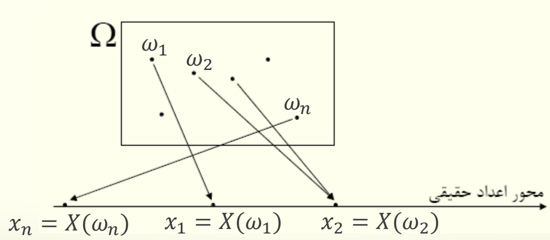
آمار و احتمال مهندسی

متغیر تصادفی

(Ross 4.1-4.5)

متغیر تصادفی (Random Variable)

- متغیر تصادفی تابعی است از نقاط فضای نمونه مثل $X(\omega)$، که به هر یک از نقاط فضای نمونه عددی حقیقی نسبت می‌دهد.
- دامنه این تابع فضای نمونه Ω و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است.



مثال

- در آزمایش پرتاب سه سکه سالم داریم: $\Omega = \{\underbrace{\text{HHH}}_{\omega_1}, \ldots, \underbrace{\text{TTT}}_{\omega_8}\}$
- تعداد شیرها یک متغیر تصادفی است:

$X(\omega) = \omega$ تعداد شیرها در پیشامد

ω	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0

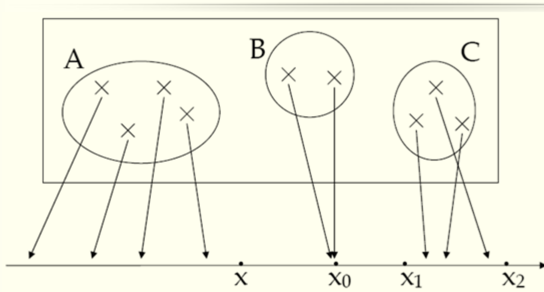
- در مثال فوق احتمال این که $X(\omega) \leq 1$ باشد چیست؟

$P\{X \leq 1\} = P\{\omega: X(\omega) \leq 1\} = P\{\text{HTT}, \text{THT}, \text{TTH}, \text{TTT}\} = 4/8$

- احتمال این که $X(\omega) = 2$ باشد چیست؟

$P\{X = 2\} = P\{\omega: X(\omega) = 2\} = P\{\text{HHT}, \text{HTH}, \text{THH}\} = 3/8$

متغیر تصادفی



$A = \{X \leq x\}$

$B = \{X = x_0\}$

$C = \{x_1 \leq X \leq x_2\}$

- توجه کنید که $\{X \leq x\}$ مجموعه اعداد نیست، بلکه مجموعه‌ای از نقاط فضای حالت است، به عبارت دیگر $\{\omega: X(\omega) \leq x\}$
- حال مثلاً اگر احتمال $\{X \leq x\}$ را برای هر x بدانیم، احتمال همهٔ پیشامدهای مورد نظر را خواهیم داشت و لزومی به دانستن فضای نمونه Ω نیست.

متغیر تصادفی گسسته

- $-\infty$ و $+\infty$ اعداد حقیقی نیستند، لذا $X(\omega)$ نباید $-\infty$ یا $+\infty$ شود، مگر این که احتمال آن ω صفر باشد: $P\{X=-\infty\}=P\{X=+\infty\}=0$
- متغیر تصادفی حقیقی $X(\omega)$ تابعی است حقیقی از نقاط فضای نمونهٔ $\omega \in \Omega$ به طوری که برای هر عدد حقیقی x، مجموعه $\{X(\omega)\le x\}$ یک پیشامد باشد و
$P\{X=-\infty\}=P\{X=+\infty\}=0$
- متغیر تصادفی $X(\omega)$ را گسسته گویند هرگاه مقادیری که $X(\omega)$ می‌تواند اختیار کند (برد تابع) قابل شمارش باشد.
- در حالت گسسته مشابه مثالی که داشتیم ساده‌ترین راه برای مشخص کردن احتمال پیشامدها، مشخص کردن احتمال پیشامدهای $\{X=x_i\}$ برای همه x_iهای ممکنه است (نسبت به مشخص کردن احتمال $\{X\le x\}$ برای هر x).

