آمار و احتمال مهندسی

توزیع مشترک

(Ross 6.1)

دو متغیر تصادفی

- متغیر تصادفی X تابعی است که به نقاط ω_i، مقادیر x_i را نسبت می‌دهد:

$$x_1 = X(\omega_1), x_2 = X(\omega_2), \dots, x_N = X(\omega_N)$$

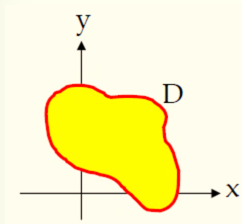
- به همین ترتیب اگر متغیر تصادفی دیگری مانند Y را روی همین فضای نمونه در نظر بگیریم، به نقاط ω_i، اعداد دیگری (y_iها) را نسبت دهد:

$$y_1 = Y(\omega_1), y_2 = Y(\omega_2), \dots, y_N = Y(\omega_N)$$

- در رابطه با X و Y به دنبال پیشامدهایی نظیر $\{X = x_1\}$ یا $\{Y \leq y_3\}$ بودیم.

دو متغیر تصادفی

- می‌توان با در نظر گرفتن زوج مرتب‌های (x_i,y_i)، احتمال پیشامدهایی همچون $\{X = x_1,Y = y_1\}$ یا $\{X \le x_0,Y \le y_0\}$ و به طور کلی $\{(X,Y) \in D\}$ را مطرح کرد.



$$\{(X,Y) \in D\} = \{\omega | (X(\omega),Y(\omega)) \in D\}$$

- در حالت کلی تنها با داشتن توزیع X و توزیع Y، احتمال این پیشامدهای دوبعدی مشخص نمی‌شود (مگر آن که X و Y مستقل باشند) و برای مشخص کردن احتمال این پیشامدها به ابزارهای جدیدی نیاز داریم.

تابع احتمال مشترک

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، آنگاه تابع احتمال مشترک (joint pmf یا joint probability function) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{XY}(x,y) = P\{X = x \,, Y = y\}$$

- اگر x_iها مقادیر ممکن برای X و y_jها مقادیر ممکن برای Y باشند، داریم:

$$P_{XY}(x,y) = \begin{cases} p_{ij} & X = x_i, Y = y_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- پس خواهیم داشت:

$$\sum_i \sum_j P_{XY}(x_i,y_j) = \sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

تابع احتمال حاشیه‌ای (Marginal pmf)

- از طرف دیگر چون می‌دانیم که:

$$\{X = x_i\} = \bigcup_j \{X = x_i, Y = y_j\}$$

پس:

$$P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

- در نتیجه توابع احتمال حاشیه‌ای زیر را داریم:

$$P_X(x_i) = \sum_j P_{XY}(x_i, y_j) \quad : X \text{ حاشیه‌ای pmf}$$

$$P_Y(y_j) = \sum_i P_{XY}(x_i, y_j) \quad : Y \text{ حاشیه‌ای pmf}$$

جدول شرطی (Contingency Table)

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P_Y(y)$
0	0.16	0.12	0.07	0.04	0.39
1	0.13	0.14	0.12	0	0.39
2	0.07	0.11	0	0	0.18
3	0.04	0	0	0	0.04
$P_X(x)$	0.40	0.37	0.19	0.04	1.00

Marginal distributions

$$P(X = 2) = 0.19$$

$$P(X = 0, Y = 1) = 0.13$$

$$P(X = 2 | Y = 1) = \frac{0.12}{0.39} = \frac{4}{13}$$

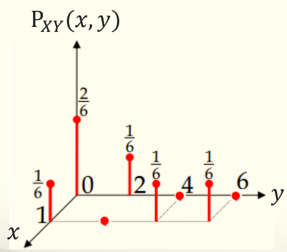
$$P(Y = 0 | X = 3) = \frac{0.04}{0.04} = 1$$

مثال

- تاسی را می‌اندازیم و متغیرهای تصادفی X و Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X(f_i)=\begin{cases}0 & i<4\\ 1 & i\geq 4\end{cases} \quad \text{و} \quad Y(f_i)=\begin{cases}i & \text{زوج } i\\ 0 & \text{فرد } i\end{cases}$$

- X می‌تواند دو مقدار صفر و یک را داشته باشد. Y نیز می‌تواند چهار مقدار 0، 2، 4، و 6 را اختیار کند. پس:

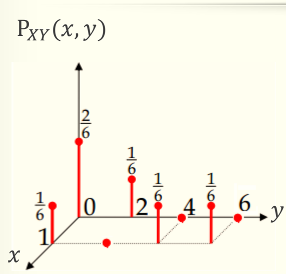


$$\begin{array}{ll} 1\rightarrow(0{,}0) & 4\rightarrow(1{,}4)\\ 2\rightarrow(0{,}2) & 5\rightarrow(1{,}0)\\ 3\rightarrow(0{,}0) & 6\rightarrow(1{,}6)\end{array}$$

- از ۸ تا p_{ij}، ۵ تا غیرصفر هستند.

