آمار و احتمال مهندسی

نظریه مجموعه‌ها و مفهوم احتمال

(Ross 2.1-2.5, 2.7)

پاییز ۱۳۹۹

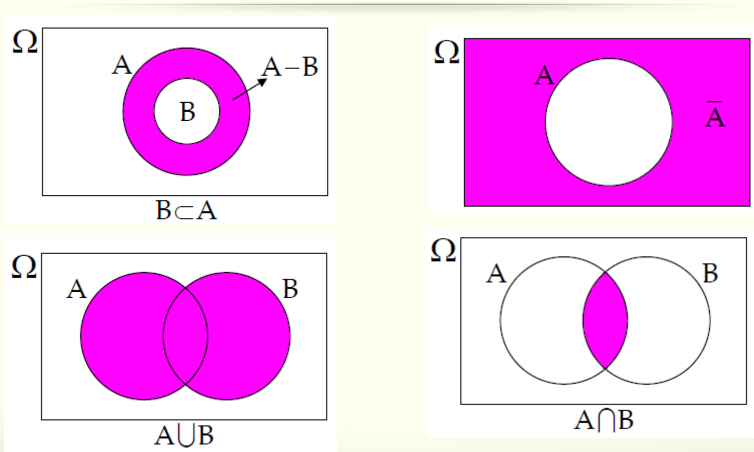
مقدمه‌ای بر نظریه مجموعه‌ها

- مجموعه: دسته‌ای از اشیاء را مجموعه گویند. مثال: {a,B,2,☺}
  - هر عضو مجموعه را یک عنصر گویند.
  - تعداد اعضای مجموعه میتواند محدود، نامحدود، قابل شمارش (دارای تناظر یک به یک با اعداد طبیعی)، و یا غیرقابل شمارش باشد.
  - ترتیب در اعضای مجموعه‌ها مهم نیست.
- مجموعه A را زیرمجموعه B گویند، اگر و تنها اگر هر عضو A متعلق به B نیز باشد. این رابطه را با نماد $A\subset B$ نمایش می‌دهیم.
- مجموعه A را مساوی مجموعه B گویند، اگر و تنها اگر $A\subset B$ و $B\subset A$.
- مجموعهٔ شامل تمام عناصر مورد نظر را مجموعهٔ مرجع (Ω) می‌گوییم.
- مجموعه فاقد عضو را تهی گویند و با {} و یا $\emptyset$ نمایش می‌دهند.

مقدمه‌ای بر نظریه مجموعه‌ها

- اجتماع دو مجموعه A و B، که با $A \cup B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه عناصری است که در A یا در B باشند.
- اشتراک دو مجموعه A و B، که با $A \cap B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه عناصری است که هم در A و هم در B باشند.
- دو مجموعه را جداازهم (disjoint) گویند، اگر عضو مشترکی نداشته باشند: $A \cap B = \emptyset$
- مکمل مجموعه A، مجموعه‌ای است شامل تمام اعضای مجموعهٔ مرجع که در A نباشند و با A^c یا $\bar{A}$ نمایش داده می‌شود.
- تفاضل دو مجموعه A و B برابر است با: $A - B = A \cap \bar{B}$

نمودار ون (Venn Diagram)



قوانین پایه نظریه مجموعه‌ها

- $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cap \Omega = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$
- $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$
- $A \subset B , B \subset C \Rightarrow A \subset C$ تعدی:
- $A \cup B = B \cup A \ , A \cap B = B \cap A$ جا به جایی:
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \ , A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ شرکت‌پذیری:
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ توزیع‌پذیری:
- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \ , \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ دمورگان:

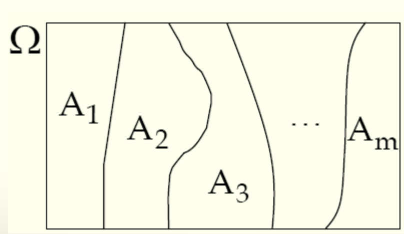
افراز (Partitioning)

- اگر مجموعه‌های غیرتهی $A_1, A_2, \dots, A_m$ چنان باشند که:

$$1)\ \forall i \neq j :\ A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$2)\ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = \Omega$$

گوییم که A_i ها افرازی از Ω هستند.



