Sum of Independent Random Variables

مجموع دو متغیر تصادفی مستقل دوجمله‌ای

$X \sim Bin(n_1, p)$

$Y \sim Bin(n_2, p)$

$$\underbrace{\overbrace{\circ\ \circ\ \circ \cdots \circ}^{n_1}}_{X} \quad \underbrace{\overbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ}^{n_2}}_{Y}$$

$Z = X+Y$

$$\boxed{Z \sim Bin(n_1+n_2, p)}$$

مجموع چند متغیر تصادفی مستقل دوجمله‌ای

$$X_i \sim Bin(n_i, P)$$

$$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad Z \sim Bin\left(\sum_{i=1}^{N} n_i ,\ P\right)$$

مجموع دو متغیر تصادفی پواسون

$X \sim Poi(\lambda_1)$

$Y \sim Poi(\lambda_2)$

$X \perp Y$

$Z = X + Y$ $\qquad P_Z(z) = ?$ $\qquad z = 0, \dots, +\infty$

$$P_Z(z) = P(Z = z) = P(X + Y = z) = \sum_{k=0}^{z} P(X = k, Y = z - k) \qquad k \leq z$$

$$= \sum_{k=0}^{z} P(X = k) P(Y = z - k) = \sum_{k=0}^{z} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{z-k}}{(z-k)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{z!} \underbrace{\sum_{k=0}^{z} \overbrace{\frac{z!}{k!\,(z-k)!}}^{\binom{z}{k}} \lambda_1^k \lambda_2^{z-k}}_{\text{بسط دوجمله‌ای}\ (\lambda_1 + \lambda_2)^z} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{z!} (\lambda_1 + \lambda_2)^z$$

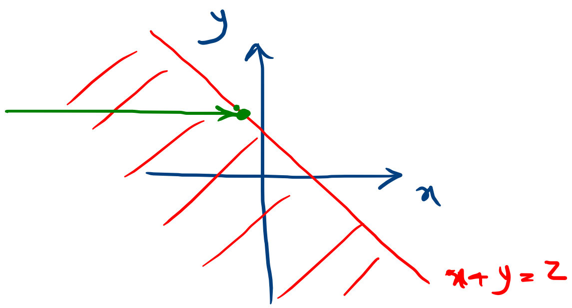
$$= Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$$

مجموع دو متغیر تصادفی مستقل پیوسته

$X \sim f_X(x)$ $\qquad X \perp Y$

$Y \sim f_Y(y)$

$Z = X + Y \qquad f_Z(z) = ?$



$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = \iint\limits_{x+y\leq z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)\, f_Y(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)\,dx}}_{F_X(z-y)} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, F_X(z-y)\,dy$$

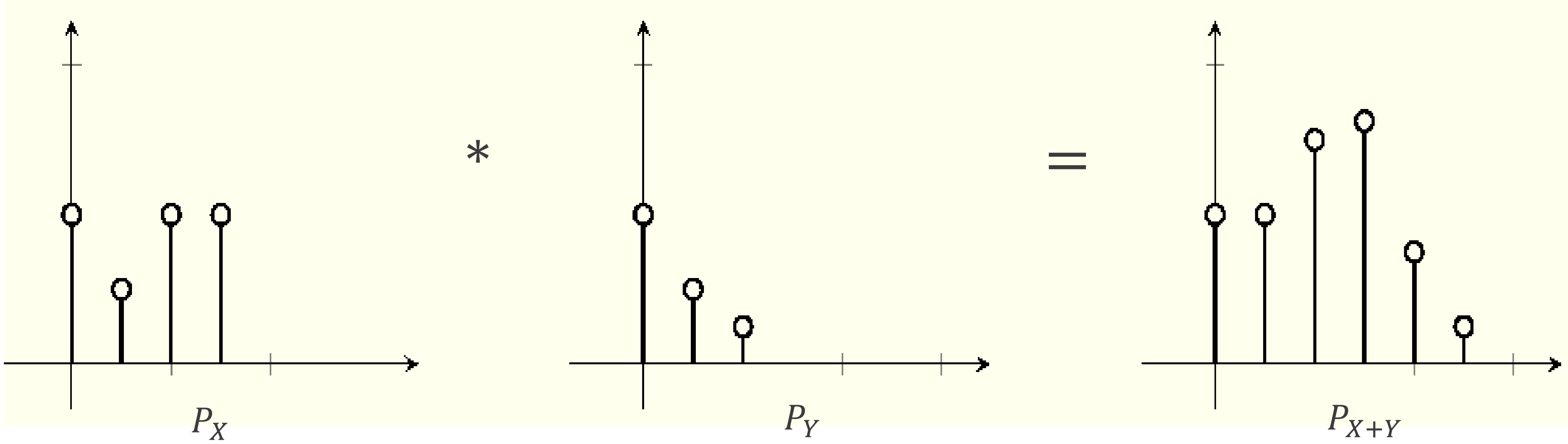
$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \underbrace{\frac{dF_X(z-y)}{dz}}_{f_X(z-y)} dy$$

