$$P_{XY}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

$$f_{XY}(x,y) \qquad P((X,Y) \in D) = \iint_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \quad \leftarrow \text{Marginalization}$$

$$F_{XY}(x,y) \longrightarrow F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$$

# Independence of Random Variables

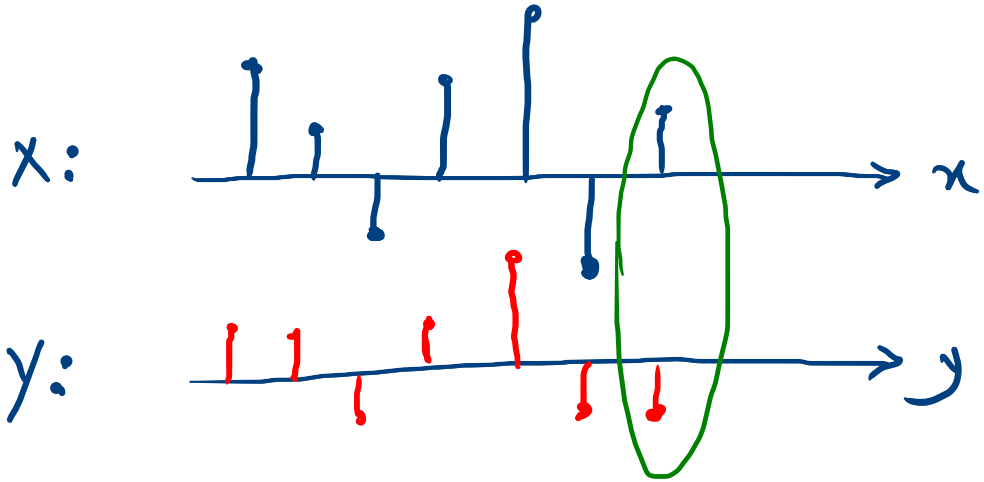
$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

# امید ریاضی توزیع توأم

$$f_{XY}(x,y) \begin{cases} \nearrow E[X] \\ \searrow E[Y] \end{cases}$$

$$f_X(x) \longrightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$E[XY]$$




$$\boxed{E[xy]}$$

$> 0$

$< 0$

$$E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

$$E[g(x)] \qquad\qquad f_{xy}(x,y) \longrightarrow f_X(x)$$

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_{xy}(x,y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\, dy}}_{f_X(x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = \underset{f_X}{E}[g(x)]$$

$$E[xy] = E[g(x,y)]$$

$$g(x,y) = xy$$

$$E[xy] \neq E[X]\,E[Y]$$

غیرهمبسته

Uncorrelated

if $x$ and $y$ are independent then: $\boxed{E[XY] = E[X]\,E[Y]}$

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x)\, f_y(y)$$

# خطی بودن امید ریاضی

$$E[aX+b] = aE[X]+b$$

$$E[X+Y] = E[X]+E[Y]$$

$$\underbrace{E[X+Y]}_{g(x,y)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = \iint x\,f_{xy}(x,y)\,dy\,dx$$