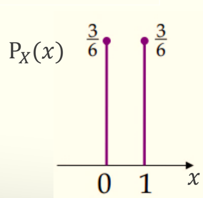
ادامه مثال

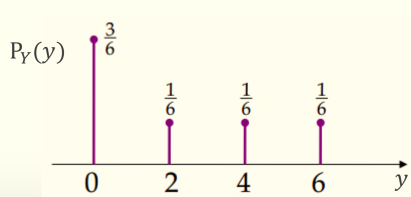
- توابع احتمال حاشیه‌ای X و Y به صورت زیر هستند:



$$P_X(x_i)=\sum_j P_{XY}(x_i,y_j)$$

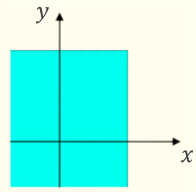
$$P_Y(y_j)=\sum_i P_{XY}(x_i,y_j)$$





تابع توزیع انباشته مشترک (Joint CDF)

- در حالت پیوسته $\mathrm{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$ صفر است و در نتیجه تابع احتمال، مشخص‌کننده احتمال پیشامدها نیست. به همین دلیل CDF مشترک و pdf مشترک را معرفی می‌کنیم.
- طبق تعریف: $\mathrm{F}_{XY}(x,y) = \mathrm{P}\{X \le x, Y \le y\}$
  یعنی ناحیه D مطابق شکل مقابل است:



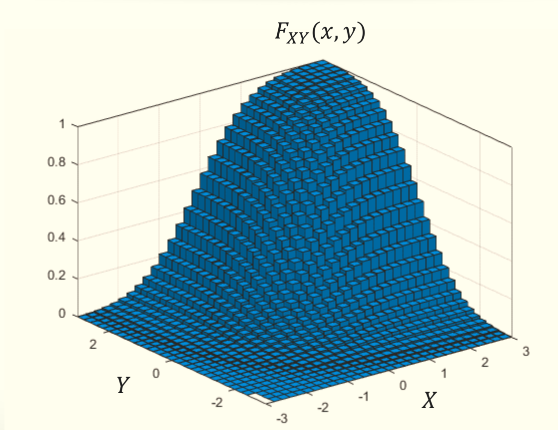
- در حالت گسسته:

$$\mathrm{F}_{XY}(x,y) = \mathrm{P}\{X \le x, Y \le y\}$$

- برای مثال قبلی:

$$\mathrm{F}_{XY}(0.2,2) = P(0,0) + P(0,2) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

تابع CDF مشترک متغیرهای تصادفی گسسته



خواص CDF مشترک

1) $F_{XY}(-\infty,-\infty)=0$
2) $F_{XY}(-\infty,y)=0\,,\ F_{XY}(x,-\infty)=0$
3) $F_{XY}(+\infty,+\infty)=1$

توابع CDF حاشیه‌ای (Marginal CDF):

4) $\begin{cases} F_{XY}(x,+\infty)=P\{X\le x\}=F_X(x) \\ F_{XY}(+\infty,y)=P\{Y\le y\}=F_Y(y)\end{cases}$

پس برای $y_1<y_2$ داریم:

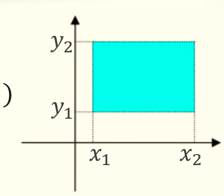
5) $P\{X\le x, y_1<Y\le y_2\}=F_{XY}(x,y_2)-F_{XY}(x,y_1)$

و برای $x_1<x_2$ نیز داریم:

6) $P\{x_1<X\le x_2, Y\le y\}=F_{XY}(x_2,y)-F_{XY}(x_1,y)$

خواص CDF مشترک

$$P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}$$
$$=F_{XY}(x_2,y_2)-F_{XY}(x_1,y_2)-F_{XY}(x_2,y_1)+F_{XY}(x_1,y_1)$$



- برای متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y نیز تابع CDF به همین صورت تعریف می‌شود:

$F_{XY}(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

- توجه کنید که اگر X و Y پیوسته باشند، آنگاه $P\{X=x, Y=y\}=0$. یعنی یک نقطه تنها احتمالی ندارد.
- همچنین داریم: $P\{X=x, Y\le y\}=0$، یعنی یک خط هم احتمالی ندارد و حتماً باید ناحیه D سطحی غیرصفر باشد.

