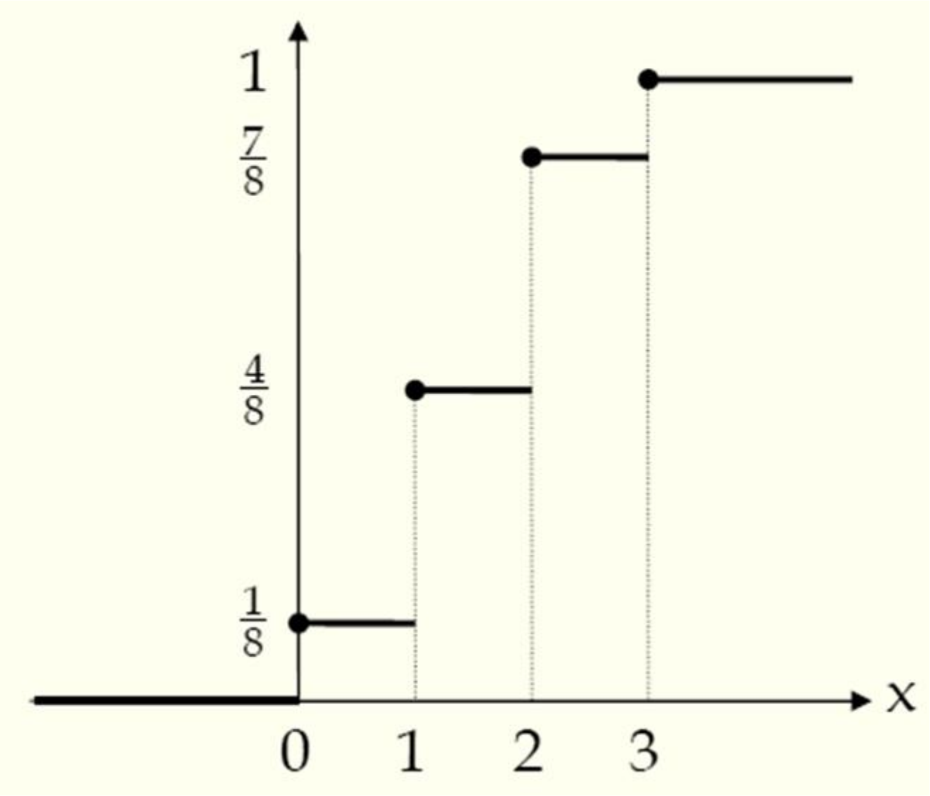
# Continuous Random Variables and Distributions

# Continuous Random Variables and Distributions

# متغیر تصادفی گسسته

- **تعریف ۱**: تابع توزیع تجمعی پلکانی باشد.
- **تعریف ۲**: مقادیر ممکن برای متغیر تصادفی شمارا باشد.

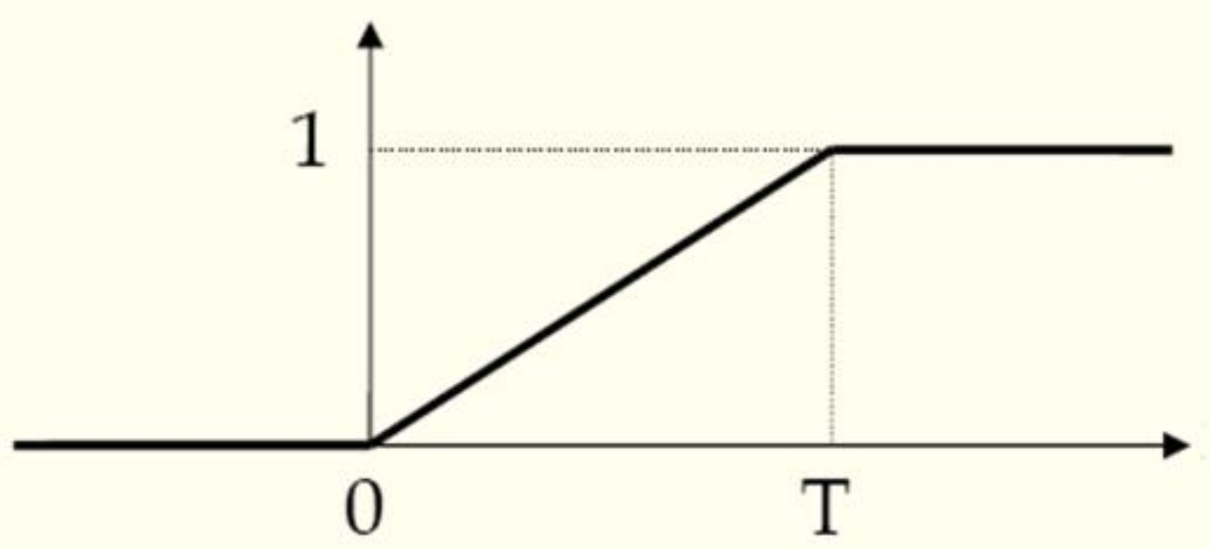
ـعادل



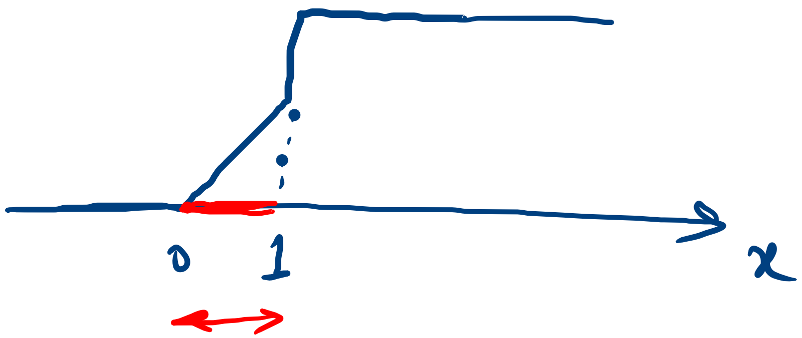
# متغیر تصادفی پیوسته (Continuous)

