$$P_{XY}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

$$f_{XY}(x,y) \qquad P\big((X,Y) \in D\big) = \iint_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \quad \leftarrow \text{Marginalization}$$

$$F_{XY}(x,y) \longrightarrow F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$$

Independence of Random Variables

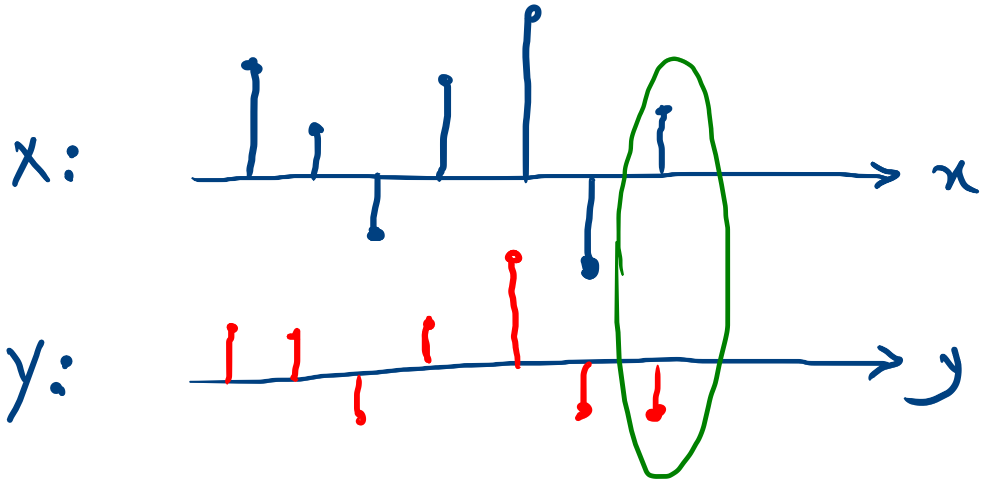
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

امید ریاضی توزیع توأم

$$\underline{f_{XY}(x,y)} \begin{array}{l} \nearrow E[X] \\ \searrow E[Y] \end{array}$$

$$f_X(x) \longrightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$E[XY]$$



$$\boxed{E[xy]} \rightarrow > 0$$

$$\boxed{E[xy]} \rightarrow < 0$$

$$E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

$$E[g(x)] \qquad\qquad f_{xy}(x,y) \longrightarrow f_x(x)$$

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_{xy}(x,y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\, dy}}_{f_x(x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_x(x)\, dx = E_{f_x}[g(x)]$$

$$E[xy] = E[g(x,y)]$$

$$g(x,y) = xy$$

$$E[xy] \neq E[X]\,E[Y]$$

غیرهمبسته

Uncorrelated

if x and y are independent then: $\boxed{E[xy] = E[x]\,E[y]}$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

خطی بودن امید ریاضی

$$E[aX+b] = aE[X]+b$$

$$E[X+Y] = E[X]+E[Y]$$

$$\underbrace{E[X+Y]}_{g(x,y)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \iint x\, f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