تابع چگالی احتمال مشترک (Joint pdf)

- برای متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y، تابع چگالی احتمال مشترک با استفاده از تابع CDF مشترک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \frac{\partial^2 \mathrm{F}_{\mathrm{XY}}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- از تعریف می‌توان نشان داد که:

$$f_{\mathrm{XY}}(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \mathrm{P}\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\ , y < Y \leq y + \mathrm{d}y\}$$

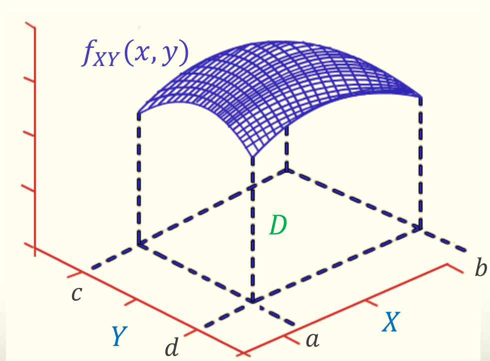
بنابراین:

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f_{\mathrm{XY}}(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

یعنی حجم زیر تابع $f_{\mathrm{XY}}(x,y)$ در هر ناحیه D، بیانگر احتمال آن ناحیه است.

تابع چگالی احتمال مشترک

$$P\{a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d\} = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)dy\ dx$$



تابع چگالی احتمال مشترک

- اگر D را ناحیه $x \leq X$ و $y \leq Y$ در نظر بگیریم و با توجه به تعریف CDF داریم:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \;= P\{X \leq x\,, Y \leq y\}$$

- به عنوان حالت خاص خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;= F(+\infty,+\infty) = 1$$

همچنین می‌دانیم که $F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty)$، بنابراین:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای

- در نتیجه توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y به صورت زیر تعریف می‌شوند:

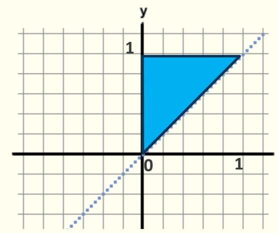
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x$$

مثال

○ تابع توزیع احتمال مشترک متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kx & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx\,dy = 1$$

الف) مقدار k را محاسبه کنید.

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^y kx\,dx\,dy = 1 \quad \text{یا} \quad \int_0^1\int_x^1 kx\,dy\,dx = 1$$

مثال

$$\int_0^1\int_0^y kx\,dx\,dy = 1$$

$$\int_0^y kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^y = \frac{1}{2}ky^2$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}ky^2dy = \frac{1}{2}k \times \frac{1}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}k - 0 = \frac{k}{6} = 1 \;\Rightarrow\; k = 6$$

مثال

ب) احتمال $P\{\frac{1}{2} < X < 1\}$ چقدر است؟

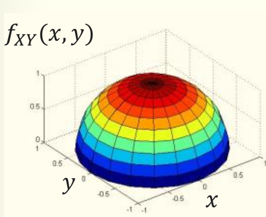
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_x^1 6x\ dy = 6xy\ \Big|_x^1 = 6x(1-x)$$

$$P\left\{\frac{1}{2} < X < 1\right\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6x(1-x)\ dx = 3x^2 - 2x^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= (3-2) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

مثال

- برای تابع چگالی احتمال زیر، مقدار c، تابع $f_X(x)$، و مقدار $P\{X^2 + Y^2 < \frac{1}{2}\}$ را محاسبه کنید.



$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c(1 - x^2 - y^2) & 0 < x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

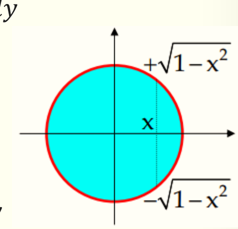
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{dx\ dy} = 1 \ \Rightarrow \iint_{\text{روی دایره واحد}} c(1 - x^2 - y^2)\mathrm{dx\ dy} = 1$$

$$\Rightarrow c \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)r\ dr\ d\theta = 1 \quad \Rightarrow c = \frac{2}{\pi}$$

ادامه مثال

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}(1-x^2-y^2)dy$$

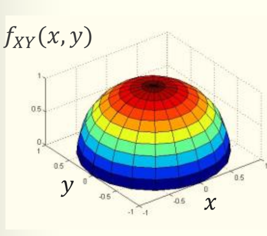
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{3\pi}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} & -1 < x < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



