آمار و احتمال مهندسی

امید ریاضی شرطی
(Ross 7.5-7.6)

توزیع شرطی گسسته

- دیدیم که برای دو پیشامد E و F، احتمال شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

- حال فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند. PMF شرطی متغیر تصادفی X با داشتن متغیر تصادفی Y (در جایی که $P_Y(y) > 0$)، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)}$$

- به عبارت دیگر تابع جرمی احتمال X به شرط Y برابر حاصل تقسیم تابع جرمی احتمال مشترک X و Y (یا $P_{XY}(x,y)$) بر تابع جرمی احتمال Y (یا $P_Y(y)$) است.

تابع توزیع انباشته شرطی

- تابع توزیع انباشته X به شرط Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{X|Y}(a|y) = P(X \le a|Y = y) = \frac{P(X \le a, Y = y)}{P(Y = y)}$$

$$= \frac{\sum_{x \le a} P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)} = \sum_{x \le a} \frac{P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)}$$

$$= \sum_{x \le a} P_{X|Y}(x|y)$$

توزیع شرطی پیوسته

- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند. تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط Y (در جایی که $f_Y(y) > 0$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

- مفهوم چگالی:

$$f_{X|Y}(x|y)dx = \frac{f_{XY}(x, y)dx\, dy}{f_Y(y)dy}$$

$$= \frac{P(x < X < x + dx, y < Y < y + dy)}{P(y < Y < y + dy)}$$

$$= P(x < X < x + dx \mid y < Y < y + dy)$$

تابع CDF شرطی

- تابع CDF شرطی X به شرط Y (جایی که $f_Y(y) > 0$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{X|Y}(a|y) = P(X \leq a | Y = y) = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y)dx$$

- توجه کنید که با این که $P(Y = y) = 0$ است، اما تابع به شرط $Y = y$ قابل تعریف است، زیرا در واقع عملیات به صورت حدی انجام می‌شود:

$$P(Y = y) \approx P\left(y - \frac{\epsilon}{2} \leq Y \leq y + \frac{\epsilon}{2}\right) = \int_{y-\frac{\epsilon}{2}}^{y+\frac{\epsilon}{2}} f_Y(t)dt = \epsilon\, f_Y(y)$$

$$F_{X|Y}(a|y) = \lim_{\epsilon \to 0} P\left(X \leq a \middle| Y \in (y - \frac{\epsilon}{2}, y + \frac{\epsilon}{2})\right)$$

توزیع شرطی و استقلال

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته مستقل باشند، داریم:

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{P(X = x)P(Y = y)}{P(Y = y)} = P(X = x)$$

$$\Rightarrow P_{X|Y}(x|y) = P_X(x)$$

- به طور مشابه برای متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل داریم:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

قضیه بیز

○ قضیه بیز: اگر مجموعه‌های B_i، که $1 \leq i \leq m$ ، افرازی از Ω باشند، برای هر پیشامد دلخواه A از Ω داریم:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)}$$

○ مشابه قضیه بیز برای پیشامدها، برای توابع جرمی احتمال داریم:

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)}$$

$$= \frac{P_{X|Y}(x|y)P_Y(y)}{\sum_{y=-\infty}^{\infty} P_{X|Y}(x|y)P_Y(y)}$$

قضیه بیز

○ به طور مشابه برای توابع چگالی احتمال شرطی متغیرهای تصادفی پیوسته داریم:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx}$$

امید ریاضی شرطی

- امید ریاضی شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(X|M) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x|M)dx$$

$$E(g(X)|M) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x|M)dx$$

- با بکارگیری قضیه احتمال کل در روابط بالا می‌بینیم که اگر A_iها افرازی از Ω باشند، آنگاه:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} E(X|A_i)P(A_i)$$

آمار و احتمال مهندسی
بهنام بهرک

امید ریاضی شرطی

- برای متغیرهای تصادفی گسسته X و Y، امید ریاضی شرطی X به شرط $Y = y$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[X|Y = y] = \sum_{x} x\, P(X = x|Y = y) = \sum_{x} x\, P_{X|Y}(x|y)$$

- به طور مشابه برای متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y داریم:

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)dx$$

- توجه کنید که $E[X|Y = y]$ تابعی از عدد y است.