$$+ \iint y\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

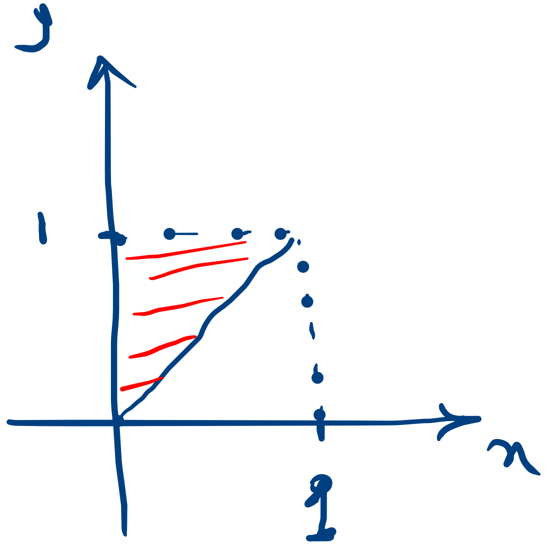
$$= E[X]+E[Y]$$

$$E[aX+bY] = aE[X]+bE[Y]$$

مثال ۱

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E[XY] = ?$$



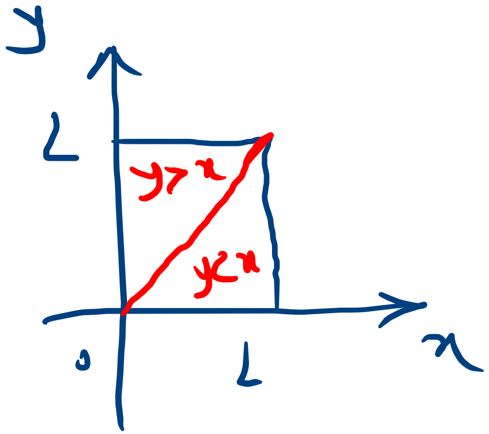
$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^y xy\, 2\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 y \left(x^2 \Big|_0^y \right) dy = \int_0^1 y^3\, dy = \frac{1}{4} y^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

مثال ۲

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{L^2} \qquad 0<x<L, \qquad 0<y<L$$

$$E[|X-Y|]=?$$

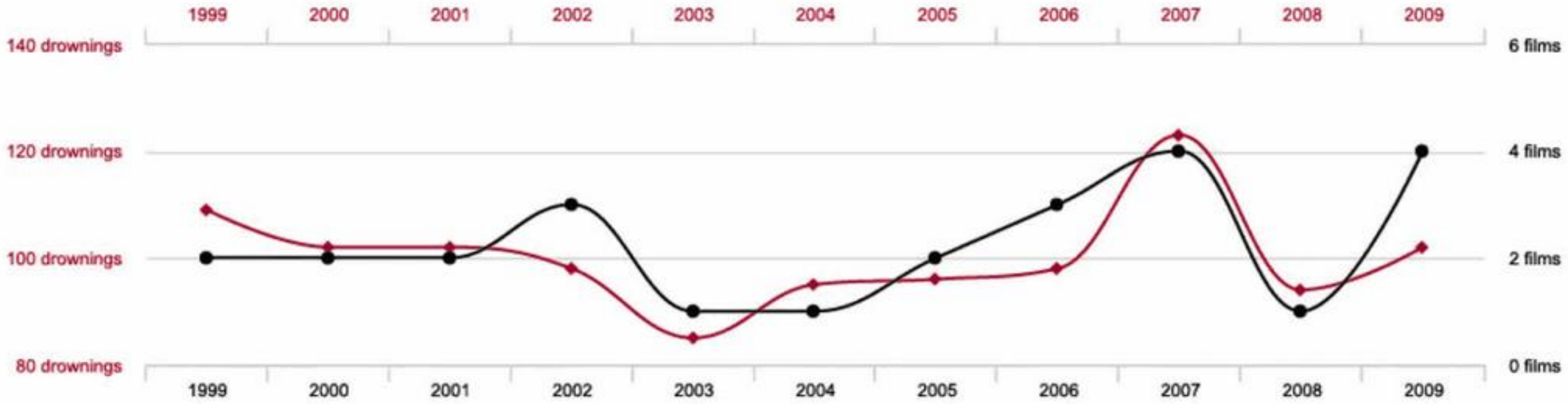


$$E[|X-Y|]=\int_0^L\int_0^L |x-y|\,\frac{1}{L^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^L\int_0^y (y-x)\,\frac{1}{L^2}\,dx\,dy+\int_0^L\int_y^L (x-y)\,\frac{1}{L^2}\,dx\,dy$$