حاصلضرب دکارتی

- حاصلضرب دکارتی مجموعه A (با عناصر α_i) در مجموعه B (با عناصر β_j) عبارت است از مجموعه تمام زوج مرتب‌های (α_i, β_j) و به صورت $C = A \times B$ نمایش داده می‌شود.
  - اگر A دارای m عضو و B دارای n عضو باشد، C دارای mn عضو خواهد بود.
  - توجه کنید که ترتیب در زوج مرتب مهم است.

- مثال: حاصلضرب دکارتی مجموعه $A = \{H,T\}$ در خودش برابر است با:

$$C = A \times A = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

فضای احتمال

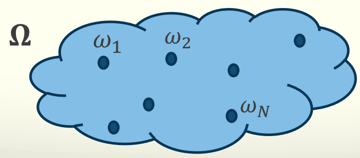
- فضای احتمال یا مدل احتمالاتی یک آزمایش تصادفی از عوامل زیر تشکیل می‌شود:

- مجموعهٔ Ω شامل کلیهٔ نتایج ممکن ω_i برای آزمایش
- مجموعه زیرمجموعه‌های Ω که پیشامد نامیده می‌شوند: F
- تابع $P(A)$ که به هر پیشامد A (طبق اصول موضوعه) عددی نسبت می‌دهد.

فضای احتمال : (Ω, F, P)

فضای نمونه‌ها (Sample Space)

- **آزمایش تصادفی (trial):** آزمایشی است که نتیجهٔ آن از پیش معلوم نیست، مثلاً انداختن تاس یا پرتاب سکه.
- **فضای نمونه‌ها:** عبارت است از مجموعهٔ کلیهٔ نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی که آن را با Ω و یا S نمایش می‌دهیم.
  - مثال ۱: در آزمایش پرتاب سکه: $\Omega = \{H,T\}$
  - مثال ۲: در آزمایش انداختن تاس: $\Omega = \{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$
  - مثال ۳: در آزمایش پرتاب دو سکه : $\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$



نقاط نمونه: ω_i

پیشامد (Event)

- هر زیر مجموعه از فضای نمونه را **پیشامد** می‌نامیم.
- مثال ۱. پیشامد زوج آمدن عدد تاس در آزمایش انداختن تاس:

$$A = \{f_2, f_4, f_6\} \subset \Omega$$

- مثال ۲. پیشامد حداقل یک شیر در آزمایش پرتاب دو سکه:

$$A = \{(H,H),(H,T),(T,H)\} \subset \Omega$$

- گوییم پیشامد A اتفاق افتاده است، هر گاه نتیجهٔ آزمایش یکی از اعضای A باشد.
  - توجه کنید که در **یک** بار انجام آزمایش تصادفی، **یک** نتیجه حاصل میشود (**یکی** از اعضای Ω)، ولی همزمان پیشامدهای مختلفی اتفاق افتاده‌اند.
  - مثال: در آزمایش انداختن تاس، فرض کنید نتیجه عدد ۳ باشد. اگر A را پیشامد فرد بودن عدد تاس، و B را پیشامد بزرگتر از ۲ بودن عدد تاس بگیریم، هر دو پیشامد اتفاق افتاده‌اند.