آمار و احتمال مهندسی
بهنام بهرک

مثال

- دو تاس D_1 و D_2 را پرتاب می‌کنیم:
  - متغیر تصادفی X را برابر مقدار $D_1 + D_2$ تعریف می‌کنیم.
  - متغیر تصادفی Y را برابر مقدار D_2 تعریف می‌کنیم.
- امید ریاضی X به شرط $Y = 6$ چقدر است؟

$$E[X|Y=6] = \sum_x x\, P(X=x|Y=6)$$
$$= \frac{1}{6}(7+8+9+10+11+12) = \frac{57}{6} = 9.5$$

- به طور شهودی:

$$E[D_1 + D_2|D_2 = 6] = 6 + E[D_1|D_2 = 6] = 6 + E[D_1] = 6 + 3.5 = 9.5$$

امید ریاضی شرطی

- $E(X)$ یک عدد است.
- به همین ترتیب $E(X|Y=y)$ دیگر یک متغیر تصادفی نیست، بلکه برای هر y یک عدد است.
- یعنی $E(X|Y=y)$ تابعی از y است:

$$g(y) = E(X|Y=y)$$

- حال می‌توانیم $E(X|Y)$ را در نظر بگیریم که خود یک متغیر تصادفی است:

$$g(Y) = E(X|Y)$$

مثال

- تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا ۶ بیاید. فرض کنید Y متغیر تصادفی باشد که تعداد پرتاب‌ها تا رسیدن به ۶ را نمایش می‌دهد و X متغیر تصادفی نشان‌دهنده تعداد دفعاتی که تاس ۱ می‌آید تا به ۶ برسیم. $E(X|Y=y)$ و $E(X|Y)$ را محاسبه کنید.
- برای محاسبه $E(X|Y=y)$ توجه کنید که از آنجایی که $Y=y$، می‌دانیم که تاس در پرتاب y-ام ۶ آمده است، و در $(y-1)$ پرتاب اول فقط مقادیری بین ۱ تا ۵ را اختیار کرده است.
- پس تعداد دفعاتی که تاس ۱ آمده است، یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با $n=y-1$ و $p=\frac{1}{5}$ است، بنابراین:

$E(X|Y=y)=np=\frac{1}{5}(y-1)$ $\rightarrow$ تابعی از y

ادامه مثال

- بنابراین به ازای هر مقدار $Y=y$، خواهیم داشت:

$$E(X|Y=y)=\frac{1}{5}(y-1)$$

در نتیجه:

$$E(X|Y)=\frac{1}{5}(Y-1)$$

- به عبارت دیگر $E(X|Y)$ تابعی از متغیر تصادفی Y است و در نتیجه خود یک متغیر تصادفی است.

خواص امید ریاضی شرطی

○ اگر X و Y متغیرهای تصادفی با توزیع مشترک $f_{XY}(x,y)$ باشند، آنگاه:

$$E[g(X)|Y=y]=\sum_{x} g(x)P_{X|Y}(x|y)$$

و یا

$$E[g(X)|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|Y}(x|y)dx$$

○ امید ریاضی شرطی نیز خاصیت خطی بودن را داراست:

$$E[\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i\,|Y=y]=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E[X_i|Y=y]$$

خواص امید ریاضی شرطی

○ امید ریاضی متغیر تصادفی $E[X|Y]$ با امید ریاضی متغیر تصادفی X برابر است:

$$E\big[E[X|Y]\big]=E[X]$$

اثبات:

$$E\big(E(X|Y)\big)=E\big(g(Y)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} E(X|Y=y)f_Y(y)dy$$

$$E(E(X|Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)dx\right)f_Y(y)dy$$

$$E(E(X|Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dx\,dy$$

$$E\big(E(X|Y)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{XY}(x,y)dy\,dx=E(X)$$

مثال ۱

- تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا ۶ بیاید. فرض کنید Y متغیر تصادفی باشد که تعداد پرتاب‌ها تا رسیدن به ۶ را نمایش می‌دهد و X متغیر تصادفی نشان‌دهنده تعداد دفعاتی که تاس ۱ می‌آید تا به ۶ برسیم. میانگین متغیر تصادفی X را حساب کنید.

دیدیم که: $E(X|Y) = \frac{1}{5}(Y-1)$

$$E[E(X|Y)] = E(X) \Rightarrow E[X] = \frac{1}{5}(E(Y)-1)$$

می‌دانیم که Y یک متغیر تصادفی هندسی با $p = \frac{1}{6}$ است، بنابراین:

$$E(Y) = \frac{1}{p} = 6$$

در نتیجه:

$$E(X) = \frac{1}{5}(6-1) = 1$$

مثال ۲

- تابع بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

```
int Recurse() {
    int x = randomInt(1, 3);
    if (x == 1) return 3;
    else if (x == 2) return (5 + Recurse());
    else return (7 + Recurse());
}
```

