آمار و احتمال مهندسی

آزمون فرض

نمونه‌برداری (Sampling)

- به دنباله متغیرهای تصادفی $i.i.d.$ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ که از یک جامعه (population) آماری با توزیع F انتخاب شده باشند، یک نمونه (sample) از توزیع F می‌گوییم.
- میانگین و واریانس نمونه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad , S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1}$$

- طبق قضیه حد مرکزی توزیع متغیر تصادفی $\bar{X}$ برای nهای بزرگ برابر است با:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

بازه اطمینان برای میانگین با واریانس معلوم

- برای میانگین نمونه داریم:

پیش‌بینی:
$$P\left\{\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \bar{X} < \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

- پس بازه اطمینان $1-\alpha$ برای μ در حالت واریانس معلوم عبارت است از:

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

بازه اطمینان برای میانگین با واریانس نامعلوم

- دیدیم که بازه اطمینان $1-\alpha$ برای μ در حالت واریانس معلوم عبارت است از:

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

- اما در عمل غالباً واریانس جامعه (σ^2) را در اختیار نداریم.
- به این منظور از تخمین نقطه‌ای بی‌غرض σ^2 یعنی واریانس نمونه (S^2) استفاده می‌کنیم:

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

شرایط استفاده از CLT برای بازه اطمینان

- جهت استفاده از CLT باید شرایط خاصی برقرار باشند:

۱. شرط استقلال: مشاهداتی که از نمونه‌برداری به دست آمده‌اند باید مستقل از هم باشند.

- نمونه‌برداری به صورت تصادفی انجام شده باشد.
- اندازه نمونه از ۱۰٪ کل جامعه آماری کوچکتر باشد.

۲. شرط اندازه نمونه: هر چه اندازه نمونه بزرگتر باشد، استفاده از قضیه CLT معقولتر خواهد بود.

- اندازه نمونه حداقل ۳۰ باشد.
- هر چقدر چولگی بیشتر باشد (تقارن کمتری داشته باشد)، اندازه نمونه بزرگتری لازم است.

بازه اطمینان برای نسبت (proportion)

- اغلب مواردی پیش می آید که لازم است نسبت خاصی را در جامعه برآورد کنیم.
  - نسبت افراد بیکار بالای ۱۸ سال در اصفهان
  - نسبت دانشجویان معتاد دانشگاه تهران
  - نسبت افرادی که در انتخابات به یک فرد خاص رای می‌دهند
- معمولاً نسبت را با p نمایش می‌دهیم:

$$p = \frac{X}{N}$$

که N اندازه کل جامعه، و X تعداد افراد دارای خصوصیت مورد نظر است.

- تخمین p که یک پارامتر جامعه است را با $\hat{p}$ نمایش می‌دهیم.

بازه اطمینان برای نسبت

- بازه اطمینان $(1-\alpha)$ درصد برای نسبت:

$$\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

- در مواردی که $\hat{p}$ را در اختیار نداشته باشیم (برای مثال در زمان تعیین اندازه نمونه)، از روش واریانس بیشینه $(\hat{p}=0.5)$ استفاده می‌کنیم.

شرایط استفاده از CLT برای بازه اطمینان

- جهت استفاده از CLT برای بازه اطمینان نسبت یک جامعه، باید شرایط خاصی برقرار باشند:

۱. شرط استقلال: مشاهداتی که از نمونه‌برداری به دست آمده‌اند باید مستقل از هم باشند.
   - نمونه‌برداری به صورت تصادفی انجام شده باشد.
   - اندازه نمونه از ۱۰٪ کل جامعه آماری کوچکتر باشد.

۲. شرط اندازه نمونه: اندازه نمونه باید به قدری بزرگ باشد که np و $n(1-p)$ هر دو بزرگتر از ۱۰ باشند:
   - $np > 10$ and $n(1-p) > 10$

مثال

- یک نمونه ۵۰تایی از دانشجویان دانشگاه تهران انتخاب و از آنها سوال شده است که در سال چه مبلغی صرف خرید کتاب می‌کنند. پاسخ این دانشجویان دارای متوسط ۳۲۰ هزار تومان با انحراف معیار ۱۷۴ هزار تومان است. فرض کنید نمونه‌برداری به صورت تصادفی انجام شده و توزیع جامعه آماری نسبتا متقارن است. با استفاده از یک بازه اطمینان ۹۵٪، میانگین واقعی مبلغی که دانشجویان دانشگاه تهران صرف خرید کتاب می‌کنند را تخمین بزنید.

