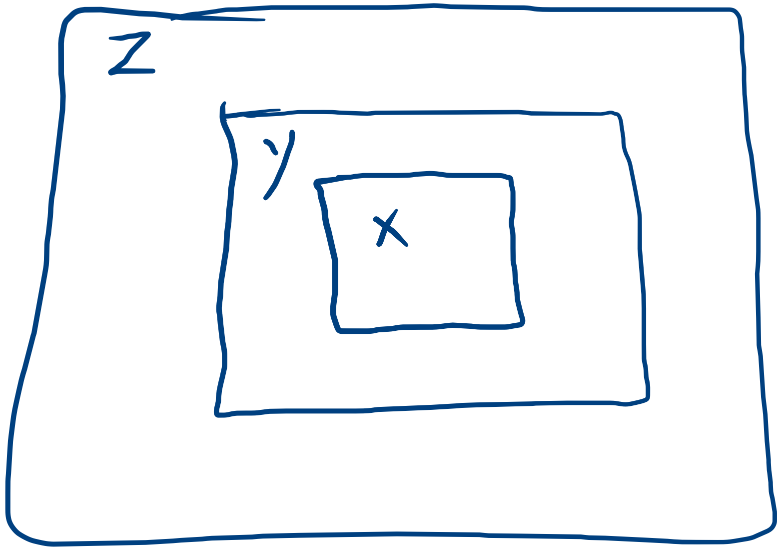
Conditional Independence

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \underline{f_X(x)}$$



$x, z \longrightarrow$ مستقل نیستند

$$f_{x,z|y}(x,z|y) = f_{x|y}(x|y)\, f_{z|y}(z|y)$$

$$x \perp z \mid y$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid y) = f_{X_1|Y}(x_1|y) \cdots f_{X_n|Y}(x_n|y)$$

Covariance

امید ریاضی حاصل ضرب

قضیه. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، و $g(.)$ و $h(.)$ دو تابع حقیقی باشند، آنگاه:

•

$$E[\underbrace{g(X)}\underbrace{h(Y)}] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

$Z = g(X)$

$W = h(Y)$

$$E[g(X)\,h(Y)] = \iint g(x)\,h(y)\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint g(x)\,h(y)\,f_X(x)\,f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= \int g(x)\,f_X(x)\,dx \int h(y)\,f_Y(y)\,dy$$

$$= E[g(X)]\,E[h(Y)]$$

$$\boxed{E[XY] = E[X]\,E[Y]}$$

کوواریانس (Covariance)

- کوواریانس پارامتری است که میزان وابستگی دو متغیر تصادفی را به یکدیگر نشان می‌دهد:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$$\mathrm{cov}(x,y) = 10$$

$$\mathrm{cov}(w,z) = 20$$

مفهوم کوواریانس

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \iint (x-\mu_x)(y-\mu_y) f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

x	y	$(x-E[X])(y-E[Y])P_{XY}(x,y)$
بالای میانگین	بالای میانگین	مثبت
پایین میانگین	پایین میانگین	مثبت
پایین میانگین	بالای میانگین	منفی
بالای میانگین	پایین میانگین	منفی

خواص کوواریانس

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$Cov(x,y) = E\left[\overbrace{(x - E[x])}\overbrace{(y - E[y])}\right]$$

$$= E\left[xy - \underbrace{E[x]}\, y - x\,\underbrace{E[y]} + \underbrace{E[x]\,E[y]}\right]$$

$$= \underbrace{E[xy] - E[x]\,E[y]}_{0} \cancel{- E[x]\,E[y]} \cancel{+ E[x]\,E[y]}$$

$$E[xy] = E[x]\,E[y]$$

مثال ۱:

دو متغیر تصادفی X و Y را با توزیع زیر در نظر بگیرید:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{و} \quad \boxed{Y = X^2}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \underbrace{E[XY]}_{0} - \underbrace{E[X]\,E[Y]}_{0}$$

