3)

الف) $P(A) = P\{Y < \frac{1}{2}\} = F_Y(\frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_Y(y)\,dy$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{4x+2y}{3}\,dx = \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}yx\right)\Big|_0^1 = \frac{2+2y}{3}$$

$$\Rightarrow F_Y(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2+2y}{3}\,dy = \left(\frac{2y+y^2}{3}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

ب) $f_{X,Y|A}(x,y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{P(A)} = \dfrac{\frac{4x+2y}{3}}{\frac{5}{12}} = \boxed{\frac{16}{5}x + \frac{8}{5}y}$

$$f_{X|A}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY|A}(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{16}{5}x + \frac{8}{5}y\right)dy = \left(\frac{16}{5}xy + \frac{4}{5}y^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{8}{5}x + \frac{1}{5}}$$

$$f_{Y|A}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY|A}(x,y)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{16}{5}x + \frac{8}{5}y\right)dx = \left(\frac{8}{5}x^2 + \frac{8}{5}yx\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{8}{5} + \frac{8}{5}y}$$

ج) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{4x+2y}{3}\,dy = \left(\frac{4xy+y^2}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4x+1}{3}$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{4x+2y}{3}}{\frac{2+2y}{3}} = \boxed{\frac{4x+2y}{2+2y}}$$

$$f_{Y|X}(y,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{4x+2y}{3}}{\frac{4x+1}{3}} = \boxed{\frac{4x+2y}{4x+1}}$$

(4

الف) در نظر داریم که قفل یک مستقل از قفل دو است: $X_1 \perp X_2$ و از آنجا که تا زمان رسیدن به اولین موفقیت، برای باز شدن قفل ها تلاش می‌کنیم، پس X_1 و X_2 هر دو توزیع هندسی دارند با پارامترهای: $X_1 \sim Geo(\frac{1}{24})$، $X_2 \sim Geo(\frac{1}{25})$

ما باید حداکثر در ۳۰ تلاش، هر دو قفل را باز کنیم. پس داریم:

$$F_{X_1+X_2}(30) = P\{X_1+X_2 \leq 30\} = \sum_{k=1}^{29} P\{X_1 = k , X_2 \leq 30-k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{29} P_{X_1}(k)\, F_{X_2}(30-k) = \sum_{k=1}^{29} \left(\frac{1}{24}\left(1-\frac{1}{24}\right)^{k-1}\right)\left(1-\left(1-\frac{1}{25}\right)^{30-k}\right) \boxed{\simeq 0.375}$$

از آنجایی برای باز کردن هر یک از قفل ها به حداقل یک تلاش نیاز داریم، بازه بندی سیگما از 1 تا 29 است تا پارامترهای P_X و F_Y کمتر از 1 نشوند.

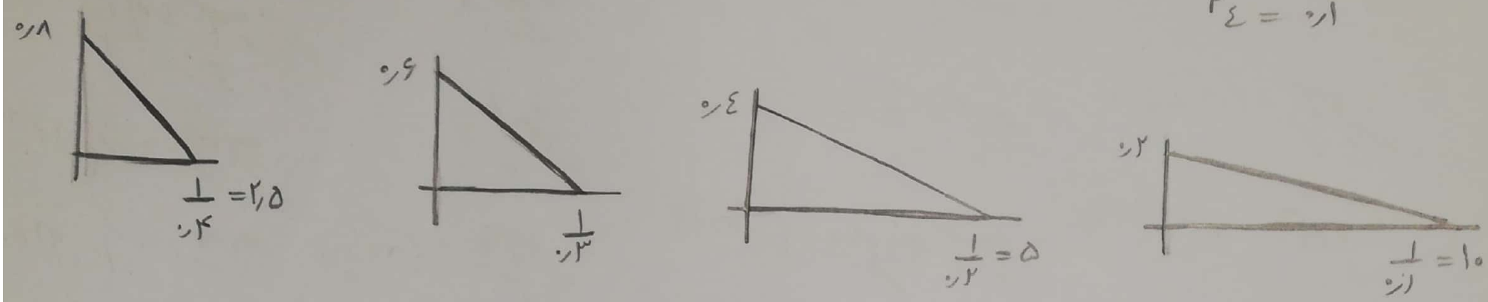
ب) از آنجایی که برای قفل ۵ رقمی، ۱۲ تلاش انجام شده است، برای قفل ۴ رقمی کمتر مساوی ۱۸ تلاش صورت خواهد گرفت. در واقع داریم:

$$P\{X_1 \leq 5 \mid X_1+X_2 \leq 30 , X_2 = 12\} = P\{X_1 \leq 5 \mid X \leq 18\}$$

$$= \frac{F_{X_1}(5)}{F_{X_2}(18)} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{24}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{24}\right)^{18}} \boxed{\simeq 0.4}$$

