Central Limit Theorem (CLT)

نامساوی‌های احتمالاتی

$f_X(x)$

$\mu \quad \sigma^2$

نامساوی مارکوف (Markov Inequality)

Andrey Markov
(1856-1922)

X: متغیر تصادفی مثبت

$$f_X(x) = 0 \quad \forall \; x \leq 0$$

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

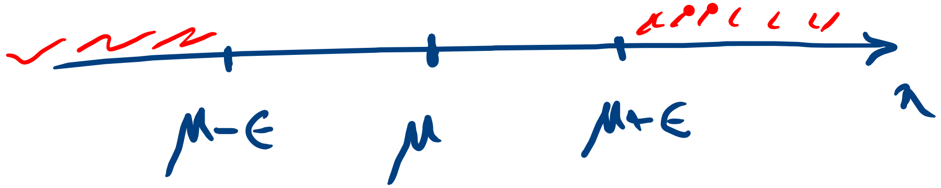
$$\underbrace{P(X \geq 18)}_{\leq 1} \leq \frac{13}{18}$$

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x f_X(x)\,dx \geq \int_\alpha^{+\infty} x f_X(x)\,dx \geq \int_\alpha^{+\infty} \alpha f_X(x)\,dx = \alpha P(X \geq \alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}}$$

(Chebychev's Inequality) نامساوی چبیشف

$$P(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{E[|X-\mu|]}{\epsilon}$$



$$P(|X-\mu| \geq \epsilon) = P(|X-\mu|^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

$$P(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

$$P(|X-\mu| \geq K\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{K^2\sigma^2} = \frac{1}{K^2}$$

نامساوی Bienayme

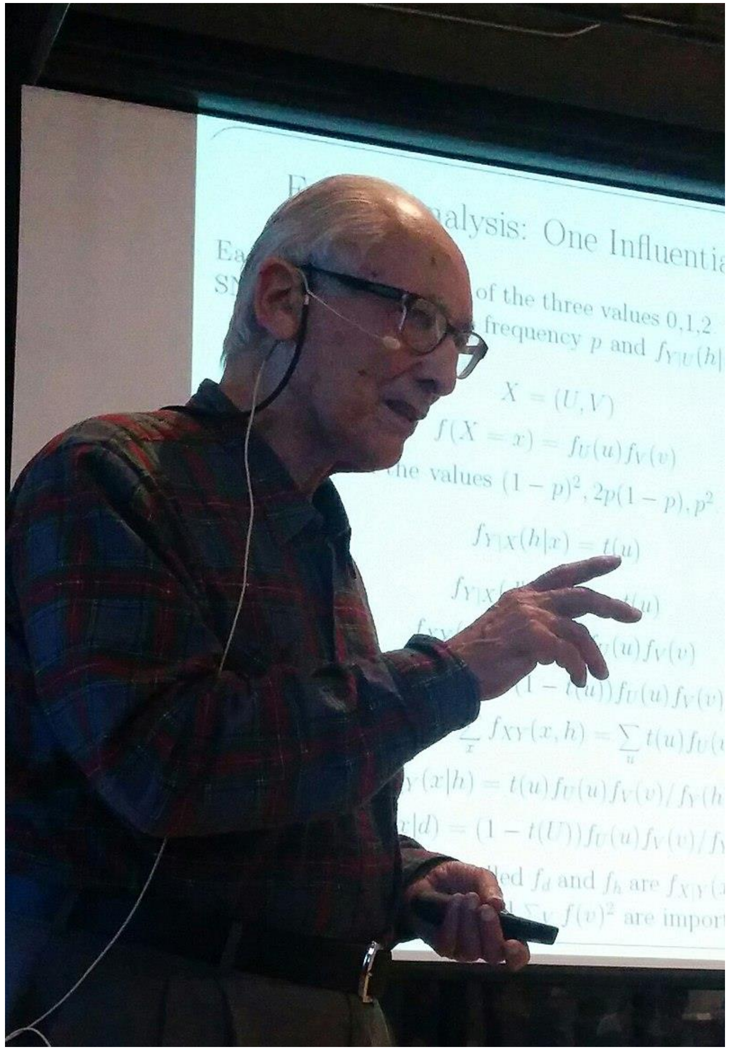
$$P(|x-\mu| \geq \epsilon) = P(|x-\mu|^n \geq \epsilon^n) \leq \frac{E[|x-\mu|^n]}{\epsilon^n}$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$P(|X-\mu| \geq 3\sigma) \leq 0.003 \leq 1/9$