$$E[X] = 0$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = 0$$

$$E[XY] = E[X^3] = \int_{-1}^{+1} x^3 \, \frac{1}{2} \, dx = 0$$

مثال ۲

$$X \sim N(0,1) \qquad Y = X^2$$

$E[X] = 0$

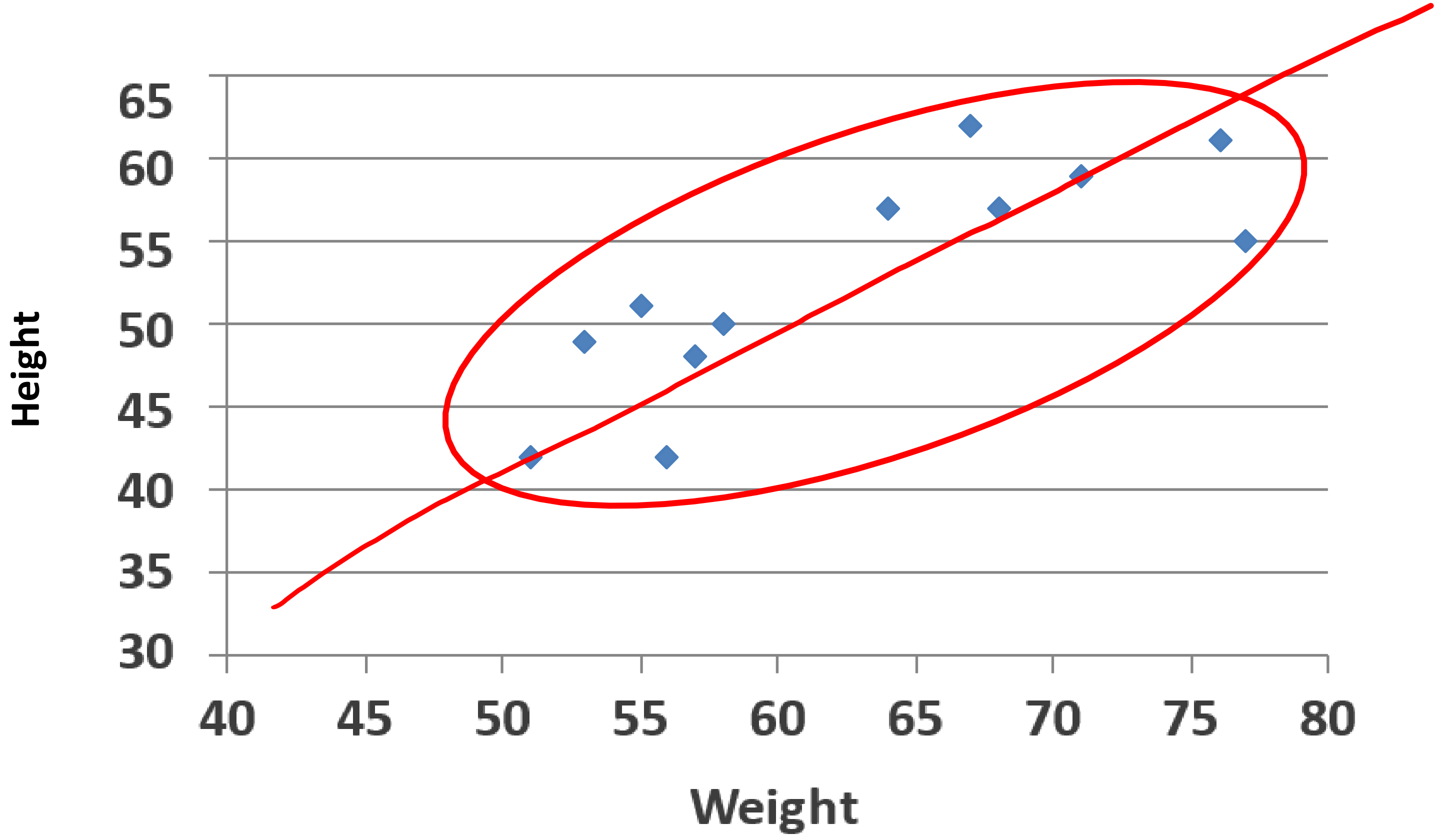
$$E[XY] = E[X^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx = 0$$

$\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

۱

$$\left\{\begin{array}{l} E[xy] \\ \\ E[x^2 y] \\ E[xy^2] \\ E[x^2 y^2] \end{array}\right.$$

مثال ۳



Weight	Height	Weight × Height
64	57	3648
71	59	4189
53	49	2597
67	62	4154
55	51	2805
58	50	2900
77	55	4235
57	48	2736
56	42	2352
51	42	2142
76	61	4636
68	57	3876
E[W] = 62.75	E[H] = 52.75	E[W×H] = 3355.83

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(W,H) &= E[W\times H] - E[W]E[H] \\
&= 3355.83 - 62.75 \times 52.75 \\
&= 45.77
\end{aligned}
$$

خواص کوواریانس

$$Cov(X,X) = Var(X)$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$Cov(X,X) = E[X^2] - E^2[X] = Var(X)$$

