آمار و احتمال مهندسی

استقلال و آزمایش‌های تکراری

(Ross 3.4-3.5)

پیشامدهای مستقل

- دو پیشامد A و B را مستقل گویند اگر: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
- از طرفی طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

- پس اگر A و B مستقل باشند:

$$P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B)$$

- تعبیر بسامدی: $P(A)\cong \frac{n_A}{n}=\frac{n_{A\cap B}}{n_B}=P(A|B)$
- یعنی فرکانس نسبی وقوع A در کل n آزمایش، با فرکانس نسبی آن در n_B آزمایش که B در آنها رخ داده است، برابر است.
- تعبیر بیزی: $\frac{P(A|B)}{P(A)}=1$، در نتیجه A هیچ اثری بر رد یا تایید B ندارد: $P(B|A)=P(B)$

پیشامدهای مستقل

- قضیه: اگر A و B مستقل باشند، $\bar{A}$ و B هم مستقل هستند.

اثبات:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

از طرفی:

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) \Rightarrow \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(B)P(A) = P(B)\big(1 - P(A)\big)$$

$$\Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B)P(\bar{A})$$

بنابراین $\bar{A}$ و B هم مستقل هستند.

- قضیه: اگر A و B مستقل باشند، $\bar{A}$ و $\bar{B}$ هم مستقل هستند.

استقلال سه پیشامد

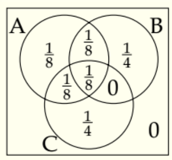
- اگر A از B و A از C مستقل باشد، لزوماً A از BC و یا ترکیب‌های دیگر B و C مستقل نخواهد بود.
- تعریف استقلال سه پیشامد باید فراتر از استقلال دو به دوی آنها باشد.
- سه پیشامد A، B، و C را مستقل گویند، هرگاه هر چهار رابطه زیر برقرار باشند:

1) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2) $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
3) $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
4) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

- اگر سه پیشامد مستقل باشند، دو به دو نیز مستقل خواهند بود، ولی عکس این گزاره لزوماً صحیح نیست.

مثال

- اصولاً هیچ یک از این چهار رابطه از سه رابطه دیگر نتیجه نمی‌شود.



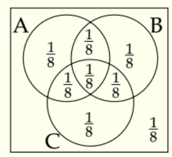
☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C)$

☒ $\frac{1}{8}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C)$

☑ $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)P(C)$

A و B مستقل، A و C مستقل



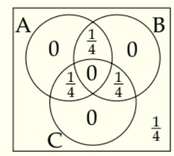
☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C)$

☑ $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)P(C)$

مستقل



☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C)$

☒ $0\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)P(C)$

دو به دو مستقل

استقلال بیش از دو پیشامد

- n پیشامد A_1، A_2، … ، A_n، را مستقل گویند، هرگاه برای هر دسته اعداد صحیح $k_1, k_2, \dots, k_r$، که $r \le n$، داشته باشیم:

$$P\left(A_{k_1}A_{k_2}\dots A_{k_r}\right) = P\left(A_{k_1}\right)P\left(A_{k_2}\right)\dots P\left(A_{k_r}\right)$$

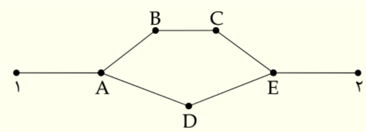
- مثال: در ۵ بار پرتاب یک تاس، خروجی‌ها مستقل هستند، بنابراین احتمال ۵ بار آمدن عدد ۶ برابر است با:

$$P(\{6,6,6,6,6\}) = P(\{6\})P(\{6\})P(\{6\})P(\{6\})P(\{6\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

- برای استقلال n پیشامد، چه تعداد رابطه باید برقرار باشند؟
- هر زیر مجموعه از مجموعه n عضوی $\{A_1, \dots, A_n\}$ با بیش از یک عضو، یک رابطه به ما می‌دهد، پس تعداد کل برابر است با: $2^n - (n+1)$