**تعریف ۱:** متغیر تصادفی $X$ را پیوسته گویند، اگر $F_X(x)$ برای هر $x$ پیوسته باشد.

**تعریف ۲:** متغیر تصادفی $X$ را پیوسته گویند، اگر مقادیر ممکنه آن ناشمارا باشد.




**مثال:** مدت زمان مکالمه




Mixed

مخلوط

# احتمال متغیر تصادفی پیوسته در یک نقطه

- با توجه به پیوستگی تابع توزیع تجمعی:

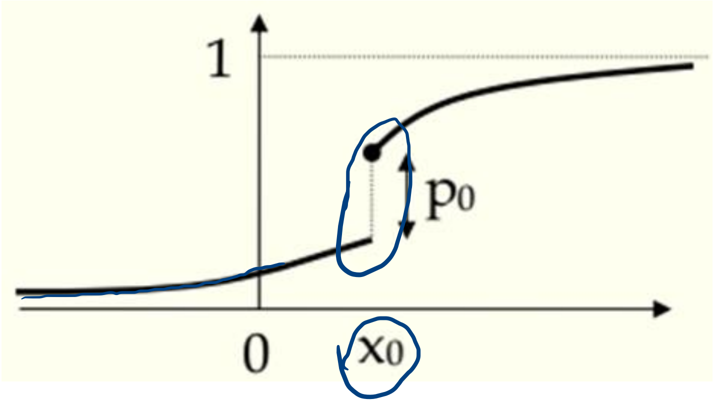
$$P\{X = a\} = F(a) - F(a^-) = 0$$

- محاسبه احتمال یک پیشامد مربوط به یک متغیر تصادفی پیوسته:

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

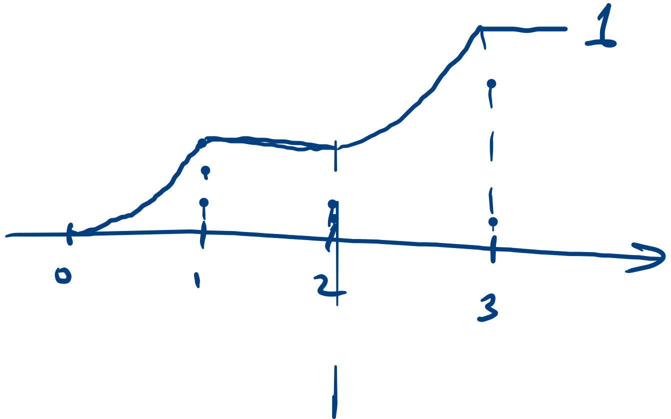
# متغیر تصادفی مخلوط

متغیر تصادفی $X$ را از نوع مخلوط (mixed) می‌گویند، اگر $F_X(x)$ دارای ناپیوستگی باشد، ولی به صورت پلکانی نباشد.




$$p(X=x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$$

$$x \in [0,1] \cup [2,3]$$

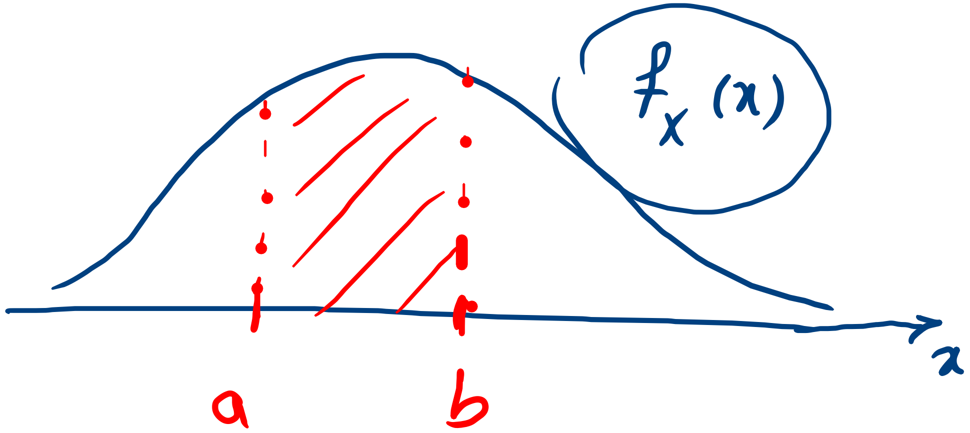


$$F_X(x) = P(\{X \le x\})$$

# تابع چگالی احتمال (Probability Density Function)

$A$

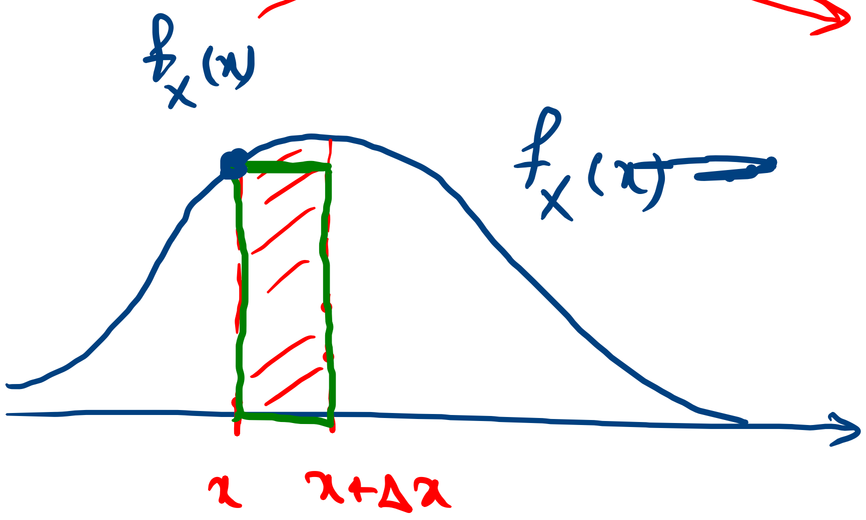
$$\boxed{\sum_{x_i \in A} P_X(x_i)}$$




$$P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(a \le X \le b) = \sum_{x_i = a}^{b} P_X(x_i)$$

$$\boxed{P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx}$$




Probability Density func.