خواص کوواریانس

$$\mathrm{Cov}(aX+b,Y) = a\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(aX+b,Y) = E[(aX+b)Y] - E[aX+b]\,E[Y]$$

$$= aE[XY] + bE[Y] - (aE[X]+b)\,E[Y]$$

$$= a\underbrace{\left(E[XY] - E[X]\,E[Y]\right)}_{\mathrm{Cov}(X,Y)}$$

خواص کوواریانس

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{cov}(x_i, y_j)$$

$$\mathrm{cov}\left(\sum_i x_i, \sum_j y_j\right) = E\Big[\underbrace{\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_j y_j\right)}\Big] - E\Big[\sum_i x_i\Big] E\Big[\sum_j y_j\Big]$$

$$= \underbrace{E\Big[\sum_i \sum_j x_i y_j\Big]} - \left(\sum_i E[x_i]\right)\left(\sum_j E[y_j]\right)$$

$$= \sum_i \sum_j E[x_i y_j] - \sum_i \sum_j E[x_i] E[y_j]$$

خواص کوواریانس

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) = E[(X+Y)^2] - E^2[X+Y]$$

$$= \underline{E[X^2]} + \underline{E[Y^2]} + \underline{\underline{2E[XY]}} - \underline{E^2[X]} - \underline{E^2[Y]} \underline{\underline{- 2E[X]E[Y]}}$$

$$= \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i) + \underline{\underline{2}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i) + 2\sum_{i>j} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	$\mathrm{Cov}(X_1,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_4)$
X_2	$\mathrm{Cov}(X_2,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_4)$
X_3	$\mathrm{Cov}(X_3,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_4)$
X_4	$\mathrm{Cov}(X_4,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_4)$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i)$$

مثال: واریانس توزیع دوجمله‌ای

$$Y = \underline{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} \quad : \quad X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$$

$$var(y) = \sum_{i=1}^{n} var(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p) = npq$$

ضریب همبستگی (Correlation Coefficient)

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_x \ \sigma_y}$$

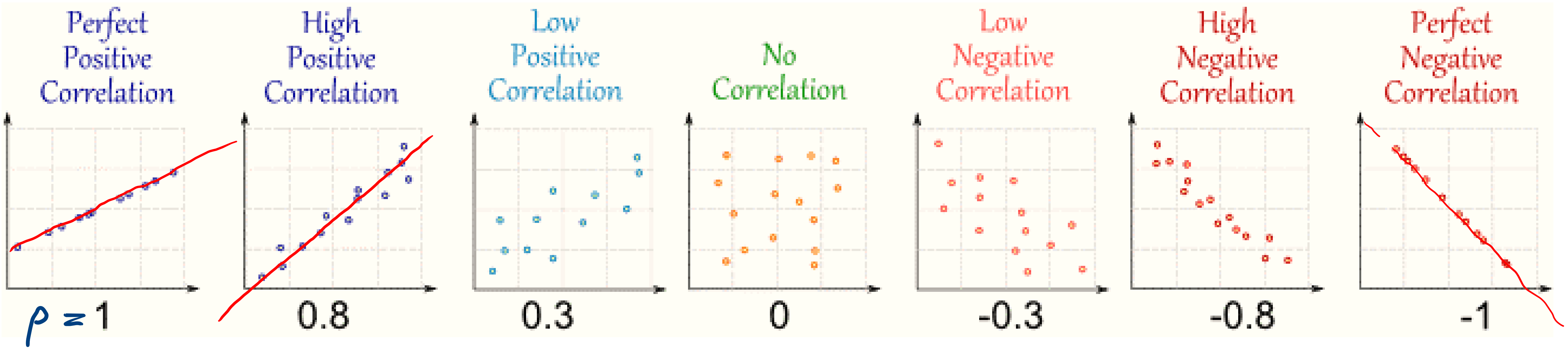
$$\boxed{-1 \leq \rho \leq 1}$$

می‌توان نشان داد:

