۱) الف) از آنجایی که در هر مرحله توانی از ۲ از مقدار پول های ما کم می شود و این مقدار کم شدن در هر مرحله دو برابر می شود

پس باید مقدار $i$ در دنباله هندسی $1+2+4+\dots+2^i$ به گونه تعیین کنیم که مقدار آن (مجموع) کم تر از $2^k$ شود.

پس داریم:

$$1+2+4+\dots+2^i < 2^k \Longrightarrow \frac{2^{i+1}-1}{2-1} < 2^k$$

$$\Longrightarrow i = k-1$$

یعنی بعد از $k-1$ مرحله باختن دیگر نمی توانیم ادامه دهیم و مقدار پولی که از دست می دهیم برابر است با

$$1+2+4+\dots+2^{k-1} = 2^k-1$$

و در نتیجه در مرحله آخر تنها $2^k-(2^k-1)=1$ دلار برای باقی می ماند که دیگر نمی توانیم به بازی ادامه دهیم (چون دیگر توان تامین $2^k$ دلار برای شروع راند دیگر را نداریم.)

ب) فرض کنید تا مرحله $j-1$ در شرط بندی باختیم و در مرحله $j$ ام بردیم پس مقدار پولی که از بازی کسب می کنیم برابر است با:

$$\underbrace{-1-2-4-\dots-2^{j-2}-2^{j-1}}_{-(2^j-1)}+2^j = -(2^j-1)+2^j = 1$$

ج) از آنجایی که لازم است برای باخت کامل به مقدار $(2^{k-1}+\dots+4+2+1)$ از پول ها پیش کم شود. یعنی باید $k$ بار ببازد. احتمال باخت در هر مرحله هم $\frac{1}{2}$ است و چون این ها مستقل از هم هستند در یکدیگر ضرب می شوند، احتمال باخت برابر است با $\left(\frac{1}{2}\right)^k$

د) از آنجایی که در هر دوره ای که می بریم یک دلار جایزه می گیریم و دوره های بازی هم از یکدیگر مستقل هستند (چون هر بار که می بریم از اول شروع می شود). برای هر آزمایش و دوره جدید، احتمال برد ما برابر با $1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$ خواهد بود ($\left(\frac{1}{2}\right)^k$ احتمال باخت کامل است و در غیر اینصورت خواهیم برد) حال از آنجایی که لازم است $2^k$ دلار جمع کنیم تا پول ما دو برابر شود. پس باید $2^k$ دوره بازی کنیم. و چون دوره ها مستقل از هم هستند، احتمال کل برابر

با ضرب احتمال برد در هر یک از دوره هاست. احتمال برد در هر دوره نیز برابر با $1-(\frac{1}{2})^k$ است (به جز دوره آخر). البته باید دقت داشت که در دوره آخر چون کل پول ما به مقدار $2^k + 2^k - 1$ رسیده است، پس در مجموع $2^{k+1} - 1$ دلار پول داریم و با این مقدار پول می توانیم $k+1$ بار در دوره آخر شرط بندی کنیم و ببازیم. (چون داریم: $\underbrace{1+2+4+\dots+2^k}_{k+1 \text{ بار}} = 2^{k+1}-1$ ) پس احتمال باخت کامل در مرحله آخر $(\frac{1}{2})^{k+1}$ خواهد بود و احتمال برد نیز $1-(\frac{1}{2})^{k+1}$ است. پس احتمال دو برابر شدن پول ما برابر است با:

$$P = \left(1-(\tfrac{1}{2})^k\right)^{2^k-1} \times \left(1-(\tfrac{1}{2})^{k+1}\right)$$

۲)

الف) می توانیم برای حل سوال، متغیر تصادفی $X$ را برابر با تعداد افرادی که نامهٔ خود را دریافت می کنند، قرار دهیم. سپس داریم:

$$P\{X=k\} = \binom{n}{k} \underbrace{D(n-k)}_{\text{پریشی } n-k \text{ عضو دیگر}} \times \frac{1}{n!}$$

$n!$ ← تعداد کل حالات قرارگیری $n$ نامه

در واقع برای اینکه $k$ عضو نامه خود را درستی دریافت کنند، $k$ عضو از $n$ عضو را انتخاب می کنیم و بین $n-k$ عضو دیگر نامه ها را به گونه ای پخش می کنیم که نامه هیچ کس به خودش نرسد که این همان پریشی $n-k$ عضو است.

