Conditional Expectation

توزیع شرطی گسسته و پیوسته

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

امید ریاضی شرطی

$$\underbrace{E[X|Y=y]}_{g(y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{f_{X|Y}(x|Y=y)}\, dx$$

$$= \sum_{x} x\, P_{X|Y}(x|Y=y)$$

مثال

- دو تاس سالم D_1 و D_2 را پرتاب می‌کنیم:
  - متغیر تصادفی X را برابر مقدار $D_1 + D_2$ تعریف می‌کنیم.
  - متغیر تصادفی Y را برابر مقدار D_2 تعریف می‌کنیم.
- امید ریاضی X به شرط $Y = 6$ چقدر است؟

$$X = D_1 + D_2$$

$$Y = D_2$$

$$E[X \mid Y=6] = \frac{1}{6}\times 7 + \frac{1}{6}\times 8 + \dots + \frac{1}{6}\times 12 = 9.5$$

$$E[X \mid Y=6] = E[D_1 + D_2 \mid D_2 = 6] = E[D_1 \mid D_2=6] + E[D_2 \mid D_2 = 6]$$

$$= E[D_1] + 6$$

$$= 9.5$$

$\underbrace{\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}]}_{g(y)}$ and $\boxed{\underbrace{\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}]}_{g(Y)}}$

$E[X|Y=y]$

مثال

تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا ۶ بیاید. فرض کنید Y متغیر تصادفی باشد که تعداد پرتاب‌ها تا رسیدن به ۶ را نمایش می‌دهد و X متغیر تصادفی نشان‌دهنده تعداد دفعاتی که تاس ۱ می‌آید تا به ۶ برسیم. $E(X|Y=y)$ و $E(X|Y)$ را محاسبه کنید.

$Y \sim Geo(\frac{1}{6})$

$X|Y=y \sim Bin(y-1, \frac{1}{5})$

$$\boxed{E[X|Y=y] = \frac{y-1}{5}}$$

$$E[X|Y] = \frac{Y-1}{5}$$

خواص امید ریاضی شرطی

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی با توزیع مشترک $f_{XY}(x,y)$ باشند، آنگاه:

$$E[g(X)|Y=y]=\sum_{x} g(x)P_{X|Y}(x|y)$$

و یا

$$E[g(X)|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|Y}(x|y)dx$$

- امید ریاضی شرطی نیز خاصیت خطی بودن را داراست:

$$E[\sum_{i=1}^{n} X_i\,|Y=y]=\sum_{i=1}^{n} E[X_i|Y=y]$$

خواص امید ریاضی شرطی

امید ریاضی متغیر تصادفی $E[X|Y]$ با امید ریاضی متغیر تصادفی X برابر است:

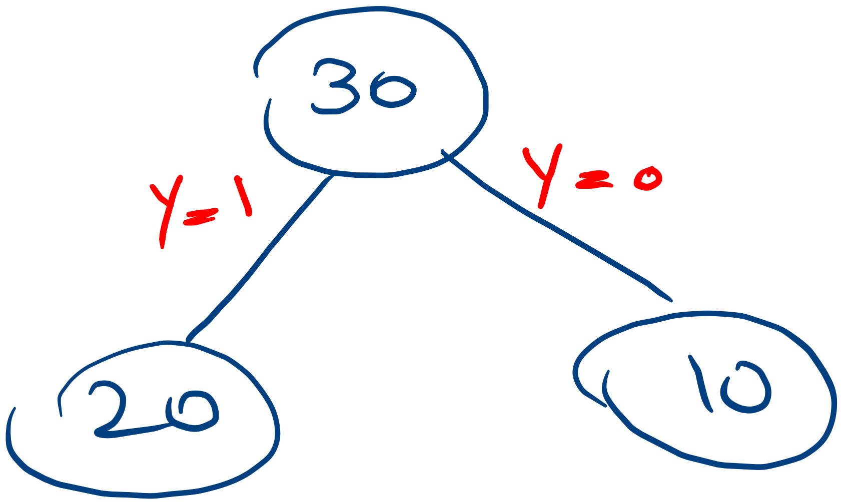
$$E_Y[E_X[X|Y]] = E[X]$$

$$E[\underbrace{E[X|Y]}_{g(Y)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx\right) f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, \underbrace{f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)}\, dy\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dy}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = E[X]$$


