آمار و احتمال مهندسی

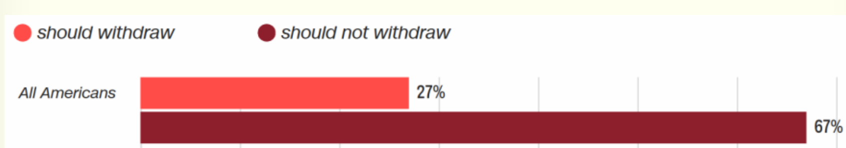
بازه اطمینان

CNN politics CNN Politics Data

CNN poll: Two-thirds want to stay in Iran nuclear deal

By Ryan Struyk, CNN

Updated 1700 GMT (0100 HKT) October 20, 2017



The CNN poll was conducted by SSRS by telephone from September 17 to 20 among a random national sample of 1,053 adults. The margin of sampling error for results among the full sample is plus or minus 3.7 percentage points;

نمونه‌برداری (Sampling)

- اگر متغیر تصادفی X، قطر پیچ‌های تولیدی یک کارخانه باشد و فرض کنیم دارای چگالی f_X باشد، این مدلی است که طبق فرض برای کلیه پیچ‌ها صادق است. پس اگر X_i پیچ نمونه i-ام باشد، داریم:

$$f_{X_i}(x) = f_X(x)$$

و X_iها (با فرض استقلال آزمایش‌ها) مستقل هستند.

- به طور کلی، متغیرهای تصادفی که مستقل و دارای توزیع یکسان باشند را *i.i.d.* می‌نامیم که مخفف عبارت Independent Identically Distributed است.

- به دنباله متغیرهای تصادفی *i.i.d.* ($X_1, X_2, \dots, X_n$) که از یک جامعه (population) آماری با توزیع F انتخاب شده باشند، یک نمونه (sample) از توزیع F می‌گوییم.

نمونه‌برداری

- جامعه آماری: مثلا جامعه پیچ‌ها در مثال قبلی
- نمونه: n پیچ منتخب از جامعه پیچ‌ها که قطر آنها n متغیر تصادفی *i.i.d* می‌دهد.
- n را اندازه نمونه (sample size) می‌گوییم.
- چون X_iها مستقل هستند، داریم:

$$f_{X_i}(x) = f_X(x)$$

$$\Rightarrow E(X_i) = E(X) = \mu \quad : \quad \text{میانگین جامعه}$$

$$\Rightarrow \mathrm{var}(X_i) = \mathrm{var}(X) = \sigma^2 \quad : \quad \text{واریانس جامعه}$$

- بحث نمونه‌برداری نقش اساسی در آمار دارد.

میانگین نمونه (Sample Mean)

- طبق تعریف، میانگین نمونه برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

داریم:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{X_i}^2 = \frac{1}{n^2} \times n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

- پس هر چقدر n زیادتر شود، مقدار $\bar{X}$ به μ واقعی نزدیکتر خواهد بود. $\bar{X}$ میانگین نمونه است، در حالی که μ میانگین جامعه است.

میانگین نمونه

- غالبا μ را در اختیار نداریم و با نمونه‌برداری و محاسبه $\bar{X}$ آن را تخمین می‌زنیم.
  - متغیر تصادفی $\bar{X}$ را تخمینگر μ می‌نامیم.
- اگر امید ریاضی تخمینگر $\hat{\theta}$ از پارامتر θ برابر با این پارامتر باشد ($E[\hat{\theta}] = \theta$)، تخمین را بی‌غرض (unbiased) یا ناریب می‌نامیم.
- دیدیم که $E[\bar{X}] = \mu$، بنابراین $\bar{X}$ یک تخمینگر بی‌غرض برای μ است.
- طبق قضیه حد مرکزی توزیع متغیر تصادفی $\bar{X}$ برای nهای بزرگ برابر است با:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

واریانس نمونه (Sample Variance)

- دیدیم که میانگین نمونه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- انحراف هر نمونه X_i برابر است با: $(\bar{X} - X_i)$
- واریانس نمونه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

- نشان دادیم که S^2 (واریانس نمونه) یک تخمینگر ناریب برای σ^2 (واریانس جامعه) است، به عبارت دیگر:

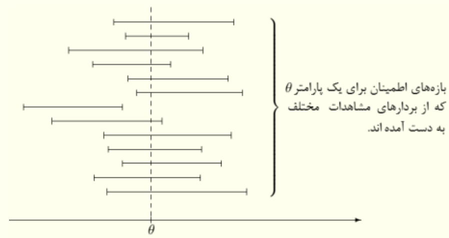
$$E[S^2] = \sigma^2$$

تخمین بازه‌ای (Interval Estimation)