در نتیجه برای محاسبه امید ریاضی آن داریم:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times \frac{\binom{n}{k} D(n-k)}{n!}$$

که اگر این اتحاد را به کمک محاسبات کامپیوتری و اتحاد های ترکیباتی بدست بیاوریم و داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} D(n-k) = n! \Longrightarrow E(X) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} D(n-k) = \frac{n!}{n!} = 1$$

درنتیجه به طور میانگین 1 نفر نامه خود را دریافت خواهد کرد.

ب) باید $P\{X=n-1\}$ را محاسبه کنیم. پس داریم:

$$P\{X=n-1\} = \binom{n}{n-1} \underbrace{D(n-(n-1))}_{D(1)=0} \frac{1}{n!} = 0$$

از آنجا که پریش 1 نفر برابر با صفر است، حاصل عبارت فوق برابر با صفر شده است. البته به طور شهودی نیز منطقی است، زیرا نمی‌توانیم حالتی داشته باشیم که تنها فرد باقی مانده به تنها نامه باقی مانده خودش نرسد.

ج) درواقع باید حاصل $P\{X=0\}$ را محاسبه کنیم.

$$P\{X=0\} = \binom{n}{0} \frac{D(n)}{n!} = \frac{D(n)}{n!}$$

۳) الف) از آنجایی که هر کارگر آنقدر کاری کند تا به اولین موفقیت خود برسد، با یک توضیع هندسی مواجه هستیم که متغیر تصادفی آن، همان موفقیت در روز $k$ ام است که داریم: $P\{X=k\} = P(1-P)^{k-1}$

لذا آنجایی که کار ماشین تا روز $k$ ام طول کشیده است، پس قطعاً حداقل یک کارگر وجود دارد که کارش در روز $k$ ام انجام شده است و بقیه کارگرها، کارشان ممکن است در هر کدام از روزهای 1 تا $k$ به پایان رسیده باشد ولی کار همه آنها دقیقاً در روز $k$ ام تمام شده است. یکی از راه‌های محاسبه آن به این شکل است که بیاییم احتمال تمام شدن همه کارگرها حداکثر تا روز $k$ ام را حساب کرد، و آن را منهای تمام شدن کار همه کارگرها حداکثر تا روز $k-1$ ام بکنیم. از آنجایی که کار کارگرها از هم مستقل است، لازم است ابتدا احتمال تمام شدن کار آن‌ها تا روز $k$ ام را بدست آوریم و بعد این احتمال‌ها را در هم ضرب کنیم (درواقع به نوعی داریم $f$ CD تا روز $k$ را حساب می‌کنیم)

(و می‌دانیم ناموفقیت در یک روز، بر احتمال موفقیت در روز بعد برای کارگر تاثیری ندارد و به هم وابسته نیستند)

احتمال اینکه کارگر $i$ ام کارش در حداکثر $k$ روز تمام شود برابر است با: $P = \sum_{j=1}^{k} p_i (1-p_i)^{j-1}$

این سیگما را می‌توان با استفاده از فرمول محاسبه مجموع دنباله هندسی ساده کرد و داریم:

$$\sum_{j=1}^{k} p_i (1-p_i)^{j-1} = p_i \frac{1-(1-p_i)^k}{1-(1-p_i)} = 1-(1-p_i)^k$$

بنابراین اتمام کار همه کارگرها حداکثر تا $k$ ام برابر است با

$$\prod_{i=1}^{n} 1-(1-p_i)^k$$

شماره کارگر

(ضرب کردیم چون کارشان مستقل از هم است)

که باید این مقدار را منهای مقدار اتمام کار کارگرها حداکثر تا روز $k-1$ ام بکنیم تا مقدار اتمام کار آنها دقیقا در روز $k$ ام بدست آید. پس داریم:

احتمال تمام شدن کار دقیقا در روز $k$ ام: $\prod_{i=1}^{n} 1-(1-p_i)^k - \prod_{i=1}^{n} 1-(1-p_i)^{k-1}$

ب) برای اینکه محاسبه کنیم کار ماشین به طور میانگین چند روز طول می‌کشد، باید ابتدا محاسبه کنیم که کار هر کدام از کارگرها به طور میانگین چقدر طول خواهد کشید که از آنجایی که با توضیع هندسی مواجه هستیم، امید ریاضی (مقدار متوسط) روزی که کار کارگر $i$ با احتمال موفقیت $p_i$ اتمام می‌یابد برابر با $\frac{1}{p_i}$ است. حال کافی است برای اینکه بفهمیم کار ماشین حداکثر چند روز طول می‌کشد، ماکسیمم این $\frac{1}{p_i}$ ها را بدست آوریم. پس

