# آمار و احتمال مهندسی

## توابعی از دو متغیر تصادفی
(Ross 6.7)

بهنام بهرک



## توابعی از دو متغیر تصادفی

- اگر تابعی از دو متغیر تصادفی داشته باشیم، یعنی: $Z = g(X,Y)$
- $Z$ خود یک متغیر تصادفی است که برای هر نقطه از فضای نمونه مثل $\omega$ داریم:

$$Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$$

- برای به دست آوردن توزیع $Z$ می‌نویسیم:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X,Y) \leq z)$$

- اگر ناحیه‌ای در صفحه $x$-$y$ را که برای آن $g(x,y) \leq z$ می‌شود، $D(z)$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$F_Z(z) = P\{(X,Y) \in D(z)\} = \iint_{D(z)} f_{XY}(x,y)dx\,dy$$

# مثال ۱

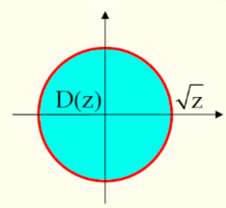
- اگر $Z = X^2 + Y^2$ و $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$ ، یعنی $X$ و $Y$ هر یک $N(0,\sigma)$ و مستقل از هم باشند، داریم:

برای $z \le 0$ : $F_Z(z) = P(Z \le z) = 0$

برای $z > 0$ :

$$F_Z(z) = P\{X^2 + Y^2 \le z\}$$

$$= \iint_{D(z)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_{D(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\,dx\,dy$$




$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r\,dr\,d\theta = 1 - e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}$$



# ادامه مثال ۱

- بنابراین داریم:

$$F_Z(z) = \left(1 - e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}\right) u(z)$$

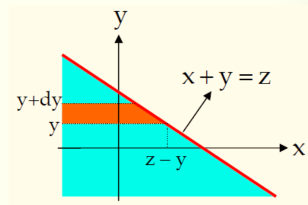
$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} u(z)$$

- به عبارت دیگر $Z$ دارای توزیع نمایی است.
- برای $\sigma = 1$، $Z$ دارای توزیع $\chi^2$ با درجه آزادی ۲ است.
- اگر $Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ باشد، و هر $X_i$ دارای توزیع نرمال $N(0,1)$ باشد، $Z$ دارای توزیع $\chi^2$ با درجه آزادی $n$ خواهد بود.

# مثال ۲

- فرض کنید $Z = X + Y$ که $X$ و $Y$ متغیرهای تصادفی دلخواه هستند. داریم:

$$\mathrm{F}_Z(z) = P\{X + Y \le z\} = \iint_{x+y\le z} f_{XY}(x,y)dx\,dy$$




$$\mathrm{F}_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x,y)dx\,dy$$

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{dF}_Z(z)}{\mathrm{dz}}$$

از قاعده لایبنیتز داریم:

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{a(z)}^{b(z)} g(x,z)dx = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{dz}}g(b,z) - \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{dz}}g(a,z) + \int_{a(z)}^{b(z)}\frac{\partial}{\partial z}g(x,z)dx$$



# ادامه مثال ۲

- با استفاده از این قاعده:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(z-y\,,y)dy$$

- حال اگر $X$ و $Y$ مستقل باشند و $Z = X + Y$، داریم:

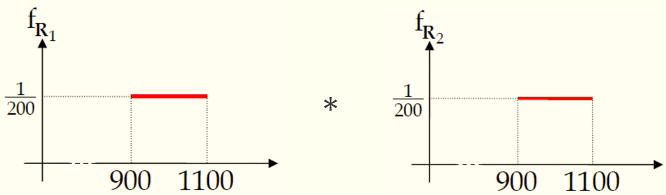
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)f_X(x)dx$$

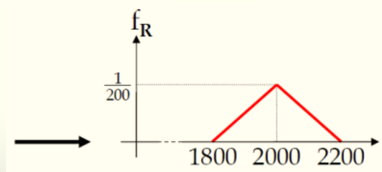
- قبلاً هم دیده بودیم که اگر $X$ و $Y$ مستقل باشند و $Z = X + Y$ باشد، داریم:

$$\Phi_Z(s) = \Phi_X(s)\Phi_Y(s) \;\; \rightarrow \;\; f_Z = f_X * f_Y$$

# مثال ۳

- اگر $R_1 \sim \mathrm{U}(900{,}1100)$ و $R_2 \sim \mathrm{U}(900{,}1100)$ و مقادیر $R_1$ و $R_2$ مستقل باشند، تابع چگالی $R = R_1 + R_2$ را بیابید.