(۵

$P_1 = 0.4$ $\quad P_2 = 0.3$ $\quad P_3 = 0.2$ $\quad P_4 = 0.1$



الف) برای $n=3$ و $n=4$ داریم:

$$f_T(t|N=3) = -\frac{0.4}{5}t + 0.4$$

$$f_T(t|N=4) = -\frac{0.2}{10}t + 0.2$$

$$\Longrightarrow P_{T,N}(\{T<5\}, \{N=3,4\}) = P_{T,N}(\{T<5\},\{N=3\}) + P_{T,N}(\{T<5\},\{N=4\}) = P_N(3) \times P_{T|N}(T<5 \mid N=3) + P_N(4) \times P_{T|N}(T<5 \mid N=4)$$

$$= P_N(3) \times F_{T|N}(5|N=3) + P_N(4) \times F_{T|N}(5|N=4)$$

$$= P_N(3) \times \int_0^5 f_{T|N}(t|N=3)\,dt + P_N(4) \times \int_0^5 f_{T|N}(t|N=4)\,dt$$

$$= 0.2 \times \int_0^5 \left(\frac{-0.4}{5}t + 0.4\right)dt + 0.1 \times \int_0^5 \left(\frac{-0.2}{10} + 0.2\right)dt$$

$$= 0.2 \times \left(\frac{-0.2t^2}{5} + 0.4t\right)\Big|_0^5 + 0.1 \times \left(\frac{-0.1t^2}{10} + 0.2t\right)\Big|_0^5 = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 0.75 = \boxed{0.275}$$

ب)

$$P_{N|T}(N=۳ \mid T<۲) = \frac{P_{T|N}(T<۲ \mid N=۳) \times P_N(N=۳)}{P_T(T<۲)}$$

$$P_T(T<۲) = P_{T|N}(T<۲ \mid N=۱)\,P_N(N=۱) + P_{T|N}(T<۲ \mid N=۲)\,P_N(N=۲)$$

$$+ P_{T|N}(T<۲ \mid N=۳)\,P_N(N=۳) + P_{T|N}(T<۲ \mid N=۴)\,P_N(N=٤)$$

$$= F_{T|N}(۲|۱)\,P_N(۱) + F_{T|N}(۲|۲)\,P_N(۲) + F_{T|N}(۲|۳)\,P_N(۳) + F_{T|N}(۲|٤)\,P_N(٤)$$

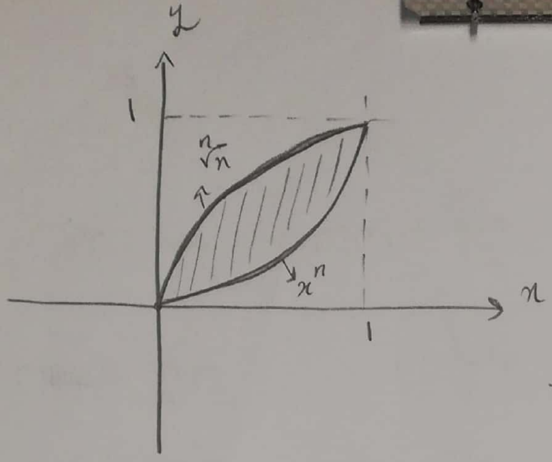
$$= \int_۰^۲ f_{T|N}(t|۱)\,dt\; P_N(۱) + \int_۰^۲ f_{T|N}(t|۲)\,dt + P_N(۲) + \int_۰^۲ f_{T|N}(t|۳)\,dt + P_N(۳) + \int_۰^۲ f_{T|N}(t|٤)\,dt + P_N(٤)$$

