آمار و احتمال مهندسی

احتمال شرطی

(Ross 3.1-3.3)

احتمال شرطی

- اگر M پیشامدی در Ω باشد، به طوری که $P(M) \neq 0$، داریم:

$$P(A|M) \triangleq \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

- تعبیر بسامدی: اگر یک آزمایش تصادفی n بار انجام شود،

$$\frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{n_{A\cap M}/n}{n_M/n} = \frac{n_{A\cap M}}{n_M}$$

- به این معنی که در n_M باری که پیشامد M اتفاق افتاده است، فراوانی نسبی وقوع A چقدر است.
- $P(A|M)$ را به صورت نسبت دو تابع احتمال تعریف کردیم. آیا $P(A|M)$ خود نیز یک تابع احتمال است؟

احتمال شرطی

- باید نشان دهیم $P(A|M)$ در اصول موضوعه کولموگروف صدق می‌کند:
- اصل ۱: $P(A|M)=\frac{P(A\cap M)}{P(M)}\geq 0$
- اصل ۲: $P(\Omega|M)=\frac{P(\Omega\cap M)}{P(M)}=\frac{P(M)}{P(M)}=1$
- اصل ۳: اگر A و B ناسازگار باشند ($A\cap B=\emptyset$)، داریم:

$$P(A\cup B|M)=\frac{P((A\cup B)\cap M)}{P(M)}=\frac{P((A\cap M)\cup(B\cap M))}{P(M)}$$
$$=\frac{P(A\cap M)+P(B\cap M)}{P(M)}=P(A|M)+P(B|M)$$

احتمال شرطی

- بنابراین احتمال‌های شرطی همهٔ خصوصیات یک احتمال معمولی را دارا هستند و در تمام قضایایی که برای توابع احتمال اثبات شد صدق می‌کنند.
  - مثلا داریم: $P(\bar{A}|M)=1-P(A|M)$
- اگر $P(A)\neq 0$ از تعریف احتمال شرطی داریم: $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$
  - $P(A\cap B)$ را گاه جهت خلاصه‌نویسی به صورت $P(AB)$ و یا $P(A,B)$ نیز می‌نویسند.
- به همین ترتیب، اگر $P(AB)\neq 0$، داریم: $P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$
- قاعده زنجیره‌ای:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

مثال ۱

- در آزمایش انداختن تاس اگر بدانیم که تاس زوج آمده است، احتمال اینکه کوچکتر از ۴ باشد چیست؟

A = {عدد تاس کوچکتر از ۴} = {1,2,3}
B = {عدد تاس زوج} = {2,4,6}
$A \cap B = \{2\}$

بنابراین:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

- در حالی که $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$، یعنی $P(A|B)$ کمتر از $P(A)$ است، یعنی B حاوی اطلاعات منفی راجع به A است.

مثال ۳

- مؤسسه‌ای که آقای حمیدی در آن کار میکند یک مهمانی شام برای کارمندانی که حداقل یک پسر داشته باشند ترتیب داده است. اگر بدانیم که آقای حمیدی دو فرزند دارد و به مهمانی دعوت شده است، احتمال اینکه هر دو فرزند او پسر باشند چقدر است؟

Ω = {(جنسیت فرزند اول, جنسیت فرزند دوم)} = {(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)}

E : پیشامد هر دو فرزند پسر = {(b,b)}

F : پیشامد حداقل یک فرزند پسر = {(b,g),(g,b),(b,b)}

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

- راه غلط: یکی از فرزندان پسر است، دیگری یا دختر است و یا پسر، پس احتمال دو پسر $\frac{1}{2}$ است!

مثال ۴

- ظرفی دارای ۸ توپ قرمز و ۴ توپ سفید است. دو توپ (بدون جایگزینی) انتخاب می‌کنیم. اگر انتخاب هر یک از توپ‌ها هم‌شانس باشد احتمال اینکه هر دو توپ انتخابی قرمز باشند چیست؟

به روش قبلی:

$$P = \frac{\text{تعداد راههای انتخاب دو توپ قرمز}}{\text{تعداد راههای انتخاب دو توپ}} = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = 0.424$$

با استفاده از احتمال شرطی:

