Moment Generating Function (MGF)

گشتاورهای یک متغیر تصادفی

$$m_n = E[X^n]$$

$$\mu = E[X]$$

$$\mu = 14$$

$$P(X \geq 18) = \int_{18}^{20} \underbrace{f_X(x)}\, dx$$

$$\mu_n = E[(X-\mu)^n]$$

Moment Generating Function

تابع مولد گشتاور

$$\Phi_X(s) = E\left[e^{sX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)\, dx$$

خواص تابع مولد گشتاور

- قضیه گشتاور

$$m_n = E[X^n]$$

$$m_n = \left.\frac{d^n \phi_X(s)}{ds^n}\right|_{s=0}$$

$$\frac{d^n}{ds^n}\phi_X(s) = \frac{d^n}{ds^n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{sx} f_X(x)\,dx$$

$$s=0 \Rightarrow \boxed{m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\,dx}$$

خواص تابع مولد گشتاور: $Y = aX + b$

$$\Phi_Y(s) = E[e^{sY}] = E[e^{saX + sb}] = e^{sb} E[e^{saX}]$$

$$= e^{sb} \Phi_X(as)$$

خواص تابع مولد گشتاور: $Y = g(X)$

$$\boxed{\Phi_Y(s) = E\left[e^{sY}\right]} = E\big[\underbrace{e^{sg(X)}}_{h(x)}\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sg(x)} f_X(x)\, dx$$

مثال: توزیع نمایی

$X \sim Exp(\lambda)$

$\Phi_X(S) = ?$

$$\Phi_X(S) = E[e^{SX}] = \int_0^{+\infty} e^{sx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(s-\lambda)x} dx$$

$$= \frac{\lambda}{S-\lambda} e^{(S-\lambda)x} \Big|_0^{+\infty} \qquad S < \lambda$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - S} \qquad S < \lambda$$

مثال: توزیع دوجمله‌ای

$$X \sim Bin(n, p)$$

$$\Phi_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_i e^{s x_i} P_X(x_i)$$

$$\Phi_X(s) = \sum_{k=0}^{n} e^{sk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^s p)^k (1-p)^{n-k}} = (e^s p + 1 - p)^n$$

$$= \underbrace{(e^s p + q)^n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{P(X=k)} e^{sk}$$

مثال: توزیع پواسون

$X \sim Poi(\lambda)$

$$P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, \dots$$

$$\Phi_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{sk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^s\lambda)^k}{k!}}_{e^{e^s\lambda}}$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^s\lambda} = e^{\lambda(e^s-1)}$$

مثال

○ متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور زیر است:

$$\phi_X(s) = \frac{1}{6}e^{-2s} + \frac{1}{3}e^{-s} + \frac{1}{4}e^{s} + \frac{1}{4}e^{2s}$$

- احتمال $P(|X| \le 1)$ چقدر است؟

$$\phi_X(s) = \sum_{x_i} e^{s x_i} P_X(x_i)$$

$$P(|X| \le 1) = P(X=-1) + P(X=1) + P(X=0)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 0$$

تابع MGF حاصل‌جمع دو متغیر تصادفی مستقل

$$X \longrightarrow \Phi_X(s)$$

$$Y \longrightarrow \Phi_Y(s)$$

$$X \perp Y$$

$$Z = X + Y \longrightarrow f_Z(z) = f_X * f_Y$$

$$\boxed{\Phi_Z(s) = \Phi_X(s)\,\Phi_Y(s)}$$

$$\Phi_Z(s) = E\left[e^{sZ}\right] = E\left[\underline{e^{sX}}\ \underline{e^{sY}}\right] = \underbrace{E\left[e^{sX}\right]}_{\Phi_X(s)}\ \underbrace{E\left[e^{sY}\right]}_{\Phi_Y(s)}$$

مثال ۱: جمع دو متغیر مستقل دوجمله‌ای

$X \sim Bin(n_1, p)$

$Y \sim Bin(n_2, p)$

$X \perp Y$

$$Z = X + Y \Longrightarrow \underline{Z \sim Bin(n_1 + n_2, p)}$$

$$\Phi_Z(s) = \Phi_X(s)\,\Phi_Y(s) = (e^s p + 1 - p)^{n_1} (e^s p + 1 - p)^{n_2}$$

$$= (e^s p + 1 - p)^{n_1 + n_2}$$

مثال ۲: جمع دو متغیر تصادفی مستقل پواسون

$X \sim Poi(\lambda_1)$ $\qquad X \perp Y$

$Y \sim Poi(\lambda_2)$

$Z = X + Y \longrightarrow Z \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$\Phi_Z(s) = \Phi_X(s)\,\Phi_Y(s) = e^{\lambda_1(e^s-1)}\; e^{\lambda_2(e^s-1)} = e^{\overbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}(e^s-1)}$$

مجموع متغیرهای تصادفی i.i.d.

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \qquad X_i \quad i.i.d.$$

$$\Phi_Z(s) = \Phi_{X_1}(s)\,\Phi_{X_2}(s)\cdots\Phi_{X_n}(s) = \left(\Phi_X(s)\right)^n$$

مثال: تابع مولد گشتاور توزیع دوجمله‌ای منفی

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_r \qquad X_i \sim Geo(p)$$

$$\Phi_Y(s) = \left(\Phi_X(s)\right)^r$$

$$\Phi_X(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{sk}\, p\,(1-p)^{k-1} = p e^s \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)e^s\right)^{k-1}$$

$$= p e^s \sum_{m=0}^{+\infty} \left((1-p)e^s\right)^m = p e^s \frac{1}{1-(1-p)e^s}$$

یافتن توزیع احتمال توسط MGF

$$\Phi_X(s) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)\, dx}$$

5-34 Papoulis مثال

$$X \sim N(0, \sigma^2)$$

$$Y = aX^2 \qquad a>0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sy} f_Y(y)\, dy$$

$$\boxed{f_Y(y) = ?}$$

$$\Phi_Y(s) = E[e^{sY}] = E[e^{saX^2}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sax^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} e^{sax^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\boxed{y = ax^2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y}{a}}$$

$$dy = 2ax\,dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{2ax} = \frac{dy}{2a\sqrt{\frac{y}{a}}} = \frac{dy}{2\sqrt{ay}}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{sy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-y/2a\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{ay}}\, dy$$

5-35 Papoulis مثال

$$X \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$Y = \sin X$$

$$dy = \cos x \; dx = \sqrt{1 - \sin^2 x} \; dx$$

$$= \sqrt{1 - y^2} \; dx$$