میانگین مدت زمان ساخت ماشین $= Max\left\{\frac{1}{p_i}\right\}$

۴) الف) از آنجا که از ۱۰۰ ویژگی موجود، ۵ تای آنها ویژگی خاصی دارند و معیوب هستند، با احتمال فوق هندسی مواجه هستیم (در توزیع فوق هندسی، از n شیء موجود، k شیء ویژگی خاصی دارند). از آنجا که باید حداقل نمره ۹۵ را بگیریم پس باید مجموع $P\{X=0\}$ و $P\{X=1\}$ و $P\{X=2\}$ را با هم جمع کنیم (هر سوال غلط ۲٫۵ نمره کم می‌کند پس حداکثر ۲ سوال غلط داریم.)

طبق فرمول مربوط به توزیع فوق هندسی داریم:

($X$ : تعداد باگ‌هایی را که در می‌آوریم)

ans: $$P\{X \leq 2\} = P\{X=2\} + P\{X=1\} + P\{X=0\}$$

$$= \frac{\binom{5}{2}\binom{95}{8}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{95}{9}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{5}{0}\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}}$$

ب) برای اینکه ۵ باگ را پیدا کنیم باید دنبال $P\{X=5\}$ باشیم. پس داریم:

ans: $$P\{X=5\} = \frac{\binom{5}{5}\binom{95}{5}}{\binom{100}{10}}$$

۵) الف) از آنجا که در هر دقیقه $\lambda_i$ نفر وارد ایستگاه $i$ ام مترو می‌شوند و مترو هر ۱۰ دقیقه یکبار می‌آید، پس هر بار که مترو می‌آید، به تعداد $10\lambda_i$ نفر سوار می‌شوند. می‌دانیم که

$$D_j = \sum_{i=1}^{j-1} P_{i,j}$$

پس برای محاسبه امید ریاضی آن داریم:

$$E[D_j] = \sum_{i=1}^{j-1} x_i P_{i,j}$$

$$\xrightarrow{x_i = 10\lambda_i} E[D_j] = \sum_{i=1}^{j-1} 10\lambda_i P_{i,j}$$

از طرفی می‌دانیم که برای محاسبه واریانس داریم:

$$Var[D_j] = E[D_j^2] - E^2[D_j]$$

پس داریم:

$$Var[D_j] = \sum_{i=1}^{j-1} (10\lambda_i)^2 P_{i,j} - \left(\sum_{i=1}^{j-1} 10\lambda_i P_{i,j}\right)^2$$

ب) ابتدا $P\{D_2=2\}$ را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که $D_2$ برابر است با $P_{1,2}$ و $D_2=2$ یعنی ۲ نفر از $10\lambda_1$ نفری که در ایستگاه اول سوار مترو شدند، از آن در ایستگاه دوم پیاده بشوند. پس برای $P\{D_2=2\}$ داریم:

$$P\{D_2=2\} = \binom{10\lambda_1}{2} P_{1,2}^{2} (1-P_{1,2})^{10\lambda_1-2}$$

انتخاب ۲ نفر از $10\lambda_1$ نفر برای پیاده شدن در ایستگاه دوم

احتمال پیاده شدن در ایستگاه دوم با شرط سوار شدن در ایستگاه اول

حال با فرض پیاده شدن دو نفر در ایستگاه دوم (که در ایستگاه اول سوار شده بودند)، $P\{D_3=3\}$ را به آن شرط حساب می‌کنیم. (در واقع همان $P\{D_2=2, D_3=3\}$ را داریم حساب می‌کنیم.) از آنجا که ۳ نفر در ایستگاه سوم پیاده شدند، این افراد می‌توانند در ایستگاه یک یا دو سوار شده باشند. پس داریم:

$$P\{D_2=2, D_3=3\} = \underbrace{\binom{10\lambda_1}{2} P_{1,2}^{2} (1-P_{1,2})^{10\lambda_1-2}}_{\text{برای } D_2=2} \times \sum_{i=0}^{3}\left[\binom{10\lambda_1-2}{i} P_{1,3}^{i} (1-P_{1,3})^{10\lambda_1-2-i} \times \binom{10\lambda_2}{3-i} \times (P_{2,3})^{3-i} \times (1-P_{2,3})^{10\lambda_2-3+i}\right]$$

$$= \binom{10\lambda_1}{2} p_{1,2}^{2} (1-p_{1,2})^{10\lambda_1-2} \times \sum_{i=0}^{3} \left[ \binom{10\lambda_1-2}{i} p_{1,3}^{i} (1-p_{1,3})^{10\lambda_1-2-i} \times \binom{10\lambda_2}{3-i} p_{2,3}^{3-i} (1-p_{2,3})^{10\lambda_2-3+i} \right]$$