$$= \int_۰^۲ (-۰٫۳۲t + ۰٫۸)\,dt\; P_N(۱) + \int_۰^۲ (-۰٫۱۸t + ۰٫۶)\,dt\; P_N(۲) + \int_۰^۲ (-۰٫۰۸t + ۰٫٤)\,dt\; P_N(۳) + \int_۰^۲ (-۰٫۰۲t + ۰٫۲)\,dt\; P_N(٤)$$

$$= (-۰٫٦٤ + ۱٫٦) \times ۰٫٤ + (-۰٫۳٦ + ۱٫۲) \times ۰٫۳ + \underbrace{(-۰٫۱٦ + ۰٫۸) \times ۰٫۲}_{P_{T|N}(T<۲|N=۳) \times P_N(N=۳)} + (-۰٫۰٤ + ۰٫٤) \times ۰٫۱$$

$$\Rightarrow P_{N|T}(N=۳ \mid T<۲) = \frac{۰٫٦٤ \times ۰٫۲}{۰٫۹٦ \times ۰٫٤ + ۰٫۸٤ \times ۰٫۳ + ۰٫٦٤ \times ۰٫۲ + ۰٫۳٦ \times ۰٫۱} = \boxed{۰٫۱٦}$$

۶)



الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} c\,dy\,dx = \int_0^1 (c\sqrt{x} - cx^2)\,dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}c\,x^{3/2} - \frac{c}{3}x^3\right)_0^1 = \frac{1}{3}c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

ب)

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 3\,dx = 3(\sqrt{y} - y^2) \Rightarrow E[Y] = \int_0^1 3y(\sqrt{y}-y^2)\,dy = \frac{۶}{۵} - \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۲۰}$$

$$x^n < y \Rightarrow x < \sqrt{y} \quad , \sqrt[n]{x} > y \Rightarrow x > y^n$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{x^۲}^{\sqrt{x}} 3\,dy = 3(\sqrt{x} - x^2) \Rightarrow E[X] = \int_0^1 3x(\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{۹}{۲۰}$$

$$E[XY] = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3xy\,dy\,dx = \int_0^1 3x\left(\frac{x}{۲} - \frac{x^۴}{۲}\right)dx$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right)_0^1 = \frac{3}{2}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Cov}_{X,Y}(x,y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{4} - \left(\frac{9}{20}\right)^۲ = \frac{100-81}{400} = \boxed{\frac{19}{400}}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 3x^2(\sqrt{x} - x^2)\,dx = 3\left(\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{x^5}{5}\right)_0^1 = 3\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{35}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 3y^2(\sqrt{y} - y^2)\,dy = \frac{9}{35} \qquad \mathrm{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] =$$

$$\frac{9}{35} - \frac{81}{400} = \frac{153}{2800} \quad , \mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{9}{35} - \frac{81}{400} = \frac{153}{2800}$$

$$\rho_{X,Y}(x,y) = \frac{\mathrm{Cov}_{X,Y}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\frac{19}{400}}{\frac{153}{2800}} = \boxed{\frac{133}{153}}$$

CamScanner

ج) هرچه n به سمت 1 نزدیک‌تر شود، خط‌های $y=x^n$ و $y=\sqrt[n]{x}$ به هم نزدیک‌تر خواهند شد. بنابراین انتظار داریم که مساحت قسمت رنگی در اطراف خط $y=x$، متمرکزتر شود؛ پس ضریب همبستگی به 1 میل خواهد کرد.

7) در همهٔ این موارد از قانون احتمال کل بهره گرفته‌ایم و داریم:

الف)

$$P(Type=A) = 0.03 + 0.02 + 0.02 + 0.02 + 0.05 + 0.04 + 0.03 = 0.21$$

$$P(Type=B) = 0.04 + 0.05 + 0.04 + 0.03 + 0.03 + 0.08 + 0.06 = 0.33$$

$$P(Type=C) = 0.03 + 0.03 + 0.04 + 0.05 + 0.02 + 0.08 + 0.21 = \boxed{0.46}$$

$$\Longrightarrow \quad P(Type=C) > P(Type=B) > P(Type=A)$$

ب)