$P(|X-\mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$

نامساوی چرنوف Chernoff



1923

$$P(X \geq \epsilon) = P(tX \geq t\epsilon) \qquad t \geq 0$$

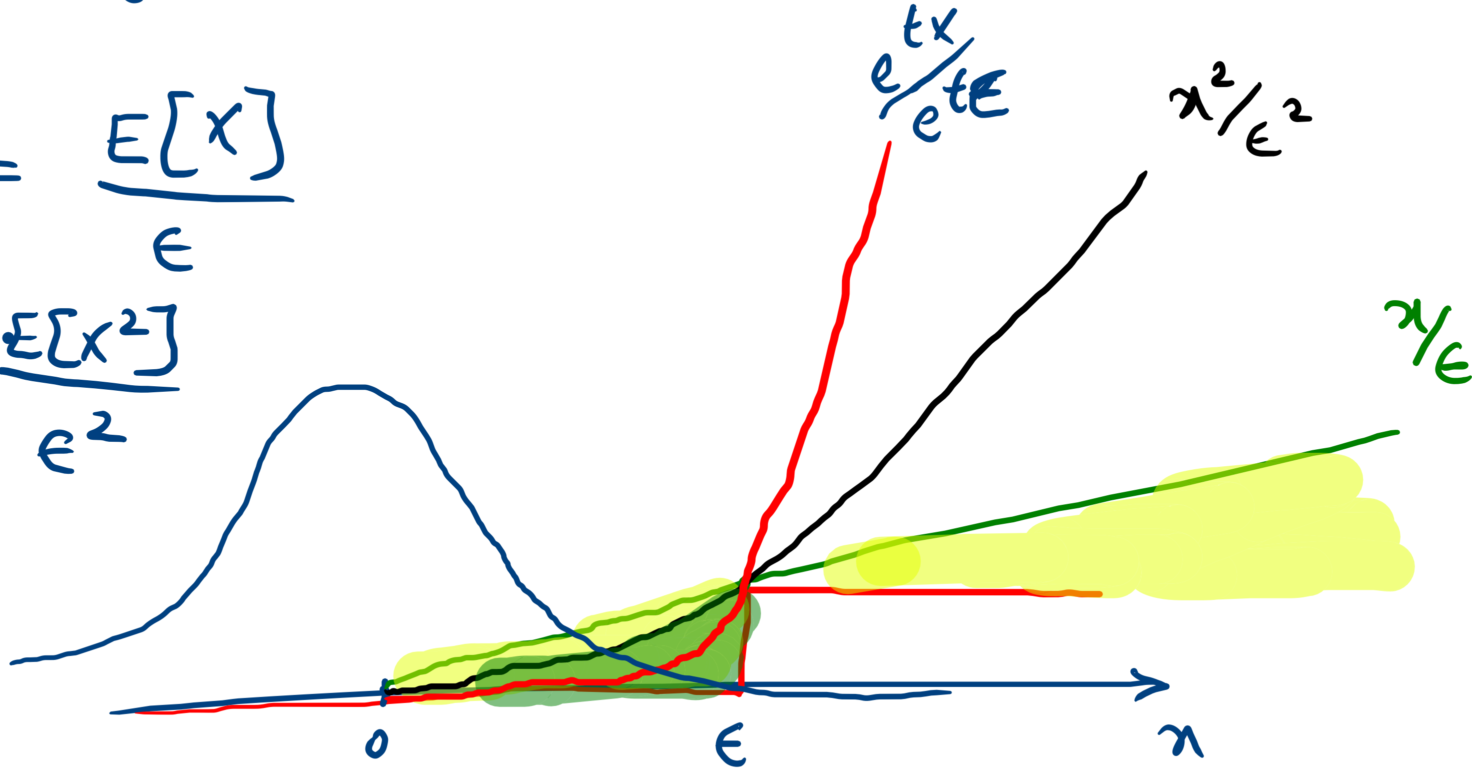
$$= P(\underbrace{e^{tX}}_{\geq 0} \geq e^{t\epsilon}) \leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{t\epsilon}}$$

$$P(X \geq \epsilon) \leq \min_{t} \underbrace{\frac{E[e^{tX}]}{e^{t\epsilon}}}_{g(t)} \qquad \forall t \geq 0$$

$$P(X \geq \epsilon) = \int_{\epsilon}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} u(x-\epsilon)\, f_X(x)\,dx = E[u(X-\epsilon)]$$

$$E[u(X-\epsilon)] \leq E\left[\frac{X}{\epsilon}\right] = \frac{E[X]}{\epsilon}$$

$$E[u(X-\epsilon)] \leq E\left[\frac{X^2}{\epsilon^2}\right] = \frac{E[X^2]}{\epsilon^2}$$



$$P(X \geq \epsilon) = \int_{\epsilon}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