مثال ۱

- یک لینک مخابراتی بین نقاط ۱ و ۲ از ایستگاه‌های A و B و C و D و E استفاده می‌کند (از D وقتی استفاده می‌شود که B یا C از کار بیافتد). همه ایستگاه‌های رله مانند یکدیگر هستند، و بررسی‌های آماری نشان داده است که احتمال سالم بودن آنها در یک بازه زمانی مشخص برابر با p است. با فرض استقلال خرابی رله‌ها، احتمال این که لینک بین ۱ و ۲ در این بازه زمانی برقرار باشد چقدر است؟



احتمال برقرار بودن لینک =

$$P(A(BC \cup D)E) =$$
$$P(A)P(BC \cup D)P(E) =$$
$$P(A)(P(BC) + P(D) - P(BCD))P(E) =$$
$$P(A)(P(B)P(C) + P(D) - P(B)P(C)P(D))P(E) =$$
$$p\left(p^2 + p - p^3\right)p \ = \ \ p^3(p + 1 - p^2)$$

مثال ۲

- یک نرم‌افزار خاص توسط ۵ تیم مستقل از متخصصین تست نرم‌افزار به منظور یافتن باگ‌های احتمالی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. در صورت وجود باگ، این تیم‌ها به ترتیب با احتمال 0.1، 0.2، 0.3، 0.4 و 0.5 قادر به کشف آن هستند. فرض کنید نرم‌افزار مورد نظر دارای باگ است. احتمال پیدا کردن این باگ توسط حداقل یک تیم چقدر است؟

A_i = پیشامد کشف باگ توسط تیم i

$$P\left\{\text{حداقل یک تیم}\right\} = 1 - P\left\{\text{هیچ تیم}\right\} = 1 - P(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}, \overline{A_5})$$
$$= 1 - P\left(\overline{A_1}\right)\mathrm{P}\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)\mathrm{P}\left(\overline{A_4}\right)\mathrm{P}\left(\overline{A_5}\right)$$
$$= 1 - (1 - 0.1)(1 - 0.2)(1 - 0.3)(1 - 0.4)(1 - 0.5)$$
$$= 0.8488$$

مثال ۳

- دو تاس را پرتاب می‌کنیم و خروجی آن‌ها را D_1 و D_2 می‌نامیم.
  - E را پیشامد $\{D_1 = 1\}$ و F را پیشامد $\{D_2 = 6\}$ تعریف می‌کنیم.
  - آیا E و F مستقل هستند؟ بله!
- فرض کنید G پیشامد $\{D_1 + D_2 = 7\}$ باشد.
  - آیا E و G مستقل هستند؟ بله!

$$P(E) = 1/6, \qquad P(G) = 1/6, \qquad P(E \cap G) = 1/36$$

  - آیا F و G مستقل هستند؟ بله!

$$P(F) = 1/6, \qquad P(G) = 1/6, \qquad P(F \cap G) = 1/36$$

  - آیا E، F و G مستقل هستند؟ خیر!

$$P(E \cap F \cap G) = P(E \cap F) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{216} = P(E)P(F)P(G)$$

مفهوم آزمایش تکراری

- وقتی یک آزمایش تصادفی را تحت شرایط یکسانی تکرار می‌کنیم، دو تعبیر موجود است:
  - تعبیر تجربی: احتمال پیشامد A در فضای Ω حدود n_A/n است.
  - تعبیر مفهومی: با تکرار آزمایش، به جای فضای Ω قبلی، یک فضای جدید Ω_n داریم که $\Omega_n = \Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega$.
  - نقاط این فضای نمونه جدید، nتایی‌های مرتبی هستند که هر عنصر آن عضوی از Ω قبلی است.
- مثال: ۵ بار سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. برای این سکه: $P\{H\} = p$ و $P\{T\} = q = 1 - p$