30
y=1
y=0
20
10

مثال ۱

- تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا ۶ بیاید. فرض کنید Y متغیر تصادفی باشد که تعداد پرتاب‌ها تا رسیدن به ۶ را نمایش می‌دهد و X متغیر تصادفی نشان‌دهنده تعداد دفعاتی که تاس ۱ می‌آید تا به ۶ برسیم. میانگین متغیر تصادفی X را حساب کنید.

$$E[X] = ?$$

$$E[X|y] = \frac{y-1}{5}$$

$$E[X] = E_{y}\left[E_{x}[X|y]\right] = E\left[\frac{y-1}{5}\right] = \frac{1}{5}E[y] - \frac{1}{5} = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} = 1$$

مثال ۲

```
int Recurse() {
    int x = randomInt(1, 3);

    if (x == 1) return 3;
    else if (x == 2) return (5 + Recurse());
    else return (7 + Recurse());
}
```

$x \in \{1, 2, 3\}$

• امید ریاضی مقدار خروجی تابع فوق چقدر است؟

$$E[Y] = ?$$

$$E[Y] = E[\underbrace{E[Y|X]}_{g(X)}] = P(X=1)\,g(1) + P(X=2)\,g(2) + P(X=3)\,g(3)$$

$$= \frac{1}{3} E[Y|X=1] + \frac{1}{3} E[Y|X=2] + \frac{1}{3} E[Y|X=3]$$

$$= \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3}(5 + E[Y]) + \frac{1}{3}(7 + E[Y])$$