توزیع مثلثی یا سیمپسون (Simpson)



# مثال ۴

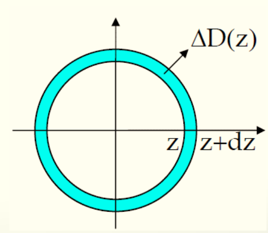
- اگر $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ و $X \sim \mathrm{N}(0,\sigma)$ و $Y \sim \mathrm{N}(0,\sigma)$ و $X$ و $Y$ مستقل از هم باشند، داریم:

For $z < 0$: $f_Z(z)dz = P\{z \le Z \le z + dz\} = 0$

For $z > 0$: $f_Z(z)dz = P\{z \le \sqrt{X^2 + Y^2} \le z + dz\}$

$$f_Z(z)dz = \iint_{\Delta D(z)} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \, dx \, dy$$

$$f_Z(z)dz = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_z^{z+dz} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \, r \, dr \, d\theta$$



# ادامه مثال ۴

- بنابراین خواهیم داشت:

$$f_Z(z)dz = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\frac{1}{\sigma^2}\int_z^{z+dz} r\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\, dr\right)$$

- با استفاده از رابطه $\int_z^{z+dz} g(x)dx = g(z)dz$، خواهیم داشت:

$$f_Z(z)dz = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\, dz$$

- به عبارت دیگر:

توزیع رایلی: $f_Z(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\, u(z)$



# دو تابع از دو متغیر تصادفی

- اگر دو تابع از متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ داشته باشیم، یعنی $Z = g(X,Y)$ و $W = h(X,Y)$ ، دیدیم که با داشتن $f_{XY}$ می‌توان توابع چگالی احتمال $Z$ و $W$ را به دست آورد. اما $f_{ZW}$ را چطور محاسبه کنیم؟

- قضیه. اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{cases}$ دارای ریشه‌های $(x_1,y_1)$، $(x_2,y_2)$ و … باشد، آنگاه:

$$f_{ZW}(z,w) = \sum_i \frac{f_{XY}(x_i,y_i)}{|J(x_i,y_i)|}$$

که در آن:

$$J(x,y) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

# مثال ۱

- فرض کنید $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ و $W=X/Y$:
- ابتدا دستگاه معادلات $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ w=x/y \end{cases}$ را حل می‌کنیم. برای $z>0$، این دستگاه دو ریشه دارد:

$$\left(x_1=\frac{zw}{\sqrt{1+w^2}}\ ,y_1=\frac{z}{\sqrt{1+w^2}}\right) \text{ و } \left(x_2=\frac{-zw}{\sqrt{1+w^2}}\ ,y_2=\frac{-z}{\sqrt{1+w^2}}\right)$$

$$J(x,y)=\det\begin{bmatrix} \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} & \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} \\ \frac{\partial(x/y)}{\partial x} & \frac{\partial(x/y)}{\partial y} \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1/y & -x/y^2 \end{bmatrix}$$



# ادامه مثال ۱

$$J(x,y)=-(1+\frac{x^2}{y^2})/\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow J(x_1,y_1)=J(x_2,y_2)=-\frac{1+w^2}{z}$$

$$f_{ZW}(z,w)=\frac{f_{XY}(x_1,y_1)}{|J(x_1,y_1)|}+\frac{f_{XY}(x_2,y_2)}{|J(x_2,y_2)|}\quad :\quad z>0$$

$$=\frac{z}{1+w^2}\left[f_{XY}\left(\frac{zw}{\sqrt{1+w^2}},\frac{z}{\sqrt{1+w^2}}\right)+f_{XY}(\frac{-zw}{\sqrt{1+w^2}},\frac{-z}{\sqrt{1+w^2}})\right]u(z)$$

# ادامه مثال ۱

- مثلاً اگر $f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$ (یعنی $X$ و $Y$ هر دو $N(0,\sigma)$ و مستقل از هم باشند)، داریم:

$$f_{ZW}(z,w)=\frac{2z}{1+w^2}\times\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}u(z)$$

یعنی:

$$f_Z(z)=\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}u(z) \quad \text{و} \quad f_W(w)=\frac{1/\pi}{1+w^2}$$

توزیع رایلی — توزیع کوشی

- پس $Z$ و $W$ مستقل هستند.