- تابع randomInt(a,b) یک عدد صحیح با توزیع یکنواخت در بازه $[a,b]$ تولید می‌کند.
- فرض کنید Y مقدار خروجی تابع ()Recurse باشد.
- $E[Y]$ چقدر است؟

ادامه مثال ۲

```
int Recurse() {
   int x = randomInt(1, 3);
   if (x == 1) return 3;
   else if (x == 2) return (5 + Recurse());
   else return (7 + Recurse());
}
```

$$E[Y] = E[Y|X=1]P(X=1) + E[Y|X=2]P(X=2) + E[Y|X=3]P(X=3)$$

$$E[Y|X=1] = 3$$
$$E[Y|X=2] = E[5+Y] = 5 + E[Y]$$
$$E[Y|X=3] = E[7+Y] = 7 + E[Y]$$

$$E[Y] = 3 \times \frac{1}{3} + (5 + E[Y])\left(\frac{1}{3}\right) + (7 + E[Y])\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)(15 + 2E[Y])$$
$$E[Y] = 15$$

خواص امید ریاضی شرطی

۲) اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه $E(Y|X) = E(Y)$.

اثبات:

اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه:

$$\forall x : E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y) dy = E(Y)$$

$$\Rightarrow \forall x : g(x) = c \quad \Rightarrow g(X) = c$$

$$\Rightarrow E(Y|X) = E(Y)$$

خواص امید ریاضی شرطی

۳) برای هر متغیر تصادفی X داریم:

$$E[g(X)|X] = g(X)$$

اثبات:

$$E[g(X)|X = x] = E[g(x)|X = x]$$

از آنجا که $g(x)$ یک عدد ثابت است، امید ریاضی آن به شرط هر پیشامدی برابر با خودش است:

$$E[g(x)|X = x] = g(x)$$

چون رابطه بالا به ازای هر x برقرار است:

$$E[g(X)|X] = g(X)$$

خواص امید ریاضی شرطی

۴) برای هر متغیر تصادفی X داریم:

$$E[g_1(X)g_2(Y)|X] = g_1(X)E[g_2(Y)|X]$$

اثبات:

$$E[g_1(X)g_2(Y)|X = x] = E[g_1(x)g_2(Y)|X = x]$$

از آنجا که $g_1(x)$ یک عدد ثابت و امید ریاضی یک اپراتور خطی است، می‌توان $g_1(x)$ را بیرون آورد:

$$E[g_1(x)g_2(Y)|X = x] = g_1(x)E[g_2(Y)|X = x]$$

چون رابطه بالا به ازای هر x برقرار است:

$$E[g_1(X)g_2(Y)|X] = g_1(X)E[g_2(Y)|X]$$

مثال ۱

○ متغیرهای تصادفی X و Y مستقل از یکدیگر بوده و هر دو دارای توزیع یکنواخت بر روی بازه (0,1) هستند. فرض کنید $Z = X + Y$. مقدار $E[Z|X]$ را محاسبه کنید.

$$X, Y \sim U(0,1) \rightarrow \quad E[X] = E[Y] = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} E[Z|X] &= E[X+Y|X] \\ &= E[X|X] + E[Y|X] \\ &= X + E[Y] \\ &= X + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال ۲

○ آزمایش‌های ساده و مستقل برنولی با احتمال موفقیت p به طور متوالی انجام می‌شوند. اگر N تعداد شکست‌ها تا حصول اولین موفقیت باشد، $E(N)$ و $\mathrm{Var}(N)$ را پیدا کنید.

فرض کنید:

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{اگر آزمایش اول موفق باشد} \\ 0 & \text{اگر آزمایش اول موفق نباشد} \end{cases}$$

$$E(N) = E[E(N|Z)]$$

$$E(N|Z=1) = 0 \quad , \qquad E(N|Z=0) = E(1+N)$$

$$E(N) = E(N|Z=1)P(Z=1) + E(N|Z=0)P(Z=0) = 0 + q\,E(1+N)$$

$$\Rightarrow E(N) = q\big(1 + E(N)\big) \Rightarrow E(N) = \frac{q}{p}$$

ادامه مثال ۲

$$E(N^2) = E[E(N^2|Z)]$$

$$E(N^2|Z=1) = 0$$
$$E(N^2|Z=0) = E[(1+N)^2]$$

$$\Rightarrow E(N^2) = E(N^2|Z=1)\mathrm{P}(Z=1) + E(N^2|Z=0)P(Z=0)$$

$$\Rightarrow E(N^2) = 0 + q\, E[(1+N)^2] = q(E(N^2) + 2E(N) + 1)$$

$$\Rightarrow E(N^2) = \frac{pq + 2q^2}{p^2}$$
$$\Rightarrow \mathrm{var}(N) = E(N^2) - E^2(N) = \frac{q}{p^2}$$