۶) دسته ۵۲ تایی از کارت‌ها را درنظر می‌گیریم و کارت در پایین‌ترین index را کارت bottom می‌نامیم. (در واقع کارت‌ها از پایین به بالا در index های ۱ تا ۵۲ قرار گرفته‌اند) حال یک کارت را از بالا برمی‌داریم و بین ۵۱ کارت دیگر بر می‌زنیم (در واقع ۵۲ جایگاه برای بُر زدن این کارت وجود دارد، بین کارت‌ها و زیر کارت‌ها و روی کارت بالایی). می‌دانیم به احتمال $p_1 = \frac{1}{52}$، این کارت احتمال دارد در زیر کارت bottom قرار بگیرد. پس به طور متوسط باید $\frac{1}{p_1} = 52$ بار بر بزنیم تا این کارت در زیر کارت bottom قرار بگیرد (کارت bottom به index دوم برود) از آنجا که در این روند (برداشتن کارت از بالای دسته کارت‌ها و بر زدن آن) احتمال یکسانی وجود دارد که هر کارتی در زیر کارت bottom قرار بگیرد، یکسان است، به نوعی توزیع یکنواخت در زیر کارت‌های bottom وجود دارد. حال فرض کنید بخواهیم همین روند را باز ادامه دهیم تا اعداد بیشتری به کارت‌های زیر bottom اضافه گردد. فرض کنید $i-1$ کارت را در زیر کارت bottom insert کرده‌ایم و کارت bottom به ایندکس $i$ ام رفته است. حال یک کارت از روی دسته کارت‌ها برمی‌داریم و بر می‌زنیم. احتمال اینکه این کارت در بین $k$ کارت پایین دسته کارت‌ها قرار بگیرد تا کارت bottom یک ایندکس صعود کند، برابر با $\frac{k}{52} = \frac{k}{n}$ است (برای $k=1$ همان $\frac{1}{52}$ می‌شود که مربوط به مرحله اول است). پس به طور متوسط باید $\frac{1}{\frac{k}{n}} = \frac{n}{k}$ بار بر بزنیم تا ۱ کارت جدید در یکی از این $k$ ایندکس پایین قرار بگیرد. این کار را آنقدر انجام می‌دهیم تا کارت bottom به بالای دسته کارت‌ها برسد. حال تنها کافی است کارت bottom را از آن بالا برداریم و بر بزنیم که با احتمال $\frac{52}{52}$ در بین دسته کارت یکنواخت زیر آن قرار خواهد گرفت. بنابراین با این کار در نهایت به توزیع یکنواخت در بین ۵۲ کارت می‌رسیم.

CamScanner

از آنجا که در هر مرحله که کارتی را به $k$ کارت پایینی اضافه می‌کنیم، مقدار آن کارت هر عددی می‌تواند باشد (کاملا به صورت رندم اتفاق می‌افتد که کدام کارت باید insert شود) پس در هر بار در بین آن $k$ کارت، یک توضیع یکنواخت داریم تا در نهایت $k$ به $n$ برسد و برای همه کارت‌ها توضیع یکنواخت داشته باشیم. بنابراین تعداد عملیات‌هایی که انجام دادیم تا به این توضیع یکنواخت برسیم، برابر است با

$$\sum_{i=1}^{52} \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{52} \frac{1}{\frac{i}{52}} = \sum_{i=1}^{52} \frac{52}{i}$$

(هر عددی که insert می‌کنیم کاملا رندم است هم در یک کاملا رندم از دسته $k$ تای پایینی insert می‌شود)

$$= 52 \sum_{i=1}^{52} \frac{1}{i} = 52 \ln 52$$

پس باید به تعداد $52 \log 52$ بار اینکار را انجام دهیم تا به توضیع یکنواخت برسیم.

(مشابه مسئله کوپان کالکتر حل شد.)