الف) احتمال پیشامد B که در آن فقط دو بار اول شیر بیاید و بقیه خط، چقدر است؟

ب) احتمال پیشامد D که در آن دو بار شیر بیاید (با هر ترتیبی) چقدر است؟

مثال

الف) Ω مجموعه کلیه ۵تایی‌های مرتبی است که هر عضو این ۵تایی‌های مرتب H یا T است:

$$\Omega = \{(HHHHH), (THHHH), \dots, (TTTTT)\}$$

یعنی 2^5 عنصر دارد که لزوماً متساوی‌الاحتمال نیستند، چون p لزوماً $\frac{1}{2}$ نیست.

$$B = \{(HHTTT)\}$$

B را می‌توان به صورت اشتراک ۵ پیشامد مستقل در نظر گرفت:

B = {بار اول شیر بیاید} ∩ {بار دوم شیر بیاید} ∩ {بار سوم خط بیاید} ∩ {بار چهارم خط بیاید} ∩ {بار پنجم خط بیاید}

بنابراین با فرض استقلال آزمایش‌ها داریم:

$$P(B) = P(H_1)P(H_2)P(T_3)P(T_4)P(T_5) = p^2q^3$$

اصولاً n آزمایش را مستقل گویند، اگر پیشامدهای A_1، A_2، … ، و A_n مستقل باشند که A_i پیشامدی است که نتیجه آن در ارتباط با آزمایش i-ام حاصل می‌شود.

ادامه مثال

ب) برای پیشامد D داریم:

D = {دو شیر و سه خط (با هر ترتیبی) بیاید}

کلیه وقایع ساده مانند B که دو H و سه T (با ترتیب مشخص) دارند، دارای احتمال p^2q^3 هستند، و این پیشامدها از هم جدا بوده و D در واقع اجتماع چنین پیشامدهایی است. پس کافی است تعداد چنین پیشامدهایی را حساب کنیم.

به چند طریق می‌توان ۲ تا H و ۳ تا T را در ۵ جایگاه مختلف قرار داد؟ $\binom{5}{2}$

پس داریم:

$$P(D) = \binom{5}{2} p^2q^3$$

حالت کلی این مثال را آزمایش برنولی می‌گوییم.

آزمایش برنولی (Bernoulli Trials)

- اگر برای پیشامد A در فضای Ω داشته باشیم: $P(A) = p$ و $P(\bar{A}) = 1 - p = q$، در هر بار انجام آزمایش یا A و یا $\bar{A}$ اتفاق می‌افتد، و آزمایش‌ها در شرایط یکسان اتفاق افتاده و مستقل از هم هستند.
- اگر پیشامد B در فضای $\Omega_n = \Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega$ این باشد که پیشامد A، k بار با ترتیب خاصی اتفاق افتد، مثلاً در k بار اول A اتفاق افتد و در $(n-k)$ بار بعدی $\bar{A}$، داریم:

$$\Omega_n = \{(00\ldots00), (00\ldots01), \ldots, (11\ldots11)\}$$

$$B = \{(\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ بار}}\underbrace{00\ldots0}_{n-k \text{ بار}})\}$$

پیشامد A_i : رخ دادن A در آزمایش i-ام

$$P(B) = P(A_1A_2\cdots A_k\bar{A}_{k+1}\cdots\bar{A}_n) \underset{\text{استقلال آزمایشها}}{=} P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)P(\bar{A}_{k+1})\cdots P(\bar{A}_n)$$

$$= \underbrace{pp\ldots p}_{k \text{ تا}}\,\underbrace{qq\ldots q}_{n-k \text{ تا}} = p^k q^{n-k}$$

آزمایش برنولی

- اگر پیشامد D در فضای Ω_n این باشد که پیشامد A، k بار با هر ترتیبی اتفاق بیافتد، احتمال $P(D) = P_n(k)$ چقدر است؟
- تعداد پیشامدهای ساده‌ای که A در آنها k بار اتفاق می‌افتد $\binom{n}{k}$ است، و همگی احتمال $p^k q^{n-k}$ دارند. از آن‌جا که این پیشامدها ناسازگار هستند، طبق اصل ۳ کولموگروف داریم:

$$P_n(k) = p^k q^{n-k} + \cdots + p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