- $\bar{X}$ و S^2 تخمین‌های نقطه‌ای برای میانگین و واریانس یک جامعه آماری هستند.
- در بسیاری از مواقع ترجیح می‌دهیم به جای این که با استفاده از بردار $\vec{X}$ حاصل از نمونه‌برداری یک نقطه $g(\vec{X})$ را به عنوان تخمین نقطه‌ای پارامتر θ بدهیم، یک بازه را ارائه کنیم که θ به احتمال زیاد در آن فاصله قرار دارد.
- مثلاً برای μ، به جای این که یک نقطه $\bar{X}$ را به عنوان تخمین در نظر بگیریم، بازه‌ای را معرفی می‌کنیم که μ به احتمال زیاد داخل آن است.
- چنین عملی را تخمین بازه‌ای و بازه به دست آمده را یک بازه اطمینان (confidence interval) برای پارامتر θ می‌نامیم.

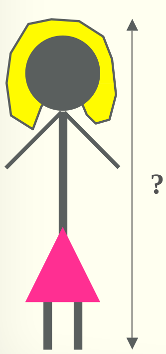
بازه اطمینان (Confidence Interval)

- از آنجا که $\vec{X}$ برداری از متغیرهای تصادفی است، بازه حاصله نیز بازه‌ای تصادفی است که پارامتر θ به احتمال زیادی داخل این فاصله تصادفی قرار دارد.



- اگر $P\{a < \theta < b\} = 1 - \alpha$ باشد، بازه (a,b) را بازه اطمینان و $1-\alpha$ و α را سطح اطمینان (Confidence Level) گویند.
  - α معمولا برابر 5%، 1% و یا 0.1% اختیار می‌شود.

بازه اطمینان برای میانگین جامعه



- فرض کنید می‌خواهیم میانگین قد زنان ایرانی را حساب کنیم.
- از آنجا که اندازه‌گیری قد همه زنان ایرانی تقریبا عملی ناممکن است، از نمونه‌برداری کمک می‌گیریم.
- فرض کنید $\bar{X}$ میانگین نمونه انتخابی ما که اندازه آن n است باشد.
- اگر میانگین و واریانس جامعه به ترتیب μ و σ^2 باشند، می‌دانیم که $\bar{X}$ تخمین مناسبی برای μ است و از طرفی طبق قضیه حد مرکزی برای n به اندازه کافی بزرگ:

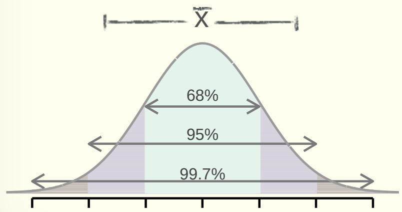
$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

بازه اطمینان ۹۵٪ برای میانگین جامعه

- می‌خواهیم به کمک $\bar{X}$ بازه‌ای را مشخص کنیم که μ با احتمال ۹۵٪ در آن بازه باشد.

Central Limit Theorem (CLT)

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$



$$\Rightarrow P\{\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\} \approx 0.95$$

$$\Rightarrow P\{-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\} \approx 0.95$$

$$\Rightarrow P\{-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\} \approx 0.95$$

$$\Rightarrow P\{\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\} \approx 0.95$$

approximate 95% CI for μ: $\bar{X} \pm \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$

بازه اطمینان برای میانگین در صورت معلوم بودن واریانس

- اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین نامعلوم μ و واریانس معلوم σ^2 باشد و نمونه‌های X_i به صورت i.i.d. از این متغیر تصادفی برداشته باشیم، تخمین نقطه‌ای زیر را دیدیم:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \rightarrow \quad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- حال می‌خواهیم یک بازه $(\bar{X} - a,\ \bar{X} + a)$ ارائه دهیم که به احتمال $1 - \alpha$، μ داخل این بازه باشد.

بازه اطمینان برای میانگین با واریانس معلوم

- از آنجا که $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ پس اگر تعریف کنیم: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$، متغیر تصادفی Z تقریبا نرمال استاندارد خواهد بود:

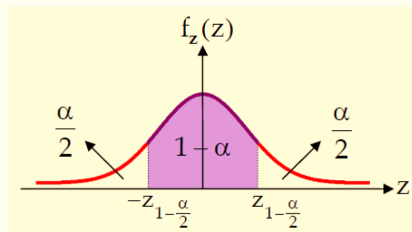
$$P\{-z < Z < z\} = 1 - \alpha$$

$$\Phi(z) - \Phi(-z) = 1 - \alpha$$

$$2\Phi(z) - 1 = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \quad z = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$