تابع جرمی احتمال (Probability Mass Function)

- تابع جرمی احتمال (pmf یا تابع احتمال یا تابع فراوانی):

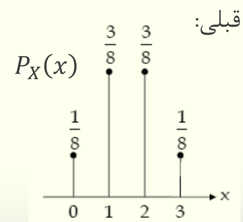
اگر متغیر تصادفی گسسته X فقط مقادیر قابل شمارش x_1، x_2، x_3 و ... را با احتمال‌های p_1، p_2، p_3 و ... اختیار کند، تابع جرمی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_X(x)=\text{Prob}\{X=x\}=\begin{cases}p_i & X=x_i\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

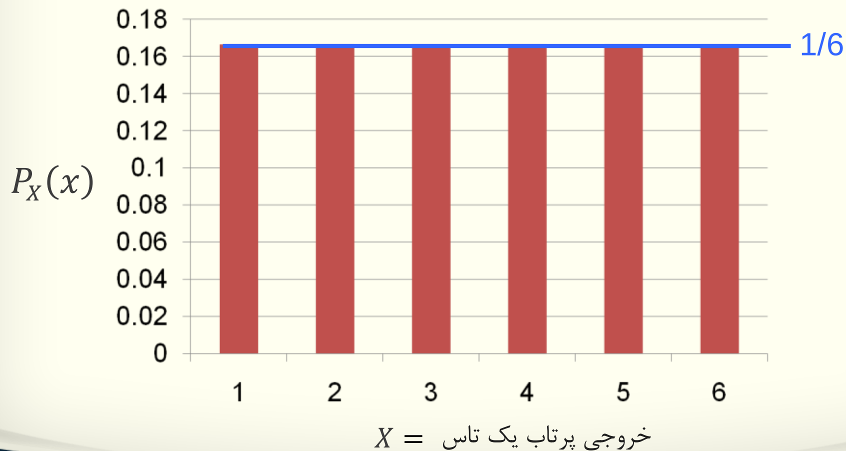
در مثال قبلی:

$$P_X(i)=\text{Prob}\{X=i\}=\binom{3}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-i}$$

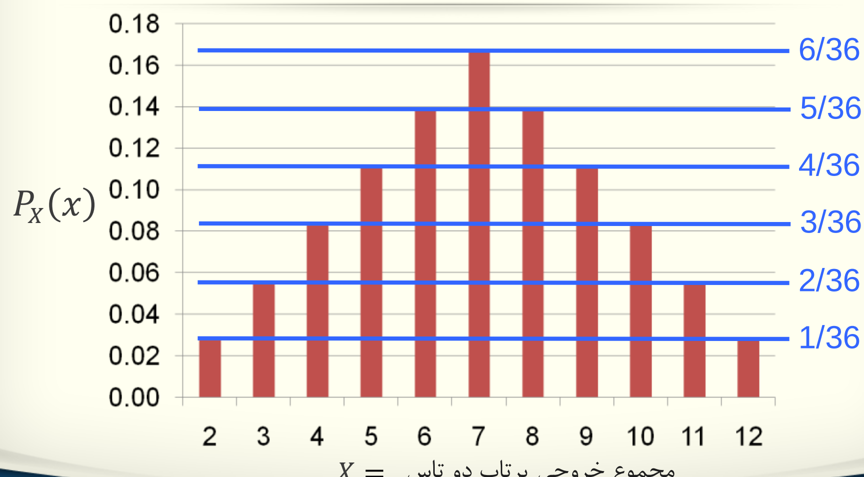
$$=\begin{cases}1/8 & i=0\\ 3/8 & i=1\\ 3/8 & i=2\\ 1/8 & i=3\end{cases}$$



مثال: تابع جرمی احتمال پرتاب یک تاس



مثال: تابع جرمی احتمال مجموع دو تاس



متغیر تصادفی گسسته

- به طور کلی روشن است که p_iها اعدادی بین صفر و یک هستند، چون احتمال پیشامدهای $\{X = x_i\}$اند، و داریم: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

- اگر احتمال هر پیشامد را بخواهیم، با داشتن p_iها قابل محاسبه است، مثلاً در مثال قبل داریم: $P\{X \le 1.1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$