مثال

- فرض کنید مقالات یک روزنامه به طور میانگین دارای ۱۰۰۰ کلمه با انحراف معیار ۲۰۰ کلمه باشند. حداقل احتمال این که تعداد کلمات یک مقاله از این روزنامه بین ۶۰۰ تا ۱۴۰۰ باشد، چقدر است؟

$$P(600 \leq X \leq 1400) = P(-400 \leq X-1000 \leq 400)$$

$$= P(|X-1000| \leq 400) = P(|X-1000| \leq 2\times 200)$$

$$1-P(|X-\mu| \leq k\sigma)$$

$$\geq 1-\frac{1}{2^2} = 0.75$$

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X-\mu| \leq k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

قانون ضعیف اعداد بزرگ
(Weak Law of Large Numbers)

- فرض کنید X_iها متغیرهای تصادفی .i.i.d با تابع توزیع انباشته F و میانگین $E[X_i] = \mu$ و واریانس $Var(X_i) = \sigma^2$ باشند.

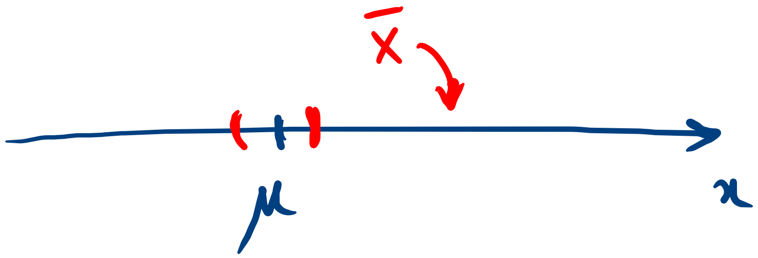
$\bar{X} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$

- متوسط این متغیرهای تصادفی را به صورت $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ تعریف می‌کنیم.
- آنگاه برای هر $\epsilon > 0$ خواهیم داشت:

$$\boxed{P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

- برای هر ϵ مثبت هرچند کوچک، با داشتن یک نمونه به اندازه کافی بزرگ، احتمال زیادی وجود دارد که $\bar{X}$ به μ نزدیک باشد، به عبارت دیگر در محدوده $(\mu - \epsilon, \mu + \epsilon)$ قرار گیرد.

اثبات قانون ضعیف اعداد بزرگ



$$P(|\bar{x}-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{E[(\bar{x}-\mu)^2]}{\epsilon^2} = \frac{var(\bar{x})}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{x}-\mu| \geq \epsilon) \to 0$$

$$\epsilon_n = \frac{1}{n}$$

قانون قوی اعداد بزرگ (Strong Law of Large Numbers)

- فرض کنید X_iها متغیرهای تصادفی .i.i.d با تابع توزیع انباشته F و میانگین $E[X_i] = \mu$ و واریانس $Var(X_i) = \sigma^2$ باشند.

- اگر $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ متوسط این متغیرهای تصادفی باشد:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \mu\right\} = 1$$

- با میل تعداد آزمایش‌ها (یا n) به بینهایت، احتمال $\bar{X} = \mu$ برابر با یک می‌شود.

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X} = \mu\right) = 1$$

$$\boxed{\bar{X} \longrightarrow \mu}$$

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

$$X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon\right) = 0$$

$\bar{X}_n$ converges to μ in probability

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1$$

$\bar{X}_n$ almost surely converges to μ

strongly

قضیه حد مرکزی (Central Limit Theorem)

- قضیه حد مرکزی: فرض کنید X_iها متغیرهای تصادفی *i.i.d.* با میانگین $E[X_i] = \mu$ و واریانس $Var(X_i) = \sigma^2$ باشند. آنگاه وقتی n به بینهایت میل کند:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)}$$

قضیه حد مرکزی (Central Limit Theorem)

- شکل دقیق قضیه حد مرکزی: اگر X_iها متغیرهای تصادفی *i.i.d* بوده و $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ باشد، وقتی $n\to\infty$، به شرط محدود بودن همه گشتاورهای X_i، توزیع Y به توزیع نرمال میل می‌کند، حتی اگر X_iها نرمال نباشند.

