۸۱۰۱۰۱۴۹۲ علیرضا کریمی

۱) الف)

راه اول: با توجه به اینکه ۳ کلاس داریم، این ۳ کلاس را به $(3-1)!$ حالت دور یک میز قرار می دهیم. از طرفی تعداد جایگشت افراد هر کلاس برابر $3!$ است، بنابراین تعداد کل حالات نشستن ۹ نفر دور یک میز طوری که هم کلاسی ها کنار هم باشند، برابر است با: $2! \times 3! \times 3! \times 3!$

راه دوم: برای محاسبه جایگشت دوری، باید جایگاه یکی از افراد را ثابت در نظر بگیریم؛ بنابراین هم کلاسی های او می توانند به ۳ حالت در کنار او قرار بگیرند (هر دو هم کلاسی در سمت راست او باشند یا هر دو در سمت چپ باشند یا یکی سمت راست و یکی سمت چپ باشد) و جایگشت این دو هم کلاسی نیز نسبت به هم برابر $2!$ و جایگشت افراد موجود در هر کلاس برابر $3!$ است؛ بنابراین تعداد کل حالات مطلوب برابر است با: $\underbrace{3 \times 2!}_{3!} \times 2! \times 3! \times 3!$

ب) برای محاسبه پاسخ صورت سؤال، از اصل متمم استفاده می کنیم؛ یعنی تعداد حالاتی را بدست می آوریم که حداقل فردی وجود دارد که در میان دو هم کلاسی خود نشسته است؛ به عبارت دیگر، باید تعداد حالاتی را حساب کنیم که افراد حداقل یک کلاس در کنار هم هستند. برای محاسبه آن از اصل شمول و عدم شمول بهره می گیریم.

A_1: افراد یک کلاس کنار هم باشند و A_2: افراد دو کلاس کنار هم باشند و A_3: افراد سه کلاس کنار هم باشند.

تعداد حالات متمم: $\binom{3}{1} \times A_1 - \binom{3}{2} A_2 + \binom{3}{3} A_3$

برای حالت A_1، یکی از ۳ کلاس را انتخاب کردیم. ۳ نفر آن کلاس را به عنوان یک بسته در نظر می گیریم در کنار ۶ نفر دیگر. در واقع انگار می خواهیم جایگشت ۷ بسته دور میز را حساب کنیم که برابر $(7-1)!$ است. جایگشت ۳ نفر موجود در کلاس هم برابر $3!$ است. پس تعداد حالات A_1 برابر است با: $A_1 = 6! \times 3!$

برای حالت A_2، دو تا از ۳ کلاس را انتخاب می کنیم. دو کلاس در واقع دو بسته هستند در کنار ۳ نفر دیگر. پس ۵ بسته دور میز داریم که جایگشت دوری آن برابر $(5-1)! = 4!$ است. جایگشت افراد هر کلاس هم $3!$. تعداد حالات A_2 برابر است با:

$$A_2 = 4! \times 3! \times 3!$$

برای حالت A_3 نیز مثل قسمت الف سوال، عمل می کنیم. پس داریم: $A_3 = 2! \times 3! \times 3! \times 3!$

از آنجا که تعداد کل جایگشت دوری ۹ نفر برابر $(9-1)!$ است، با استفاده از اصل متمم، تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$8! - \left[\binom{3}{1} \times 6! \times 3! - \binom{3}{2} \times 4! \times 3! \times 3! + \binom{3}{3} \times 2! \times 3! \times 3! \times 3! \right] = 2952.$$

۲)

برای محاسبه برداشتن کارت عدد اول از میان کارت‌های ۱ تا ۴۲ به طور متوسط، باید کارت‌ها را به طور متقارن درکنار هم قرار دهیم. برای این کار به این شکل عمل می‌کنیم که ابتدا ۱۳ کارت اول را می‌چینیم. بعد در ۱۴ جایگاه ایجاد شده میان آنها، اعداد مرکب را به طور مساوی پخش می‌کنیم؛ به عبارت دیگر در هر جایگاه، $\frac{29}{14}$ عدد مرکب قرار می‌گیرد.