بررسی شرایط:

۱) نمونه‌برداری به صورت تصادفی بوده و ۵۰ کمتر از ۱۰٪ دانشجویان دانشگاه تهران است.

۲) $n > 30$ و توزیع جامعه نسبتا متقارن است.

$$\bar{X} = 320\ ,\qquad S = 174\ ,\qquad n = 50$$

ادامه مثال

$$\bar{X} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} = 320 \pm 1.96 \times \frac{174}{\sqrt{50}} = (272\,, 368)$$

- بنابراین با توجه به نمونه در اختیار می‌توانیم با اطمینان ۹۵٪ بگوییم که دانشجویان دانشگاه تهران به طور متوسط بین ۲۷۲ تا ۳۶۸ هزار تومان در سال صرف خرید کتاب می‌کنند:

$$272 < \mu < 368$$

آزمون فرض (Hypothesis Testing)

- آزمون فرض روشی برای بررسی ادعاها و یا فرضیات درباره پارامترهای توزیع در جوامع آماری است.
- فرض کنید یکی از اساتید دانشگاه تهران در مصاحبه با مطبوعات ادعا می‌کند که دانشجویان این دانشگاه به طور متوسط در سال ۳۰۰ هزار تومان کتاب می‌خرند. می‌خواهیم با استفاده از نمونه جمع‌آوری شده در مثال قبل، صحت ادعای ایشان را بررسی کنیم.

فرض صفر	فرض مقابل
ادعای استاد صحیح است	ادعای استاد صحیح نیست
ادعای استاد درباره میانگین صحیح است و نمونه جمع‌آوری شده به طور تصادفی دارای میانگین ۳۲۰ شده است.	ادعای استاد درباره میانگین صحیح نیست و نمونه مشاهده شده نمی‌تواند تصادفی باشد.
H_0	H_A

آزمون فرض

- آزمون فرض شباهت زیادی به یک دادگاه دارد:
  - فرض صفر (H_0): متهم بیگناه است
  - فرض مقابل (H_A): متهم گناهکار است
- شواهدی ارائه می‌شود:
  - جمع‌آوری داده
- آیا در صورت صحیح بودن فرض صفر، امکان داشت که داده مشاهده شده به طور تصادفی اتفاق افتاده باشد؟
  - بله: نمی‌توانیم فرض H_0 را رد کنیم.
  - خیر: فرض H_0 را رد می‌کنیم.

چارچوب آزمون فرض

- با یک فرض صفر (null hypothesis) که ادعای مورد بحث را نمایش می‌دهد شروع می‌کنیم. برای فرض H_0 همیشه از نماد $=$ استفاده می‌کنیم.
- سپس فرض مقابل (alternative hypothesis) را مطرح می‌کنیم که سوال تحقیق را بیان می‌کند، به عبارت دیگر فرضی که به دنبال آزمایش آن هستیم. برای فرض H_A از یکی از نمادهای $<, >, \neq$ استفاده می‌کنیم.
- آزمون فرض را به کمک قضیه حد مرکزی و با فرض درست بودن فرض صفر اجرا می‌کنیم.
- اگر نتیجه آزمون دلالت بر عدم کفایت شواهد مبتنی بر داده در رد فرض صفر داشته باشد، فرض صفر را می‌پذیریم و در غیر این صورت آن را رد می‌کنیم.

مثال

- یک نمونه ۵۰تایی از دانشجویان دانشگاه تهران انتخاب و از آنها سوال شده است که در سال چه مبلغی صرف خرید کتاب می‌کنند. پاسخ این دانشجویان دارای متوسط ۳۲۰ هزار تومان با انحراف معیار ۱۷۴ هزار تومان است.
- یکی از اساتید دانشگاه تهران در مصاحبه با مطبوعات ادعا می‌کند که دانشجویان این دانشگاه به طور متوسط در سال ۳۰۰ هزار تومان کتاب میخرند.