انواع پیشامد

- از جمله زیرمجموعه‌های Ω (پیشامدها)، خود Ω و $\emptyset$ هستند.
- Ω را پیشامد حتمی (Sure Event) می‌گوییم، زیرا نتیجه آزمایش مسلماً عضو Ω است، پس Ω همواره اتفاق می‌افتد.
- $\emptyset$ را پیشامد ناممکن یا پیشامد خنثی (Null Event) می‌گوییم که هرگز اتفاق نمی‌افتد، زیرا نتیجه آزمایش هرگز نمی‌تواند عضو $\emptyset$ باشد.
- دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه مجموعه‌های A و B جدااز‌هم باشند.
- پیشامدی را که تنها یک عضو داشته باشد، پیشامد ساده گویند. مثلاً پیشامد اینکه در آزمایش انداختن تاس عدد ۲ بیاید: $A = \{f_2\}$
  - توجه کنید که نتیجه f_2 با پیشامد $\{f_2\}$ تفاوت دارد.

اصول موضوعه کولموگروف


Andrey Kolmogorov
(1903-1987)

- اصول موضوعه کولموگروف (Kolmogorov axioms):

به هر پیشامد A عدد $P(A)$ نسبت داده می‌شود به طوری که:

اصل (۱): $P(A) \geq 0$

اصل (۲): $P(\Omega) = 1$

اصل (۳): اگر پیشامدهای A و B ناسازگار باشند ($A \cap B = \emptyset$)، آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

اصول موضوعه کولموگروف

- اصل ۳ با تکرار آن برای هر تعداد محدودی از وقایع قابل بیان است، ولی نه برای تعداد نامحدود:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

- اگر عناصر فضای نمونه نامحدود باشند، باید به جای اصل ۳، اصل قویتری را جایگزین کرد.

- اصل جمع‌پذیری نامحدود (قابل شمارش): اگر A_1، A_2، و ... پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

قضایای پایه احتمال

- قضیه ۱. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

اثبات:

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

$$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A})$$

$$\underbrace{1}_{\text{اصل ۲}} = \underbrace{P(A)+P(\bar{A})}_{\text{اصل ۳}} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- قضیه ۲. $P(\emptyset) = 0$

اثبات:

$$\emptyset = \bar{\Omega}$$

$$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

- خواهیم دید که اگر چه احتمال پیشامد نامکن صفر است، اما هر پیشامدی با احتمال صفر را نامکن نمی‌نامیم. به همین ترتیب اگر چه احتمال پیشامد حتمی یک است، ولی هر پیشامدی با احتمال یک را حتمی نمی‌گوییم.

قضایای پایه احتمال

- قضیه ۳. $P(A) \leq 1$

اثبات:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}),\ P(\bar{A}) \geq 0 \ \Rightarrow \ P(A) \leq 1$$

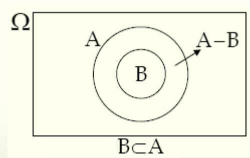
- نتیجه: برای هر پیشامد A : $0 \leq P(A) \leq 1$

- قضیه ۴. اگر $B \subset A$، آنگاه $P(B) \leq P(A)$

اثبات: $A = B \cup (A - B) = B \cup (A \cap \bar{B})$

چون B و $A \cap \bar{B}$ جدازهم هستند، طبق اصل ۱ و ۳ داریم:

$$P(A) = P(B) + P(A \cap \bar{B}),$$
$$P(A \cap \bar{B}) \geq 0 \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$



مساله لیندا

- خانمی به اسم لیندا را تصور کنید که ۳۱ سال سن دارد، مجرد است، و بسیار باهوش و رک و راست است. رشته تحصیلی او فلسفه بوده است و در زمان دانشجویی به موضوعات مرتبط با تبعیض و عدالت اجتماعی علاقه‌مند بوده، و در تظاهرات ضد سلاح‌های کشتار جمعی شرکت کرده است.