$$\Rightarrow \boxed{E[Y] = 15}$$

خواص امید ریاضی شرطی

اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه

$$E(Y|X) = E[Y]$$

خواص امید ریاضی شرطی

$$E[g(X)|X] = g(x)$$

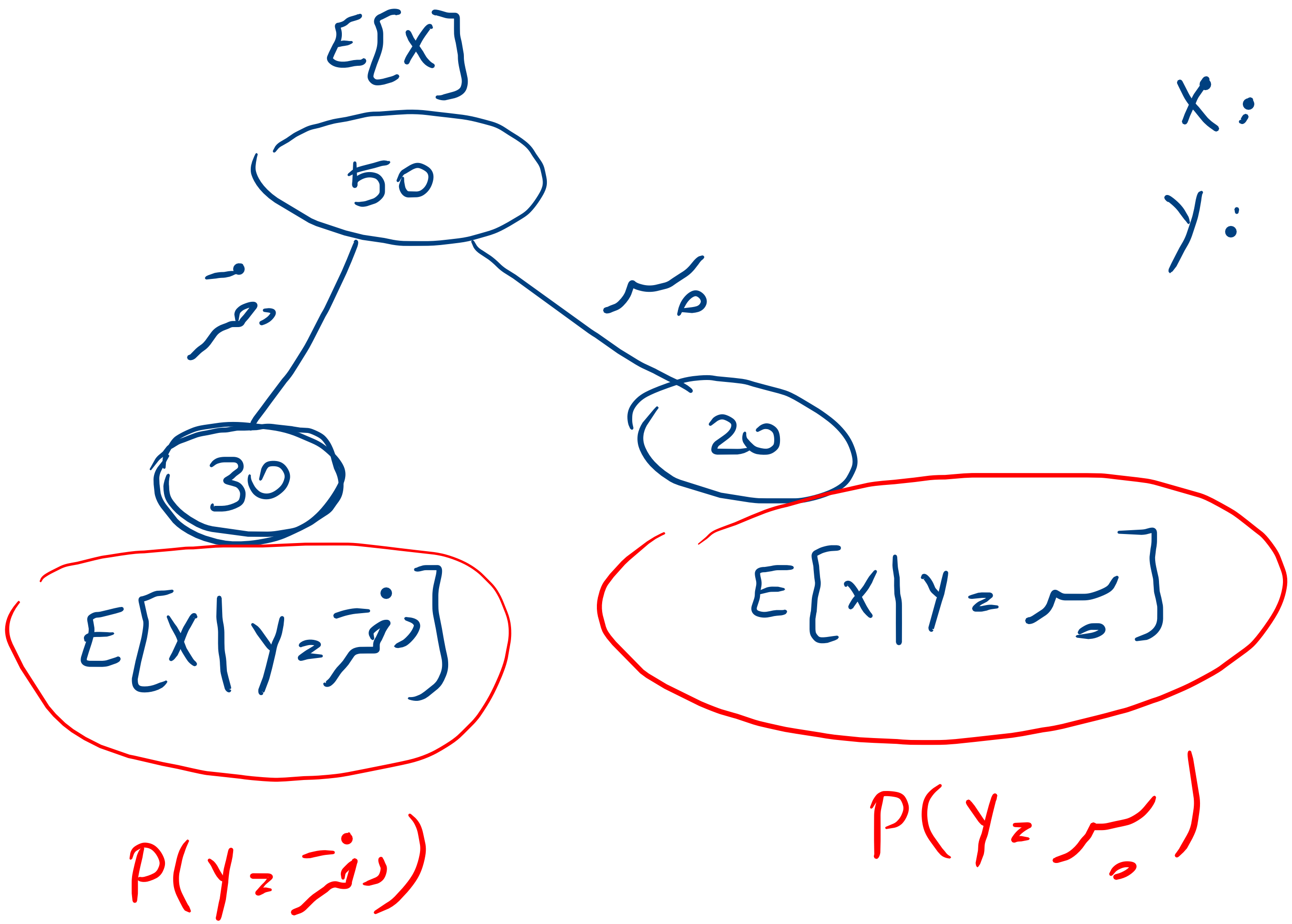
خواص امید ریاضی شرطی

$$E[g_1(X)g_2(Y)|X] = g_1(X)\, E[g_2(Y)\,|\,X]$$

$$E[y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \underbrace{f_{y|x}(y|x)}_{f_y(y)} dy$$

$$E[X] = E_y\left[E_x[X|y]\right]$$

$$\underbrace{\boxed{E[X|y]}}_{g(y)}$$



X: نمره

y: جنسیت

$$E[X] = E_y\left[E[X|y]\right]$$

مثال ۱

- متغیرهای تصادفی X و Y مستقل از یکدیگر بوده و هر دو دارای توزیع یکنواخت بر روی بازه (0,1) هستند. فرض کنید $Z = X + Y$. مقدار $E[Z|X]$ را محاسبه کنید.

$X \sim U(0,1)$

$Y \sim U(0,1)$

$Z = X+Y$

$$\underbrace{E[Z|X]}_{g(X)} = E[X+Y|X] = \underbrace{E[X|X]} + E[Y|X] = X + E[Y]$$

$$= X + \frac{1}{2}$$

مثال ۲

فرض کنید شما دارای یک وبسایت هستید. متغیر تصادفی X تعداد افرادی که در روز از وبسایت شما بازدید می‌کنند: $X\sim N(50,25)$

متغیر تصادفی $Y_i =$ تعداد دقایقی که بازدیدکننده i-ام بر روی سایت گذرانده است:
$Y_i\sim Poi(8)$

متغیرهای تصادفی X و Y_iها مستقل از یکدیگرند.

متوسط مجموع مدت زمان سپری شده توسط بازدیدکنندگان بر روی این وبسایت چقدر است؟

$$W = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_X = \sum_{i=1}^{X} Y_i$$

Random Sum

$$E[W] = ?$$

$$\boxed{E\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{X}}\, Y_i\Big] \ne \cancel{\sum_{i=1}^{X} E[Y_i]}}$$

$$E\Big[E\Big[\sum_{i=1}^{X} Y_i \,\Big|\, X=n\Big]\Big]$$

$$nE[Y]$$

$$\boxed{E[W] = E\big[E[W|X]\big]} = E\Big[E\Big[\overbrace{\sum_{i=1}^{X}} Y_i \,\Big|\, X\Big]\Big] = E\big[X\,E[Y]\big]$$

$$= E[8X] = 8\,E[X] = 8\times 50 = 400$$

مثال ۳

متغیرهای تصادفی X و Y مستقل از یکدیگر بوده و هر دو دارای توزیع یکنواخت بر روی بازه (0,1) هستند. فرض کنید $Z = X + Y$. مقدار $E[XZ|X]$ را محاسبه کنید.

