آمار و احتمال مهندسی

امید ریاضی شرطی - نمونه‌برداری
(Ross 5.6, 6.5)

pmf مشترک برای n متغیر تصادفی

- بردار تصادفی $\vec{X}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{X} = [\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n]$$

تابع pmf مشترک برای بردار $\vec{X}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{\vec{X}}(\vec{x}) = P_{\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\dots\mathrm{X}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\mathrm{X}_1 = x_1, \mathrm{X}_2 = x_2 \dots, \mathrm{X}_n = x_n\}$$

که در آن:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

تابع توزیع تجمعی مشترک (Joint CDF)

- تابع توزیع مشترک (joint CDF) برای بردار $\vec{X}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = F_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2 \ldots, X_n \le x_n\}$$

- مقدار این تابع همواره بین صفر و یک است.
- تابع CDF مشترک به ازای تمام آرگومان‌ها صعودی است.
- $F(-\infty, -\infty, \ldots, -\infty) = 0$
- $F(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1$
- اگر به جای برخی از آرگومان‌ها بینهایت بگذاریم، CDF مشترک سایر متغیرهای تصادفی حاصل می‌شود. برای مثال:

$$F_{X_1X_2X_3}(+\infty, x_2, x_3) = F_{X_2X_3}(x_2, x_3)$$

تابع چگالی احتمال مشترک (Joint PDF)

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$
$$= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} F_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- به این ترتیب روابط زیر برقرار خواهند بود:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = P\{x_1 < X_1 < x_1 + dx_1, \ldots, x_n < X_n < x_n + dx_n\}$$

$$F_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\vec{X}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) du_n \ldots du_2 du_1$$

تابع چگالی احتمال مشترک (Joint PDF)

- مقدار تابع pdf همواره مثبت است و انتگرال n-گانه آن از $-\infty$ تا $+\infty$ یک می‌شود.
- همچنین داریم:

$$\forall D \subset \mathbb{R}^n: P\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\} = \int_D f_{\vec{X}}(\vec{x}) d\vec{x}$$

$$= \int_D \dots \int f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

- اگر از $-\infty$ تا $+\infty$ روی برخی از آرگومان‌ها انتگرال بگیریم، pdf مشترک سایر متغیرهای تصادفی حاصل می‌شود. برای مثال:

$$f_{X_2 X_3}(x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 X_2 X_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1$$

توزیع شرطی n-بعدی

- مطابق حالت دو بعدی داریم:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k \,|\, X_{k+1} = x_{k+1}, \dots, X_n = x_n) = \frac{f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_{X_{k+1} \dots X_n}(x_{k+1}, \dots, x_n)}$$

- برای مثال داریم:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2 \,|\, x_3, x_4) = \frac{f_{X_1 X_2 X_3 X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f_{X_3 X_4}(x_3, x_4)}$$

- با استفاده از رابطه بالا می‌توان نشان داد:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2|x_1) \dots f_{X_n}(x_n|x_1 x_2 \dots x_{n-1})$$

- این رابطه به قاعده زنجیره‌ای معروف است.

حذف متغیر سمت چپ در چگالی شرطی

- می‌دانیم که اگر $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$ را داشته باشیم و بخواهیم f_{X_1} را به دست آوریم، کافی است روی $f_{X_1X_2}$ از $-\infty$ تا $+\infty$ نسبت به x_2 انتگرال بگیریم.
  - در چگالی شرطی نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.
- اگر بخواهیم از $f_{X_1X_2}(x_1,x_2|x_3)$ مقدار $f_{X_1}(x_1|x_3)$ را به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$f_{X_1}(x_1|x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1X_2}(x_1,x_2|x_3)\,dx_2$$

- برای اثبات این رابطه می‌توانید از تعریف چگالی شرطی و رابطه چگالی مشترک حاشیه‌ای استفاده کنید.