- و به طور کلی برای هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی مثل A داریم:

$$\text{Prob}\{X \in A\} = \sum_{x_i \in A} P_X(x_i)$$

تابع توزیع انباشته (Cumulative Distribution Function)

- تابع توزیع انباشته (CDF یا تابع توزیع تجمعی) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X(a) = \text{Prob}\{X \le a\}$$

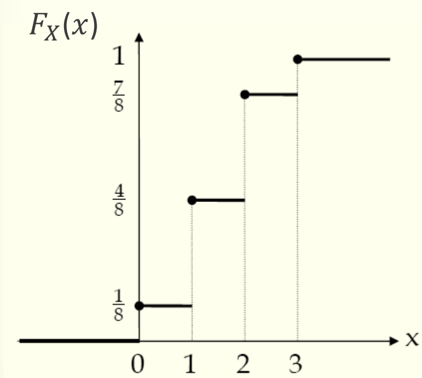
- چه برای متغیر تصادفی پیوسته و چه گسسته اگر احتمال پیشامدهای $\{X \le a\}$ را برای هر a بدانیم، احتمال همهٔ پیشامدها مشخص خواهد شد.

- پس $F_X(x)$ به طور کامل می‌تواند متغیر تصادفی را توصیف کند.

- برای متغیر تصادفی گسسته X تابع CDF به شکل زیر خواهد بود:

$$F_X(a) = \text{Prob}\{X \le a\} = \sum_{\forall x_i \le a} P_X(x_i)$$

مثال: تابع CDF برای تعداد شیرها در پرتاب سه سکه

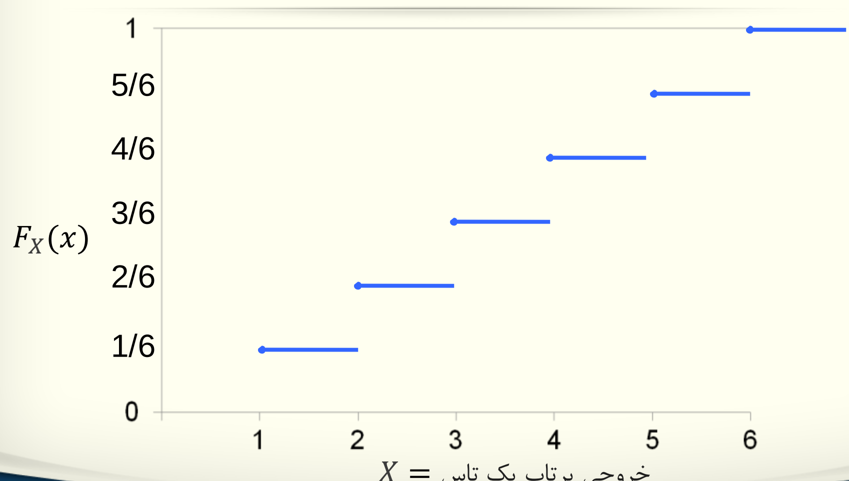


- در مثال پرتاب سه سکه داریم:

$$F_X(-0.001) = \mathrm{P}\{X \le -0.001\} = 0$$
$$F_X(0) = \mathrm{P}\{X \le 0\} = 1/8$$
$$F_X(0.001) = \mathrm{P}\{X \le 0.001\} = 1/8$$
$$F_X(0.999) = \mathrm{P}\{X \le 0.999\} = 1/8$$
$$F_X(1) = \mathrm{P}\{X \le 1\} = 4/8$$
$$F_X(1.0001) = \mathrm{P}\{X \le 1.0001\} = 4/8$$
$$F_X(10) = \mathrm{P}\{X \le 10\} = 1$$

- توجه کنید که در حالت گسسته F_X به صورت پلکانی است.

مثال: تابع CDF برای خروجی پرتاب یک تاس



تابع CDF متغیر تصادفی گسسته

- می‌دانیم که برای متغیر تصادفی گسسته X داریم:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P(x_i) = \sum_i P(x_i)u(x - x_i)$$

که در آن

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

تابع پله واحد است.