$$+\iint y\,f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$

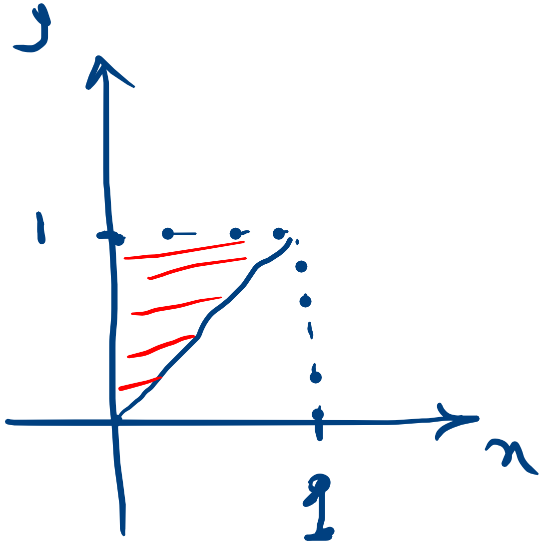
$$= E[X]+E[Y]$$

$$E[aX+bY] = aE[X]+bE[Y]$$

# مثال ۱

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E[XY] = ?$$



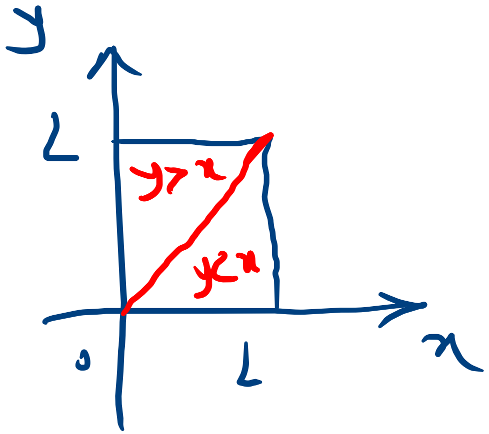

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^y xy\, 2\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 y \left( x^2 \Big|_0^y \right) dy = \int_0^1 y^3\, dy = \frac{1}{4} y^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

# مثال ۲

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{L^2} \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < y < L$$

$$E[|X-Y|] = ?$$




$$E[|X-Y|] = \int_0^L \int_0^L |x-y| \frac{1}{L^2}\, dx\, dy$$

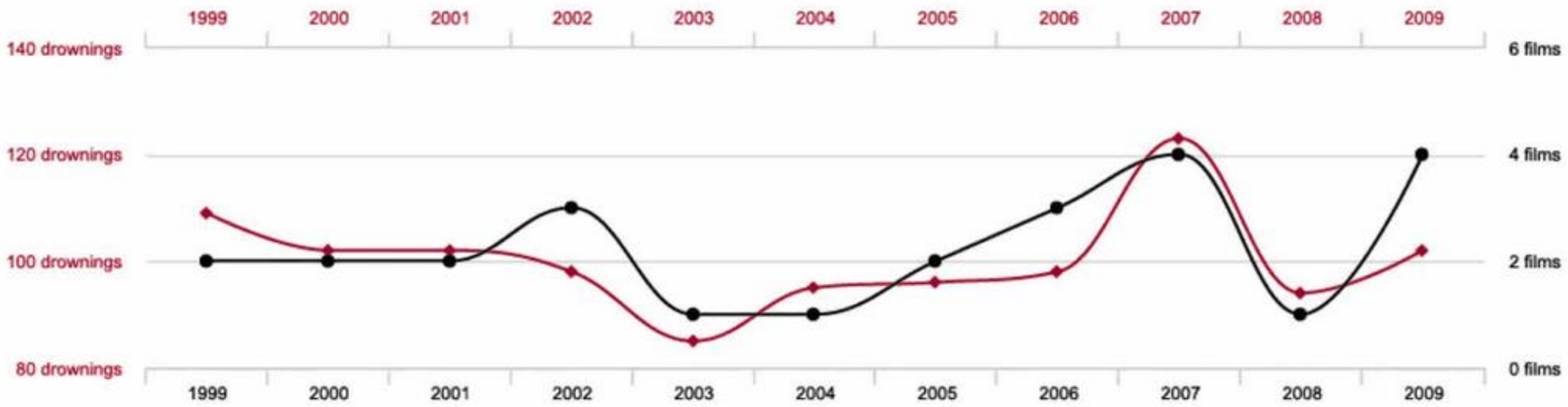
$$= \int_0^L \int_0^y (y-x) \frac{1}{L^2}\, dx\, dy + \int_0^L \int_y^L (x-y) \frac{1}{L^2}\, dx\, dy$$

$E[xy]$

# 66.6% CORRELATION

POOL DROWNING

NICOLAS CAGE




Source: tylervigen.com/spurious-correlations

# متغیرهای تصادفی مستقل گسسته

$$P_{XY}(x,y) = P(X=x,\ Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

$$= P(\{X=x\})\, P(\{Y=y\}) = P_X(x)\, P_Y(y)$$

# مثال ۱

- احتمال شیر آمدن سکه‌ای برابر با $p$ است:
- سکه را $n+m$ بار پرتاب می‌کنیم.
- متغیر تصادفی $X$ را تعداد دفعاتی که سکه در $n$ پرتاب اول شیر می‌آید، و متغیر تصادفی $Y$ را تعداد دفعاتی که سکه در $m$ پرتاب بعدی شیر می‌آید، تعریف می‌کنیم.

$$n + m, \quad n \to X, \quad m \to Y$$

$$P_{XY}(i,j) = \underbrace{\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}_{P_X(i)} \underbrace{\binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}}_{P_Y(j)}$$

# مثال ۲

- فرض کنید $Z$ تعداد کل شیرها در $n+m$ پرتاب باشد.
- متغیر تصادفی $X$ تعداد شیرها در $n$ پرتاب اول