PDF

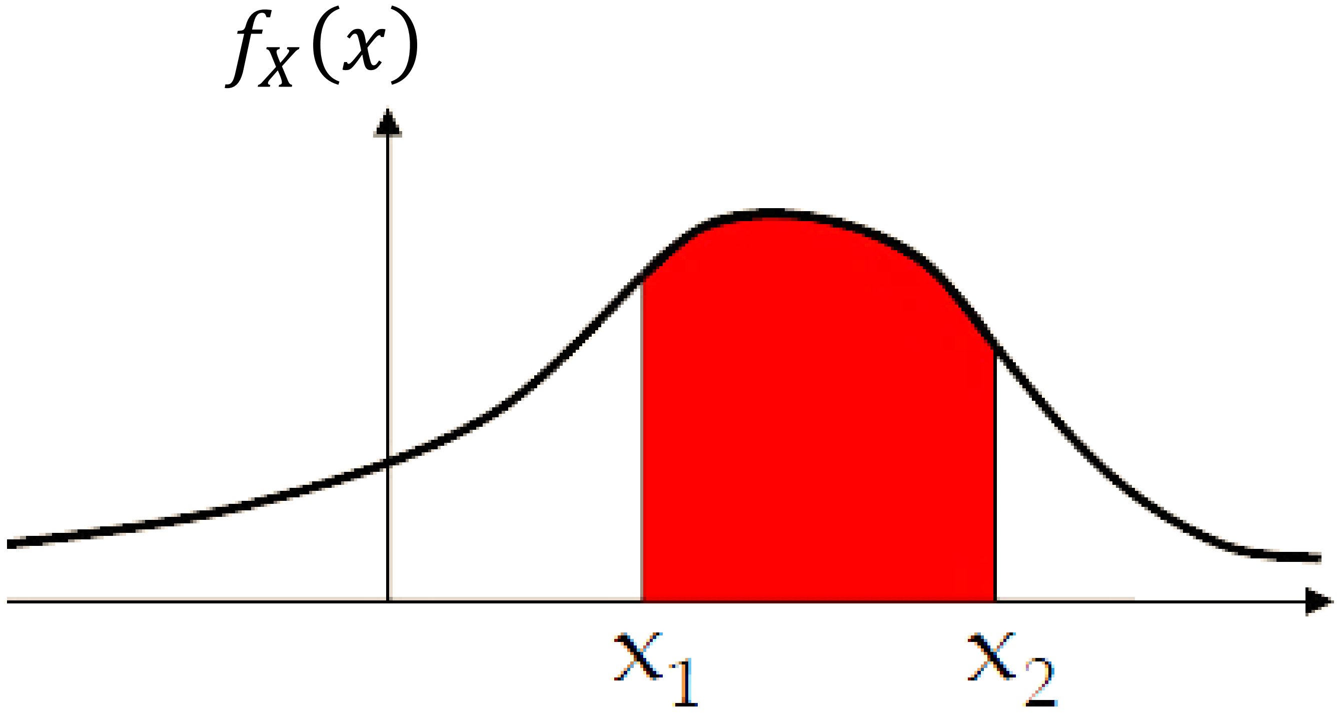
$$P(x \le X \le x+\Delta x) = F_X(x+\Delta x) - F_X(x)$$

$$\boxed{P(x \le X \le x+\Delta x)} \simeq \Delta x \, f_X(x) \Longrightarrow \boxed{f_X(x) \cong \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}}$$

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}^{P_X(x)}}{\Delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx} = F_X'(x)$$

# خواص تابع چگالی احتمال

1. $P\{x_1 \le X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\mathrm{d}x$



# خواص تابع چگالی احتمال

2. $f_X(x) \geq 0, \quad \forall x$

$\boxed{F_X(x) \rightarrow \text{صعودی}}$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$

## مثال ۱:

- ضریب ثابت $C$ چقدر است؟

$$f_X(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

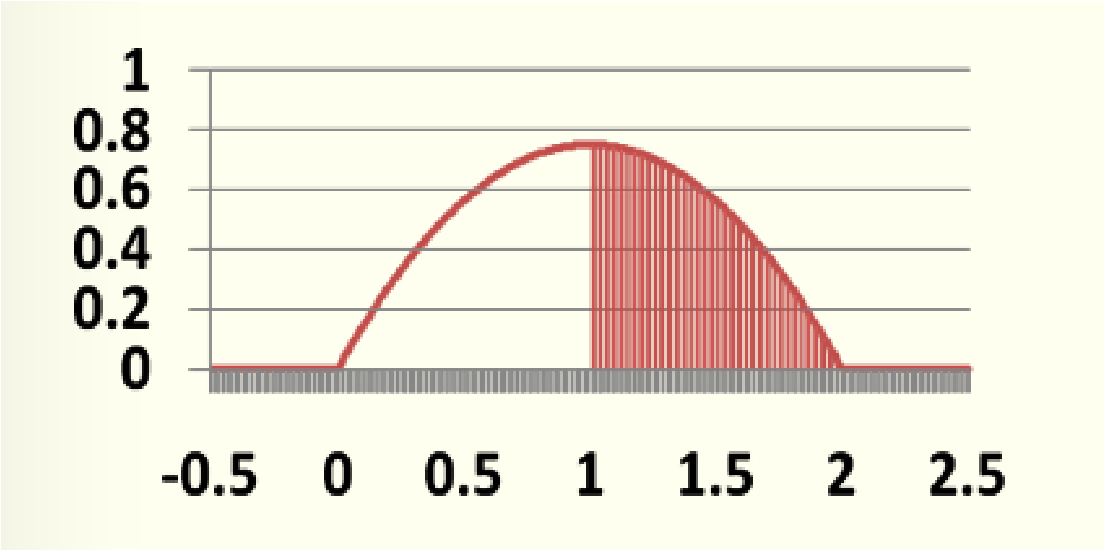
$C \geqslant 0$


$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^2 C(4x - 2x^2)\,dx = 1$$

$$= C\left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2\right) = 1$$

# ادامه مثال ۱

$$P(\{X > 1\}) = ?$$




$$P(\{X>1\}) = \int_{1}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{1}^{2} f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

# مثال ۲

- مقدار ثابت $C$ چقدر است؟

$C \geq 0$

$$f_X(x) = \frac{C}{x^2+1}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}\, dx = c\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^2\theta}(1+\tan^2\theta)\, d\theta$$

$$\boxed{x = \tan\theta}$$

$$dx = (1+\tan^2\theta)\, d\theta =$$

$$= c\,\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c\pi = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1/\pi}$$