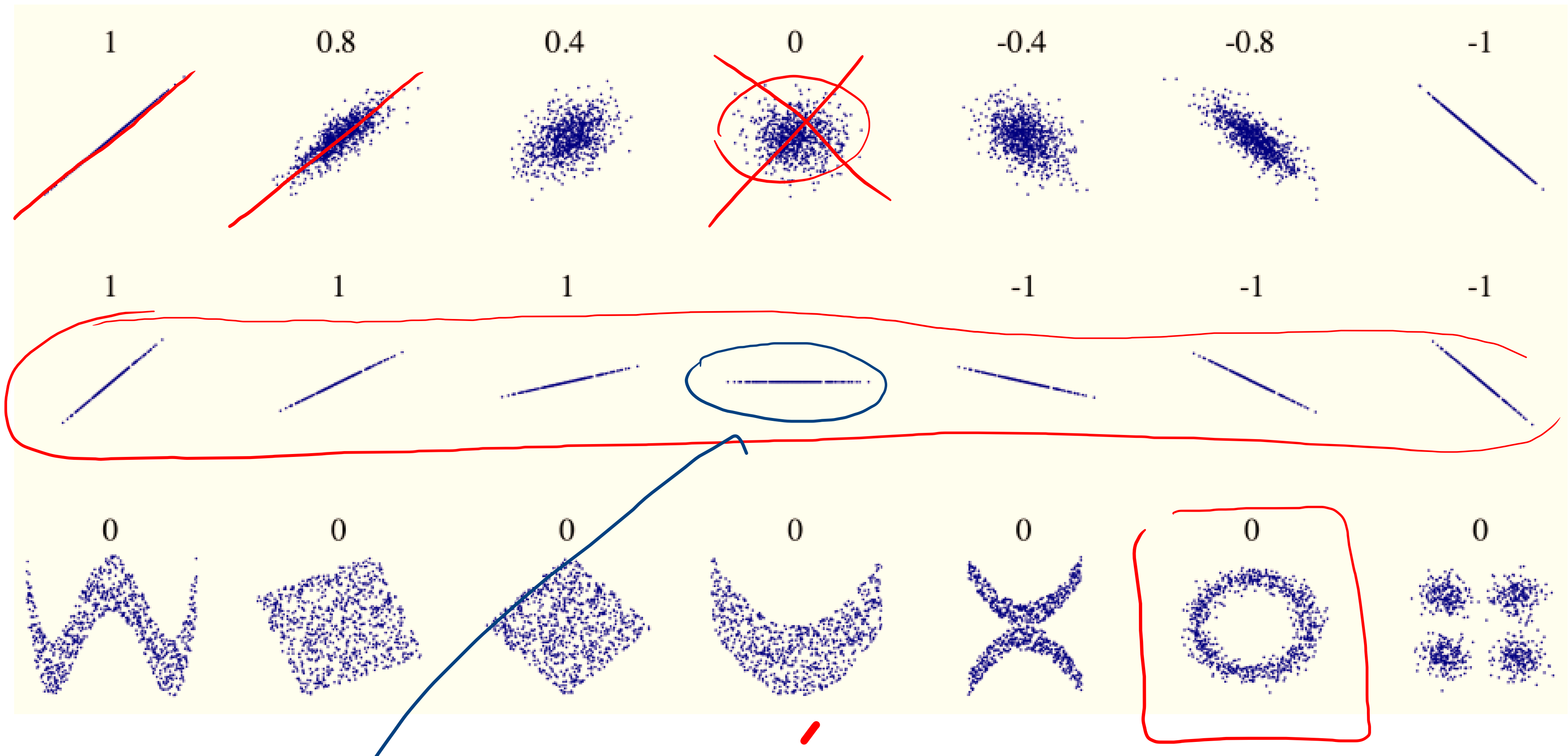
$$\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

ضریب همبستگی در واقع میزان خطی بودن رابطه بین X و Y را اندازه می‌گیرد.