$$E[XZ|X] = X\,E[Z|X] = X\,E[X+Y|X] = X\left(E[X|X] + E[Y|X]\right)$$

$$= X\left(X + \frac{1}{2}\right)$$

$$E[XZ|X] = E[X(X+Y)|X]$$

پیش‌بینی

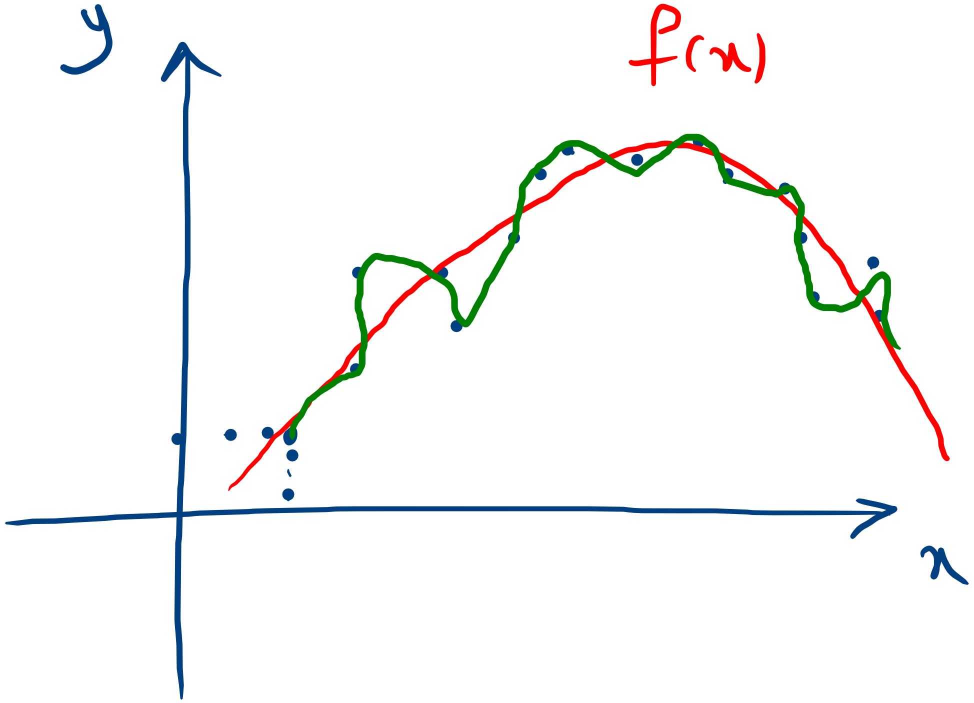
$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