# مثال ۳

لاپلاس

- ضریب ثابت $C$ را بدست آورید.

$$f_X(x) = Ce^{-|x|}$$

# مثال ۳

مدت زمان کارکرد یک سرور (بر حسب روز) قبل از خرابی، یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی زیر است:

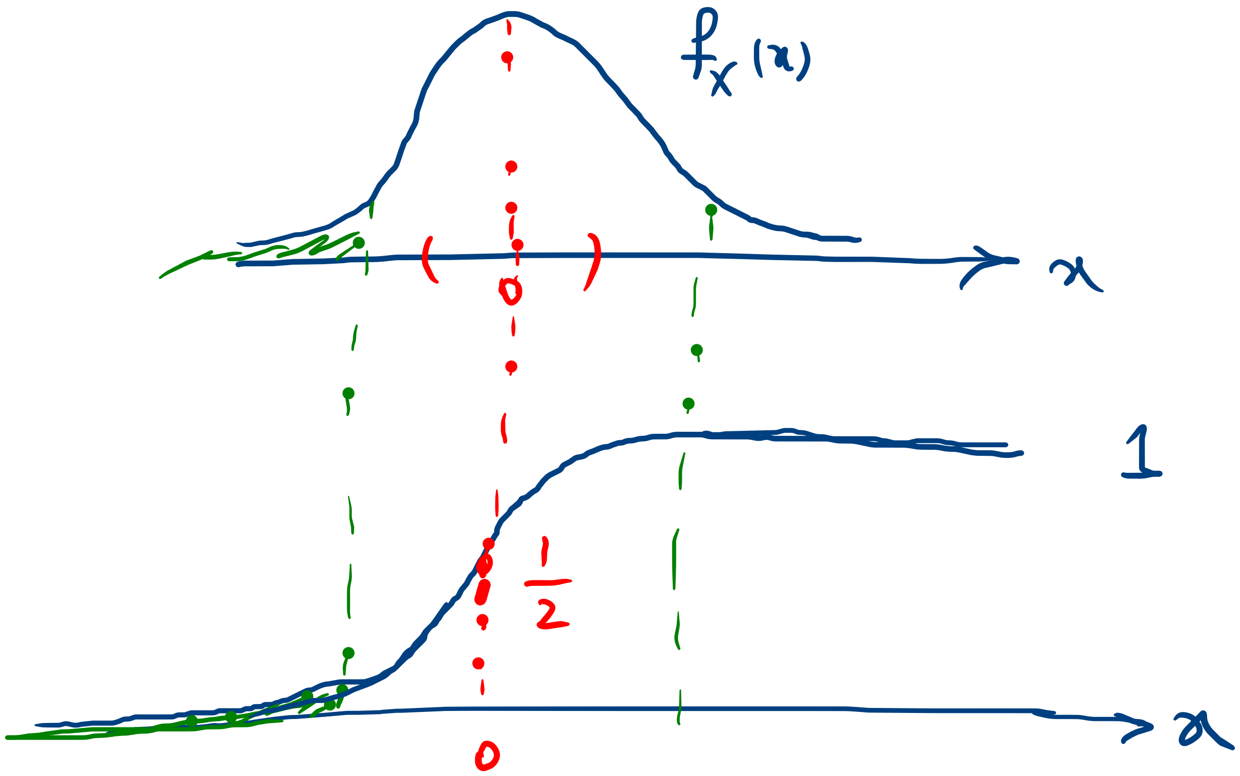
$$\boxed{f_X(x) = \lambda e^{-x/100} \qquad x \geq 0}$$

الف) احتمال این که سرور بین ۵۰ تا ۱۵۰ روز کار کند، چیست؟ $\leftarrow \int_{50}^{150} f_X(x)\,dx$

ب) احتمال این که کمتر از ۱۰۰ روز کار کند چقدر است؟ $\int_{0}^{100} f_X(x)\,dx$

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-x/100}\,dx = \lambda(-100)e^{-x/100}\Big|_0^{+\infty} = \lambda(0+100) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 0.01}$$



$f_X(x)$
$x$
$0$
$1$
$\frac{1}{2}$
$x$
$0$

# امید ریاضی و واریانس

برای متغیر تصادفی پیوسته $X$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x) dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x) dx$$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, f_X(x) dx$$

برای متغیر تصادفی گسسته $X$

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i\, P_X(x_i)$$

$$E[g(X)] = \sum_{x_i} g(x_i)\, P_X(x_i)$$

$$E[X^n] = \sum_{x_i} x_i^n\, P_X(x_i)$$

# خواص امید ریاضی و واریانس

$$E[aX+b] = a\,E[X] + b$$

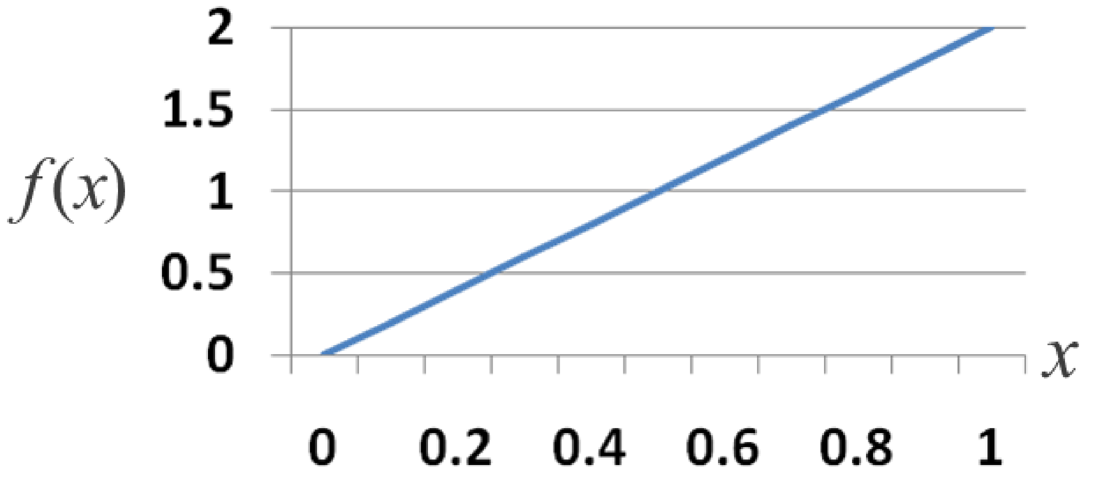
$$\mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\mathrm{Var}(\underline{a}X+b) = \underline{a}^2\mathrm{Var}(X)$$

