست آوریم.
- دیدیم که متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی را می‌توان به صورت مجموع r متغیر تصادفی مستقل هندسی $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ نوشت: $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$.
- برای متغیر تصادفی هندسی $X \sim Geo(p)$ داریم:

$$\phi_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p e^{ks} = p e^s \sum_{m=0}^{\infty} \left((1-p)e^s\right)^m = \frac{p e^s}{1-(1-p)e^s}$$

- بنابراین با توجه به قضیه قبل:

$$\phi_Y(s) = \left(\frac{p e^s}{1-(1-p)e^s}\right)^r$$