مفهوم ضریب همبستگی



مفهوم ضریب همبستگی

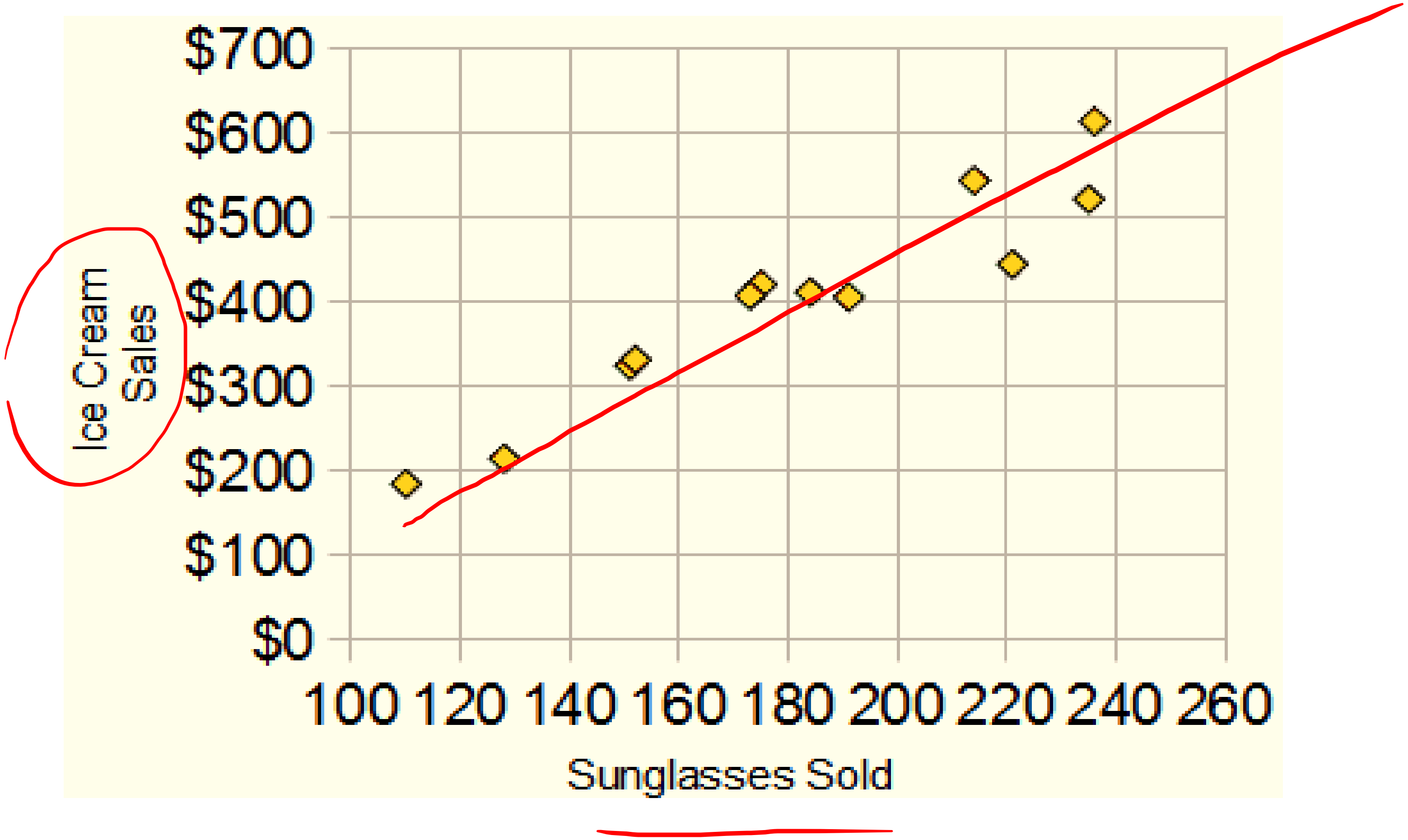


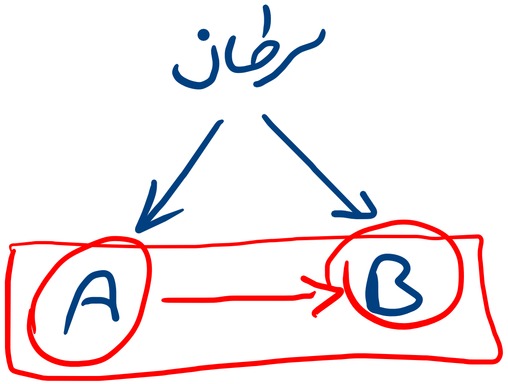
$x^2 + y^2 \approx r$

$$cov(x,y) = E[xy] - E[x]E[y]$$

$$= cE[x] - cE[x] = 0$$

مغالطه علت شمردن همبستگی




سرطان
A
B

Reichenbach

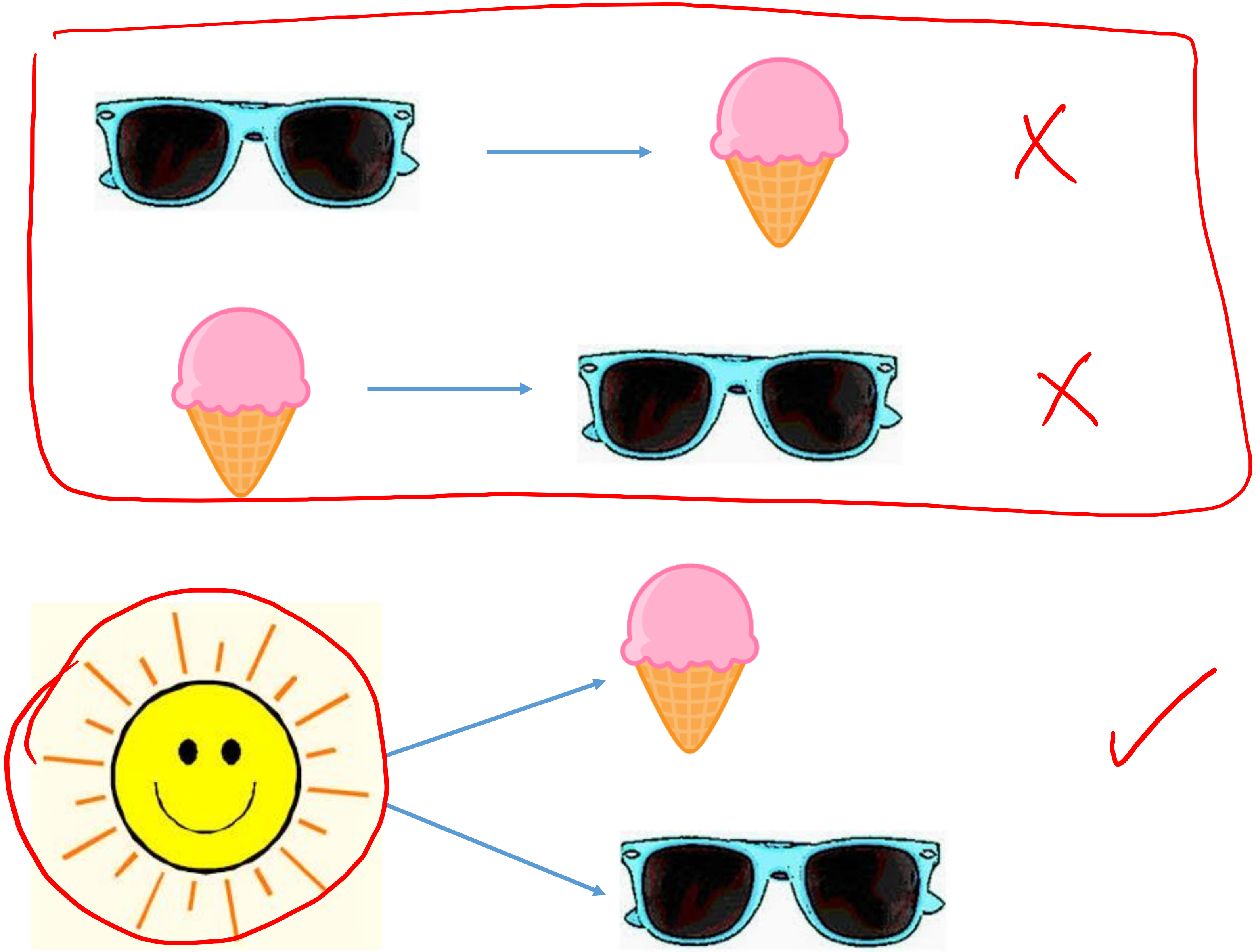
Causality

$$X \longrightarrow Y$$

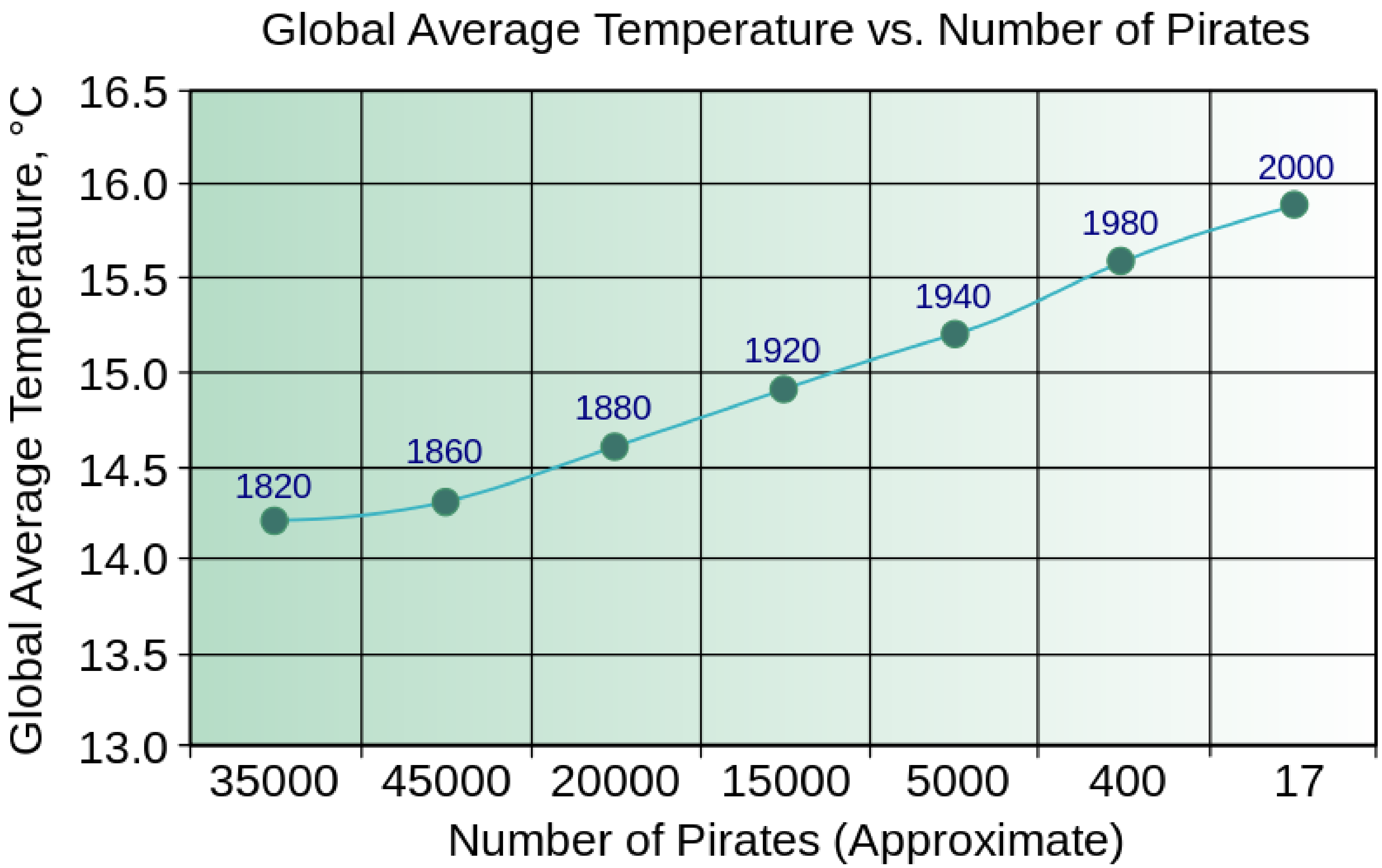
$$X \longleftarrow Y$$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

مغالطه علت شمردن همبستگی



Correlation does not imply causation!



ناهمبستگی (Uncorrelation)

- متغیرهای تصادفی X و Y را ناهمبسته (uncorrelated) می‌گوییم اگر یکی از موارد زیر برقرار باشد:

$$\rho(X,Y)=0$$

or