$X \quad Y$

$\uparrow \quad \uparrow$

$\underbrace{n + m}_{Z}$

$$P_{XZ}(x,z) = P(X=x, Z=z)$$

$$= P(X=x, Y=z-x)$$

# متغیرهای تصادفی پیوسته

- دو متغیر تصادفی پیوسته $X$ و $Y$ را مستقل گویند، هرگاه برای هر $x$ و $y$، پیشامدهای $\{X \leq x\}$ و $\{Y \leq y\}$ مستقل باشند.

$$P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\}) P(\{Y \leq y\})$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{XY}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f_X(x) F_Y(y)$$

$$f_X(x) F_Y(y) \xrightarrow{\partial / \partial y} \boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)}$$

# مثال ۱

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}(1-x^2-y^2) & 0<x^2+y^2<1\\ 0 & x^2+y^2>1\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\,dy$$

$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\,dx$$

# مثال ۲

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad e^{-y^2/2\sigma^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}}_{f_X(x)} \quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2}}_{f_Y(y)}$$

$$f_X(x) = N(0, \sigma^2) \qquad f_Y(y) = N(0, \sigma^2)$$

# مثال ۳

$$f_{XY}(x,y) = 4xy \quad : \quad 0 < x, y < 1$$

$0 < x < 1$

$f_X(x) = 2x$

$0 < y < 1$

$f_Y(y) = 2y$

## مثال ۴

$$f_{XY}(x, y) = 24xy \qquad 0 < x + y < 1$$

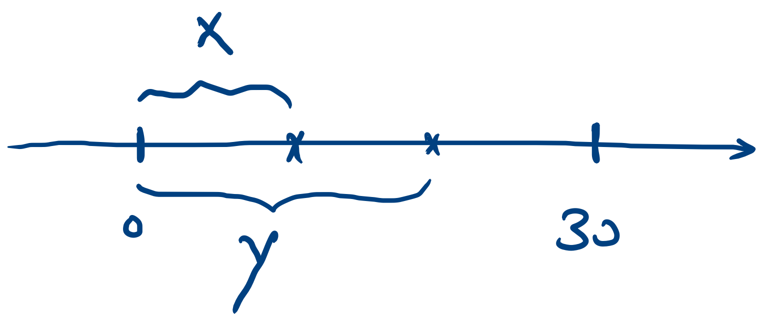
# مثال ۵

- دو نفر قرار ملاقاتی برای ساعت ۱۲ تنظیم می‌کنند.
  - هر یک از آن‌ها به طور مستقل و با توزیع یکنواخت بین ساعت ۱۲ و ۱۲:۳۰ به محل قرار می‌رسد.
  - $X =$ میزان دقایقی که نفر اول بعد از ساعت ۱۲ می‌رسد: $X \sim U(0,30)$
  - $Y =$ میزان دقایقی که نفر دوم بعد از ساعت ۱۲ می‌رسد: $Y \sim U(0,30)$