- گزاره‌های زیر را با استفاده از مقیاسی بین ۱ و ۷ رتبه‌بندی کنید، به این ترتیب که ۱ محتملترین و ۷ غیرمحتملترین گزاره از نظر شما باشد.
  - لیندا مددکار اجتماعی است
  - لیندا کارمند بانک است و در زمینه حقوق زنان نیز فعالیت میکند
  - لیندا در یک کتابفروشی کار میکند و به کلاس یوگا می رود
  - لیندا معلم دبستان است
  - لیندا کارمند بانک است
  - لیندا عضو انجمن زنان رای‌دهنده و کارمند بیمه است
  - لیندا عضو سازمان خیریه کمک به کودکان سرطانی است.

مساله لیندا

- لیندا مددکار اجتماعی است
- لیندا کارمند بانک است و در زمینه حقوق زنان نیز فعالیت میکند 3.22
- لیندا در یک کتابفروشی کار میکند و به کلاس یوگا می رود
- لیندا معلم دبستان است
- لیندا کارمند بانک است 5.67
- لیندا عضو انجمن زنان رای‌دهنده و کارمند بیمه است
- لیندا عضو سازمان خیریه کمک به کودکان سرطانی است.

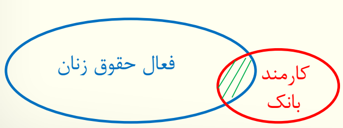
Daniel Kahneman, “**Thinking, fast and slow**”, Macmillan, 2011.

مغالطه عطف (Conjunction Fallacy)

- نتیجه فرعی قضیه ۴:

$$(A \cap B) \subset A \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) \leq P(A)$$
$$(A \cap B) \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) \leq P(B)$$

- احتمال رخ دادن A و B کمتر از احتمال رخ دادن هر یک از این دو پیشامد است.
- بنابراین احتمال این که لیندا کارمند بانک و فعال حقوق زنان باشد، کمتر از احتمال این است که لیندا کارمند بانک باشد.
- مغالطه عطف: پیشامد $(A \cap B)$ را به دلیل احتمال بالای رخ دادن B محتملتر از پیشامد A در نظر بگیریم.



قضایای پایه احتمال

- قضیه ۵. اگر $B \subset A$، آنگاه $P(A-B)=P(A)-P(B)$

اثبات: $A = B \cup (A-B)$

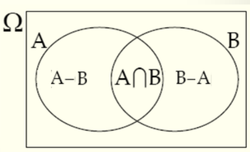
چون B و $A-B$ جدااز‌هم هستند، طبق اصل ۳ داریم:

$$P(A)=P(B)+P(A-B) \Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$$

- قضیه ۶. برای هر دو مجموعه A و B داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اثبات:

$$\left.\begin{aligned} P(A\cup B) &= P\big(A\cup(B-A)\big)=P(A)+P(B-A)\\ P(B) &= P\big((A\cap B)\cup(B-A)\big)=P(A\cap B)+P(B-A)\end{aligned}\right\}$$



$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

اصل شمول و عدم شمول

- حالت پایه:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- حالت سه تایی:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

- حالت تعمیم‌یافته:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\sum_{i_1<\cdots<i_r}P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_r})$$

تعیین احتمال پیشامدها

- برای مدل کردن یک آزمایش تصادفی باید احتمال کلیهٔ پیشامدها را تعیین کنیم.
- با توجه به اصول موضوعه (و قضایا) نیازی نیست که به هر واقعه احتمالی نسبت دهیم.
  - مثلاً اگر $P(A)$ را مشخص کنیم، $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ خودبه‌خود معلوم خواهد بود.
- با مشخص کردن احتمال یک تعداد حداقل پیشامد، احتمال همهٔ پیشامدها معلوم خواهد شد.
- اگر Ω متشکل از N نقطهٔ نمونهٔ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ باشد، کافی است احتمال پیشامدهای ساده $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_N\}$ را بدانیم. در این صورت اگر مجموعه A متشکل از ω_{k_1}، ω_{k_2}، ... و ω_{k_r} باشد، آنگاه: $P(A) = P(\{\omega_{k_1}\}) + P(\{\omega_{k_2}\}) + \cdots + P(\{\omega_{k_N}\})$
- مثال: در پرتاب تاس احتمال این که ۱ یا ۴ بیاید، چقدر است؟