$$cov(X,Y)=0$$

or

$$E[XY]=E[X]E[Y]$$

تعامد

- متغیرهای تصادفی X و Y را متعامد (orthogonal) گویند، هرگاه:

$$\boxed{\mathrm{E}(XY) = 0}$$

○ قضیه ۱. اگر X و Y ناهمبسته باشند، داریم:

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$

○ قضیه ۲. اگر X و Y متعامد باشند، داریم:

$$\mathrm{E}\big((X+Y)^2\big)=\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(Y^2)$$

○ قضیه ۳. اگر X و Y ناهمبسته باشند، $X-\mu_X$ و $Y-\mu_Y$ متعامدند و برعکس، زیرا:

$$\boxed{\mathrm{E}\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big)}=\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbf{0}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Uncorrelated :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = 0$$

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

$$\rho = 0$$

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

$$\boxed{-1 \leq \rho \leq 1}$$

نامساوی شوارتز (Schwarz Inequality)

$$\mathrm{E}^2(XY) \leq \underline{\mathrm{E}(X^2)}\,\underline{\mathrm{E}(Y^2)}$$

$$E^2\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right] \leq E\left[(x-\mu_x)^2\right] E\left[(y-\mu_y)^2\right]$$

$$\mathrm{Cov}(x,y) \leq \mathrm{Var}(X)\ \mathrm{Var}(Y)$$

$$E\left[(tX+Y)^2\right] \geq 0 \qquad \forall\ t$$

$$E\left[t^2X^2 + 2tXY + Y^2\right] = \underbrace{\overbrace{t^2 E[X^2]}^{\geq 0} + 2t\,E[XY] + E[Y^2]} \geq 0$$