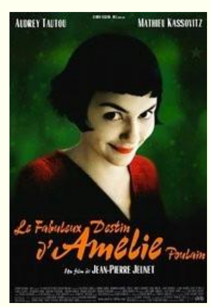
$A =$ قرمز بودن توپ اول $\rightarrow P(A) = \frac{8}{12}$

$B =$ قرمز بودن توپ دوم $\rightarrow P(B|A) = \frac{7}{11}$

بنابراین:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} = 0.424$$

مثال Netflix



- احتمال این که کاربری فیلم Amelie را دوست داشته باشد، چقدر است؟

Ω = {Like, Not Like} , F = {Like}

$P(F) = ?$

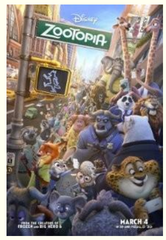
$$P(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(F)}{n}$$

$P(F) = 50{,}234{,}231 / 50{,}923{,}123 = 0.97$

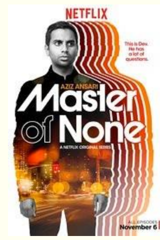
مثال Netflix

- فرض کنید E پیشامد دوست داشتن یک فیلم برای کاربران Netflix باشد.

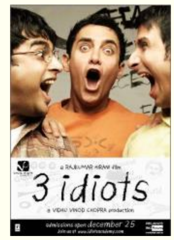
$P(E) = 0.89$



$P(E) = 0.95$



$P(E) = 0.89$



$P(E) = 0.92$

مثال Netflix

- احتمال این که کاربری که فیلم Amelie را دوست داشته است، فیلم جنگ ستارگان را هم دوست داشته باشد، چقدر است؟

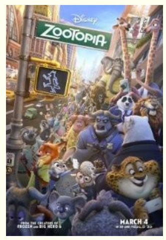
پیشامد دوست داشتن جنگ ستارگان : E

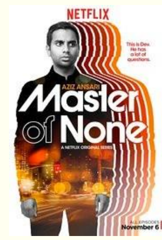
$P(E|F) = ?$

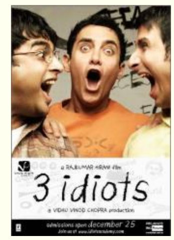
$$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{\dfrac{\text{تعداد افرادی که هر دو فیلم را دوست داشته‌اند}}{\text{تعداد افرادی که هر دو فیلم را تماشا کرده‌اند}}}{\dfrac{\text{تعداد افرادی که Amelie را دوست داشته‌اند}}{\text{تعداد افرادی که هر دو فیلم را تماشا کرده‌اند}}}$$

$= 0.82$

مثال Netflix

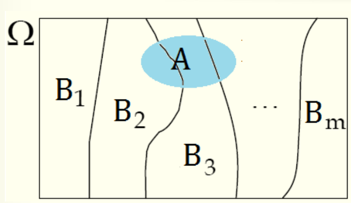






P(E|F) = 0.82	P(E|F) = 0.96	P(E|F) = 0.93	P(E|F) = 0.99
P(E) = 0.89	P(E) = 0.95	P(E) = 0.89	P(E) = 0.92

قضیهٔ احتمال کل (Total Probability Theorem)



قضیه: اگر مجموعه‌های B_i که $1 \leq i \leq m$ ، افرازی از Ω باشند، برای هر پیشامد دلخواه A از Ω داریم:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)$$

اثبات:

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\cup_{i=1}^{m} B_i)) = P(\cup_{i=1}^{m}(A \cap B_i))$$
$$= \sum_{i=1}^{m} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)$$

- از رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت $P(A)$ متوسط وزن‌داری از $P(A|B_i)$هاست که مقدار وزن $P(B_i)$ است.

مثال ۱

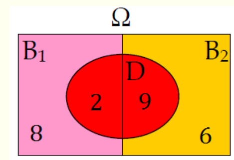
- دو کلاس داریم. کلاس اول شامل ۲ دانشجوی کامپیوتر و ۸ دانشجوی برق است. کلاس دوم شامل ۹ دانشجوی کامپیوتر و ۶ دانشجوی برق است. به طور تصادفی یکی از کلاس‌ها را انتخاب می‌کنیم و از کلاس انتخاب شده به طور تصادفی یک دانشجو انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه دانشجوی انتخاب شده کامپیوتری باشد چقدر است؟