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}\,, \qquad A = \{1,4\}$

$$P(A) = P(\{1\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1/3$$

تعیین احتمال پیشامدها

- اگر $P(\{\omega_{k_i}\}) = P_i$، آنگاه طبق اصل ۱، $P_i \geq 0$ و طبق اصل ۲:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$$

- اگر تعداد عناصر Ω، نامحدود ولی قابل شمارش باشد، باز هم بحث فوق صادق است.
- اگر تعداد عناصر Ω، نامحدود ولی قابل شمارش باشد، داریم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$$

- مثال: $P_i = (\frac{1}{2})^i$

تعاریف احتمال

- تعریف ذهنی یا شخصی (subjective): میزان اعتقاد یک فرد به یک امر
  - مثلا با شواهد و قرائنی که در آسمان می‌بینیم، می‌گوییم به احتمال ۸۰٪ فردا باران می‌بارد.
- این تعریف وابسته به فرد نمی‌تواند مبنای یک تئوری ریاضی مستحکم قرار بگیرد.
  - اما در مواردی برای نسبت دادن $P(A_i)$ ها در تعریف فضای احتمال به کار می‌رود.
- تعریف بسامدی (frequency): اگر یک آزمایش تصادفی را n بار انجام دهیم، و در این n آزمایش، پیشامد A به تعداد n_A مرتبه اتفاق افتد، « برای n بزرگ، احتمال $P(A)$ عددی نزدیک به $\frac{n_A}{n}$ خواهد بود»، یعنی $P(A) \cong \frac{n_A}{n}$
  - این تعریف شخصی نبوده و قابل بررسی تجربی است.

تعریف بسامدی احتمال

- مثال ۱: در آزمایش پرتاب سکه $\Omega = \{H,T\}$ است، اگر $A = \{H\}$، برای محاسبه $P(A)$ سکه‌ای را ۲۴۰۰۰ بار پرتاب می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد شیرهای حاصله}}{\text{تعداد پرتاب ها}} = \frac{12002}{24000} = 0.5005$$

- مثال ۲: در سال ۱۳۹۷، یک میلیون و ۳۶۶ هزار و ۵۱۹ نوزاد در کشور متولد شد، که از این تعداد ۶۶۲ هزار و ۴۵۲ نوزاد دختر بودند. اگر پیشامد G، دختر بودن یک نوزاد متولد ۱۳۹۷، تعریف شود:

$$P(G) = \frac{662452}{1366519} = 0.485$$

- مشکل این تعریف: بسیار شهودی و غیرریاضی است!
  - «برای n بزرگ»، «نزدیک به»، …
  - این تعریف لزوماً قابل استفاده نیست.

تعریف بسامدی احتمال

- اگرچه تعریف بسامدی کامل نیست، ولی می‌تواند در مراحل ۱ و ۳ مدل‌سازی احتمالاتی، برای ایجاد ارتباط بین $P(A)$ در مدل با نسبت تجربی n_A/n و ربط دادن مدل به جهان خارج مفید واقع شود.
- حتی می‌توان برای نشان دادن محسوس بودن اصول موضوعه، از این تعریف بسامدی استفاده کرد:
- اصل ۱. n_A و n تعداد هستند، پس $n_A \geq 0$ و $n > 0$، در نتیجه $P(A) \geq 0$
- اصل ۲. Ω در هر پیشامدی اتفاق می‌افتد، پس $n_\Omega = n$ و در نتیجه $P(\Omega)=\frac{n}{n}=1$
- اصل ۳. اگر پیشامدهای A و B ناسازگار باشند، A و B همزمان اتفاق نمی‌افتند، بنابراین اگر در n بار تکرار آزمایش، پیشامد A، n_A بار و پیشامد B، n_B بار اتفاق بیفتد:

$n_{A \cup B} = n_A + n_B$

$P(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = P(A) + P(B)$

تعریف حدی احتمال

- تعریف حدی احتمال:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

- مشکلات این تعریف:
  - چه دلیل ریاضی وجود دارد که حد فوق وجود داشته باشد؟
  - n عددی است که از آزمایش به دست می‌آید، در نتیجه نمی‌تواند نامحدود باشد.
- طرفداران این تعریف می‌گویند که وجود این حد یک اصل یا فرض است، ولی این فرض پیچیده و دور از ذهن است.
- با استفاده از اصول کولموگروف، که اصول ساده‌تری هستند، می‌توان میل کردن n_A/n به $P(A)$ را اثبات کرد.

تعریف کلاسیک احتمال

- اگر در یک آزمایش تصادفی، N نتیجه ممکنه وجود داشته باشد و N_A تا از آن‌ها مطلوب باشد، (N_A تعداد اعضای پیشامد A است)، آنگاه $P(A) = \frac{N_A}{N}$
- مثال: در آزمایش انداختن تاس، احتمال این که عدد حاصل کوچکتر از ۳ باشد برابر $\frac{2}{6}$ است، زیرا: Ω = {1,2,3,4,5,6} , A = {1,2}
- به تفاوت N و n ، و همچنین N_A و n_A دقت کنید. n تعداد آزمایش‌های انجام شده و n_A تعدادی از این آزمایش‌ها که پیشامد A اتفاق افتاده است. اما N تعداد خروجی‌های ممکنه یک آزمایش و N_A تعدادی از نتایج که عضو A باشد.
- این تعریف نیز در اصول موضوعه صدق می‌کند.

محدودیت تعریف کلاسیک احتمال

- در صورتی که نتایج آزمایش تصادفی متساوی الاحتمال نباشند، تعریف کلاسیک احتمال صحیح نیست.
  - مثال: در آزمایش تصادفی تولد یک کودک که Ω ={m,f}، پیشامدهای A={m} و B={f} متساوی‌الاحتمال نیستند و لذا P{m}=1/2 صحیح نیست.
- نتایج آزمایش ممکن است به گونه‌های مختلف تعبیر شود که لزوما متساوی الاحتمال نباشند.
- مثال: دو تاس را می‌اندازیم و می‌خواهیم احتمال این را حساب کنیم که مجموع حاصل ۷ شود
  - الف) ممکن است بگوییم جمع حاصل فقط ۱۱ حالت دارد: Ω = {2,3,…,12} و A = {7} ، پس P(A) = 1/11 ✗
  - ممکن است بگوییم ۲۱ نتیجه داریم (بدون تمایز بین تاس اول و تاس دوم):

Ω = {1-1,1-2,1-3,…,5-6,6-6} , A = {1-6,2-5,3-4} ⇒ P(A) = 3/21 ✗

  - ممکن است بگوییم ۳۶ نتیجه ممکن داریم (تمایز بین تاس اول و دوم):

Ω = {(i,j)|i,j=1,2,…,6} , A = {(1,6),(2,5),…,(6,1)} ⇒ P(A) = 6/36 ✔

اصل ناکافی بودن دلیل

- اگر یک آزمایش تصادفی دارای N نتیجه ممکنه $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ باشد و ما هیچ اطلاعی درباره نحوه وقوع آنها نداشته باشیم، باید احتمال آنها را مساوی فرض کنیم، یعنی:

$$P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = \cdots = P\{\omega_N\} = \frac{1}{N}$$

- تفاوت این اصل با تعریف کلاسیک احتمال:
  - در تعریف کلاسیک می‌دانیم که نتایج متساوی‌الاحتمال هستند
  - در این اصل چون احتمال‌ها را نمی‌دانیم و هیچ دلیلی بر برتری و محتمل بودن یکی بر دیگری نداریم، آنها را متساوی‌الاحتمال فرض می‌کنیم.