فرض صفر: دانشجویان به طور متوسط ۳۰۰ هزار تومان کتاب میخرند. $H_0: \mu = 300$

فرض مقابل: دانشجویان به طور متوسط بیش از ۳۰۰ هزار تومان کتاب میخرند. $H_A: \mu > 300$

فرضیات همیشه درباره پارامتر جامعه هستند.

اجرای آزمون فرض به کمک بازه اطمینان

- برای اجرای آزمون فرض دو راه کلی وجود دارد:
  - آزمون فرض با استفاده از بازه اطمینان
  - آزمون فرض با استفاده از p-value

- آزمون فرض به کمک بازه اطمینان:
  - اگر فرض صفر داخل بازه اطمینان ۹۵٪ قرار بگیرد، نمی‌توانیم آن را رد کنیم و در غیر این صورت آن را رد می‌کنیم.
  - این روش سریع است ولی میزان خطای آزمون را مشخص نمی‌کند.

مثال

فرض صفر: دانشجویان به طور متوسط ۳۰۰ هزار تومان کتاب میخرند. $H_0: \mu = 300$

فرض مقابل: دانشجویان به طور متوسط بیش از ۳۰۰ هزار تومان کتاب میخرند. $H_A: \mu > 300$

- یک نمونه ۵۰تایی از دانشجویان دانشگاه تهران انتخاب و از آنها سوال شده است که در سال چه مبلغی صرف خرید کتاب می‌کنند. پاسخ این دانشجویان دارای متوسط ۳۲۰ هزار تومان با انحراف معیار ۱۷۴ هزار تومان است. دیدیم که بازه اطمینان ۹۵٪ به کمک این نمونه جمع‌آوری شده برابر است با: (272 ,368)

- از آنجا که فرض صفر در بازه اطمینان قرار دارد، نمی‌توانیم آن را رد کنیم.

آزمون فرض به روش p-value

- احتمال مشاهده خروجی نمونه یا مفرطتر به شرط درست بودن فرض صفر را p-value می‌نامیم:

p-value = P(observed or more extreme outcome | H_0 true)

برای مثال قبل:

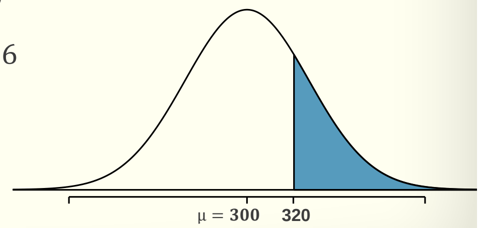
p-value = $P(\bar{X} > 320 | H_0 : \mu = 300)$

$S = 174\,, n = 50 \;\; \Rightarrow \;\; S/\sqrt{n} = 24.6$

$\bar{X} \sim N(\mu = 300\,, S/\sqrt{n} = 24.6)$

آماره آزمون: $Z = \frac{320-300}{24.6} = 0.81$

p-value = $\mathrm{P}(Z > 0.81) = 0.209$



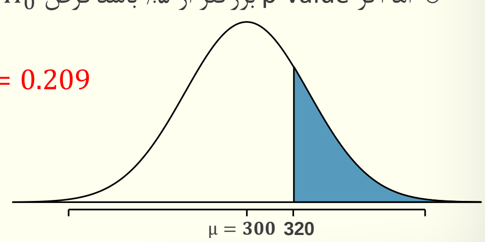
تصمیم‌گیری بر مبنای p-value

- ما از آماره آزمون برای محاسبه p-value استفاده کردیم.
- اگر p-value کوچک باشد (کمتر از سطح معنا (significance level) یا α که معمولا ٪۵ در نظر گفته می‌شود)، فرض H_0 رد می‌شود.
- اما اگر p-value بزرگتر از ٪۵ باشد فرض H_0 رد نمی‌شود.

p-value = $P(\bar{X} > 320 | \mu = 300) = 0.209$

significance level: $\alpha = 0.05$

p-value = $0.209 > 0.05$



- از آنجا که p-value بزرگ است، ما نمی‌توانیم H_0 را رد کنیم.