- توجه کنید که:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

یادآوری

- در حالت کلی:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

- در حالت استقلال A و B:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- در حالت کلی:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- در حالت ناسازگاری A و B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

آزمایش برنولی تعمیم‌یافته

- در آزمایش برنولی فقط دو حالت داشتیم: وقوع A یا وقوع $\bar{A}$.
- در حالت کلی اگر A_iها مجموعه Ω را افراز کنند، و احتمال هر یک از آنها p_i باشد، و آزمایش‌ها در شرایط یکسان تکرار شده و مستقل از هم باشند، احتمال پیشامد B در فضای Ω_n، که در n آزمایش، A_iها هر یک k_i بار اتفاق افتند، به شرط $k_1 + \cdots + k_r = n$، برابر است با: ${p_1}^{k_1} \dots {p_r}^{k_r}$
- احتمال پیشامد D که A_iها هر یک k_i بار (با هر ترتیبی) اتفاق افتند =

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} \dots {p_r}^{k_r}$$

یعنی:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} \dots {p_r}^{k_r}$$

مثال ۱

- جعبه‌ای شامل N کارت حافظه است که M تا از آنها خراب هستند. به طور تصادفی کارتی را از جعبه برداشته و آزمایش می‌کنیم و دوباره به جعبه برمی‌گردانیم. اگر این کار را n بار انجام دهیم (n انتخاب با جایگزینی)، احتمال این که k بار با کارت حافظه خراب مواجه شویم چقدر است؟

چون کارت را پس از تست به جعبه برمی‌گردانیم، شرایط آزمایش تغییری نمی‌کند و لذا یک آزمایش برنولی است.

پیشامد A مورد نظر در Ω اصلی (یک آزمایش)، پیشامد خراب بودن کارت حافظه است که داریم:

احتمال خراب بودن : $p = \frac{M}{N}$

لذا احتمال این پیشامد در فضای نمونه Ω_n، که k تا از n کارت خراب باشند (مجموعه کلیه زوج مرتب‌هایی که k عنصر آنها یک است) برابر است با:

این احتمال را با $p_1(k)$ نیز نمایش می‌دهیم : $p_1(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$

ادامه مثال ۱

- اگر انتخاب بدون جایگزینی باشد، احتمال این که k تا از این n کارت حافظه خراب باشند چقدر خواهد بود؟
- این مساله مشابه انتخاب تعداد مشخصی توپ سیاه و قرمز از میان تعداد مفروضی توپ با این دو رنگ است که در جلسات قبل دیدیم.
- با فرض انتخاب n کارت از N کارت موجود در یک جعبه، احتمال این که k تا از آنها از میان M کارت خراب، و $n-k$ تای دیگر از بین $N-M$ کارت سالم انتخاب شده باشند، چقدر است؟

$$p_2(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

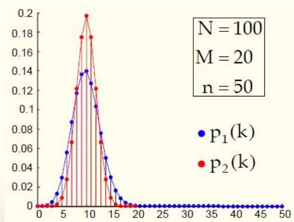
مقایسه $p_1(k)$ و $p_2(k)$

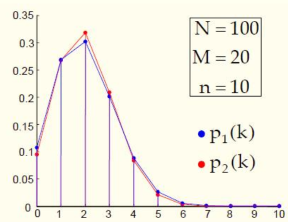
○ برای مقایسه $p_1(k)$ و $p_2(k)$، هر دو آنها را بر حسب $p = M/N$ بیان می‌کنیم:

دوجمله‌ای : $p_1(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

فوق هندسی : $p_2(k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

اگر $M \ll k$ و $N \ll n$ باشد، داریم:
$p_1 \cong p_2$





مثال ۲

○ فرض کنید الگوریتمی داریم که تنها به ازای یک درصد ورودی‌های ممکن آن همگرا می‌شود ($p = 0.01$). چه تعداد ورودی برای این الگوریتم انتخاب کنیم تا به احتمال ۹۵ درصد ($P = 0.95$) مطمئن باشیم که حداقل یک بار همگرا می‌شود؟