$$X_1+X_2+\cdots+X_n\sim N(n\mu,n\sigma^2)$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\sim N(0,1)}$$

- قضیه حد مرکزی **لیندبرگ–لوی**: محدود بودن واریانس (گشتاور مرتبه دوم) X_iها برای نرمال بودن توزیع Y کافی است.

$$\boxed{n\geq 30}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{3x+5} = \frac{2}{3}$$

تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای

$$X = \overbrace{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$$

$$X \sim Bin(n, p)$$

$$\boxed{\underbrace{X_1 + \cdots + X_n} \sim N(n\mu, n\sigma^2)}$$

$$\underbrace{X_1 + \cdots + X_n} \sim N(np, np(1-p))$$

$$Bin(n,p) \simeq N(np, np(1-p))$$

$X \geq 0$

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

$$P(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

$$\bar{X} \to \mu$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

قضیه حد مرکزی و کانوولوشن

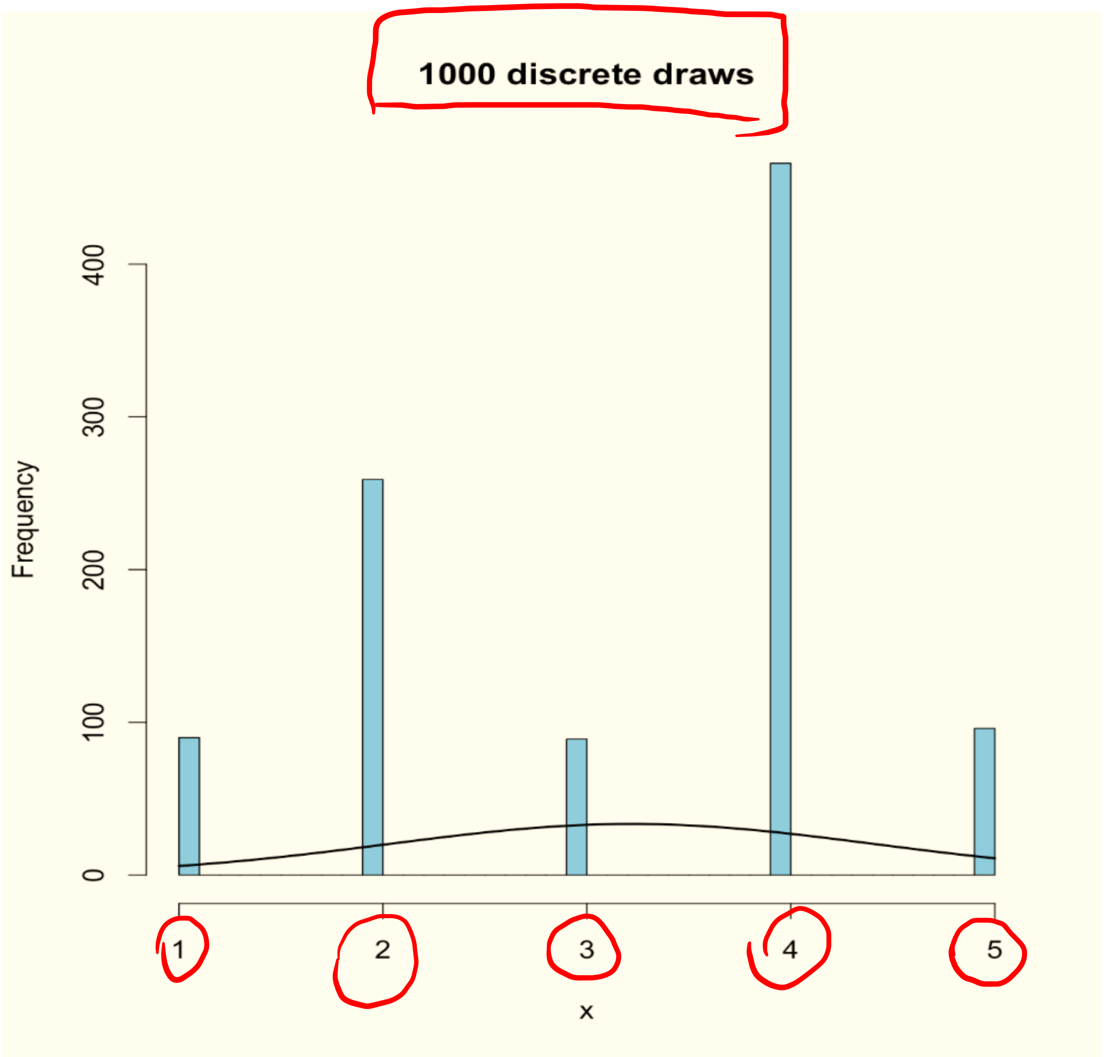
میانگین نمونه

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.1	0.25	0.1	0.45	0.1

$$E[X] = 3.2 \;, \qquad X_i \sim X$$

Sample Size: $n = 1$

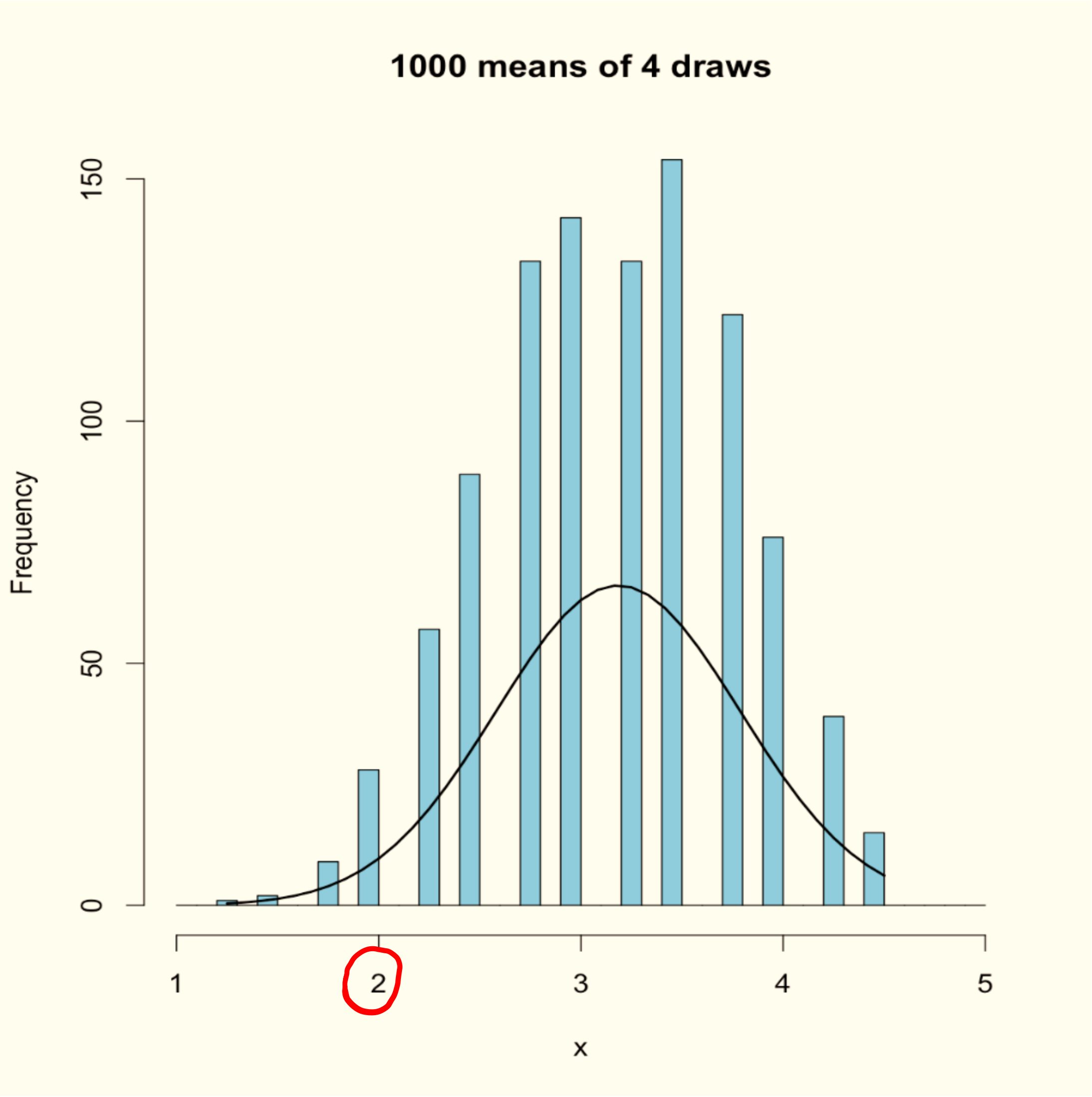
$$\bar{X} = \frac{X_1}{1}$$



میانگین نمونه

Sample Size: $n = 4$

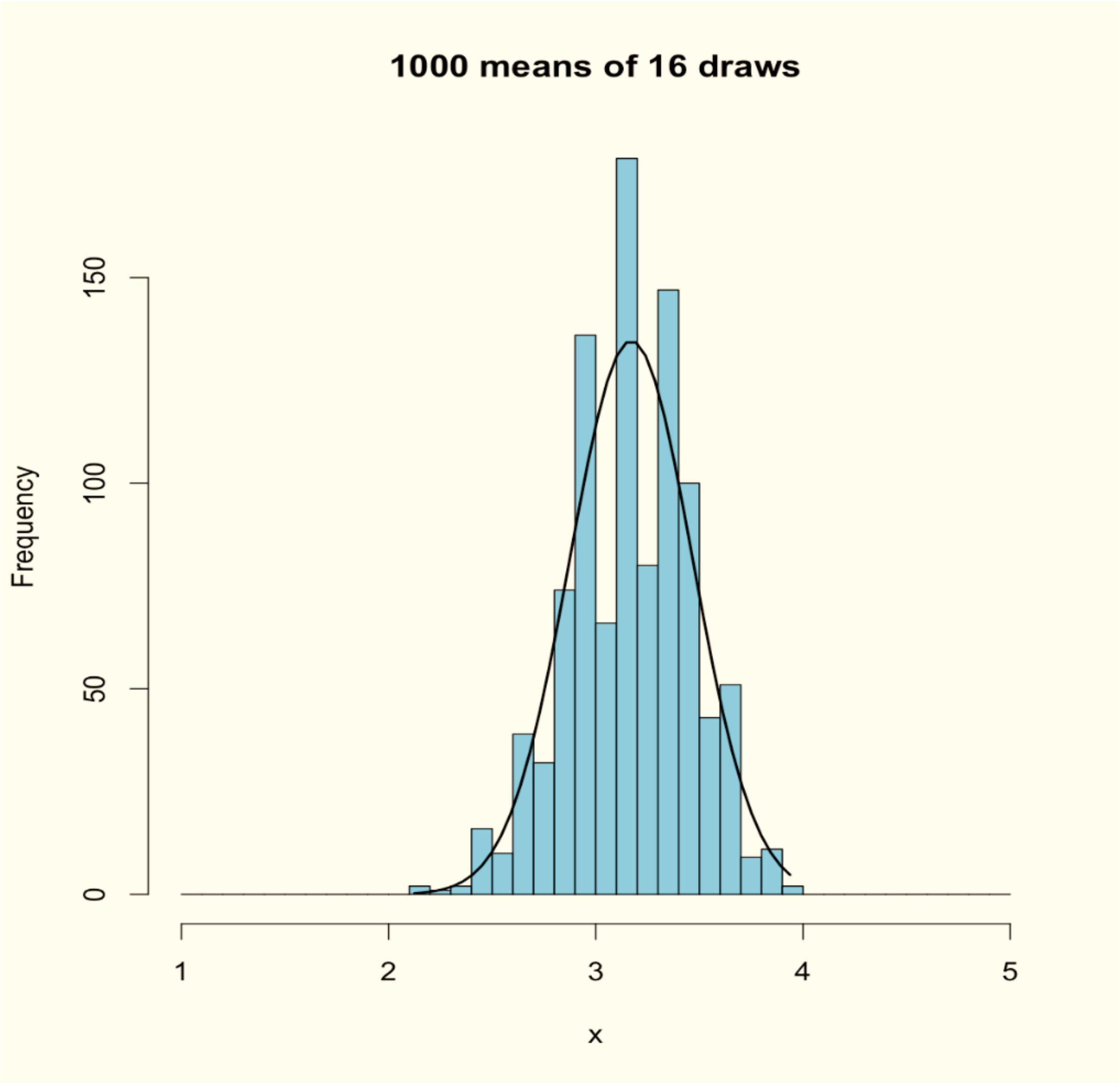
$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$$