آزمون فرض دوطرفه

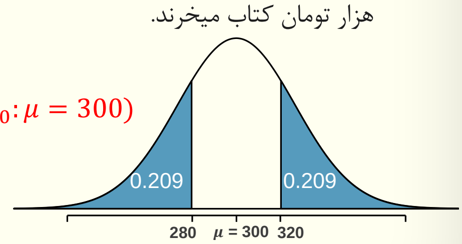
- در بسیاری از مواقع سوال تحقیق ما تنها به انحراف از فرض صفر در یک جهت مربوط نمی‌شود.
- به عبارت دیگر فرض مقابل به صورت $(\mu <)$ و یا $(\mu >)$ مطرح نمی‌شود، بلکه به صورت $(\mu \neq)$ مطرح می‌شود.
- چنین آزمونی را آزمون فرض دوطرفه (two-sided) می‌نامیم.
- تعریف p-value در این حالت مشابه قبل است، اما نحوه محاسبه آن به دلیل این که احتمال مفرطتر بودن از هر دو طرف باید در نظر گرفته شود متفاوت است.

مثال

فرض صفر: دانشجویان به طور متوسط ۳۰۰ هزار تومان کتاب میخرند. $H_0: \mu = 300$

فرض مقابل: دانشجویان به طور متوسط بیشتر یا کمتر از ۳۰۰ هزار تومان کتاب میخرند. $H_A: \mu \neq 300$

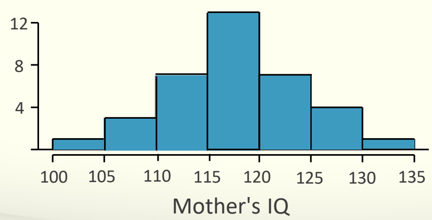
p-value = $P(\bar{X} > 320 \text{ or } \bar{X} < 280 | H_0: \mu = 300)$



p-value = $P(Z > 0.81) + P(Z < -0.81) = 0.209 + 0.209 = 0.418$

مثال ۲

- گروهی از محققین که بر روی ویژگی‌های کودکان بااستعداد مطالعه می‌کنند، نمونه‌ای شامل ۳۶ کودک بااستعداد ۴ ساله را از یک شهر بزرگ جمع‌آوری کرده‌اند. در این مطالعه ضریب هوشی مادران این کودکان اندازه‌گیری شده است که در نمودار زیر نتایج آن را مشاهده میکنید. می‌دانیم متوسط ضریب هوشی متوسط مردم این شهر برابر با ۱۰۰ است. به کمک آزمون فرض بررسی کنید که آیا ضریب هوشی مادران کودکان با استعداد با میانگین جامعه یکسان است یا خیر؟



n	36
min	101
mean	118.2
sd	6.5
max	131

ادامه مثال ۲

۱) آزمون فرض:

$\mu =$ متوسط ضریب هوشی مادران کودکان بااستعداد

$H_0: \mu = 100 \qquad H_A: \mu \neq 100$

۲) محاسبه تخمین نقطه‌ای به کمک نمونه:

$\bar{X} = 118.2 \ , \ S = 6.5 \ , \ n = 36$

۳) بررسی شرایط CLT:

هر دو شرط استقلال و بزرگ بودن نمونه ($n > 30$) برقرار هستند.

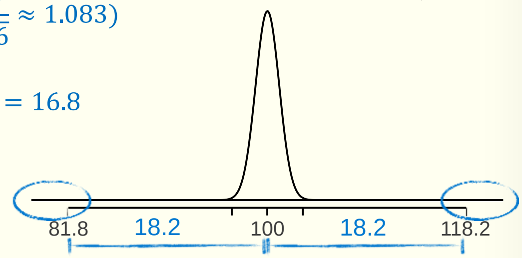
ادامه مثال ۲

۴) محاسبه p-value:

$\bar{X} \sim N(\mu = 100\,, \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{6.5}{\sqrt{36}} \approx 1.083)$

test statistic: $Z = \frac{118.2-100}{1.083} = 16.8$

p-value ≈ 0



۵) تصمیم‌گیری:

- از آنجا که p-value خیلی کوچک است، شواهد قوی بر ضد فرض صفر موجود است. پس فرض صفر را رد می‌کنیم.