آزمایش تصادفی: انتخاب یک ورودی برای الگوریتم

Ω : دو حالت همگرا شدن یا واگرا شدن الگوریتم

A : پیشامد این که الگوریتم همگرا شود. ($p = 0.01$)

Ω_n : 2^n نقطه که همگرا شدن یا نشدن الگوریتم به ازای n ورودی را نشان می‌دهند.

C : پیشامد مورد نظر در Ω_n، که در n آزمایش حداقل یک بار A اتفاق افتد.

می‌خواهیم n را طوری بیابیم که $P(C) = P = 0.95$.

ادامه مثال ۲

$$P(C) = \sum_{k=1}^{n} P_n(k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= 1 - P_n(0) = 1 - q^n = 1 - (1-p)^n$$

- پس می‌خواهیم داشته باشیم:

$$1 - (1-p)^n = P$$

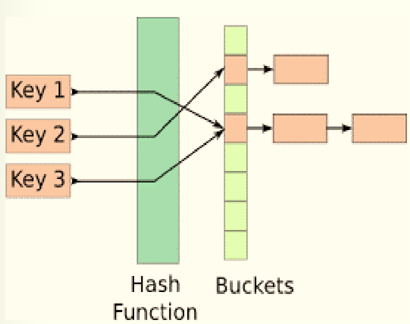
$$1 - P = (1-p)^n$$

$$n = \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$$

که برای $P = 0.95$ و $p = 0.01$ خواهیم داشت: $n = 296$

جدول درهم‌سازی (Hash Table)

- جدول درهم‌سازی نوعی ساختمان داده است که مقدارهایی که باید ذخیره شوند را به وسیله یک تابع درهم سازی با کلیدهای ویژه‌ای مرتبط می‌سازد.
- با استفاده از این جدول کاربر می‌تواند با سرعتی کارآمد داده مورد نظرش را در آن بیابد.
- در جدول‌های درهم‌سازی همچنین افزودن و حذف داده‌های جدید در زمان کم امکان‌پذیر است.
- زمان لازم برای جستجو و افزودن داده، با انتخاب جدول مناسب به مرتبه زمانی O(1) می‌رسد.



مثال

- یک جدول درهم‌سازی شامل n خانه (bucket) در اختیار داریم، و m رشته داخل این جدول ذخیره می‌شوند.
- هر رشته به طور مستقل درهم‌سازی شده و با احتمال p_i در خانه i-ام جدول قرار می‌گیرد.
- احتمال این که حداقل یک رشته داخل خانه اول قرار بگیرد چقدر است؟

$P(E) = 1 -$ {احتمال این که هیچ رشته‌ای داخل خانه اول قرار نگیرد}

$$= 1 - (1-p_1) \times (1-p_1) \times \cdots \times (1-p_1)$$

$$= 1 - (1-p_1)^m$$

مثال

- احتمال این که حداقل در یکی از خانه‌های 1 تا k رشته‌ای قرار بگیرد چقدر است؟

$F_i =$ حداقل یک رشته داخل خانه i قرار بگیرد

$$P(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k) = ?$$

$$P(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k) = 1 - P\big((F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k)^c\big)$$

$$= 1 - P(F_1^c \cap F_2^c \cap \cdots \cap F_k^c)$$

$$P(F_1^c \cap F_2^c \cap \cdots \cap F_k^c) = (1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_k)^m$$

$$P(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k) = 1 - (1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_k)^m$$

قضیه میمون نامتناهی (Infinite monkey theorem)

قضیه: اگر یک میمون به صورت تصادفی کلیدهای یک ماشین تحریر را بفشارد و این کار را به صورت نامتناهی ادامه دهد، به احتمال قریب به یقین هر متن متناهی (مثلاً آثار کامل ویلیام شکسپیر) را تایپ خواهد کرد.