$E[xy]$

66.6% CORRELATION



Source: tylervigen.com/spurious-correlations

متغیرهای تصادفی مستقل گسسته

$$P_{XY}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

$$= P(\{X=x\})\, P(\{Y=y\}) = P_X(x)\, P_Y(y)$$

مثال ۱

- احتمال شیر آمدن سکه‌ای برابر با p است:
- سکه را $n+m$ بار پرتاب می‌کنیم.
- متغیر تصادفی X را تعداد دفعاتی که سکه در n پرتاب اول شیر می‌آید، و متغیر تصادفی Y را تعداد دفعاتی که سکه در m پرتاب بعدی شیر می‌آید، تعریف می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc} n & + & m \\ \swarrow & & \searrow \\ X & & Y \end{array}$$

$$P_{XY}(i,j) = \underbrace{\binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}}_{P_X(i)} \underbrace{\binom{m}{j} p^{j} (1-p)^{m-j}}_{P_Y(j)}$$

مثال ۲

- فرض کنید Z تعداد کل شیرها در $n+m$ پرتاب باشد.
- متغیر تصادفی X تعداد شیرها در n پرتاب اول

$$\underbrace{\overset{X}{\overset{\uparrow}{n}} + \overset{Y}{\overset{\uparrow}{m}}}_{Z}$$

$$P_{XZ}(x,z) = P(X=x, Z=z)$$

$$= P(X=x, Y=z-x)$$

متغیرهای تصادفی پیوسته

- دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y را مستقل گویند، هرگاه برای هر x و y، پیشامدهای $\{X \leq x\}$ و $\{Y \leq y\}$ مستقل باشند.

$$P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\})\, P(\{Y \leq y\})$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{XY}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y)} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f_X(x)\, F_Y(y)$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)}$$

مثال ۱

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}(1-x^2-y^2) & 0<x^2+y^2<1\\ 0 & x^2+y^2>1\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\,dx$$

مثال ۲

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} \; e^{-y^2/2\sigma^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}}_{f_X(x)} \; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2}}_{f_Y(y)}$$