میانگین نمونه

Sample Size: $n = 16$

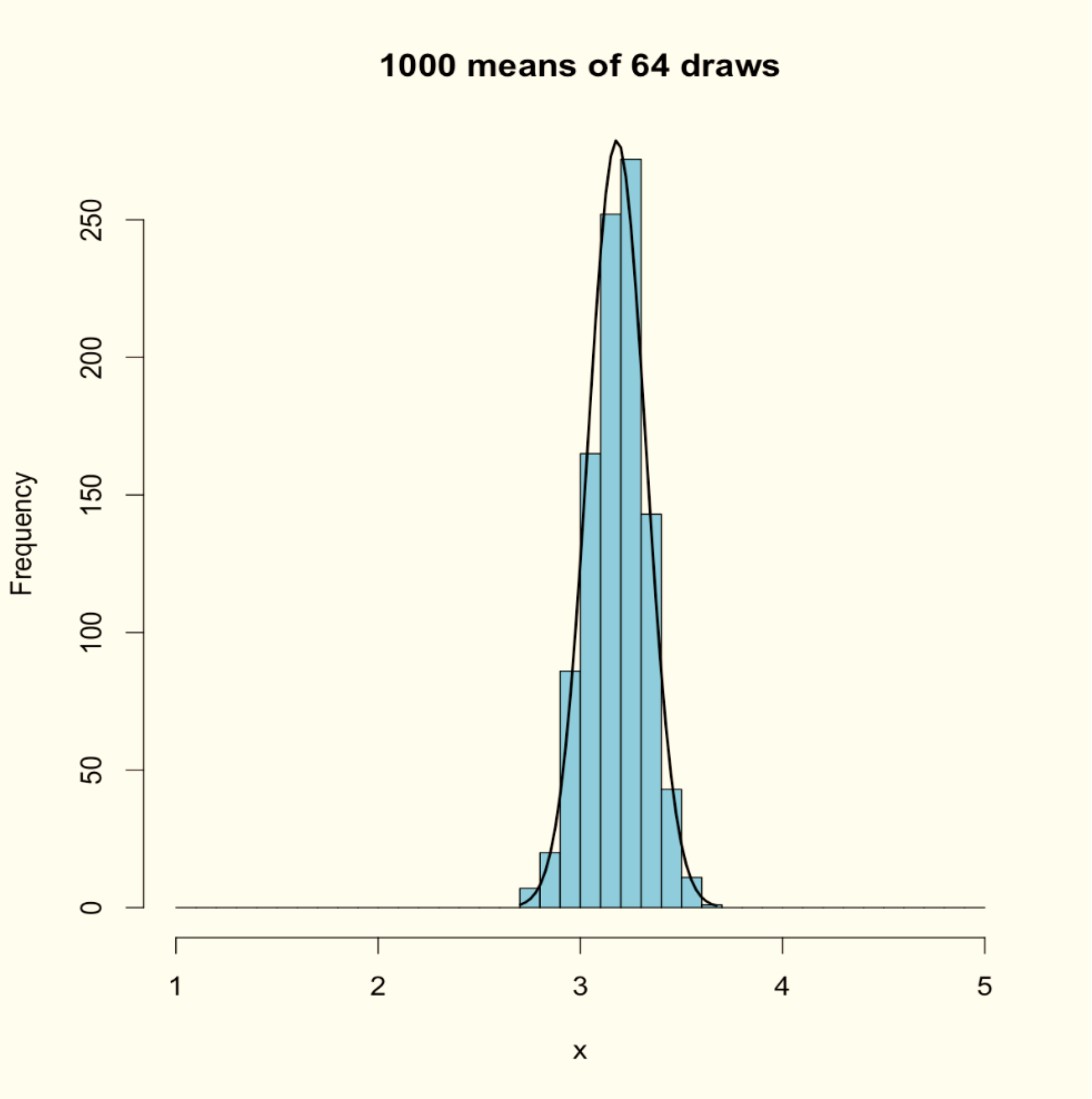
$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{16}}{16}$$



میانگین نمونه

Sample Size: $n = 64$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{64}}{64}$$



استفاده از نمونه به جای کل جامعه

مثال ۱

- هزینه ماهیانه تلفن همراه مشترکان تهرانی دارای میانگین ۶۴ هزار تومان و انحراف معیار ۹ هزار تومان است. به طور تصادفی ۳۶ قبض تلفن همراه را انتخاب می‌کنیم. احتمال این که میانگین مبلغ هزینه این قبوض بین ۶۱ تا ۶۷ هزار تومان باشد، چقدر است؟