آزمون فرض برای نسبت

۱) برپایی آزمون فرض با توجه به مساله:

$H_0 : p = null\ value$

$H_A : p < \ or\ > \ or\ \neq \ null\ value$

۲) محاسبه تخمین نقطه‌ای: $\hat{p}$

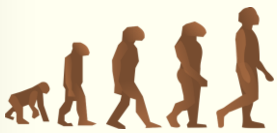
۳) بررسی شرایط CLT برای نسبت p

۴) محاسبه آماره آزمون و p-value:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

۵) مقایسه p-value با α و تصمیم‌گیری

مثال



- در یک نظرسنجی که از ۱۹۸۳ نفر در امریکا انجام شد، باور افراد نسبت به نظریه تکامل مورد سوال قرار گرفت. ٪۶۰ افراد شرکت‌کننده در این نظرسنجی گفته‌اند که به این نظریه باور دارند. آیا می‌توان ادعا کرد که اکثریت مردم امریکا نظریه تکامل را قبول دارند؟

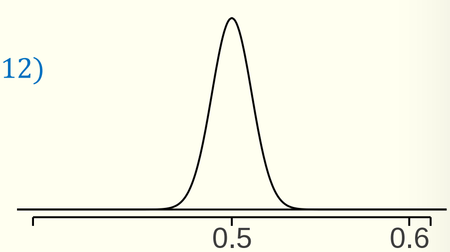
$$H_0: p = 0.5 \qquad \hat{p} = 0.6 \qquad n = 1983$$
$$H_A: p > 0.5$$

- بررسی شرایط:

$$np = 1983(0.5) = 991.5 > 10$$
$$n(1-p) = 1983(1-0.5) = 991.5 > 10$$

ادامه مثال

$$\hat{p} \sim N\left(p = 0.5\,,\ \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{1983}} \approx 0.0112\right)$$



$$Z = \frac{0.6 - 0.5}{0.0112} \approx 8.92$$

$$\text{p-value} = P(Z > 8.92) \approx 0 \ll 0.05 \rightarrow \text{Reject } H_0$$

مثال ۲

- مدیر کل دانشجویی وزارت بهداشت آمار اعتیاد دانشجویان به مواد مخدر را ۸/۲ درصد اعلام میکند. دانشجویی برای بررسی صحت این ادعا با انتخاب یک نمونه تصادفی ۵۰۰ نفره و انجام تست اعتیاد به جمع‌آوری داده می‌پردازد. ۳۰ نفر از افراد بررسی شده معتاد تشخیص داده می‌شوند. آیا با توجه به داده جمع‌آوری شده، ادعای مدیر وزارت بهداشت صحیح است؟

$H_0: p = 0.082$
$H_A: p \neq 0.082$

$\hat{p} = \frac{30}{500} = 0.06$

$n = 500$

- بررسی شرایط:

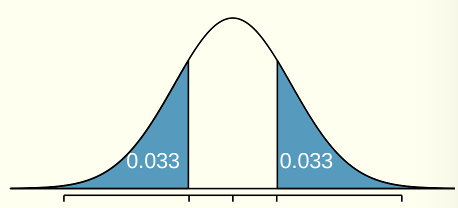
$np = 500(0.082) = 41 > 10$

$n(1-p) = 500(1-0.082) = 459 > 10$

ادامه مثال ۲

$$\hat{p} \sim N(p = 0.082\,,\ \sqrt{\frac{0.082 \times 0.918}{500}} \approx 0.012)$$

$$Z = \frac{0.06 - 0.082}{0.012} \approx -1.83$$



p-value $= P(Z > 1.83) + P(Z < -1.83) \approx 0.066 > 0.05 \rightarrow$ Fail to Reject H_0