$\Omega =$ دانشجوهای موجود در دو کلاس

$B_1 =$ پیشامد انتخاب از ۱۰ دانشجوی کلاس اول

$B_2 =$ پیشامد انتخاب از ۱۵ دانشجوی کلاس دوم

$D =$ پیشامد انتخاب یکی از ۱۱ دانشجوی کامپیوتر



$$\left.\begin{array}{r} P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2} \\ P(D|B_1) = \frac{2}{10}, P(D|B_2) = \frac{9}{15} \end{array}\right\} \Rightarrow P(D) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{15} \times \frac{1}{2} = 0.4$$

مثال ۲

- کامپیوتری دو عدد تصادفی A و B را، که می‌توانند مقادیر ۱ تا ۱۲ را با شانس یکسان اختیار کنند، تولید می‌کند. احتمال این که A از B بزرگتر باشد چقدر است؟
- با استفاده از قضیه احتمال کل داریم:

$$P(A > B) =$$

$$P(A > B|B = 1)P(B = 1) + P(A > B|B = 2)P(B = 2) + \cdots + P(A > B|B = 12)P(B = 12) =$$

$$= \frac{11}{12} \times \frac{1}{12} + \frac{10}{12} \times \frac{1}{12} + \cdots + \frac{0}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{11 + 10 + \cdots + 1}{12^2}$$

$$= \frac{11 \times 12}{2 \times 12^2} = \frac{11}{24}$$

قضیه بیز (Bayes Theorem)

- در بسیاری موارد $P(A|B_i)$ها داده شده است، و ما خواهان محاسبه $P(B_i|A)$ها هستیم.
- در این موارد از قضیه بیز استفاده می‌کنیم.

Thomas Bayes
(1701-1761)

- قضیه بیز: اگر مجموعه‌های B_i، که $1 \le i \le m$ ، افرازی از Ω باشند، برای هر پیشامد دلخواه A از Ω داریم:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)}$$

قضیه بیز

- قضیه بیز: اگر مجموعه‌های B_i، که $1 \le i \le m$ ، افرازی از Ω باشند، برای هر پیشامد دلخواه A از Ω داریم:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)}$$

اثبات:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)}$$

- اصطلاحا $P(B_k)$ را احتمال پیشین (a priori probability) پیشامد B_k، و $P(B_k|A)$ را احتمال پسین (a posteriori probability) آن گویند.

تعبیر بیزی احتمال

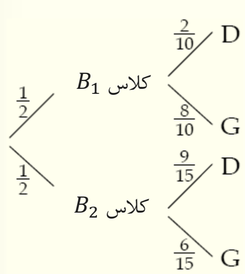
- تعبیر بیزی (Bayesian Interpretation) احتمال:
  - در این تعبیر احتمال پیشامد E بیانگر میزان باور ما نسبت به E است.
- قضیه بیز، میزان باور ما نسبت به یک پدیده را قبل و بعد از مشاهده شواهدی در تایید یا انکار آن پدیده، به هم پیوند می‌دهد.

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- $P(B)$: میزان باور ابتدایی ما نسبت به B (احتمال پیشین)
- $P(B|A)$: میزان باور ما نسبت به B پس از مشاهده A (احتمال پسین)
- $P(A|B)/P(A)$: میزان حمایت A از B

مثال ۱

- در مثال قبل اگر دانشجوی انتخاب شده کامپیوتری باشد، احتمال اینکه متعلق به کلاس دوم باشد چقدر است؟



$$P(B_2|D) = \frac{P(D|B_2)P(B_2)}{P(D|B_1)P(B_1) + P(D|B_2)P(B_2)}$$

$$P(B_2|D) = \frac{\frac{9}{15}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{9}{15}\times\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

- $P(B_2) = 1/2$ و $P(B_2|D) = 3/4$ ، بنابراین مشاهده پیشامد D (کامپیوتری بودن دانشجو) شاهدی در تایید پیشامد B_2 (انتخاب از کلاس دوم) است.

ادامه مثال ۱

- همچنین توجه کنید که:

$$P(B_1|D) = 1 - P(B_2|D) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

- اصولاً اگر B_iها افرازی از Ω باشند، داریم:

$$\sum_{i=1}^{m} P(B_i|D) = 1$$

- توجه کنید که اگر جای شرط و مشروط را عوض کنید این رابطه دیگر صادق نیست:

$$\sum_{i=1}^{m} P(D|B_i) \neq 1$$

- حتی اگر B_i ها صرفاً افرازی از پیشامد A باشند، و یا افرازی از پیشامد دیگری که پیشامد A را شامل شود، دو قضیهٔ احتمال کل و قضیهٔ بیز باز هم صادق خواهند بود.