—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—

۱۴ جایگاه داریم و در هر کدام به طور متوسط $\frac{29}{14}$ کارت عدد مرکب قرار می‌گیرد.

حال کارت‌ها به طور متقارن پخش شده‌اند. برای محاسبه کنیم اینکه به طور متوسط باید چند کارت برداریم تا کارت عدد اول برداشته شود، باید $\frac{29}{14}$ کارت عدد مرکب در جایگاه اول را برداریم بعد یک کارت عدد اول را برمی‌داریم؛ بنابراین به طور متوسط باید $\frac{29}{14}+1 \simeq 3.07$ کارت برداشته شود.

با استفاده از امید ریاضی نیز داریم:

$$X = \sum P(n)\times n = \sum_{i=1}^{30} \frac{13}{30} i \; \frac{30!\,(42-i)!}{42!+(30-i)!} \simeq 3.07$$

۳)

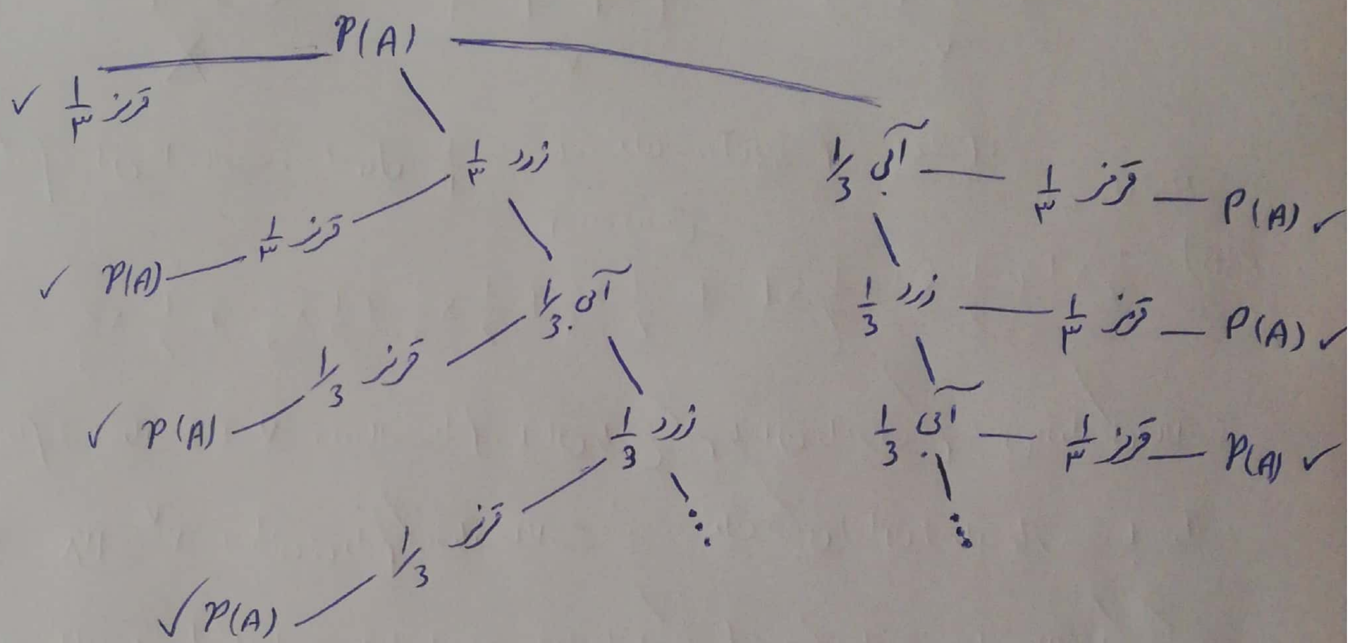
A را گزاره خریدن مداد قرمز درنظر می‌گیریم. برای محاسبه $P(A)$ داریم: در اولین مرحله، به احتمال $1/3$ می‌توانیم مداد قرمز بخریم. درغیراینصورت بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم مداد زرد برداشتیم. اگر در مرحله بعد به احتمال $1/3$ مداد قرمز را برداریم، به صورت بازگشتی در ادامه می‌توانیم به احتمال $P(A)$، مداد قرمز را خریداری کنیم. درغیراینصورت برای پایان نیافتن این روند، به احتمال $1/3$ می‌توانیم مداد آبی برداریم. بعد دوباره همین روند تکرار می‌شود؛ یعنی به احتمال $1/3$ رنگ قرمز انتخاب می‌شود و ما باز می‌توانیم به احتمال $P(A)$ مداد قرمز را خریداری کنیم یا به احتمال $1/3$ رنگ زرد برداریم و دوباره این روند تکرار می‌شود. همین کار را می‌توانستیم برای رنگ آبی از ابتدا انجام می‌دهیم. پس داریم:

$$P(A) = \frac{1}{3} + \overbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times P(A)\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)}^{\text{رنگ زرد در ابتدا برداشته شود}} + \overbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times P(A)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)}^{\text{رنگ آبی در ابتدا برداشته شود}}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} P(A) \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{3}{2} P(A) \Rightarrow \frac{2}{3} P(A) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

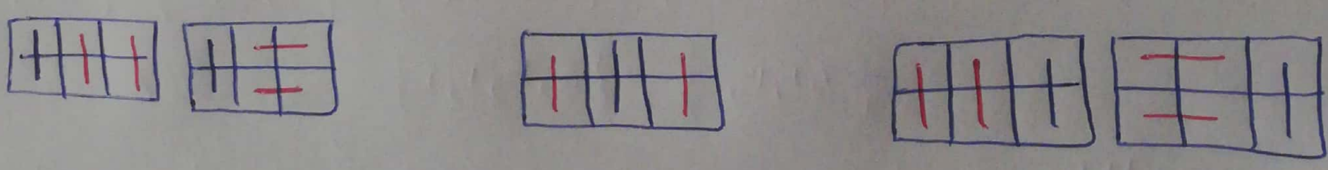
پس احتمال خریداری مداد قرمز $\frac{1}{۲}$ است. برای درک بهتر نمودار درختی آن را رسم می‌کنیم.



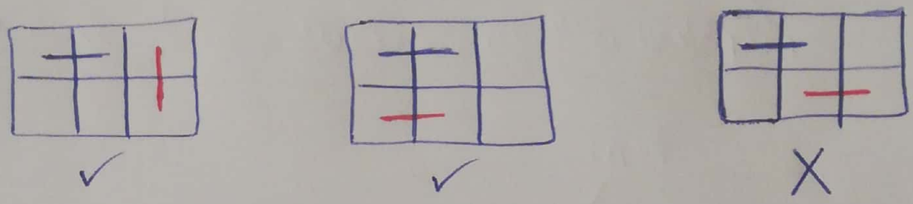
۴) می‌دانیم که در ابتدای کار، ۷ انتخاب برای اولین دومینو خواهیم داشت (۳ انتخاب عمودی و ۴ انتخاب افقی) و از آنجایی که دلیلی بر نابرابر بودن احتمال آنها نداریم، احتمال آنها را یکسان در نظر می‌گیریم. گزاره B را احتمال سیاه شدن جدول درنظر می‌گیریم و A_i را برابر با برداشتن دومینوی iام در مرحله اول درنظر می‌گیریم. پس طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{7} P(A_i)\, P(B \mid A_i)$$

حال این ۷ حالت را بررسی می‌کنیم. اگر اولین دومینوی ما به صورت انتخاب شود، قطعا جدول سیاه خواهد شد. در واقع احتمال سیاه شدن جدول در این حالت‌ها برابر 1 خواهد بود. ۳ حالت از ۷ حالت دومینوها عمودی هستند،



اگر اولین دومینو به صورت افقی برداشته شود، با توجه به تقارن موجود در حل مسئله و بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم اولین دومینوی انتخابی، دومینوی بالاچپ باشد. پس برای انتخاب دومین دومینو در این حالت ۳ انتخاب داریم که دو انتخاب آن منجر به سیاه شدن جدول می‌شود.