حذف متغیر سمت راست در چگالی شرطی

- اگر بخواهیم از $f_{X_1}(x_1|x_2,x_3)$ به $f_{X_1}(x_1|x_3)$ برسیم، داریم:

$$f_{X_1}(x_1|x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1|x_2,x_3) f_{X_2}(x_2|x_3) dx_2$$

زیرا:

$$f_{X_1}(x_1|x_2,x_3) f_{X_2}(x_2|x_3) = f_{X_1X_2}(x_1,x_2|x_3)$$

در نتیجه داریم:

$$f_{X_1}(x_1|x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1|x_2,x_3) f_{X_2}(x_2|x_3) dx_2$$

- معادله بالا به معادله چاپمن-کولموگروف (Chapman-Kolmogorov) معروف است.

امید ریاضی شرطی

- اگر X_iها مستقل باشند، چگالی مشروط بعضی از آن‌ها بر بعضی دیگر با چگالی غیر مشروط یکسان است:

$$f_{X_1X_2}(x_1x_2|x_3,x_4) = f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$$

- امید ریاضی شرطی متغیر تصادفی Y به شرط داشتن مقدار متغیرهای تصادفی $X_1 , \dots , X_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(Y\,|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = E(Y|x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y|x_1, x_2\,, \dots, x_n)\, dy$$

که تابعی از x_1، x_2، ... و x_n است و نه y.

آمار و احتمال مهندسی
بهنام بهرک

امید ریاضی شرطی

- به طور مشابه داریم:

$$E(g(Y)|x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, f_Y(y|x_1, x_2\,, \dots, x_n)\, dy$$

- با تعریف بردار $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ داریم:

$$E\left(Y \middle| \vec{X} = \vec{x}\right) = h(\vec{x})$$

- متناظر با این تابع می‌توانیم متغیر تصادفی $h(\vec{X})$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$E\left(Y \middle| \vec{X}\right) = h(\vec{X})$$

آمار و احتمال مهندسی
بهنام بهرک

امید ریاضی شرطی

- مشابه قبل به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$E\left(E\left(Y\middle|\vec{X}\right)\right) = E(Y)$$

و اگر $\vec{X}$ و Y مستقل باشند، داریم:

$$E\left(Y\middle|\vec{X}\right) = E(Y)$$

- $E\left(Y\middle|\vec{X}\right)$ در واقع تخمین بهینه (به معنی mse) برای Y بر مبنای مشاهده $\vec{X}$ است.

مجموع‌های تصادفی (Random Sums)

- فرض کنید $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ باشد که در آن X_iها متغیر تصادفی مستقل بوده و نیز داریم:

$$\forall i : E(X_i) = \mu_X \ , \qquad \mathrm{var}(X_i) = \sigma_X^2$$

- از طرف دیگر خود N نیز یک متغیر تصادفی با میانگین μ_N و واریانس σ_N^2 باشد و X_iها از N نیز مستقل باشند.

- مثلاً Y می‌تواند سود روزانه یک مغازه، X_i سود حاصل از هر مشتری و N تعداد مشتری‌هایی که در روز مراجعه می‌کنند، باشد.

- و یا Y می‌تواند تعداد افراد کشته شده در سوانح رانندگی سالانه، X_i تعداد افراد کشته شده در یک تصادف و N تعداد کل تصادف‌ها در یک سال باشد.

میانگین مجموع تصادفی

○ می‌خواهیم میانگین و واریانس Y را به دست آوریم:

$$E(Y) = E(E(Y|N))$$

$$E(Y|N=n) = E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i|n)\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i|n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

○ از آنجایی که برای همه X_i ها داریم:

$$\forall i : E(X_i) = \mu_X$$

○ پس داریم:

$$E(Y|N=n) = n\mu_X \quad \Rightarrow E(Y|N) = N\mu_X$$

$$\Rightarrow E(Y) = E[E(Y|N)] = E(N\mu_X) = \mu_X E(N) = \mu_X \mu_N$$

واریانس مجموع تصادفی

$$E\left(Y^2|N=n\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E[X_i X_j]$$

○ به دلیل استقلال X_iها، برای $i \neq j$ داریم:

$$E\left(X_i X_j\right) = E(X_i)E(X_j)$$

○ در نتیجه:

$$E\left(Y^2|N=n\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} E(X_i)E(X_j)$$