و همچنین:

$P(x_k) =$ مقدار پرش $F(x)$ در x_k $= F(x_k) - F(x_k^-)$

خواص تابع توزیع انباشته

1. $F(-\infty) = 0$

زیرا طبق تعریف متغیر تصادفی $P\{X = -\infty\} = 0$

2. $F(+\infty) = 1$

3. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$: تابعی غیرنزولی است $F(x)$

اثبات:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \{\omega: X(\omega) \leq x_1\} \subseteq \{\omega: X(\omega) \leq x_2\}$$
$$\Rightarrow P\{X \leq x_1\} \leq P\{X \leq x_2\} \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

- از سه خاصیت بالا نتیجه می‌شود: $0 \leq F(x) \leq 1$

4. $P\{X > x\} = 1 - F(x)$

$$\{\omega: X(\omega) > x\} = \{\omega: X(\omega) \leq x\}^c$$
$$\Rightarrow P\{X > x\} = 1 - P\{X \leq x\} = 1 - F(x)$$

خواص تابع توزیع انباشته

5. $P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

اثبات:

$\{X \le x_2\} = \{X \le x_1\} \cup \{x_1 < X \le x_2\}$

از آنجا که $\{X \le x_1\}$ و $\{x_1 < X \le x_2\}$ دو مجموعه جدا از هم هستند، داریم:

$$P\{X \le x_2\} = P\{X \le x_1\} + P\{x_1 < X \le x_2\}$$
$$\Rightarrow F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 < X \le x_2\}$$
$$\Rightarrow P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

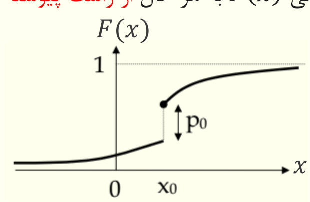
- با قرار دادن $x_2 = x$ و $x_1 = x - \varepsilon$، و میل دادن ε به سمت صفر نتیجه می‌شود که:

$$P\{X = x\} = F(x) - F(x^-)$$

خواص تابع توزیع انباشته

- اگر پرش در $F(x)$ داشته باشیم، $F(x)$ با $F(x^-)$ به اندازه $P(x) = P\{X = x\}$ متفاوت خواهد بود، ولی $F(x)$ به هر حال از راست پیوسته است، یعنی:

$$F(x_0) = F(x_0^+) = P\{X \le x_0\}$$
$$F(x_0^-) = P\{X < x_0\}$$
$$p_0 = F(x_0^+) - F(x_0^-)$$



- ضمناً با توجه به $P\{X = x\} = F(x) - F(x^-)$ داریم:

$$P\{x_1 \le X \le x_2\} = F(x_2^+) - F(x_1^-)$$

6. $F(x) = F(x^+)$

تعریف متغیر تصادفی گسسته

- متغیر تصادفی X را گسسته (discrete) گویند، اگر $F_X(x)$ به صورت پلکانی باشد.
- در این حالت همان طور که قبلاً دیدیم:

$$p_i = P\{X = x_i\} = F(x_i) - F(x_i^-)$$

- تعریف فوق با این تعریف که مقادیر ممکن برای X قابل شمارش هستند معادل است.
- اگر فضای نمونه Ω قابل شمارش باشد، هر متغیر تصادفی X در این فضا گسسته خواهد بود، ولی عکس این قضیه صحیح نیست، و می‌توان روی فضای پیوسته نیز متغیر تصادفی گسسته تعریف کرد.
- مثلاً اگر A پیشامدی در فضای نمونه غیرقابل شمارش Ω باشد، و متغیر تصادفی گسسته X را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

امید ریاضی (Expectation)

- امید ریاضی برای متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i P_X(x_i)$$

- امید ریاضی را میانگین (mean)، متوسط وزن‌دار (weighted average)، مرکز جرم (center of mass)، و گشتاور اول (1^{st} moment) نیز می‌نامند.
- علاوه بر $E(X)$ امید ریاضی را با μ_X و یا μ نیز نمایش می‌دهند.