اثبات: فرض کنید طول متن مورد نظر (مثلاً هملت شکسپیر) برابر با m بیت باشد. دنباله نامتناهی را به زیردنباله‌های m بیتی می‌شکنیم:

$m = 4$: 110100010000111111010111100010101011110000011100...

احتمال این که در یکی از این m-بیتی‌ها دنباله مورد نظر ظاهر نشود برابر با $\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$ است. با توجه به استقلال این m-بیتی‌ها، احتمال این که کلاً دنباله مورد نظر ظاهر نشود برابر است با:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)^{n/m} = 0$$

مغالطه استقلال

- در سال ۱۹۹۹ **سالی کلارک** به قتل دو نوزاد پسر خود متهم شد.
- وکلای مدافع او مدعی شدند این دو نوزاد بر اثر سندرم مرگ ناگهانی نوزاد (SIDS) فوت کرده‌اند.
- پروفسور **روی میدو**، پزشک کودکان معروف انگلیسی، با شهادت در دادگاه احتمال چنین پیشامدی را ۱ در ۷۳ میلیون عنوان کرد:

$$\frac{1}{8500}\times\frac{1}{8500}=\frac{1}{72250000}$$

- انجمن سلطنتی آمار با صدور بیانیه‌ای، این ادعا را نمونه‌ای از استفاده نادرست از آمار در دادگاه‌ها معرفی کرد.

استقلال شرطی

- دو پیشامد E و F مستقل هستند اگر: $P(E \cap F) = P(E)P(F)$
- اگر E و F مستقل از هم باشند، آیا رابطه زیر برای پیشامد دلخواه G صحیح است؟

$$P(E \cap F|G) = P(E|G)P(F|G)$$

- در حالت کلی خیر!
- پیشامدهای مستقل ممکن است به شرط وجود اطلاعات اضافی، وابسته شوند.

مثال

- دو تاس را پرتاب می‌کنیم و خروجی آن‌ها را D_1 و D_2 می‌نامیم.
  - E را پیشامد $\{D_1 = 1\}$ و F را پیشامد $\{D_2 = 6\}$ تعریف می‌کنیم.
  - دیدیم که E و F مستقل هستند: $P(E \cap F) = P(E)P(F)$
- فرض کنید G پیشامد $\{D_1 + D_2 = 7\}$ باشد.
- داریم:

$$P(E|G) = 1/6\ ,\ P(F|G) = 1/6\ ,\ P(E \cap F|G) = 1/6$$

$$P(E \cap F\,|G) \neq P(E|G)P(F|G)$$

- بنابراین $E|G$ و $F|G$ به هم وابسته هستند.

استقلال شرطی

- دو پیشامد F و E را مستقل به شرط G می‌گوییم، اگر:

$$P(E \cap F|G) = P(E|G)P(F|G)$$

- اگر E و F در حالت کلی وابسته به هم باشند، آیا ممکن است که برای یک پیشامد G، E و F به شرط G مستقل از هم شوند؟

بله!

$$P(E \cap F) \neq P(E)P(F)$$

$$P(E \cap F|G) = P(E|G)P(F|G)$$

مثال

- یک روز هفته به صورت تصادفی انتخاب می‌شود.
  - پیشامد A: این روز شنبه نباشد
  - پیشامد B: این روز پنجشنبه باشد
  - پیشامد C: این روز پنجشنبه یا جمعه باشد
- A و B وابسته هستند:

$$P(A) = 6/7 \ , \ P(A|B) = 1 \ \rightarrow \ P(A|B) \neq P(A)$$

- از سوی دیگر داریم:

$$P(A|C) = 1 \ , \ P(B|C) = 1/2 \ , \ P(A \cap B|C) = 1/2$$

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

- بنابراین $A|C$ و $B|C$ مستقل از هم هستند.