$f_X(x) = \frac{1}{30}$

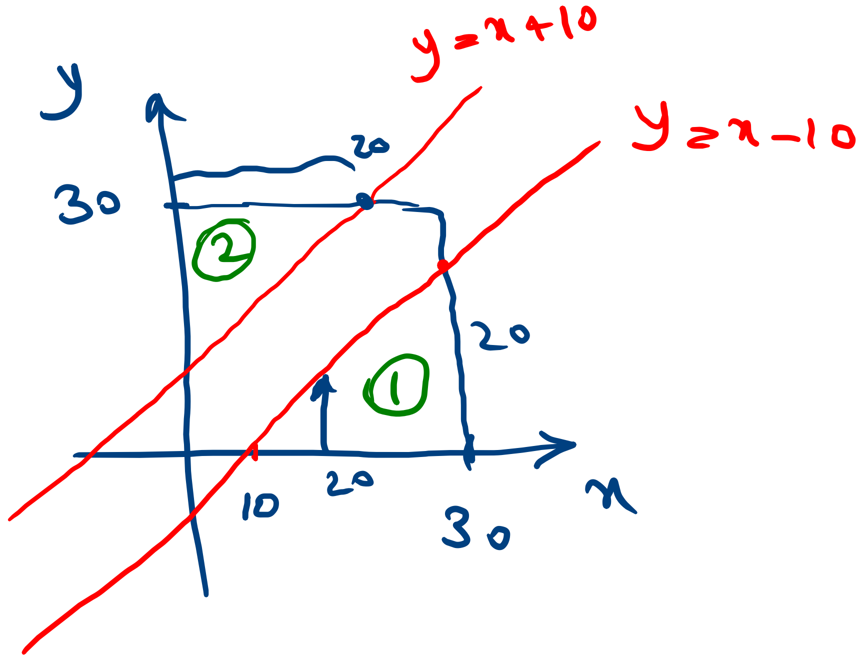
$f_Y(y) = \frac{1}{30}$

- احتمال این که اولین فردی که به محل قرار می‌رسد بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر دیگری شود چقدر است؟




$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{900}$

$P(|y-x| \geq 10)$




$$P(|X-Y| \geq 10) = P(X-Y \geq 10 \text{ or } X-Y \leq -10)$$

$$= \underbrace{P(X-Y \geq 10)}_{1} + \underbrace{P(X-Y \leq -10)}_{2}$$

$$P(|X-Y| \geq 10) = \frac{400}{900}$$

$$P(Y \leq X-10)$$

$$1 + 2 = \int_{10}^{30} \int_{0}^{x-10} \frac{1}{900}\, dy\, dx + \int_{0}^{20} \int_{x+10}^{30} \frac{1}{900}\, dy\, dx$$

$\uparrow$
$x$

# قضیه

- قضیه: اگر $X$ و $Y$ مستقل باشند، آنگاه $Z = g(X)$ و $W = h(Y)$ نیز مستقل خواهند بود.

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x)\, f_y(y)$$

# مثال

- فرض کنید $X$ و $Y$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند که هر دو دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda$ هستند. متغیر تصادفی $W$ را به صورت $W = \mathrm{Min}\{X,Y\}$ تعریف می‌کنیم. تابع چگالی احتمال $W$ را محاسبه کنید.

$$X \sim Exp(\lambda) \longrightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0 \longrightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$Y \sim Exp(\lambda) \longrightarrow f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \qquad y \geq 0 \longrightarrow F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda y}$$

$$W = \min(X, Y) \qquad f_W(w) = ?$$

$$F_W(w) = P(W \leq w) = 1 - P(W > w) = 1 - P(\min(x,y) > w)$$

$$= 1 - P(X > w, Y > w) = 1 - \underbrace{P(X > w)}_{1-F_X(w)} \underbrace{P(Y > w)}_{1-F_Y(w)}$$

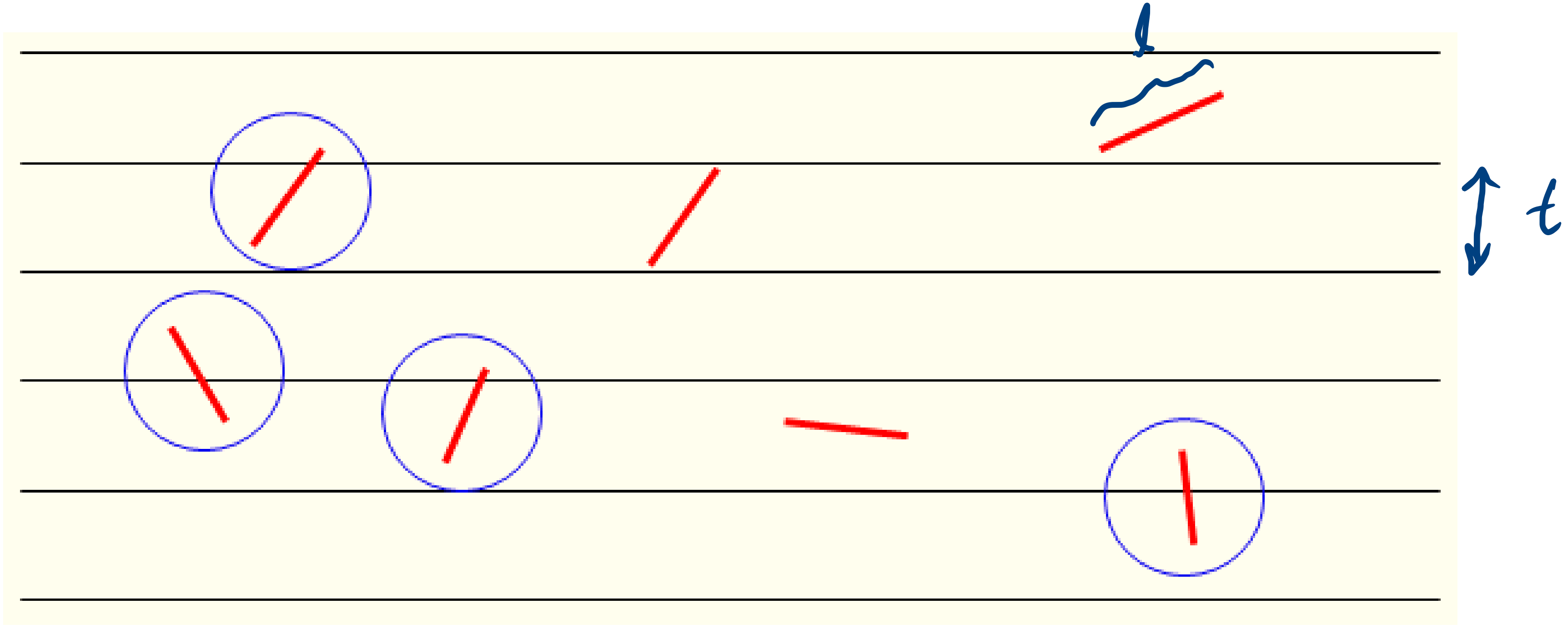
$$= 1 - e^{-\lambda w} e^{-\lambda w} = 1 - e^{-2\lambda w}$$