مثال ۳

- فرض کنید شما دارای یک وبسایت هستید.
- متغیر تصادفی X = تعداد افرادی که در روز از وبسایت شما بازدید می‌کنند: $X \sim N(50,25)$
- متغیر تصادفی Y_i = تعداد دقایقی که بازدیدکننده i-ام بر روی سایت گذرانده است: $Y_i \sim Poi(8)$
- متغیرهای تصادفی X و Y_iها مستقل از یکدیگرند.
- مجموع مدت زمان سپری شده توسط بازدیدکنندگان بر روی این وبسایت برابر است با:

$$W = \sum_{i=1}^{X} Y_i$$

- امید ریاضی W چقدر است؟

$$E[W] = E\left[\sum_{i=1}^{X} Y_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{X} Y_i \,|X\right]\right]$$

ادامه مثال ۳

$$E\left[\sum_{i=1}^{X} Y_i \,|X=n\right] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i|X=n] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i] = n\,E[Y_i]$$

- بنابراین:

$$E\left[\sum_{i=1}^{X} Y_i \,|X\right] = X\,E[Y_i]$$

$$E\left[E\left[\sum_{i=1}^{X} Y_i \,|X\right]\right] = E[X \times E[Y_i]] = E[X]E[Y_i] = 50 \times 8 = 400$$

$$E[W] = E\left[\sum_{i=1}^{X} Y_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{X} Y_i \,|X\right]\right] = 400$$

مثال ۴

- متغیرهای تصادفی X و Y مستقل از یکدیگر بوده و هر دو دارای توزیع یکنواخت بر روی بازه (0,1) هستند. فرض کنید $Z = X + Y$. مقدار $E[XZ|X]$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} E[XZ|X] &= E[X(X+Y)|X] \\ &= E[X^2|X] + E[XY|X] \\ &= X^2 + X.E[Y|X] \\ &= X^2 + X.E[Y] \\ &= X^2 + X\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

پیش‌بینی

- متغیر تصادفی X را مشاهده می‌کنیم و می‌خواهیم بر مبنای این مشاهده پیش‌بینی برای متغیر تصادفی Y ارائه دهیم:
- مثال: X قیمت سهام یک شرکت در ساعت ۹ صبح، و Y قیمت این سهام در ساعت ۱۰ صبح است.
- فرض کنید $g(X)$ تابعی باشد که برای پیش‌بینی Y به کار می‌رود: $\hat{Y} = g(X)$
- $g(X)$ باید طوری انتخاب شود که تابع خطای $E\left[\left(Y - g(X)\right)^2\right]$ کمینه شود.
- می‌توان اثبات کرد که بهترین پیش‌بینی‌کننده (best estimator) برای Y برابر است با:

$$g(X) = E[Y|X]$$

- به طور شهودی $E[(Y - c)^2]$ وقتی کمینه می‌شود که $c = E[Y]$
  - در اینجا شما X را مشاهده می‌کنید و Y به X بستگی دارد، پس $c = E[Y|X]$

مثال

- فرض کنید قد شما X سانتیمتر باشد: $X = 176cm$
- به طور تاریخی می‌دانیم که اگر قد آقایان X باشد، قد فرزند پسر آنها دارای توزیع نرمال $Y \sim N(X + 2{,}10)$ خواهد بود.
  - به عبارت دیگر $Y = (X + 2) + C$ که در آن $C \sim N(0{,}10)$
- پیش‌بینی شما از قد فرزند ذکورتان در آینده چقدر است؟

$$\begin{aligned}
E[Y|X = 176] &= \\
&= E[X + 2 + C \mid X = 176] \\
&= E[178 + C \mid X = 176] \\
&= E[178 + C] = 178 + E[C] \\
&= 178 + 0 = 178\ cm
\end{aligned}$$

محاسبه احتمالات به روش شرطی

- متغیر تصادفی X = متغیر شاخص برای پیشامد A
  - $E[X] = P(A)$
  - به طور مشابه $E[X|Y=y] = P(A|Y=y)$

$$E[X] = E_Y\big[E_X[X|Y]\big] = E\big[E[X|Y]\big] = E[P(A|Y)]$$

- برای متغیر تصادفی گسسته X:

$$E[X] = \sum_y P(A|Y=y)P(Y=y) = P(A)$$

- این رابطه را قبلا به اسم قضیه احتمال کل دیده بودیم.