واریانس مجموع تصادفی

$$E\left(Y^2 \middle| N=n\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} E(X_i)E(X_j)$$

- ولی از آنجا که برای هر i داریم: $\mathrm{var}(X_i) = \sigma_X^2$ ، خواهیم داشت:

$$E\left(Y^2 \middle| N=n\right) = n\left(\sigma_X^2 + \mu_X^2\right) + \left(n^2 - n\right)\mu_X^2 = n\sigma_X^2 + n^2\mu_X^2$$

$$\Rightarrow E\left(Y^2 \middle| N\right) = N\,\sigma_X^2 + N^2\mu_X^2$$

$$E\left(Y^2\right) = E\left[E\left(Y^2 \middle| N\right)\right] = \sigma_X^2 E(N) + \mu_X^2 E\left(N^2\right) = \sigma_X^2\mu_N + \mu_X^2\left(\sigma_N^2 + \mu_N^2\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_Y^2 = E\left(Y^2\right) - \left(E(Y)\right)^2 = \sigma_X^2\mu_N + \mu_X^2\sigma_N^2 + \mu_X^2\mu_N^2 - \mu_X^2\mu_N^2$$
$$= \sigma_X^2\mu_N + \mu_X^2\sigma_N^2$$

مثال

- فرستنده‌های A و B پیام‌هایی را با توزیع‌های پواسون با نرخ‌های λ_A و λ_B به یک گیرنده خاص می‌فرستند. تعداد کلمات هر پیام مستقل از یکدیگر و با تابع جرمی احتمال

$$P_W(w=1) = \frac{1}{3}\ , \qquad P_W(w=2) = \frac{1}{2}, \qquad P_W(w=3) = \frac{1}{6}$$

توزیع شده است.

الف) احتمال این که در بازه‌ای به طول t دقیقاً ۹ پیام به گیرنده برسد، چقدر است؟

فرض کنید R متغیر تصادفی باشد که تعداد پیام‌های دریافتی در بازه‌ای به طول t را نمایش بدهد. مشخص است که R یک متغیر تصادفی پواسون با نرخ $\lambda_A + \lambda_B$ است.

بنابراین احتمال دریافت ۹ پیام برابر است با:

$$\frac{e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t}\left((\lambda_A+\lambda_B)t\right)^9}{9!}$$

ادامه مثال

ب) امید ریاضی تعداد کلمات دریافتی N در بازه‌ای به طول t را محاسبه کنید.

اگر R تعداد پیام‌های دریافتی باشد، داریم:

$$N = W_1 + W_2 + \ldots + W_R$$

N یک مجموع تصادفی است، بنابراین:

$$E(N) = E(W)E(R)$$

$$E(N) = \left(1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6}\right) \times (\lambda_A + \lambda_B)t = \frac{11}{6}(\lambda_A + \lambda_B)t$$

نمونه‌برداری (Sampling)

- اگر متغیر تصادفی X، قطر پیچ‌های تولیدی یک کارخانه باشد و فرض کنیم دارای چگالی f_X باشد، این مدلی است که طبق فرض برای کلیه پیچ‌ها صادق است. پس اگر X_i پیچ نمونه i-ام باشد، داریم:

$$f_{X_i}(x) = f_X(x)$$

و X_iها (با فرض استقلال آزمایش‌ها) مستقل هستند.

- به طور کلی، متغیرهای تصادفی که مستقل و دارای توزیع یکسان باشند را *i.i.d.* می‌نامیم که مخفف عبارت Independent Identically Distributed است.

- به دنباله متغیرهای تصادفی *i.i.d.* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ که از یک جامعه (population) آماری با توزیع F انتخاب شده باشند، یک نمونه (sample) از توزیع F می‌گوییم.