$$P(Day=Tuesday) = 0.02 + 0.03 + 0.05 = 0.1$$

$$P(Day=Wednesday) = 0.05 + 0.03 + 0.02 = 0.1$$

$$P(Day = Tuesday \text{ or } wednesday) = 0.1 + 0.1 = \boxed{0.2}$$

ج)

$$P(\{Type=B\}, \{Day = Sunday \text{ or } Tuesday \text{ or } Thursday\}) =$$

$$0.05 + 0.03 + 0.08 = \boxed{0.16}$$

۱) دو متغیر تصادفی D و T را برای روزها و type های مختلف لباس تعریف می‌کنیم و داریم:

$$D = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad , \quad T = 0, 1, 2$$

$$\Longrightarrow E[D] = \sum_{d=0}^{۶} d\, P_D(d) = ۱\times۰٫۱ + ۲\times۰٫۱ + ۳\times۰٫۱ + ٤\times۰٫۱ + ۵\times۰٫۲ + ۶\times۰٫۳ = ۳٫۸$$

$$E[T] = \sum_{t=0}^{۲} t\, P_T(t) = ۱\times۰٫۳۳ + ۲\times۰٫٤۶ = ۱٫۲۵$$

$$E[DT] = \sum_{d=0}^{۶} \sum_{t=0}^{۲} dt\, P_{D,T}(D=d, T=t) = ۱\times۰٫۰۵ + ۲\times۰٫۰٤ + ۳\times۰٫۰۳ +$$

$$٤\times۰٫۰۳ + ۵\times۰٫۰۸ + ۶\times۰٫۰۶ + ۲\times۰٫۰۳ + ٤\times۰٫۰٤ + ۹\times۰٫۰۵ + ۸\times۰٫۰۲ + ۱۰\times۰٫۰۸ + ۱۲\times۰٫۲۱ = ۵٫۱$$

$$Cov_{D,T}(d,t) = E[DT] - E[D]E[T] = ۵٫۱ - (۳٫۸)(۱٫۲۵) = \boxed{۰٫۳۵}$$

$$E[D^2] = \sum_{d=0}^{۶} d^2 P_D(d) = ۱\times۰٫۱ + ٤\times۰٫۱ + ۹\times۰٫۱ + ۱۶\times۰٫۱ + ۲۵\times۰٫۲ + ۳۶\times۰٫۳ = ۱۸٫۸$$

$$E[T^2] = \sum_{t=0}^{۲} t^2 P_T(t) = ۱\times۰٫۳۳ + ٤\times۰٫٤۶ = ۲٫۱۷$$

$$var(D) = E[D^2] - E^2[D] = ۱۸٫۸ - (۳٫۸)^۲ = ٤٫۳۶$$

$$var(T) = E[T^2] - E^2[T] = ۲٫۱۷ - (۱٫۲۵)^۲ \simeq ۰٫۶$$

$$\rho_{D,T}(d,t) = \frac{Cov_{D,T}(d,t)}{\sqrt{var(D)\, var(T)}} = \frac{۰٫۳۵}{\sqrt{٤٫۳۶\times۰٫۶}} \simeq \frac{۰٫۳۵}{۱٫۶} \simeq \boxed{۰٫۲۱۶}$$

۸) الف)

$$f_{Y|X}(y,x) = \frac{f_{X|Y}(x,y)\, f_Y(y)}{\int_0^\infty f_{X|Y}(x,y)\, f_Y(y)\, dy}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{c}} \frac{e^{-y}}{\cancel{(y+1)}} \cdot \cancel{(y+1)}\, e^{-x-xy}}{\int_0^\infty \cancel{\frac{1}{c}} \frac{e^{-y}}{\cancel{(y+1)}} \cancel{(y+1)}\, e^{-x-xy}\, dy} = \frac{e^{-y-x-xy}}{\int_0^\infty e^{-y-x-xy}\, dy}$$

$$\int_0^\infty e^{-y-x-xy}\, dy = \frac{1}{-x-1}\left(e^{-x-xy-y}\right)_0^\infty = 0 - \frac{1}{-x-1}\, e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x+1}$$

$$\Longrightarrow f_{Y|X}(y,x) = (x+1)\frac{e^{-y-x-xy}}{e^{-x}} = (x+1)\, e^{-y-xy}$$