بازه اطمینان برای میانگین با واریانس معلوم

- مثلا برای سطح اطمینان $\alpha = 0.05$ (بازه اطمینان ٪۹۵)، با توجه به جدول داریم:

$$\Phi(1.96) = 0.975$$

یعنی: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$

- پس در نهایت خواهیم داشت:

$$P\left\{-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

تخمین بازه‌ای:

$$P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

بازه اطمینان برای میانگین با واریانس معلوم

- همچنین داریم:

پیش‌بینی:
$$P\left\{\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\bar{X}<\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

- پس بازه اطمینان $1-\alpha$ برای μ در حالت واریانس معلوم عبارت است از:

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

مثال

- طول یک محصول دارای توزیع نرمال با انحراف معیار $\sigma=4mm$ است. اگر در یک نمونه ۳۰ تایی، میانگین نمونه 101mm باشد، بازه اطمینان ۸۰٪ را برای میانگین به دست آورید.

$$\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

ابتدا باید $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ را محاسبه کنیم:

$$1-\alpha=0.8\quad\rightarrow\quad\alpha=0.2$$

$$\rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.9$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

ادامه مثال

$$101 - \frac{4}{\sqrt{30}} \times 1.28 < \mu < 101 + \frac{4}{\sqrt{30}} \times 1.28$$

بازه اطمینان ٪۸۰ : $\Rightarrow (100.07\,,101.93)$

- پس μ با احتمال ٪۸۰ داخل بازه (100.07, 101.93) قرار دارد.

مثال

- الگوریتم جدیدی را برای محاسبه مدت زمان اجرای آن تست می‌کنیم. فرض کنید می‌دانیم واریانس مدت زمان اجرا $\sigma^2 = 4\sec^2$. الگوریتم را n بار اجرا می‌کنیم و هر بار مدت زمان اجرا را اندازه می‌گیریم. فرض کنید متوسط مدت زمان‌های اجرا t ثانیه باشد.
- n حداقل چقدر باشد تا با اطمینان ۹۵٪ بتوان گفت که میانگین حقیقی مدت زمان اجرا (μ) در بازه $t \pm 0.5$ ثانیه است؟

$$1-\alpha = 0.95 \ \rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \quad , \quad \bar{X} = t$$

$$t - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu < t + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \rightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} \times 1.96 = 0.5$$

$$\rightarrow n = \left(\frac{2 \times 1.96}{0.5}\right)^2 = 61.46 \quad \Rightarrow n = 62$$

بازه اطمینان برای میانگین با واریانس نامعلوم

- دیدیم که بازه اطمینان $1-\alpha$ برای μ در حالت واریانس معلوم عبارت است از:

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

- اما در عمل غالباً واریانس جامعه (σ^2) را در اختیار نداریم.
- به این منظور از تخمین نقطه‌ای بی‌غرض σ^2 یعنی واریانس نمونه (S^2) استفاده می‌کنیم:

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

شرایط استفاده از CLT برای بازه اطمینان

- جهت استفاده از CLT باید شرایط خاصی برقرار باشند:

۱. شرط استقلال: مشاهداتی که از نمونه‌برداری به دست آمده‌اند باید مستقل از هم باشند.
  - نمونه‌برداری به صورت تصادفی انجام شده باشد.
  - اندازه نمونه از ۱۰٪ کل جامعه آماری کوچکتر باشد.

۲. شرط اندازه نمونه: هر چه اندازه نمونه بزرگتر باشد، استفاده از قضیه CLT معقولتر خواهد بود.
  - اندازه نمونه حداقل ۳۰ باشد.
  - هر چقدر چولگی بیشتر باشد (تقارن کمتری داشته باشد)، اندازه نمونه بزرگتری لازم است.

بازه اطمینان برای نسبت (proportion)

- اغلب مواردی پیش می آید که لازم است نسبت خاصی را در جامعه برآورد کنیم.
  - نسبت افراد بیکار بالای ۱۸ سال در اصفهان
  - نسبت دانشجویان معتاد دانشگاه تهران
  - نسبت افرادی که در انتخابات به یک فرد خاص رای می‌دهند
- معمولاً نسبت را با p نمایش می‌دهیم:

$$p = \frac{X}{N}$$

که N اندازه کل جامعه، و X تعداد افراد دارای خصوصیت مورد نظر است.

- تخمین p که یک پارامتر جامعه است را با $\hat{p}$ نمایش می‌دهیم.

بازه اطمینان برای نسبت

- توجه کنید که می‌توانیم p را به صورت

$$p = \frac{X_1 + X_2 + \ \ldots + X_N}{N}$$

که X_i متغیر شاخص مربوط به فرد i-ام از جامعه است. به عبارت دیگر $X_i = 1$، اگر فرد i-ام دارای ویژگی مورد نظر باشد، و $X_i = 0$ در غیر این صورت.