نمونه‌برداری

- جامعه آماری: مثلا جامعه پیچ‌ها در مثال قبلی
- نمونه: n پیچ منتخب از جامعه پیچ‌ها که قطر آنها n متغیر تصادفی $i.i.d$ می‌دهد.
- n را اندازه نمونه (sample size) می‌گوییم.
- چون X_iها مستقل هستند، داریم:

$$f_{X_i}(x) = f_X(x)$$

$$\Rightarrow E(X_i) = E(X) = \mu \quad : \quad \text{میانگین جامعه}$$

$$\Rightarrow \mathrm{var}(X_i) = \mathrm{var}(X) = \sigma^2 \quad : \quad \text{واریانس جامعه}$$

- بحث نمونه‌برداری نقش اساسی در آمار دارد.

میانگین نمونه (Sample Mean)

- طبق تعریف، میانگین نمونه برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

داریم:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{X_i}^2 = \frac{1}{n^2} \times n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

- پس هر چقدر n زیادتر شود، مقدار $\bar{X}$ به μ واقعی نزدیکتر خواهد بود. $\bar{X}$ میانگین نمونه است، در حالی که μ میانگین جامعه است.

میانگین نمونه

- غالبا μ را در اختیار نداریم و با نمونه‌برداری و محاسبه $\bar{X}$ آن را تخمین می‌زنیم.
  - متغیر تصادفی $\bar{X}$ را تخمینگر μ می‌نامیم.
- اگر امید ریاضی تخمینگر $\hat{\theta}$ از پارامتر θ برابر با این پارامتر باشد ($E[\hat{\theta}] = \theta$)، تخمین را بی‌غرض (unbiased) یا ناریب می‌نامیم.
- دیدیم که $E[\bar{X}] = \mu$، بنابراین $\bar{X}$ یک تخمینگر بی‌غرض برای μ است.
- در آینده خواهیم دید که توزیع متغیر تصادفی $\bar{X}$ برای nهای بزرگ برابر است با:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

واریانس نمونه (Sample Variance)

- دیدیم که میانگین نمونه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- انحراف هر نمونه X_i برابر است با: $(\bar{X} - X_i)$
- واریانس نمونه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

- می‌توان نشان داد که S^2 (واریانس نمونه) یک تخمینگر ناریب برای σ^2 (واریانس جامعه) است، به عبارت دیگر:

$$E[S^2] = \sigma^2$$

اثبات ناریب بودن واریانس نمونه

$$E[S^2] = E\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{n-1}\right] \;\Rightarrow\; (n-1)E[S^2] = E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]$$

$$(n-1)E[S^2] = E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\bar{X})^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\mu-\bar{X})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(\mu-\bar{X})\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 + n(\mu-\bar{X})^2 + 2(\mu-\bar{X})\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right]$$

اثبات ناریب بودن واریانس نمونه

$$(n-1)E[S^2] = E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 + n(\mu-\bar{X})^2 + 2(\mu-\bar{X})\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 + n(\mu-\bar{X})^2 + 2(\mu-\bar{X})(n\bar{X}-n\mu)\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\mu-\bar{X})^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}E[(X_i-E[X_i])^2] - nE[(E[\bar{X}]-\bar{X})^2] = n\sigma^2 - n.\mathrm{var}(\bar{X})$$

$$= n\sigma^2 - n\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) = (n-1)\sigma^2 \;\Rightarrow\; E[S^2] = \sigma^2$$

آماره رتبه (Order Statistic)

- فرض کنید که یک آزمایش تصادفی را n بار انجام دهیم (X_iها طبق تعریفی که داشتیم تعریف شده باشند) و مقادیر x_i در این آزمایش‌ها ظاهر شوند ($i = 1,2, \dots ,n$)
- این اعداد را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم:

$$x_{r_1} \leq x_{r_2} \leq \cdots \leq x_{r_n}$$

- اکنون نام مرتب شده آن‌ها را y_i می‌نامیم، یعنی $y_i = x_{r_i}$. پس خواهیم داشت:

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$$

- مثلاً اگر اعداد x_i به ترتیب زیر به دست آمده باشند، داریم:

$$(x_1 = 12 \,, x_2 = 7 \,, x_3 = 13 \,, x_4 = 8 \,, x_5 = 9)$$
$$(y_1 = x_{r_1} = x_2 = 7 \,, y_2 = x_{r_2} = x_4 = 8, \dots , y_5 = x_{r_5} = x_3 = 13)$$

آماره رتبه

- متغیرهای تصادفی Y_i را آماره‌های رتبه (آمارگان رتبه) X_iها می‌نامند.
- به طور خاص متغیر تصادفی Y_k را آماره رتبه k-ام می‌نامند.
- آماره‌های رتبه کاربرد بسیاری در آشکارسازی و تخمین پارامتری دارند و در طراحی الگوریتم‌های تصادفی مورد استفاده قرار می‌گیرند.
- تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی را که به پارامتر نامعلومی بستگی نداشته باشند، آماره (statistic) گویند.
- در بحث نمونه‌برداری تابعی از بردار متغیرهای تصادفی نمونه $\vec{X} = [\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n]$ را آماره می‌گوییم.
- آماره رتبه از آنجا که تابعی از $\vec{X}$ است، یک نوع آماره به شمار می‌رود.

آماره رتبه اول

○ به عنوان حالت خاص برای Y_1 داریم:

$$Y_1 = X_{min} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

بنابراین:

$$F_{Y_1}(y) = P\{Y_1 \le y\} = P\{X_{min} \le y\} = 1 - P\{X_{min} > y\}$$
$$= 1 - P\{X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y\}$$
$$= 1 - P\{X_1 > y\}P\{X_2 > y\} \dots P\{X_n > y\}$$
$$= 1 - [1 - F_X(y)]^n$$

$$\Rightarrow f_{Y_1}(y) = n[1 - F_X(y)]^{n-1} f_X(y)$$

آماره رتبه آخر

○ به عنوان حالت خاص برای Y_n داریم:

$$Y_n = X_{max} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

بنابراین:

$$F_{Y_n}(y) = P\{Y_n \le y\} = P\{X_{max} \le y\}$$
$$= P\{X_1 \le y, X_2 \le y, \dots, X_n \le y\}$$
$$= P\{X_1 \le y\}P\{X_2 \le y\} \dots P\{X_n \le y\}$$
$$= [F_X(y)]^n$$

$$\Rightarrow f_{Y_n}(y) = n[F_X(y)]^{n-1} f_X(y)$$

آماره رتبه

- در حالت کلی داریم:

$$f_{Y_k}(y)dy = P\{y < Y_k \leq y + dy\}$$

در صورتی این پیشامد را خواهیم داشت که از n عدد x_i، $(k-1)$تا کوچکتر از y، $n-k$ تا بزرگتر از $y+dy$ و یکی بین y و $y+dy$ باشد.

- توزیع چندجمله‌ای: احتمال این که در n بار آزمایش، پیشامد A_1، k_1 بار، پیشامد A_2، k_2 بار، و پیشامد A_3، k_3 بار اتفاق بیافتد ($k_1+k_2+k_3=n$, $P(A_i)=p_i$) برابر است با:

$$p = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\,p_1^{k_1}p_2^{k_2}p_3^{k_3}$$

آماره رتبه

- در نتیجه داریم:

$$f_{Y_k}(y)dy = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!\,1!}[F_X(y)]^{k-1}[1-F_X(y+dy)]^{n-k}f_X(y)dy$$

- و با میل دادن dy به سمت صفر ($dy \to 0$) خواهیم داشت:

$$f_{Y_k}(y) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!\,1!}[F_X(y)]^{k-1}[1-F_X(y)]^{n-k}f_X(y)$$

- برای $k=1$، توزیع X_{min} و برای $k=n$، توزیع X_{max} به دست می‌آید:

$$f_{X_{min}}(y) = n[1-F_X(y)]^{n-1}f_X(y)\ \ , 1-F_{X_{min}}(y) = [1-F_X(y)]^n$$

$$f_{X_{max}}(y) = n[F_X(y)]^{n-1}f_X(y)\ \ , F_{X_{max}}(y) = [F_X(y)]^n$$