$f_X(x) = N(0, \sigma^2)$ $\qquad$ $f_Y(y) = N(0, \sigma^2)$

مثال ۳

$$f_{XY}(x,y) = 4xy \;:\; 0 < x,y < 1$$

$0 < x < 1$

$f_X(x) = 2x$

$0 < y < 1$

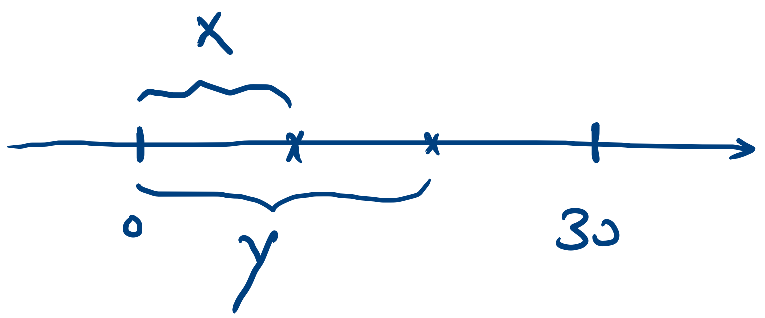
$f_Y(y) = 2y$

مثال ۴

$$f_{XY}(x, y) = 24xy \qquad\qquad 0 < x + y < 1$$

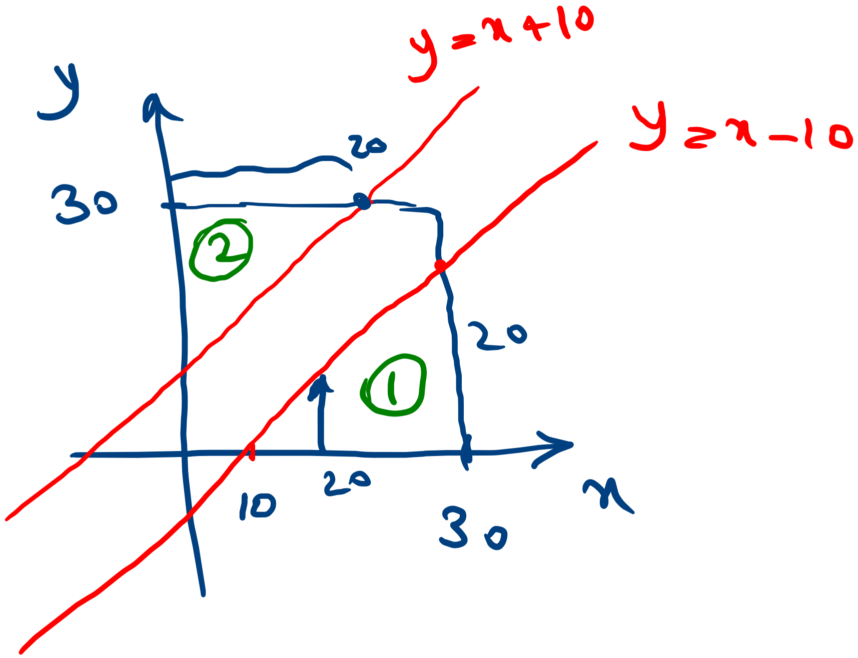
مثال ۵

- دو نفر قرار ملاقاتی برای ساعت ۱۲ تنظیم می‌کنند.
  - هر یک از آن‌ها به طور مستقل و با توزیع یکنواخت بین ساعت ۱۲ و ۱۲:۳۰ به محل قرار می‌رسد.
  - X = میزان دقایقی که نفر اول بعد از ساعت ۱۲ می‌رسد: $X \sim U(0,30)$ ← $f_X(x) = \frac{1}{30}$
  - Y = میزان دقایقی که نفر دوم بعد از ساعت ۱۲ می‌رسد: $Y \sim U(0,30)$ ← $f_Y(y) = 1/30$
- احتمال این که اولین فردی که به محل قرار می‌رسد بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر دیگری شود چقدر است؟



$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{900}$$

$$P(\,|y - x| \geq 10\,)$$



$$P(|X-Y| \geq 10) = P(X-Y \geq 10 \text{ or } X-Y \leq -10)$$

$$= \underbrace{P(X-Y \geq 10)}_{1} + \underbrace{P(X-Y \leq -10)}_{2}$$

$$P(|X-Y| \geq 10) = \frac{400}{900}$$

$$P(Y \leq X-10)$$

$$1 + 2 = \int_{10}^{30} \int_{0}^{x-10} \frac{1}{900}\, dy\, dx + \int_{0}^{20} \int_{x+10}^{30} \frac{1}{900}\, dy\, dx$$

$\uparrow$

x

قضیه

- قضیه: اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه $Z = g(X)$ و $W = h(Y)$ نیز مستقل خواهند بود.

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x)\, f_y(y)$$

مثال

- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند که هر دو دارای توزیع نمایی با پارامتر λ هستند. متغیر تصادفی W را به صورت $W = \mathrm{Min}\{X,Y\}$ تعریف می‌کنیم. تابع چگالی احتمال W را محاسبه کنید.

$$X \sim Exp(\lambda) \longrightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0 \longrightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$Y \sim Exp(\lambda) \longrightarrow f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \qquad y \geq 0 \longrightarrow F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda y}$$

$$W = \min(x, y) \qquad f_W(w) = ?$$

$$F_W(w) = P(W \leq w) = 1 - P(W > w) = 1 - P(\min(x,y) > w)$$

$$= 1 - P(X > w, Y > w) = 1 - \underbrace{P(X > w)}_{1 - F_X(w)} \underbrace{P(Y > w)}_{1 - F_Y(w)}$$