$$\boxed{at^2 + bt + c \geq 0}$$

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

$$a \geq 0$$

$$4E^2[XY] - 4E[X^2]E[Y^2] \leq 0$$

$$\boxed{E^2[XY] \leq E[X^2]E[Y^2]}$$

محدوده ضریب همبستگی

$$\boxed{E^2[XY] \le E[X^2]\,E[Y^2]}$$

$$\mathrm{cov}^2(X,Y) \le \mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y)$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{cov}^2(X,Y)}{\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y)}}_{\rho^2} \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\rho| \le 1}$$

$$Y = cX$$

$$E^2[cX^2] \leq E[X^2]\, E[c^2 X^2]$$

$$\boxed{c^2 E^2[X^2] = c^2 E^2[X^2]}$$

$$\boxed{c = \frac{E[XY]}{E[X^2]}} \quad \checkmark$$

تساوی در نامساوی شوارتز

- تساوی را در نامساوی شوارتز وقتی داریم اگر و فقط اگر

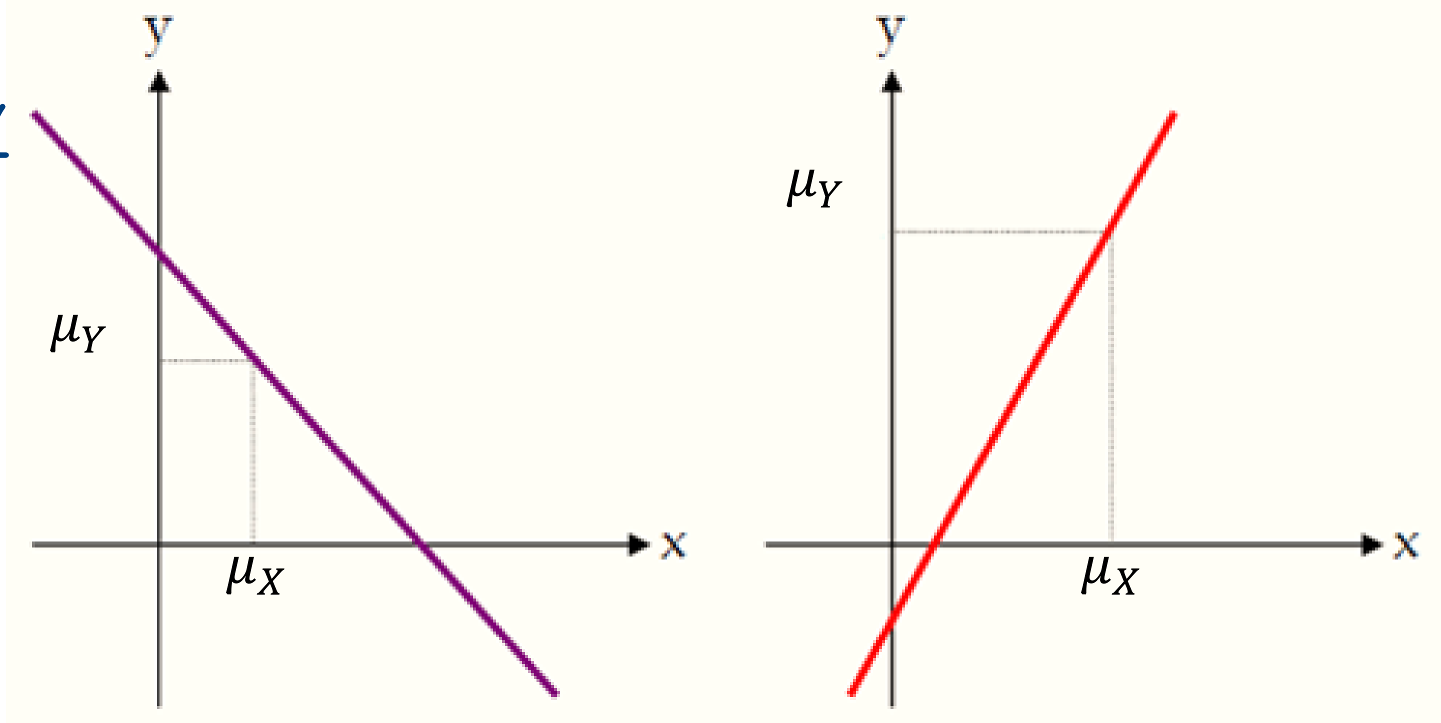
$$Y = cX$$

ضریب همبستگی واحد

$$c = \frac{E[XY]}{E[X^2]}$$

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \, \sigma_y}$$

$$c = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)} = \frac{\rho \, \sigma_x \, \sigma_y}{\sigma_x^2}$$



$$\boxed{c = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}}$$

$$\boxed{\rho = \pm 1} \Rightarrow (Y - \mu_y) = c\,(X - \mu_x)$$