# مثال

- امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی $X$ را بدست آورید:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$




$$E[X] = \int_0^1 x f_X(x)\, dx = \int_0^1 2x^2\, dx = \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\pi} x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \ln(1+x^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty - \infty$$

# مثال

نمایی

- امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی $X$ با تابع چگالی احتمال زیر چقدر است؟

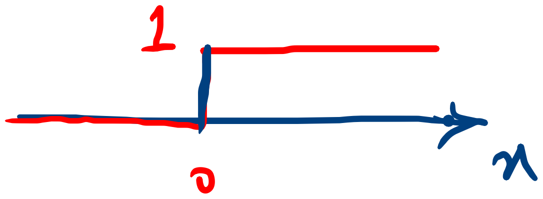
$$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \quad x \geq 0 \qquad \lambda > 0$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

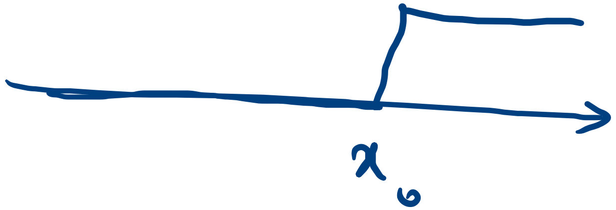
$$E[X] = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left( x \left( \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\, dx \right)$$

