HW4_ 1&2

علیرضا کریمی ۸۱۰۱۰۱۴۹۲

1) الف) $\Phi_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{sk} P_X(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{a}{2} e^{sk} e^{-a|k|}$ (*)

$$= \frac{a}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{0} e^{sk}e^{ak} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{sk}e^{-ak}\right) = \frac{a}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{0} e^{(s+a)k} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{(s-a)k}\right)$$

$$\overset{k'=-k}{=} \frac{a}{2}\left(\sum_{k'=0}^{+\infty} e^{(-s-a)k'} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{(s-a)k}\right) = I$$

if: $-1<e^{-s-a}<1 \Longrightarrow -s-a<0$, $-1<e^{s-a}<1 \Longrightarrow s-a<0$

$\Longrightarrow -a<s<a \quad a>0$ درصورتی که این فرضیات برقرار باشد، داریم:

(با توجه به روابط دنباله هندسی)

$$\Rightarrow I = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-s-a}} + \frac{1}{1-e^{s-a}}\right)$$

ب) $E[X] = \sum x P_X(x) = \frac{a}{2}\sum x e^{-a|x|}$ ①

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \Phi_X(s) = \sum \frac{a}{2} e^{sx} e^{-a|x|} \Longrightarrow \frac{d\Phi_X(s)}{ds}\Big|_{s=0} = \sum \frac{a}{2} e^{-a|x|} \frac{de^{sx}}{ds}\Big|_{s=0}$

$= \sum \frac{a}{2} e^{-a|x|} x e^{sx}\Big|_{s=0} = \frac{a}{2}\sum x e^{-a|x|}$ ②

$\Longleftarrow$ هم از طریق روش ① و هم از طریق روش ② به یک معادله برای امید ریاضی رسیدیم. پس معادلات ما درست است.

از طرفی برای امید ریاضی داریم:

$$E[X] = \frac{a}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x e^{-a|x|}}_{g(x)}$$

از آنجایی که داریم: $g(x) = -g(-x) \Longrightarrow$ تابع داخل سیگما، فرد است $\Longrightarrow E[X] = 0$

2)

$$F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty) \stackrel{\beta<0}{=\!=} (1-e^{\alpha x})(1-e^{-\infty}) = 1-e^{\alpha x}$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty,y) \stackrel{\alpha<0}{=\!=} (1-e^{-\infty})(1-e^{\beta y}) = 1-e^{\beta y}$$

$$\Longrightarrow \quad F_{XY}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) \Longrightarrow X \perp Y$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2((1-e^{\alpha x})(1-e^{\beta y}))}{\partial x\ \partial y}$$

$$= \frac{\partial(1-e^{\alpha x})}{\partial x}\ \frac{\partial(1-e^{\beta y})}{\partial y} = (-\alpha e^{\alpha x})(-\beta e^{\beta y})$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d(1-e^{\alpha x})}{dx} = -\alpha e^{\alpha x}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d(1-e^{\beta y})}{dy} = -\beta e^{\beta y}$$

$$\Longrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \Longrightarrow X \perp Y$$

$$\phi_{XY}(s_1,s_2) = E[e^{s_1X+s_2Y}] = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{s_1x+s_2y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{s_1x+s_2y}\ \alpha\beta e^{\alpha x+\beta y}\,dx\,dy = \overbrace{\int_0^{+\infty}\alpha e^{s_1x} e^{\alpha x}\,dx}^{\phi_X(s_1)}\ \overbrace{\int_0^{+\infty}\beta e^{s_2y} e^{\beta y}\,dy}^{\phi_Y(s_2)}$$

$$\phi_X(s_1) = E[e^{s_1X}] = \int_0^{+\infty} e^{s_1x}(-\alpha e^{\alpha x})\,dx \stackrel{s_1+\alpha<0}{=\!=} \frac{-\alpha}{s_1+\alpha} e^{(s_1+\alpha)x}\Big|_0^{\infty} = \frac{\alpha}{s_1+\alpha}$$

$$\phi_Y(s_2) = E[e^{s_2Y}] = \int_0^{+\infty} e^{s_2y}(-\beta e^{\beta y})\,dy \stackrel{s_2+\beta<0}{=\!=} \frac{-\beta}{s_1+\beta} e^{(s_2+\beta)y}\Big|_0^{\infty} = \frac{\beta}{s_2+\beta}$$

$$\Longrightarrow \phi_{XY}(s_1,s_2) = \phi_X(s_1)\cdot\phi_Y(s_2) \Longrightarrow X \perp Y$$