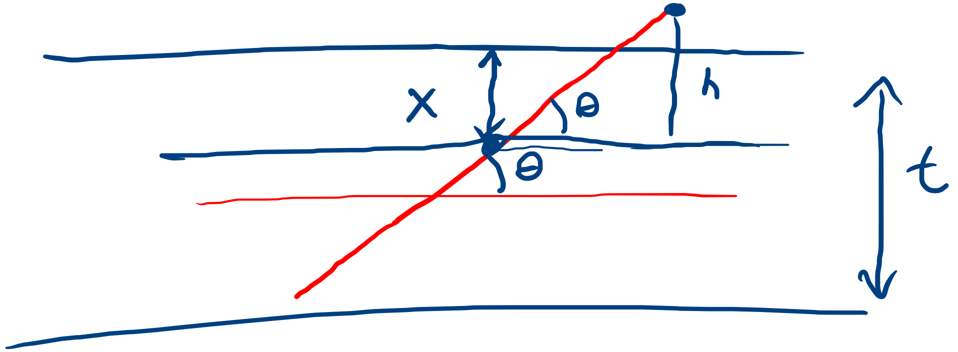
$$f_W(w) = 2\lambda e^{-2\lambda w} = Exp(2\lambda)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx$$

# سوزن بوفون (Buffon’s Needle)

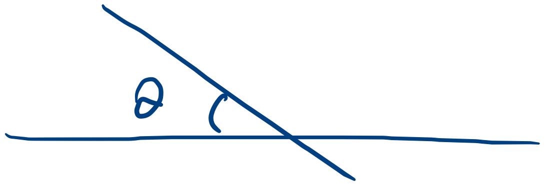
- سوزنی به طول $l$ را بر روی صفحه‌ای با خطوط موازی به فاصله $t$ می‌اندازیم.
احتمال این که سوزن یکی از این خطوط را قطع کند چقدر است؟






$$\theta \sim U\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \frac{2}{\pi}$$

$$X \sim U\left(0, t/2\right) \qquad \frac{2}{t}$$




$$f_{X\theta}(x, \alpha) = \frac{4}{t\pi} \qquad \begin{matrix} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 < x < t/2 \end{matrix}$$

$$\boxed{h = \frac{l}{2}\sin\theta}$$

$$P(h \geq X) = P\left(\frac{l}{2}\sin\theta \geq X\right) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\frac{l}{2}\sin\theta} \frac{4}{t\pi}\, dx\, d\theta$$

$$= \frac{4}{t\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{l}{2}\sin\theta\, d\theta = \frac{2l}{t\pi}\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2l}{t\pi}$$

# استقلال بیش از دو متغیر تصادفی

- متغیر تصادفی گسسته $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقل از هم هستند، اگر برای هر زیرمجموعه از $X_i$ها داشته باشیم:

$$P\left(X_{i_1} = x_1, X_{i_2} = x_2, \ldots, X_{i_r} = x_r\right) = \prod_{k=1}^{r} P(X_{i_k} = x_k)$$