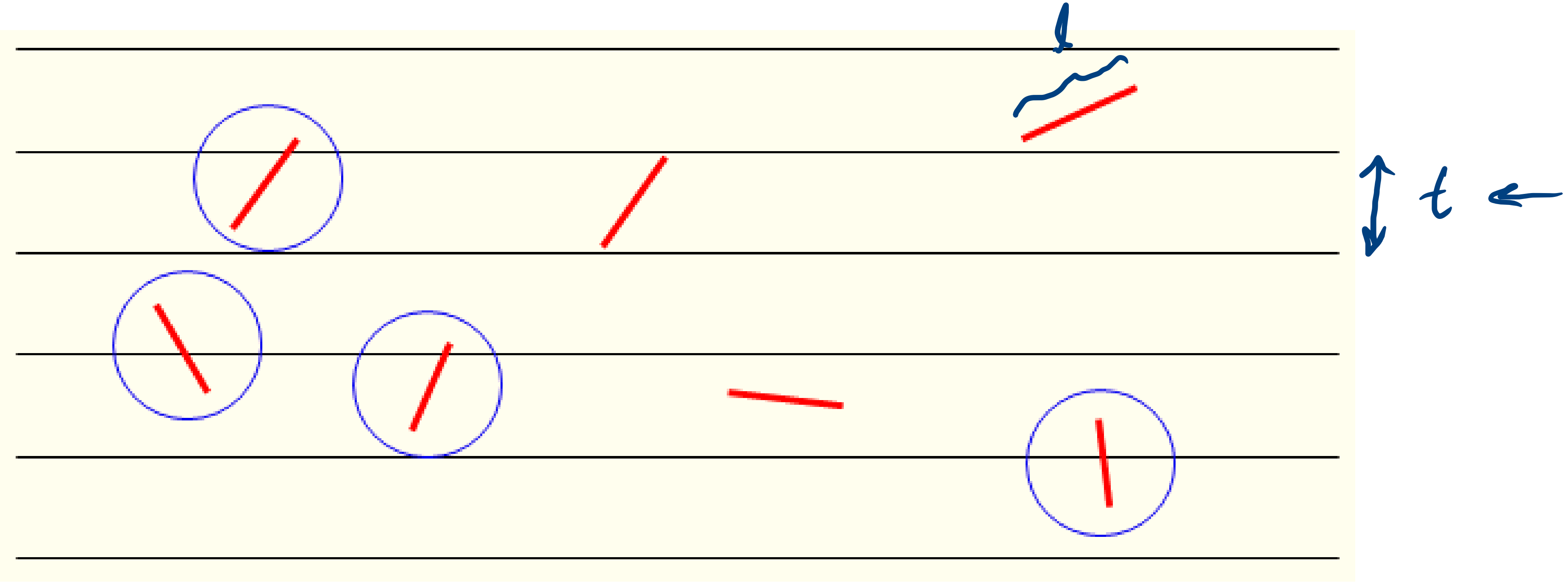
$$= 1 - e^{-\lambda w} e^{-\lambda w} = 1 - e^{-2\lambda w}$$

$$f_W(w) = 2\lambda e^{-2\lambda w} = Exp(2\lambda)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx$$

سوزن بوفون (Buffon’s Needle)

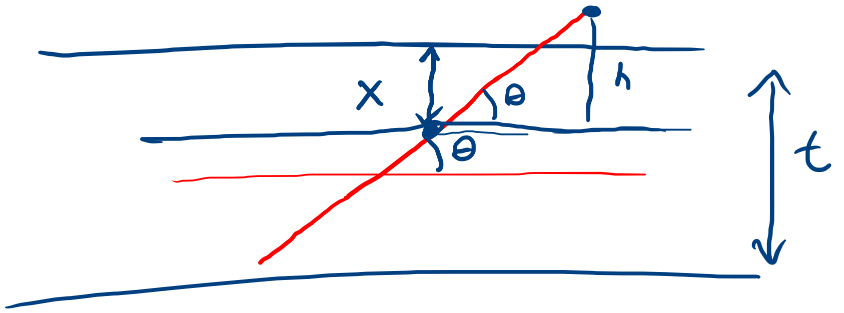
- سوزنی به طول l را بر روی صفحه‌ای با خطوط موازی به فاصله t می‌اندازیم.
احتمال این که سوزن یکی از این خطوط را قطع کند چقدر است؟



$$P_{xy}(x,y) = P_x(x)\,P_y(y)$$

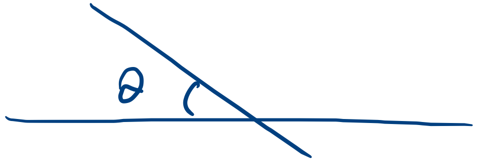
$$f_{xy}(x,y) = f_x(x)\,f_y(y)$$

$$F_{xy}(x,y) = F_x(x)\,F_y(y)$$



$\theta \sim U(0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \frac{2}{\pi}$