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, f_X(z-y)\,dy}$$

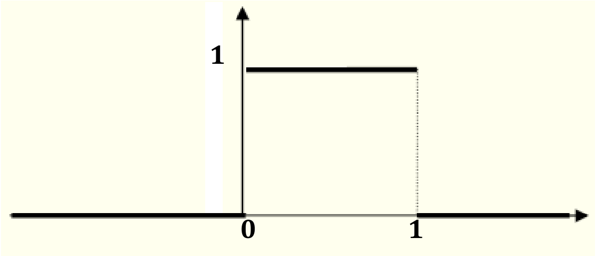
$$(f_X * f_Y)(z)$$

مجموع دو متغیر تصادفی مستقل گسسته

$$P_Z(z) = \sum_i P_Y(y_i)\, P_X(z-y_i)$$



جمع دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت



$X \sim U(0,1)$ $\quad X \perp Y$

$Y \sim U(0,1)$

$Z = X + Y \qquad f_Z(z) = ?$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(z-y)\,dy = \int_0^1 f_Y(y) f_X(z-y)\,dy$$

$0 \le y \le 1 \qquad 0 \le z-y \le 1$

$z-1 \le y \le z$

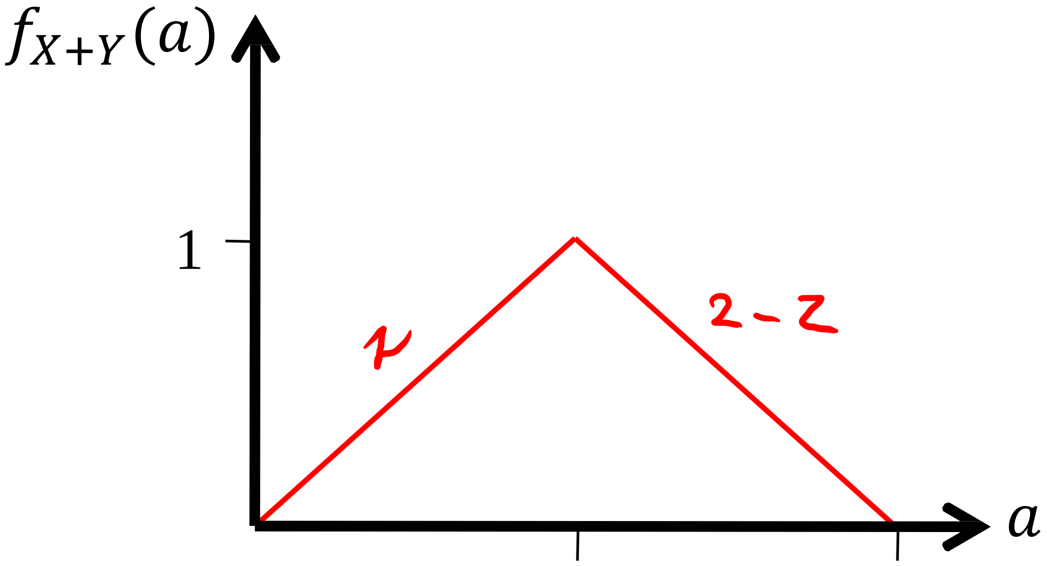
$z \ge 1 \Rightarrow z-1 \le y \le 1$

$z \le 1 \Rightarrow 0 \le y \le z$

$$\int_{z-1}^{1} dy = 1-(z-1) = 2-z \qquad z \ge 1$$

$$\int_0^z dy = z \qquad z \le 1$$

جمع دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت



$X \sim f_X(x)$

$Y \sim f_Y(y)$

$X \perp Y$

$Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)\, dy$$

جمع دو متغیر تصادفی مستقل نمایی

$X \sim Exp(\lambda) \longrightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$

$Y \sim Exp(\lambda) \longrightarrow f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad y \geq 0$

$X \perp Y$

$Z = X + Y$

$f_Z(z) = ?$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_X(z-y)}_{z-y \geq 0} \underbrace{f_Y(y)}_{y \geq 0} dy$$

$$= \int_0^z f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

$$= \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy$$

$$= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z} dy = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad z \geq 0$$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

$$\mathrm{var}(X+Y) = \underline{\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)}$$

$$\mathrm{var}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = a_1^2\,\mathrm{var}(X_1) + \dots + a_n^2\,\mathrm{var}(X_n)$$

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[(X+Y)^2] = E[X^2 + Y^2 + 2XY] = E[X^2] + E[Y^2] + 2\underbrace{E[XY]}_{E[X]E[Y]}$$

$$\mathrm{var}(X+Y) = E[X^2] + E[Y^2] + 2\underline{E[X]E[Y]} - (\underline{E[X] + E[Y]})^2$$

$$= E[X^2] - E^2[X] + E[Y^2] - E^2[Y]$$

مجموع دو متغیر تصادفی مستقل نرمال

$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$

$X \perp Y$

$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

$\underbrace{Z = X+Y}$

$Z \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$