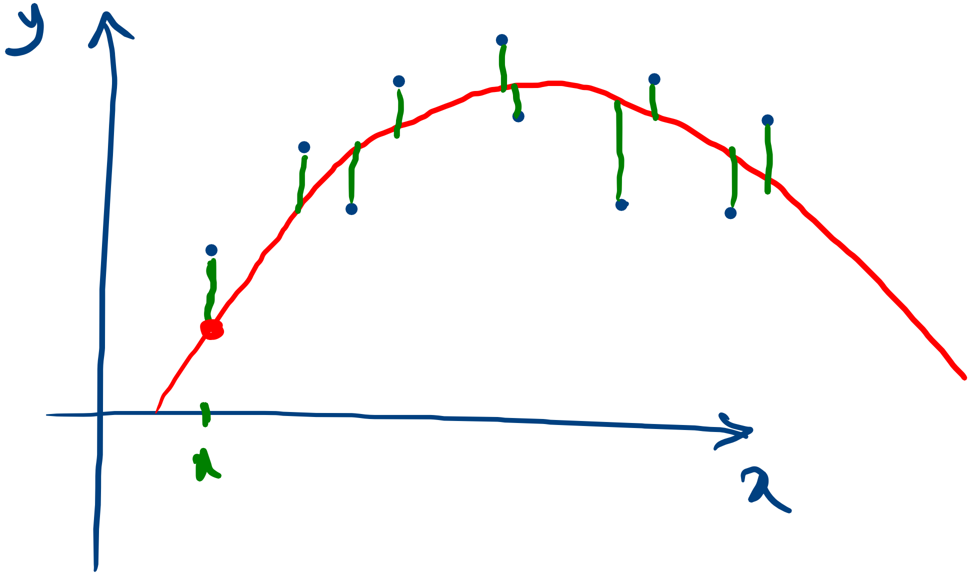
$$y = f(x)$$

قیمت فردا

قیمت امروز

$$(x, y)$$



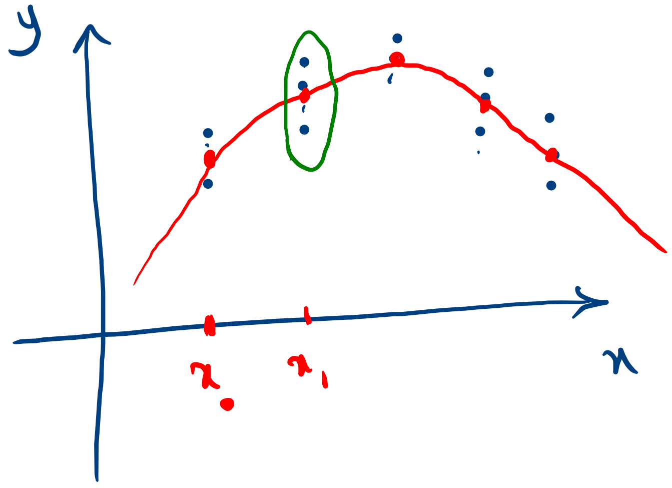


(x_i, y_i)

$g(x_i, y_i)$

$$\underbrace{\min_f \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2}}_{\text{Mean Squared Error}}$$

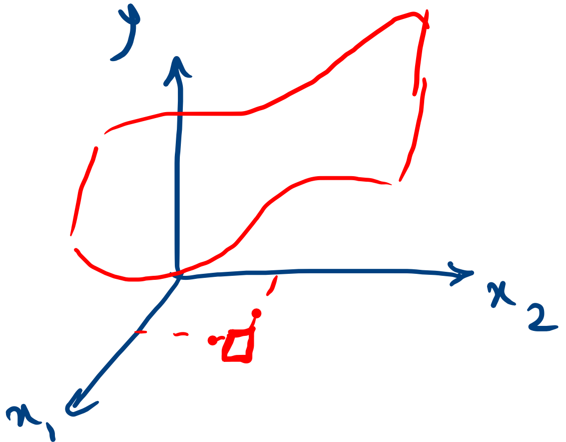
$$\rightarrow \boxed{\min_f E\left[(Y - f(X))^2\right]}$$



$$f(x) = \underbrace{\boxed{E[y|x]}}$$

$f(x_0)$

$$y = f(x_1, x_2)$$



$$f(x_1, x_2) = E[y | x_1, x_2]$$

مثال

- فرض کنید قد شما X سانتیمتر باشد: $X = 176cm$
- به طور تاریخی می‌دانیم که اگر قد آقایان X باشد، قد فرزند پسر آنها دارای توزیع نرمال $Y \sim N(X + 2,10)$ خواهد بود.
- پیش‌بینی شما از قد فرزند ذکورتان در آینده چقدر است؟

$E[y|x] = 178$

توزیع شرطی n-بعدی

$$f_{x|y}(x|y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}$$

$$f(x,y,z|w) = \frac{f(x,y,z,w)}{f(w)}$$

$$f(x,y|z,w) = \frac{f(x,y,z,w)}{f(z,w)}$$

قاعده زنجیره‌ای

$$f(x,y,z) = f(x)\underbrace{f(y|x)}\,\underbrace{f(z|x,y)}$$

$$f(x,y|z) = f(x|z)\,f(y|x,z)$$

$$\boxed{f(x,y|z,w)} = f(x|z,w)\,f(y|x,z,w)$$

$$= \frac{f(x,y,z,w)}{f(z,w)} = \frac{f(x,y,z,w)}{\iint_{x,y} f(x,y,z,w)\,dx\,dy}$$

حذف متغیر سمت چپ از چگالی شرطی

$$f_{xy}(x, y \mid z) \longrightarrow f(x \mid z)$$

$$\underbrace{f_x(x \mid z)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_{xy}(x, y \mid z)}\, dy$$

حذف متغیر سمت راست از چگالی شرطی

$$\boxed{f(x|y,z)} \longrightarrow f(x|y) = ?$$

$$\boxed{f(x|y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x,z|y)}_{f(z|y)\, f(x|y,z)} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{f(z|y)}\, \boxed{f(x|y,z)}\, dz$$

چپمن ـ کولموگروف

امید ریاضی شرطی چند متغیره

$$E[X \mid Y=y, Z=z]$$

$$E[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_{X|Y}(x|y) \, dx$$

$$E[X \mid Y=y, Z=z] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_{X}(x|y,z) \, dx$$

$$E[XY \mid Z, W] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \, f_{XY}(x,y|Z,W) \, dx \, dy$$