$$= 1/\lambda$$

# تابع پله و ضربه

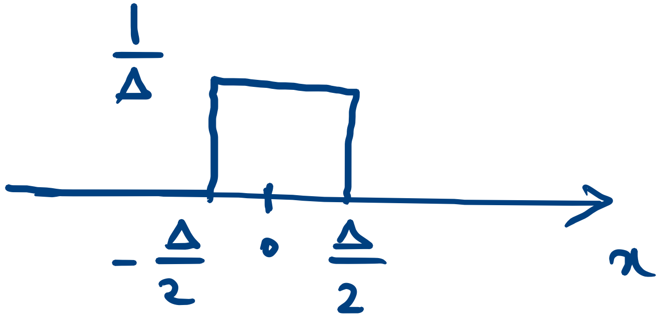



$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$




$$u(x - x_0)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

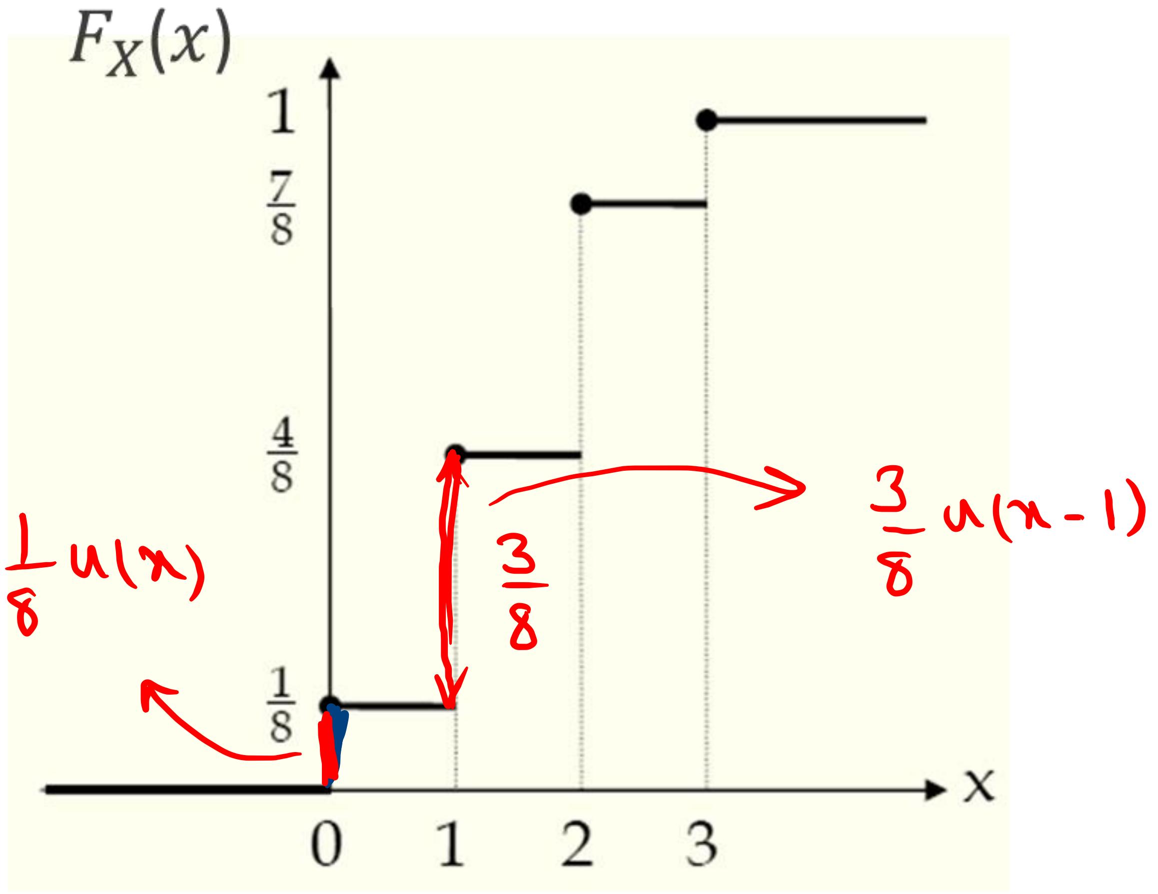


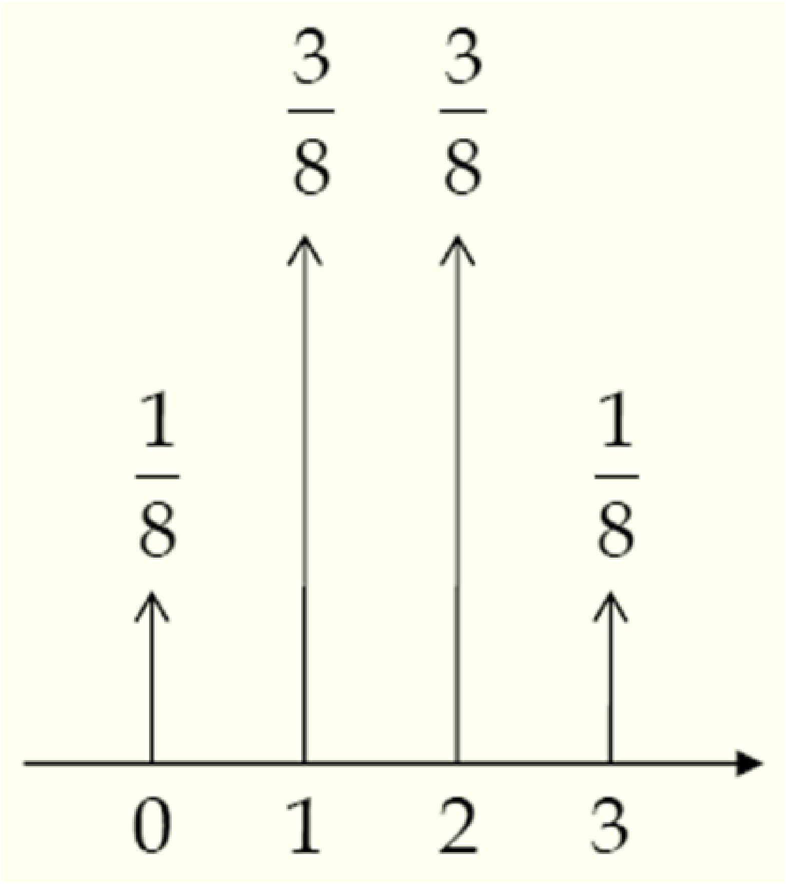

$\Delta \to 0$

Dirac $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$$

# تابع چگالی احتمال برای متغیرهای گسسته



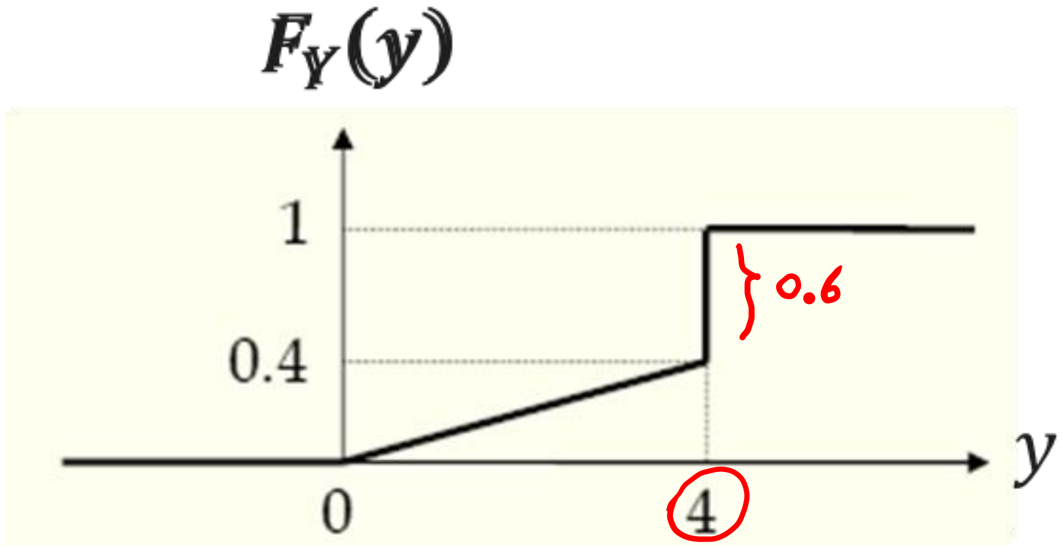



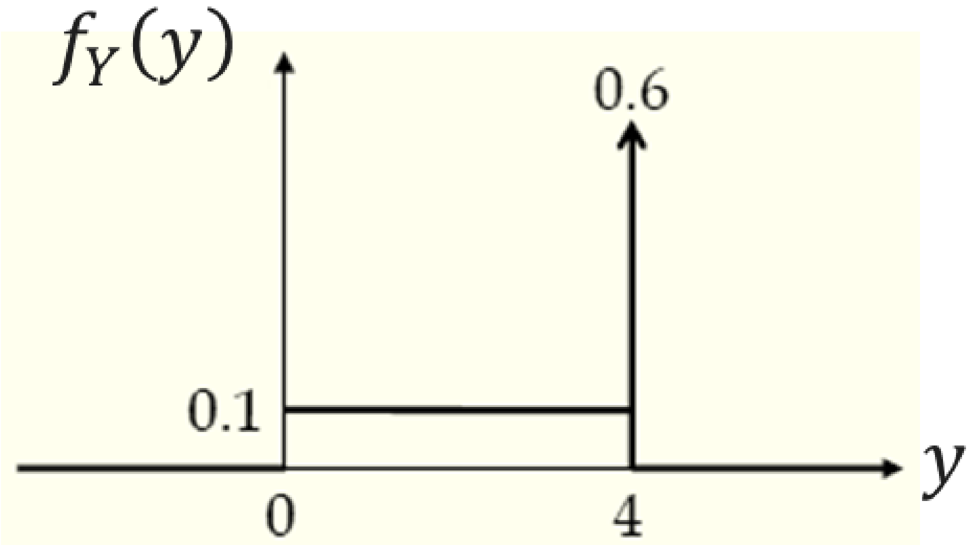

$$\boxed{F(x) = \sum_i \underline{P(x_i)}\,\underline{u(x - x_i)}}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_i P(x_i)\delta(x - x_i)}$$