# مثال ۲

- تبدیل خطی $\begin{cases} Z=aX+bY \\ W=cX+dY \end{cases}$ یا $\begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ که $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. از حل این دستگاه برای $x$ و $y$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x=\left(\frac{d}{\det(A)}\right)z+\left(\frac{-b}{\det(A)}\right)w \\ y=\left(\frac{-c}{\det(A)}\right)z+\left(\frac{a}{\det(A)}\right)w \end{cases} \quad \text{و} \quad J(x,y)=\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\det(A)$$

$$f_{ZW}(z,w)=\frac{f_{XY}\left(\left(\frac{d}{\det(A)}\right)z+\left(\frac{-b}{\det(A)}\right)w\,,\,\left(\frac{-c}{\det(A)}\right)z+\left(\frac{a}{\det(A)}\right)w\right)}{|\det(A)|}$$

# ادامه مثال ۲

- مثلاً اگر $\begin{cases} Z = X + Y \\ W = X - Y \end{cases}$ ، داریم:

$$\det(A) = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2$$

با حل معادله داریم:

$$x_1 = \frac{z+w}{2} \quad , \qquad y_1 = \frac{z-w}{2}$$

$$\Rightarrow f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{2} f_{XY}\left(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2}\right)$$

- برای مثال اگر $X,Y \sim N(0,\sigma)$، و مستقل از هم باشند، خواهیم داشت:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



# ادامه مثال ۲

- بنابراین $f_{ZW}$ برابر است با:

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(z+w)^2+(z-w)^2}{8\sigma^2}} = \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2+w^2}{4\sigma^2}}$$

$$f_{ZW}(z,w) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{w^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}}\right)$$

- یعنی $Z$ و $W$ هر یک $N(0,\sqrt{2}\sigma)$ بوده و مستقل از هم هستند.
- به عبارت دیگر اگر $X$ و $Y$ مستقل و دارای چگالی احتمال یکسان $N(0,\sigma)$ باشند، $X+Y$ و $X-Y$ نیز مستقل و نرمال خواهند بود.

# استفاده از متغیر تصادفی کمکی

گاهی اوقات که فقط با یک تابع $Z = g(X,Y)$ مواجهیم و قصد داریم $f_Z$ را بر حسب $f_{XY}$ به دست آوریم، می‌توانیم از متغیر کمکی $W$ استفاده کرده و به کمک قضیه قبلی، $f_Z$ را محاسبه کنیم.

مثال: $Z = XY$

روش اول:

$$F_Z(z) = \iint_{D(z)} f_{XY}(x,y)dx\,dy$$

روش دوم:

$$f_Z(z)dz = \iint_{\Delta D(z)} f_{XY}(x,y)dx\,dy$$



# استفاده از متغیر تصادفی کمکی

روش سوم: استفاده از متغیر کمکی $W = X$

حل دستگاه $\begin{cases} z = xy \\ w = x \end{cases}$ نتیجه می‌دهد:

$$x_1 = w \quad , \qquad y_1 = z/w$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x \;\Rightarrow\; J(x_1,y_1) = -w$$

$$\Rightarrow f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{|w|} f_{XY}\left(w\,,\frac{z}{w}\right)$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{ZW}(z,w)dw = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|w|} f_{XY}\left(w\,,\frac{z}{w}\right)dw$$

# مثال (پایان‌ترم ۱۳۹۵)

- تابع چگالی احتمال مشترک متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} x+4y & 0<y<x<1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z=X/Y$ را حساب کنید.

راه اول: استفاده از تابع توزیع انباشته $F_Z(z)$

$$x>y\ :\ Z=\frac{X}{Y}>1$$

$$z>1:\ F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\le z\right\}=P\{X\le zY\}=?$$



# ادامه مثال

$$zy<1\ ,z>1\rightarrow\ y<\frac{1}{z}\ :\ P\{X\le zY\}=\int_0^{1/z}\int_y^{zy}(x+4y)\,dx\,dy$$

$$\int_y^{zy}(x+4y)\,dx\ =\frac{1}{2}x^2+4xy\ |_y^{zy}=\frac{1}{2}(z^2-1)y^2+4y^2(z-1)$$

$$\int_0^{\frac{1}{z}}\frac{1}{2}(z^2-1)y^2+4y^2(z-1)\,dy\ =\frac{1}{3}y^3\left(\frac{1}{2}(z^2-1)+4(z-1)\right)|_0^{1/z}=\frac{1}{6z}-\frac{3}{2z^3}+\frac{4}{3z^2}$$

$$zy>1\rightarrow\ y>\frac{1}{z}:\ P\{X\le zY\}=\int_{1/z}^{1}\int_y^{1}(x+4y)\,dx\,dy$$

$$\int_y^{1}(x+4y)\,dx\ =\frac{1}{2}x^2+4xy\ |_y^{1}=\frac{1}{2}(1-y^2)+4y(1-y)$$