مثال ۲

- سه سکه داریم. سکهٔ C_1 هر دو طرفش شیر، سکهٔ C_2 هر دو طرفش خط و سکهٔ C_3 یک طرفش شیر و طرف دیگرش خط است. یکی از این سه را به تصادف انتخاب کرده و پرتاب می‌کنیم. اگر طرف هویدای این سکه شیر باشد، احتمال اینکه طرف دیگرش خط باشد چیست؟

$$P(C_3|H) = \frac{P(H|C_3)P(C_3)}{P(H|C_1)P(C_1) + P(H|C_2)P(C_2) + P(H|C_3)P(C_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

مثال ۳

- شما پایگاه داده‌ای شامل ۱۰۰۰ ایمیل دارید:
  - ۶۰۰ ایمیل از این ۱۰۰۰ ایمیل اسپم هستند.
    - ۴۸۰ ایمیل از بین این ۶۰۰ ایمیل حاوی کلمه «خرید» هستند.
  - ۴۰۰ ایمیل از این ۱۰۰۰ ایمیل اسپم نیستند.
    - ۴۰ ایمیل از بین این ۴۰۰ ایمیل حاوی کلمه «خرید» هستند.

در صورتی که یک ایمیل حاوی کلمه «خرید» باشد، احتمال اسپم بودن آن چقدر است؟

پیشامد این که یک ایمیل حاوی کلمه «خرید» باشد = B

پیشامد این که یک ایمیل اسپم نباشد = $\bar{S}$ و پیشامد این که یک ایمیل اسپم باشد = S

$$P(S)=\frac{600}{1000}=0.6, P(\bar{S})=\frac{400}{1000}=0.4, P(B|S)=\frac{480}{600}=0.8, P(B|\bar{S})=\frac{40}{400}=0.1$$

$$P(S|B)=\frac{P(B|S)P(S)}{P(B|S)P(S)+P(B|\bar{S})P(\bar{S})}=\frac{0.8\times 0.6}{0.8\times 0.6+0.1\times 0.4}=0.92$$

مثال ۴

- آقای حمیدی ساکن شهری با جمعیت ۱۰۰۰۰۰ نفر است و می‌دانیم حدود ۲ درصد از مردم این شهر از سرطان مری رنج می‌برند. فرض کنید آزمایش خاصی برای سرطان مری دارای دقت ٪۹۵ است. نتیجه آزمایش آقای حمیدی مثبت شده است. پزشک به آقای حمیدی می‌گوید که طبق نتیجه آزمایش او به احتمال ٪۹۵ دارای سرطان مری است. آیا این نظر پزشک صحیح است؟

پیشامد بیمار بودن یک شخص = S پیشامد سالم بودن یک شخص = H

پیشامد مثبت بودن نتیجه آزمایش = T^+ پیشامد منفی بودن نتیجه آزمایش = T^-

از فرضیات مساله داریم:

$$P(S)=0.02 \quad \Rightarrow P(H)=1-0.02=0.98$$

$$P(T^+|S)=0.95 \quad \Rightarrow P(T^-|S)=1-0.95=0.05$$

$$P(T^-|H)=0.95 \quad \Rightarrow P(T^+|H)=1-0.95=0.05$$

ادامه مثال ۴

- احتمالی که به دنبال محاسبه آن هستیم $P(S|T^+)$ است. طبق قضیه بیز داریم:

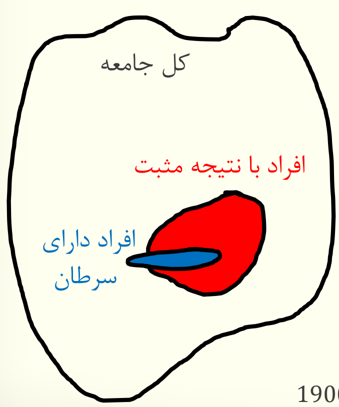
$$P(S|T^+) = \frac{P(T^+|S)P(S)}{P(T^+|S)P(S) + P(T^+|H)P(H)}$$

$$P(S|T^+) = \frac{0.95 \times 0.02}{0.95 \times 0.02 + 0.05 \times 0.98} = 0.278$$

- بنابراین احتمال بیمار بودن آقای حمیدی تنها ۲۷/۸٪ است و پزشک $P(S|T^+)$ را با $P(T^+|S)$ اشتباه گرفته است!
- غلط رایج اشتباه گرفتن $P(A|B)$ با $P(B|A)$ را اصطلاحا مغالطه دادستان (prosecutor's fallacy) گویند.