- پس می‌توان گفت که p در واقع میانگین یک توزیع برنولی است و قصد ما پیدا کردن یک بازه اطمینان برای p است.

- مشابه با حالت محاسبه بازه اطمینان برای میانگین، می‌توانیم از نمونه‌برداری کمک بگیریم.

نمونه‌برداری جهت تخمین نسبت

- فرض کنید نمونه‌ای به اندازه n از جامعه انتخاب شده است: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

- دیدیم که بهترین تخمین برای p (که میانگین جامعه است) برابر است با:

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

- طبق قضیه حد مرکزی داریم:

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

$$(\mu = p\,, \qquad \sigma^2 = p(1-p))$$

بازه اطمینان برای نسبت

- مشابه با بازه اطمینان $(1-\alpha)$ درصد برای میانگین داریم:

$$\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

- توجه کنید که فرض معلوم بودن واریانس جامعه در اینجا برقرار نیست، زیرا معلوم بودن واریانس ($p(1-p)$) معادل با معلوم بودن نسبت p است!
- دو راه برای حل این مشکل وجود دارد:
  - در نظر گرفتن بزرگترین واریانس ممکن که به ازای $p = 0.5$ اتفاق میافتد.
  - استفاده از تخمین نقطه‌ای $\hat{p}$ به جای p.

بازه اطمینان برای نسبت

- استفاده از روش دوم رایج‌تر است:

$$\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

- در مواردی که $\hat{p}$ را در اختیار نداشته باشیم، از روش اول ($p = 0.5$) استفاده می‌کنیم.

شرایط استفاده از CLT برای بازه اطمینان

- جهت استفاده از CLT برای بازه اطمینان نسبت یک جامعه، باید شرایط خاصی برقرار باشند:
  ۱. شرط استقلال: مشاهداتی که از نمونه‌برداری به دست آمده‌اند باید مستقل از هم باشند.
     - نمونه‌برداری به صورت تصادفی انجام شده باشد.
     - اندازه نمونه از ۱۰٪ کل جامعه آماری کوچکتر باشد.

  ۲. شرط اندازه نمونه: اندازه نمونه باید به قدری بزرگ باشد که np و $n(1-p)$ هر دو بزرگتر از ۱۰ باشند:
  - $np > 10$ and $n(1-p) > 10$

مثال ۱

- فرض کنید محموله بزرگی از یک کالای خاص در اختیار داریم. از آنجا که بررسی همه این محموله نیازمند زمان و هزینه بالایی است، تنها به بررسی یک نمونه ۲۰۰ تایی می‌پردازیم. ۲۴ مورد از کالاهای بررسی شده خراب تشخیص داده می‌شوند. بازه اطمینان ۹۶٪ برای نسبت کالاهای خراب را پیدا کنید.

$$\hat{p} = \frac{24}{200} = 0.12$$

$$1 - \alpha = 0.96 \ \rightarrow \ \alpha = 0.04 \ \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

ادامه مثال ۱

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.06$$

$$\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0.12 - 2.06\sqrt{\frac{0.12 \times 0.88}{200}} < p < 0.12 + 2.06\sqrt{\frac{0.12 \times 0.88}{200}}$$

96% confidence interval for p: (0.1195, 0.1205)

مثال ۲

- یک موسسه آمار و نظرسنجی، می‌خواهد درصد افرادی را که به یک کاندیدای خاص در انتخابات آینده ریاست جمهوری رای می‌دهند (p) تخمین بزند. کمترین تعداد افرادی که نیاز است از آنها نظرسنجی شود تا با اطمینان ۹۵٪ بتوانیم بگوییم که تخمین $\hat{p}$ حداکثر $\pm 3\%$ خطا دارد، چقدر است؟

توجه کنید که تصمیم‌گیری افراد متغیر تصادفی برنولی با احتمال موفقیت p فرض شده است. می‌دانیم که بازه اطمینان ۹۵٪ برای میانگین این متغیر تصادفی برابر است با:

$$(\hat{p} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{p} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}})$$

از طرفی برای متغیر تصادفی برنولی داریم:

$$\sigma^2 = p(1-p)$$

ادامه مثال ۲

- حداکثر تابع $f(p) = p(1-p)$ بر روی بازه $(0,1)$ در نقطه $p = \frac{1}{2}$ اتفاق می‌افتد. بنابراین:

$$\sigma^2 \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sigma \leq \frac{1}{2}$$

- بنابراین برای محدود کردن خطا به ۳ درصد باید داشته باشیم:

$$\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{1.96 \times 0.5}{\sqrt{n}} = \frac{0.98}{\sqrt{n}} \leq 0.03$$

$$n \geq \left(\frac{0.98}{0.03}\right)^2 \cong 1068$$