مثال

- اگر X متغیر تصادفی خروجی پرتاب یک تاس باشد داریم:

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

- متغیر تصادفی Y سه مقدار ۱، ۲، و ۳ را با احتمال‌های زیر اختیار می‌کند:

$$p(Y=1) = \frac{1}{3}, \qquad p(Y=2) = \frac{1}{6}, \qquad p(Y=3) = \frac{1}{2}$$

امید ریاضی Y برابر است با:

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$$

متغیر تصادفی شاخص

- متغیر تصادفی شاخص (indicator) متناظر با پیشامد A:

$$I(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \rightarrow \text{اگر } A \text{ اتفاق بیافتد} \\ 0 & \omega \notin A \rightarrow \text{اگر } A \text{ اتفاق نیافتد} \end{cases}$$

- اگر $P\{A\} = p$ و $P\{\bar{A}\} = 1 - p$ باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E(I) &= 1 \times P(I=1) + 0 \times P(I=0) \\ &= 1 \times P(A) + 0 \times P(\bar{A}) \\ &= P(A) = p \end{aligned}$$

مثال

- مدرسه‌ای دارای سه کلاس با ۵، ۱۰، و ۱۵۰ دانش‌آموز است. یک کلاس را به تصادف و با احتمال یکسان انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X را اندازه کلاس انتخاب شده بگیریم، داریم:

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{3} + 150 \times \frac{1}{3} = \frac{165}{3} = 55$$

- حال یک دانش‌آموز را به تصادف و با احتمال یکسان انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی Y را اندازه کلاسی که دانش‌آموز انتخاب شده در آن قرار دارد بگیریم، داریم:

$$E(Y) = 5 \times \left(\frac{5}{165}\right) + 10 \times \left(\frac{10}{165}\right) + 150 \times \left(\frac{150}{165}\right) = \frac{22635}{165} \approx 137$$

- توجه کنید که احساسی که دانش‌آموزان این مدرسه به طور متوسط از اندازه یک کلاس دارند $E(Y)$ است ولی معمولا $E(X)$ گزارش می‌شود!

مثال (بخت آزمایی)

- فرض کنید در یک مسابقه بخت آزمایی شرکت کرده‌اید که بلیط ورودی آن هزار ریال و جایزه آن یک میلیارد ریال است. امید ریاضی مبلغی که برنده می‌شوید چقدر است؟

$$X = \begin{cases} -1000 & p = 1{,}999{,}999/2{,}000{,}000 \\ 1{,}000{,}000{,}000 & 1-p = 1/2{,}000{,}000 \end{cases}$$

$$E[X] = -1000 \times \frac{1999999}{2000000} + 10^9 \times \frac{1}{2000000} = -\frac{999999}{2000} \approx -500$$

مثال

○ سارا معتقد است در بازی استقلال و پرسپولیس در جام حذفی، استقلال با احتمال 5/8 برنده می‌شود. از سوی دیگر دارا اعتقاد دارد که پرسپولیس این مسابقه را با احتمال 3/4 می‌برد.

الف) شما با سارا شرط می‌بندید که اگر استقلال برنده شد به او ۲۰۰۰ تومان بدهید، و در غیر این صورت از او ۳۰۰۰ تومان بگیرید. آیا شرکت در این شرطبندی برای سارا منطقی است؟

$$E[X] = 2000 \times \frac{5}{8} - 3000 \times \frac{3}{8} = 125$$

ب) شما با دارا شرط می‌بندید که اگر پرسپولیس برنده شد به او ۲۰۰۰ تومان بدهید، و در غیر این صورت از او ۳۰۰۰ تومان بگیرید. آیا شرکت در این شرطبندی برای دارا منطقی است؟

$$E[Y] = 2000 \times \frac{3}{4} - 3000 \times \frac{1}{4} = 750$$

قضیه اساسی امید ریاضی

○ اگر $Y = g(X)$ باشد، که در آن g یک تابع حقیقی است، داریم:

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_i g(x_i) P_X(x_i)$$

اثبات:

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_j y_j P_Y(y_j) = \sum_j y_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} P_X(x_i)$$

$$= \sum_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} y_j\, P_X(x_i) = \sum_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} g(x_i) P_X(x_i)$$

$$= \sum_i g(x_i) P_X(x_i)$$

گشتاور (moment) مرتبه n

- اگر X یک متغیر تصادفی باشد، $E(X^n)$ را گشتاور یا ممان مرتبه n-ام متغیر تصادفی X می‌نامیم:

$$E(X^n) = \sum_i x_i^n P_X(x_i)$$

- مثال: گشتاور مرتبه سوم متغیر تصادفی خروجی پرتاب یک تاس برابر است با:

$$E(X^3) = 1^3 \times \frac{1}{6} + 2^3 \times \frac{1}{6} + 3^3 \times \frac{1}{6} + 4^3 \times \frac{1}{6} + 5^3 \times \frac{1}{6} + 6^3 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{6^2 \times 7^2}{4} = 73.5$$