# تابع توزیع تجمعی گسسته

Mixed



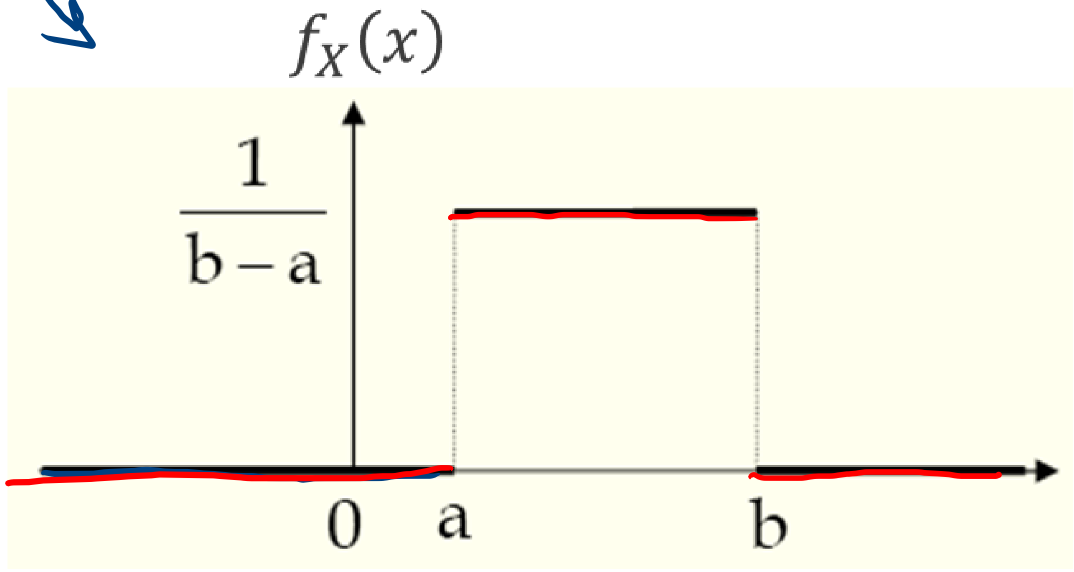

$$F_Y(y) = \frac{1}{10}y + u(y-4)\,0.6 \longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{10} + 0.6\,\delta(y-4)$$

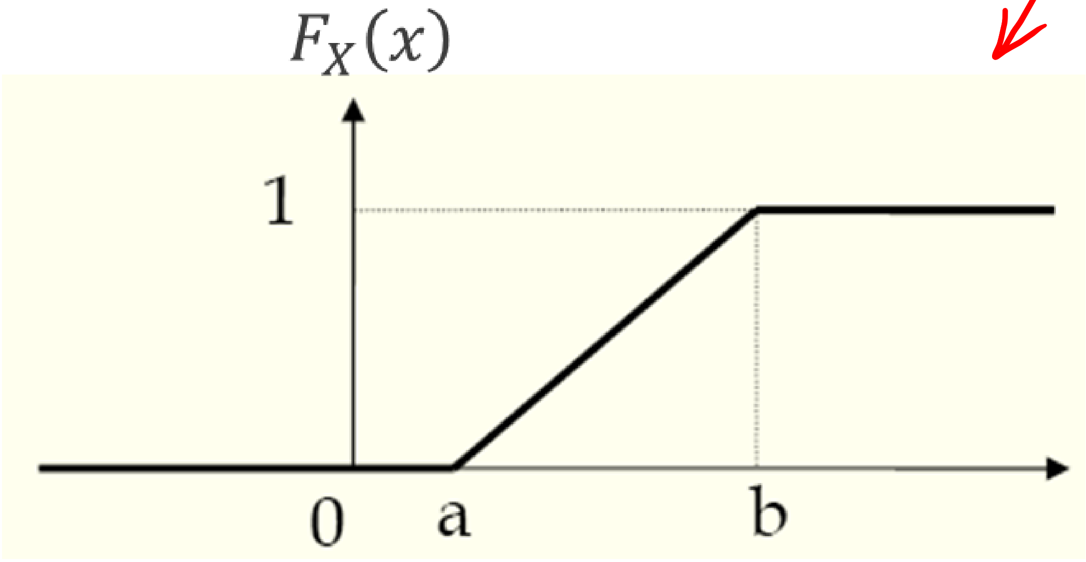
$$0 < y < 4 \qquad\qquad 0 < y \le 4$$

# توزیع یکنواخت پیوسته (Uniform distribution)

○ متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع یکنواخت بین $a$ و $b$ است، $X \sim U(a,b)$، اگر:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$



# میانگین و واریانس توزیع یکنواخت پیوسته

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{b-a} x^2 \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

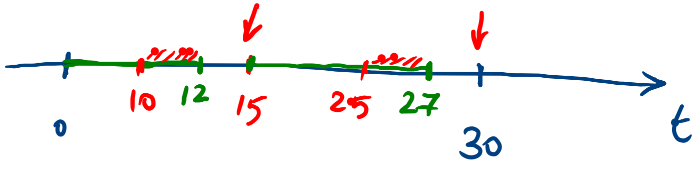
$$E[X^2]$$

$$var(X) = E[X^2] - E^2[X]$$

# مثال: توزیع یکنواخت (Example 3c-Ross) فصل 5

اتوبوس به یک ایستگاه مشخصی هر ۱۵ دقیقه می‌رسد (۷:۰۰، ۷:۱۵، ۷:۳۰ و ...). دانشجویی در زمانی با توزیع یکنواخت بین ساعت ۷:۰۰ و ۷:۳۰ به ایستگاه مبدا این خط می‌رسد: $X \sim U(0,30)$

اگر دانشجو، بیش از ۳ دقیقه منتظر بوده، احتمال آنکه کمتر از ۵ دقیقه منتظر بماند، چیست؟




$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$Y$: میزان منتظر بودن

$$P(Y \leq 5 \mid Y \geq 3) = \frac{P(\{Y \leq 5\} \cap \{Y \geq 3\})}{P(Y \geq 3)} = \frac{P(3 \leq Y \leq 5)}{P(Y \geq 3)}$$

$$= \frac{P(\{10 \leq X \leq 12\} \cup \{25 \leq X \leq 27\})}{P(\{0 \leq X \leq 12\} \cup \{15 \leq X \leq 27\})}$$

# مثال: Example 2d-Ross

فصل 5

- دانشجویی برای آمدن به دانشگاه از دوچرخه استفاده می‌کند.
  - او $t$ دقیقه قبل از شروع کلاس به سمت دانشگاه حرکت می‌کند.
  - مدت زمان سفر او بر حسب دقیقه متغیر تصادفی $X$ با تابع چگالی احتمال $f(x)$ است.
  - زود رسیدن به کلاس برای او $c$ ریال در دقیقه هزینه دارد (هزینه اتلاف وقت!)
  - دیر رسیدن به کلاس برای او $k$ ریال در دقیقه هزینه دارد (هزینه جریمه توسط استاد!)