$x \sim U(0, t/2) \qquad \frac{2}{t}$



$f_{X\theta}(x, \alpha) = \frac{4}{t\pi} \qquad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq t/2$

$$\boxed{h = \frac{l}{2}\sin\theta}$$

$$P(h \geq X) = P(\underline{\tfrac{l}{2}\sin\theta \geq X}) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\frac{l}{2}\sin\theta} \frac{4}{t\pi}\, dx\, d\theta$$

x

$$= \frac{4}{t\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{l}{2}\sin\theta\, d\theta = \frac{2l}{t\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2l}{t\pi}$$

$\boxed{l < t}$

$$P\left(X \le \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\ell}{2}\sin\theta \,\le\, \frac{t}{2}} \frac{4}{t\pi}\, dx\, d\theta$$

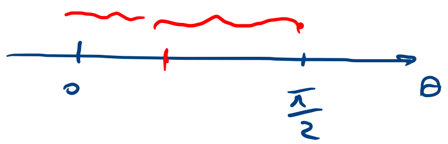
$$\boxed{\text{if } \ell \le t}$$

$$\ell \le t \le \frac{t}{\sin\theta}$$

if $\ell > t$

$$P\left(X \le \tfrac{\ell}{2}\sin\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\min\left(\frac{t}{2},\, \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)} \frac{4}{t\pi}\, dx\, d\theta$$

$$= \frac{4}{t\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left(\frac{t}{2},\, \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) d\theta$$



$$\frac{t}{2} \le \frac{\ell}{2}\sin\theta \Rightarrow \boxed{\theta \ge \sin^{-1}\left(\frac{t}{\ell}\right)}$$

$$= \frac{4}{t\pi}\left(\underbrace{\int_{\sin^{-1}\frac{t}{\ell}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{2}\, d\theta}_{} + \int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{t}{\ell}\right)} \frac{\ell}{2}\sin\theta\, d\theta \right)$$

استقلال بیش از دو متغیر تصادفی گسسته

- متغیر تصادفی گسسته $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقل از هم هستند، اگر برای هر زیرمجموعه از X_iها داشته باشیم:

$$P\left(X_{i_1} = x_1, X_{i_2} = x_2, \dots, X_{i_r} = x_r\right) = \prod_{k=1}^{r} P(X_{i_k} = x_k)$$

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C) \not\Rightarrow \text{independency}$$

$$P_{xyz}(x, y, z) = P_x(x)\,P_y(y)\,P_z(z)$$

$$P_{xy}(x, y) \stackrel{?}{=} P_x(x)\,P_y(y)$$

$$P_{xy}(x, y) = \sum_i P_{xyz}(x, y, z_i) = \sum_i P_x(x)\,P_y(y)\,P_z(z_i)$$

$$= P_x(x)\,P_y(y) \sum_i P_z(z_i) = P_x(x)\,P_y(y)$$

استقلال بیش از دو متغیر تصادفی پیوسته

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_r) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x_k)$$

$$F_{X_1 X_2 \cdots X_n}(x_1, \dots, x_r) = \prod_{k=1}^{r} F_{X_k}(x_k)$$

$$f_{X_1 \cdots X_r}(x_1, \dots, x_r) = \prod_{k=1}^{r} f_{X_k}(x_k)$$

متغیرهای تصادفی i.i.d.

Independent and Identically Distributed

$X_1, X_2, \dots, X_n$

$$f_{X_1 \cdots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)$$

مثال: پرتاب سکه n بار

X_i : شیر آمدن پرتاب i ام

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P_X(x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$$P_X(x) = p^{x} (1-p)^{1-x} \qquad x = \{0, 1\}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

مثال: پرتاب سکه n بار

X_i : شیر آمدن پرتاب i ام

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P_X(x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$$P_X(x) = p^{x} (1-p)^{1-x} \qquad x = \{0, 1\}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & & & & & x_n \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}}$$