خطی بودن امید ریاضی

- امید ریاضی یک اپراتور خطی است:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

و برای هر دو متغیر تصادفی X و Y داریم:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

مثال ۱: اگر X خروجی پرتاب یک تاس باشد، و داشته باشیم $Y = 2X - 1$، آن‌گاه:

$$E(X) = 3.5 \ \rightarrow E(Y) = E(2X - 1) = 2E(X) - 1 = 7 - 1 = 6$$

مثال ۲: اگر X خروجی پرتاب یک تاس و Y خروجی پرتاب یک تاس دیگر، آن‌گاه امید ریاضی مجموع دو تاس برابر است با:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 3.5 + 3.5 = 7$$

مثال

- n دانشجو با قدهای متفاوت به صورت تصادفی به صف شده‌اند. اولین دانشجو در صف را انتخاب می‌کنیم و همراه با او در طول صف راه می‌رویم تا به اولین دانشجویی برسیم که قد بلندتری دارد و یا این که به انتهای صف برسیم. در صورتی که با یک دانشجوی بلند قدتر مواجه شدیم، دانشجوی اول را به جای او قرار می‌دهیم و ادامه صف را با دانشجوی جدید طی می‌کنیم و مرتب این عمل را تکرار می‌کنیم تا به انتهای صف برسیم. فرض کنید متغیر تصادفی X برابر با تعداد دانشجوهایی که از صف انتخاب می‌شوند تعریف شود. امید ریاضی X چقدر است؟

می‌توانیم X را به صورت $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ بنویسیم، که متغیر تصادفی شاخص X_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر دانشجوی } i \text{ از صف انتخاب شود} \\ 0 & \text{اگر دانشجوی } i \text{ از صف انتخاب نشود} \end{cases}$$

ادامه مثال

- احتمال این که دانشجوی i-ام بلندقدترین فرد در میان i دانشجوی اول باشد، برابر است با:

$$\frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i}$$

بنابراین:

$$\mathrm{E}(X_i) = 0 \times \left(1 - \frac{1}{i}\right) + 1 \times \frac{1}{i} = \frac{1}{i}$$

در نتیجه به دلیل خطی بودن امید ریاضی خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots + \frac{1}{n}$$

که می‌توان آن را به صورت $\mathrm{E}(X) \cong \ln(n)$ تقریب زد.

محاسبه E[X] به کمک تابع CDF

- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر صحیح و نامنفی باشد: $X = 0,1,2,\dots,n$
آن‌گاه امید ریاضی X برابر است با:

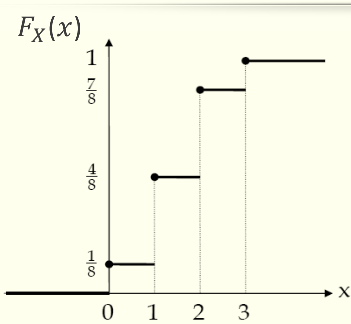
$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} P(X > i) = \sum_{i=0}^{n} (1 - F_X(i))$$

اثبات:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} P(X > i) = {} & P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \cdots + P(X=n) \\ & + P(X=2) + P(X=3) + \cdots + P(X=n) \\ & + P(X=3) + \cdots + P(X=n) \\ & \vdots \\ & + P(X=n) \\ = {} & 1P(X=1) + 2P(X=2) + \cdots + n\,P(X=n) \\ = {} & \sum_{i=0}^{n} i\,P(X=i) = E[X]\end{aligned}$$

مثال

- برای متغیر تصادفی X با تابع CDF مقابل داریم:



$$E[X] = \sum_{i=0}^{3} (1 - F_X(i))$$

$$E[X] = \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \left(1 - \frac{4}{8}\right) + \left(1 - \frac{7}{8}\right) + (1 - 1) = \frac{7}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{2}$$