شهود قضیه بیز

- ۲ درصد از جمعیت ۱۰۰۰۰۰ نفری سرطان مری دارند ← ۲۰۰۰ نفر
- دقت آزمایش ۹۵ درصد است، پس از ۲۰۰۰ نفری که سرطان دارند، جواب آزمایش ۱۹۰۰ نفر مثبت می‌شود.
- آزمایش ۵ درصد خطا دارد، پس از ۹۸۰۰۰ نفری که سرطان ندارند، جواب آزمایش ۴۹۰۰ نفر مثبت می‌شود.
- پس در صورت مثبت شدن جواب آزمایش احتمال سرطان داشتن برابر است با:



$$\frac{1900}{1900 + 4900} = 0.278$$

مساله مونتی هال (Monty Hall)

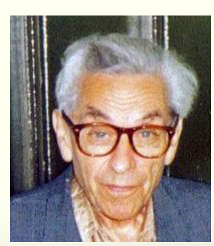
- فرض کنید شرکت‌کنندگان در یک مسابقه تلویزیونی در برابر سه در قرار می‌گیرند. پشت یکی از درها یک خودرو گران‌قیمت است و پشت دو در دیگر دو بزا!
- مجری از شرکت‌کننده می‌خواهد یک در را انتخاب کند، سپس یکی از دو در باقیمانده را که می‌داند خودرو پشت آن قرار ندارد باز میکند.

- در این مرحله مجری از شرکت‌کننده می‌پرسد که آیا می‌خواهد دری را که انتخاب کرده با دری که باقیمانده عوض کند یا خیر؟
- آیا به سود شرکت‌کننده است که در انتخابی را عوض کند، عوض نکند، و یا تفاوتی ندارد؟

مساله مونتی هال

- نظر مارلین ساوانت، رکورددار ضریب هوشی در کتاب رکوردهای گینس:

بهتر است در انتخاب شده را عوض کنیم.



- نظر پاول اردوش، از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان قرن بیستم:

تعویض در انتخابی تاثیری در احتمال برنده شدن ندارد.

حل مساله مونتی هال

- پیشامد این که خودرو پشت در شماره i باشد: A_i
- در ابتدا همه A_iها هم احتمال هستند: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$
- فرض کنید شرکت‌کننده در شماره ۳ را انتخاب می‌کند و مجری در شماره ۱ را پوچ می‌کند ($B_1 =$ پیشامد این که مجری در ۱ را پوچ کند)

$P(B_1 \mid A_1) = 0$

$P(B_1 \mid A_2) = 1$

$P(B_1 \mid A_3) = 1/2$

$$P(B_1) = P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2) + P(B_1|A_3)P(A_3)$$
$$= 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

حل مساله مونتی هال

بنابراین احتمالات پسین عبارتند از:

$P(A_1|B_1) = 0$

$$P(A_2|B_1) = \frac{P(B_1|A_2)P(A_2)}{P(B_1)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_3|B_1) = \frac{P(B_1|A_3)P(A_3)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

پس بهتر است شرکت‌کننده در انتخابی را عوض کند!

مساله مشابه

- فرض کنید که ۱۰۰۰ پاکت وجود دارد که در یکی از آن‌ها جایزه است.
- شما اجازه دارید که یکی از پاکت‌ها را انتخاب کنید:
  - احتمال برنده شدن = ۱/۱۰۰۰
- احتمال این که یکی از ۹۹۹ پاکت باقیمانده حاوی جایزه باشد = ۹۹۹/۱۰۰۰
- ۹۹۸ پاکت از ۹۹۹ پاکت باقیمانده را باز می‌کنیم. احتمال این که تنها پاکت باقیمانده حاوی جایزه باشد = ۹۹۹/۱۰۰۰
- بنابراین منطقی است که انتخاب خود را عوض کنیم.