- تابع هزینه:

$$c(x,t) = \boxed{C_t(X)} = \begin{cases} c(t-X) & X < t \\ k(X-t) & X \geq t \end{cases}$$

زمان حرکت بهینه؟

$$\boxed{t^* = ?}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} E[c(x,t)] = 0}$$

$$E[X]$$

$$\boxed{E[g(x)]}$$

$$x_1, \ldots, x_n$$

$$g(x_1), \ldots, g(x_n)$$

$$\begin{tikzcd} & 20 & \mu_1 \\ 30 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & 10 & \mu_2 \end{tikzcd}$$

$$\mu = \frac{2}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2.$$

$$E[g(x)] = P(x \le t)\, E_1[g(x)] + P(x > t)\, E_2[g(x)]$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{E_x\left[g(x,t)\right]}_{h(t)} = E_x\left[\frac{d}{dt} g(x,t)\right]$$

$$\frac{d}{dt} E\left[c(x,t)\right] = 0 \implies E\left[\frac{d}{dt} c(x,t)\right] = P(x \le t)\, \overbrace{E_1\left[\frac{d}{dt} c(x,t)\right]}^{x \le t} + P(x > t)\, \underbrace{E_2\left[\frac{d}{dt} c(x,t)\right]}_{x > t}$$

$$= F_X(t)\, E_1\left[c\right] + (1 - F_X(t))\, E_2\left[-k\right]$$

$$= c F_X(t) - (1 - F_X(t))\, k = 0 \implies F_X(t) = \frac{k}{c+k}$$

$$t^* = F_X^{-1}\left(\frac{k}{c+k}\right)$$

# محاسبه $E[X]$ به کمک تابع CDF

- اگر $X$ یک متغیر تصادفی پیوسته نامنفی باشد، آن‌گاه:

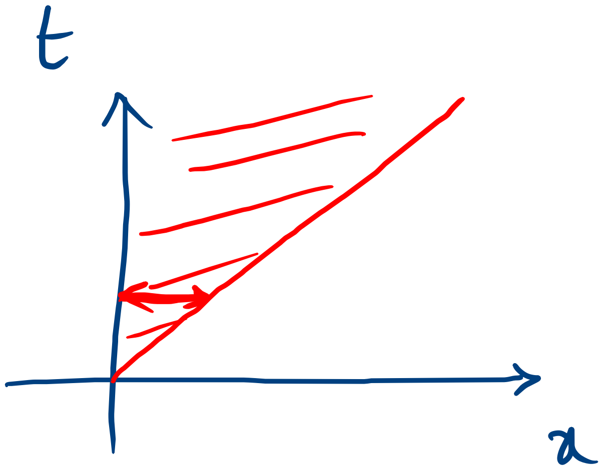
$$E[X] = \int_0^\infty P(X \geq x)dx = \int_0^\infty \left(1 - F_X(x)\right) dx$$

- در حالت گسسته:

$$\boxed{E[X] = \sum_{i=0}^{n} P(X > i) = \sum_{i=0}^{n} (1 - F_X(i))}$$

$X \in \{۰, ۱, \ldots, n\}$

$$E[X] = \int_0^{+\infty} P(X \geq x)\, dx$$



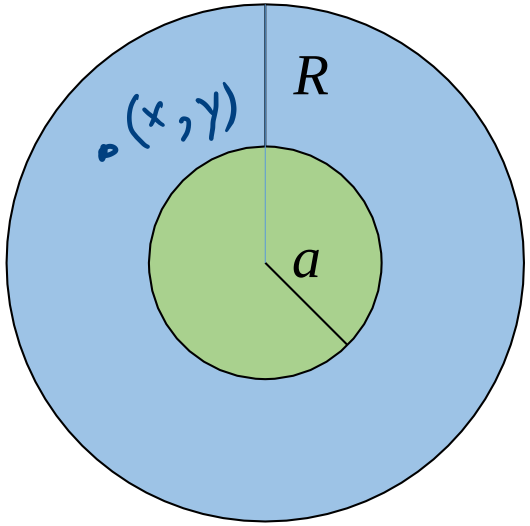

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{P(X \geq x)}_{\int_x^{+\infty} f_X(t)\,dt}\, dx = \underbrace{\int_0^{+\infty}}_{x} \underbrace{\int_x^{+\infty}}_{t} f_X(t)\, dt\, dx$$

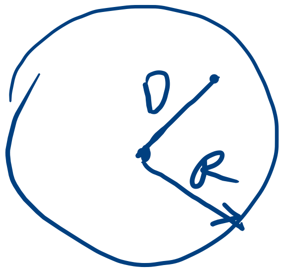
$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{t} f_X(t)\, dx\, dt = \int_0^{+\infty} f_X(t) \underbrace{\int_0^{t} dx}_{t}\, dt = \int_0^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt$$

$$= E[X]$$

# مثال

- یک نقطه را به طور یکنواخت داخل دایره‌ای به شعاع $R$ انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی $D$ را فاصله این نقطه از مرکز دایره می‌گیریم. امید ریاضی $D$ چقدر است؟




$$E[D] = ?$$

$$F_D(a) = \boxed{P(\{D \le a\})} = \frac{\pi a^2}{\pi R^2} = \frac{a^2}{R^2}$$

$$\boxed{f_D(a) = 2\frac{a}{R^2} \qquad 0 \le a \le R}$$

$$E[D] = \int_0^{+\infty} (1 - F_D(x))\, dx = 2R/3$$