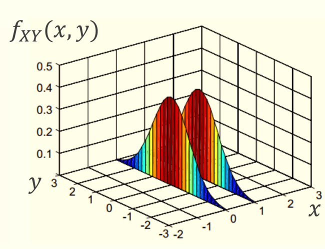
$$\mathrm{P}\left\{X^2 + Y^2 < \frac{1}{2}\right\} = \iint_{\text{دایره به شعاع } \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2}{\pi}(1-x^2-y^2)dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi}(1-r^2)r\,dr\,d\theta = \frac{3}{4}$$

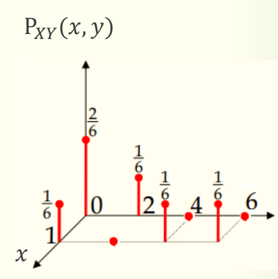
تابع احتمال مشترک



X و Y هر دو پیوسته



X گسسته ولی Y پیوسته



X و Y هر دو گسسته

pmf مشترک برای n متغیر تصادفی

○ بردار تصادفی $\vec{X}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$$

تابع pmf مشترک برای بردار $\vec{X}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{\vec{X}}(\vec{x}) = P_{X_1X_2\dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots, X_n = x_n\}$$

که در آن:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

توزیع چندجمله‌ای (multinomial)

○ اگر n شیء داشته باشیم، و بخواهیم این اشیاء را به k دسته A_1، A_2، ... و A_k تقسیم کنیم که به ترتیب r_1، r_2، ... ، و r_k عضو داشته باشند، به طوری که $\sum_i r_i = n$ ، آن‌گاه تعداد حالات ممکنه برابر است با:

$$\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}$$

○ فرض کنید n آزمایش مستقل داشته باشیم که نتیجه هر آزمایش یکی از m خروجی ممکن باشد و احتمال خروجی‌ها p_1، p_2، ....، p_m باشد که $\sum_i p_i = 1$.

○ متغیر تصادفی X_i را برابر با تعداد آزمایش‌های با خروجی i تعریف می‌کنیم. داریم:

$$P(X_1 = c_1, X_2 = c_2, \dots, X_m = c_m) = \binom{n}{c_1, c_2, \dots, c_m} p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_m^{c_m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = n \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

مثال

- تاسی را ۷ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این که یک بار ۱، یک بار ۲، دو بار ۴، و سه بار ۶ بیاید چقدر است؟

$X_i =$ تعداد دفعاتی که i می‌آید

$$P(X_1=1, X_2=1, X_3=0, X_4=2, X_5=0, X_6=3) =$$
$$\frac{7!}{1!\,1!\,0!\,2!\,0!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{420}{6^7}$$

- توزیع چندجمله‌ای در واقع حالت تعمیم‌یافته توزیع دوجمله‌ای است:
  - در توزیع دوجمله‌ای هر آزمایش دو خروجی دارد.
  - در توزیع چندجمله‌ای هر آزمایش m خروجی دارد.

cdf مشترک

- تابع توزیع مشترک (joint CDF) برای بردار $\vec{X}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = F_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2 \ldots, X_n \le x_n\}$$

- مقدار این تابع همواره بین صفر و یک است.
- تابع CDF مشترک به ازای تمام آرگومان‌ها صعودی است.
- $F(-\infty, -\infty, \ldots, -\infty) = 0$
- $F(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1$
- اگر به جای برخی از آرگومان‌ها بینهایت بگذاریم، CDF مشترک سایر متغیرهای تصادفی حاصل می‌شود. برای مثال:

$$F_{X_1X_2X_3}(+\infty, x_2, x_3) = F_{X_2X_3}(x_2, x_3)$$

pdf مشترک

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$
$$= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} F_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- به این ترتیب روابط زیر برقرار خواهند بود:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = P\{x_1 < X_1 < x_1 + dx_1, \ldots, x_n < X_n < x_n + dx_n\}$$

$$F_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\ldots\int_{-\infty}^{x_n} f_{X}(u_1, u_2, \ldots, u_n) du_n \ldots du_2 du_1$$

pdf مشترک

- مقدار تابع pdf همواره مثبت است و انتگرال n-گانه آن از $-\infty$ تا $+\infty$ یک می‌شود.
- همچنین داریم:

$$\forall D \subset \mathbb{R}^n: P\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\} = \int_D f_{\vec{X}}(\vec{x})\, d\vec{x}$$
$$= \int \ldots \int_D f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

- اگر از $-\infty$ تا $+\infty$ روی برخی از آرگومان‌ها انتگرال بگیریم، pdf مشترک سایر متغیرهای تصادفی حاصل می‌شود. برای مثال:

$$f_{X_2X_3}(x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1$$