$\mu = 64$

$\sigma = 9$

$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_{36}}{36}$

$P(61 \leq \bar{X} \leq 67) = ?$

$\boxed{n = 36} \geq 30$

$\bar{X} \sim N\left(64, \frac{9^2}{36}\right) = N\left(64, \frac{9}{4}\right)$

$P(61 \leq \bar{X} \leq 67) = P\left(\frac{61-64}{\frac{3}{2}} \leq \underbrace{\frac{\bar{X}-64}{\frac{3}{2}}}^{Z} \leq \frac{67-64}{\frac{3}{2}}\right)$

$= P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$

مثال ۲

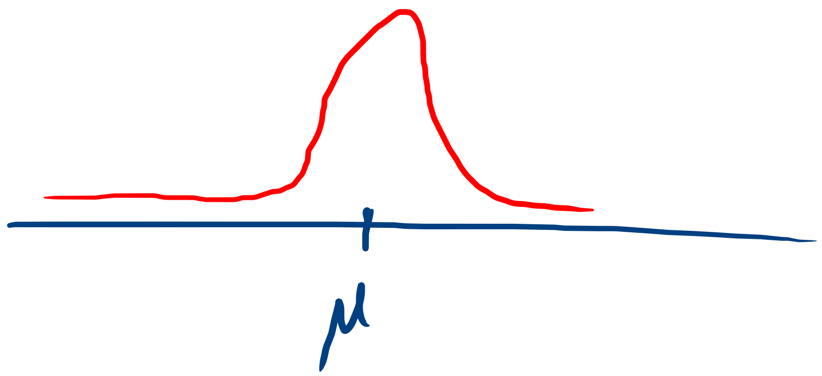
- در مثال قبلی تعداد نمونه‌های انتخابی حداقل چقدر باشد تا اطمینان داشته باشیم، میانگین نمونه‌ها با احتمال بیش از ۸۴ درصد، از ۶۵ هزار تومان کمتر خواهد بود؟

$$n = ? \Rightarrow P(\bar{X} \leq 65) \geq 0.84$$

$$\boxed{\bar{X} \sim N\left(\overset{64}{\mu}, \frac{9^2}{n}\right)}$$

$$P(\bar{X} \leq 65) = P\left(\frac{\bar{X}-64}{\frac{9}{\sqrt{n}}} \leq \frac{65-64}{\frac{9}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{9}\right) \geq 0.84$$

$$\frac{\sqrt{n}}{9} \geq 1 \Rightarrow \boxed{n \geq 81}$$


μ

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

حاصلضرب متغیرهای تصادفی i.i.d.

$$Y = X_1 X_2 \cdots X_n \qquad X_i : \text{i.i.d.}$$

$$\log Y = \log X_1 + \log X_2 + \cdots + \log X_n \qquad \log X_i \quad \text{i.i.d.}$$

$$\boxed{\begin{gathered} Z = XY \\ \log Z = \log X + \log Y \end{gathered}}$$

قانون بنفورد (Benford's Law)

- متغیر تصادفی $\log(Y)$ دارای توزیع نرمال است، در نتیجه Y دارای توزیع لگاریتمی نرمال (Log-Normal) خواهد بود:

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{y\,\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$y>0$

- با استفاده از رابطه بالا می‌توان نشان داد که متغیرهای تصادفی که از حاصلضرب مقادیر تصادفی مستقل از هم تشکیل شده باشند، در قانون بنفورد صدق می‌کنند:

- **قانون بنفورد:** رقم آغازین اعداد موجود در بسیاری از دنباله‌ها در طبیعت (به ویژه دنباله‌های ضربی) از توزیع احتمال زیر پیروی می‌کنند:

$$\boxed{P(X=d) = \log_{10}\left(1+\frac{1}{d}\right) \;:\; d = 1,2,\ldots,9}$$

قانون بنفورد

- بسیاری از دنباله‌های ریاضی از قانون بنفورد پیروی می‌کنند:
  - دنباله توان‌های ۲
  - دنباله فیبوناچی
  - دنباله فاکتوریل

- کاربردهای قانون بنفورد:
  - اقتصاد کلان
  - تشخیص تقلب در حسابرسی و فرار مالیاتی
  - تشخیص تقلب در انتخابات
  - تشخیص تقلب علمی و عددسازی

d	$P(d)$	Relative size of $P(d)$
1	30.1%	
2	17.6%	
3	12.5%	
4	9.7%	
5	7.9%	
6	6.7%	
7	5.8%	
8	5.1%	
9	4.6%	