پس برای هر کدام از این ۴ حالت، به احتمال $\frac{2}{3}$ به سیاه شدن جدول می‌رسیم. پس داریم:

$$P(B) = \overbrace{\frac{1}{7}\times 1 + \frac{1}{7}\times 1 + \frac{1}{7}\times 1}^{\text{۳ دومینوی عمودی}} + \overbrace{\frac{1}{7}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{7}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{7}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{7}\times\frac{2}{3}}^{\text{۴ دومینوی افقی}} = \frac{17}{21}$$

۵) برای هر کدام از اعداد ۱ تا ۷، دو حالت داریم. یا آن را جمع کنیم یا آن را تفریق کنیم. پس تعداد کل حالات برابر است با $2^7 = 128$. از طرفی می‌دانیم که تعداد حالات مثبت شدن ترکیبی از این اعداد برابر است با تعداد حالات منفی شدن آنها (کافی است +ها را منفی و منفی‌ها را + کنیم). پس کافی است تعداد حالاتی را که ترکیبی از این اعداد برابر صفر می‌شود، از کل حالات کم کنیم و پاسخ را بر ۲ تقسیم کنیم تا تعداد حالات مثبت بدست آید.

(تعداد حالات مثبت = تعداد حالات منفی)

برای این کار کافی است زیرمجموعه‌ای از این اعداد را انتخاب کنیم که جمع آنها برابر ۱۴+ شود (فرض کنید این زیرمجموعه را زیرمجموعه A در نظر بگیریم. چون مجموع کل اعداد ۲۸ است، مجموع اعداد A' نیز برابر ۱۴+ است. حال کافی است که ترکیب $A - A'$ را بنویسیم تا حاصل ترکیب این اعداد برابر صفر شود). این زیرمجموعه‌ها را به صورت دستی حساب می‌کنیم و داریم:

{۱،۲،۵،۶} و {۳،۵،۶} و {۳،۴،۷} و {۱،۲،۴،۷} و {۲،۵،۷} و {۱،۶،۷} و

{۲،۳،۴،۵} و {۱،۳،۴،۶} $\Longrightarrow$ ۸ حالت

پس تعداد حالات مثبت شدن ترکیبی از اعداد ۱ تا ۷ برابر است با $\frac{128 - 8}{2} = 60$

۴) گزاره‌های زیر را داریم: A : قبولی در شرکت

$A_{\text{موید}} \xrightarrow{P(A)} \frac{1}{7}$: قبولی موید در شرکت ، $A_{\text{فاطمه}} \xrightarrow{P(A)} \frac{2}{7}$: قبولی فاطمه در شرکت ، $A_{\text{علی}} \xrightarrow{P(A)} \frac{4}{7}$: قبولی علی در شرکت

B : سود رساندن به شرکت

$$P(B \mid A_{\text{موید}}) = \frac{8}{10} \ , \quad P(B \mid A_{\text{علی}}) = \frac{3}{10} \ , \quad P(B \mid A_{\text{فاطمه}}) = \frac{5}{10}$$

طبق خواسته مسئله ما باید $P(A_{\text{علی}} \mid B^c)$ را حساب کنیم. طبق روابط قانون بیز داریم:

$$P(A_{\text{علی}} \mid B^c) = \frac{P(B^c \mid A_{\text{علی}}) \times P(A_{\text{علی}})}{P(B^c)}$$

از طرفی طبق قانون احتمال کل می‌توانیم $P(B^c)$ را به این شکل محاسبه کرد و داریم:

$$P(B^c) = P(A_{\text{علی}})P(B^c \mid A_{\text{علی}}) + P(A_{\text{فاطمه}})P(B^c \mid A_{\text{فاطمه}}) + P(A_{\text{موید}})P(B^c \mid A_{\text{موید}}) =$$

$$P(A_{\text{علی}})(1 - P(B \mid A_{\text{علی}})) + P(A_{\text{فاطمه}})(1 - P(B \mid A_{\text{فاطمه}})) + P(A_{\text{موید}})(1 - P(B \mid A_{\text{موید}})) =$$

$$\overbrace{\frac{4}{7} \times \frac{7}{10}}^{P(B^c \mid A_{\text{علی}})P(A_{\text{علی}})} + \frac{2}{7} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{7} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{7}$$

$$\Longrightarrow P(A_{\text{علی}} \mid B^c) = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{7}{10}}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{10}$$