# ادامه مثال

$$\int_{1/z}^{1}\frac{1}{2}(1-y^2)+4y(1-y)\,dy=\left(-\frac{3}{2}y^3+2y^2+\frac{1}{2}y\right)\Big|_{1/z}^{1}=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2z^3}+2-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2z}$$

$$F_Z(z)=\left(\frac{1}{6z}-\frac{3}{2z^3}+\frac{4}{3z^2}\right)+\left(\frac{3}{2z^3}-\frac{2}{z^2}-\frac{1}{2z}+1\right)=-\frac{2}{3z^2}-\frac{1}{3z}+1$$

$$f_Z(z)=\frac{dF}{dz}=\frac{4}{3}z^{-3}+\frac{1}{3}z^{-2}:z>1$$

راه دوم: استفاده از متغیر کمکی $W=Y$

حل دستگاه $\begin{cases} z=x/y \\ w=y \end{cases}$ نتیجه می‌دهد:

$$x_1=wz,\qquad y_1=w$$



# ادامه مثال

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1/y & -x/y^2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{y}=\frac{1}{w}$$

$$\Rightarrow f_{ZW}(z,w)=|w|\,f_{XY}(wz\,,w)=w(wz+4w)$$

$$z>1\,,0<w<wz<1\rightarrow\ 0<w<1/z$$

$$\Rightarrow f_{\mathbf{z}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{ZW}(z,w)dw=\int_{0}^{\frac{1}{z}}(z+4)w^2\,dw=\frac{1}{3}(z+4)w^3$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{(z+4)}{z^3}=\frac{1}{3z^2}+\frac{4}{3z^3}\ :\ z>1$$

## متغیرهای تصادفی مشترکاً نرمال

- تعریف: $X$ و $Y$ مشترکاً نرمال هستند، اگر $Z = aX + bY$ برای هر $a$ و $b$ نرمال باشد.
- نتیجه: اگر $X$ و $Y$ مشترکاً نرمال باشند، $X$ و $Y$ هر کدام نرمال هستند.
- اما عکس این مطلب لزوماً صحیح نیست. مثلاً ممکن است $X$ و $Y$ هر کدام نرمال باشند، ولی $X + Y$ نرمال نباشد. مثال:

$$X \sim N(0,1)\ , \qquad Y = X(2B-1)\ , \qquad B \sim Bernoulli\left(\frac{1}{2}\right)$$

- حتی ممکن است $X$ و $Y$ و $X + Y$ هر سه نرمال باشند، ولی $X$ و $Y$ مشترکاً نرمال نباشد.
- قضیه. اگر $X$ و $Y$ هر کدام نرمال بوده و مستقل از هم باشند، مشترکاً نرمال خواهند بود (یعنی عکس نتیجهٔ بالا در حالت استقلال $X$ و $Y$ صادق است).



## متغیرهای تصادفی مشترکاً نرمال

- قضیه. $X$ و $Y$ مشترکاً نرمال هستند، اگر و تنها اگر

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}$$

- به عبارت دیگر برای توزیع نرمال، تنها ۵ پارامتر $\sigma_X$، $\sigma_Y$، $\mu_X$، $\mu_Y$ و $\rho$ به طور کامل توزیع مشترک $X$ و $Y$ را مشخص می‌کند.

قضیه. اگر $X$ و $Y$ مشترکاً نرمال بوده و ناهمبسته نیز باشند ($\rho = 0$)، آنگاه مستقل خواهند بود.

اثبات:

$$\rho = 0 \Rightarrow f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]} = f_X(x)f_Y(y)$$

# متغیرهای تصادفی مشترکاً نرمال

- می‌دانیم که در حالت کلی: استقلال $\Leftarrow$ ناهمبستگی، اما: ناهمبستگی $\not\Rightarrow$ استقلال؛
- ولی در مورد متغیرهای تصادفی مشترکا نرمال داریم: استقلال $\Leftrightarrow$ ناهمبستگی.
- قضیه: اگر $X$ و $Y$ مشترکاً نرمال بوده و $\begin{cases} Z = a_{11}X + a_{12}Y \\ W = a_{21}X + a_{22}Y \end{cases}$ ، آنگاه $Z$ و $W$ نیز مشترکاً نرمال خواهند بود.

اثبات: هر ترکیب خطی از $Z$ و $W$، یک ترکیب خطی از $X$ و $Y$ خواهد بود، پس نرمال است (چون $X$ و $Y$ مشترکاً نرمال هستند). درنتیجه $Z$ و $W$ نیز مشترکاً نرمال هستند.