۸۱۰۱۰۱۴۹۲ علیرضا اکبری

1) $$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y & x \end{vmatrix} = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$X = \frac{W}{Y} \Longrightarrow Z = \sqrt{\left(\frac{W}{Y}\right)^2 + Y^2} = \sqrt{\frac{W^2+Y^4}{Y^2}} \Longrightarrow Z^2Y^2 = W^2 + Y^4$$

$$\Longrightarrow Y^4 - Z^2Y^2 + W^2 = 0 \Longrightarrow Y^2 = \frac{+Z^2 \pm \sqrt{Z^4 - 4W^2}}{2} \Rightarrow Y = \pm\sqrt{\frac{+Z^2 \pm \sqrt{Z^4 - 4W^2}}{2}}$$

$$\Longrightarrow X = \frac{W}{\pm\sqrt{\frac{+Z^2 \pm \sqrt{Z^4-4W^2}}{2}}}$$

$\Leftarrow$ ۴ تا ریشه داریم (متناسب با هر Y، یک X داریم).

$Z^4 - 4W^2 \geqslant 0$ فقط باید بررسی کنیم که زیر رادیکال داخلی، شرایط باید برقرار باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\Longrightarrow Z^4 \geqslant 4W^2 \Longrightarrow Z^2 \geqslant 2|W| \Longrightarrow (X^2+Y^2) \geqslant 2|XY|$$

$$\Longrightarrow X^2 - 2|XY| + Y^2 \geqslant 0 \Longrightarrow (X \pm Y)^2 \geqslant 0$$ که در این حالت شرایط همیشه برقرار است.

$$\Longrightarrow f_{Z,W}(z,w) = \frac{f_{XY}(x_i, y_i)}{|J(x_i, y_i)|}$$ حال ۴ تا ریشه را جایگذاری می‌کنیم در معادله روبرو و به جواب خواهیم رسید.

البته اگر محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\dot{J}(x_1,y_1) = \dot{J}(x_2,y_2) = \dot{J}(x_3,y_3) = \dot{J}(x_4,y_4)$$

در واقع خواهیم داشت:

$$\dot{J} = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{(x-y)^2(x+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = z^2-2w, \quad (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = z^2+2w$$

$$\Rightarrow \dot{J} = \frac{\sqrt{(z^2-2w)(z^2+2w)}}{z} \qquad f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}$$

$\dot{J}$ همیشه مثبت است $\Leftarrow z>0 \Leftarrow \sqrt{x^2+y^2}>0$

$$\Rightarrow f_{z,w}(z,w) = 4 \times \frac{1}{2\sigma^2} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} \times \frac{z}{\sqrt{(z^2-2w)(z^2+2w)}}$$

2)

الف) $E(Y|X=x) = \int_x^1 y\, f_{Y|X}(y,x)\, dy = \int_x^1 y \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\, dy$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = \int_x^1 xy\, dy = \frac{xy^2}{2}\Big)_x^1 = \frac{x(1-x^2)}{2}$$

$$\Rightarrow f_{Y|X}(y,x) = \frac{2xy}{x(1-x^2)} = \frac{2y}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow E(Y|X=x) = \int_x^1 y \frac{۲y}{1-x^2}\, dy = \frac{۲}{۳(1-x^2)}\, y^3\Big)_x^1 = \frac{۲(1-x^3)}{۳(1-x^2)}$$

$$\Rightarrow E(Y|X=\tfrac{1}{۳}) = \frac{۲(1-\frac{1}{27})}{۳(1-\frac{1}{9})} = \frac{2}{3} \times \frac{26}{27} \times \frac{9}{8} = \frac{13}{18}$$

$$E(Y^2|X=x) = \int_x^1 y^2 \frac{۲y}{1-x^2}\, dy = \frac{۲}{۴(1-x^2)}\, y^۴\Big)_x^1 = \frac{۲(1-x^4)}{۴(1-x^2)} = \frac{1+x^2}{2}$$

$$\Rightarrow E(Y|X=\tfrac{1}{۳}) = \frac{1+\frac{1}{9}}{2} = \frac{10}{18}$$

$$\Longrightarrow Var\left(Y \mid X=\frac{1}{3}\right) = E\left(Y^2 \mid X=\frac{1}{3}\right) - E^2\left(Y \mid X=\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{18} - \left(\frac{13}{18}\right)^{۲} = \frac{11}{324}$$

ب) $A = Cov(۰/۵ X,\ X+Y-2) = E\left[(۰/۵ X)\cdot(X+Y-2)\right] - ۰/۵ E[X]\left(E[X]+E[Y]-2\right)$

$$= ۰/۵ E[X^2] + ۰/۵ E[XY] - E[X] - ۰/۵ E^2[X] - ۰/۵ E[X]E[Y] + E[X]$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{E[X^2] - E^2[X]}_{Var(X)} + \underbrace{E[XY] - E[X]E[Y]}_{Cov(X,Y)}\Big)$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 f_X\,dx = \int_0^1 \frac{x^3(1-x^2)}{2}\,dx = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12}\right)_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

$$E[X] = \int_0^1 x f_X\,dx = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2}\,dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\right)_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

$$E[XY] = \int_0^1\int_x^1 xy\cdot xy\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^3)}{3}\,dx = \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^6}{18}\right)_0^1 = \frac{1}{18}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y f_y\,dy = \int_0^1 y\int_0^y f_{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 y\int_0^y xy\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{y^4}{2} = \frac{y^5}{10}\Big)_0^1 = \frac{1}{10}$$

$$\Longrightarrow A = \frac{1}{۲}\left(\frac{1}{24} - \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \frac{1}{18} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{۲}\left(\frac{۹۷}{۱۸۰۰} + \frac{۱۱}{۲۲۵}\right) = \frac{۴۳}{۱۰۰۰}$$

3)

الف) $F_{X+Y}(s) = P(X+Y \leq s) = \iint\limits_{x+y \leq s} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \overset{X \perp Y \text{ استقلال}}{=} \iint\limits_{x+Y \leq s} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{s-y} f_X(x)\,dx\; f_Y(y)\,dy \overset{X,Y \geq 0}{=\!=} \int_0^s f_Y(y) \int_0^{s-y} \lambda e^{-\lambda x}\,dx\,dy$$

$$\int_0^{s-y} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{s-y} = 1 - e^{-\lambda(s-y)}$$

$$\Longrightarrow F_S(s) = \int_0^s \left(1 - e^{-\lambda(s-y)}\right) \mu e^{-\mu y}\,dy \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^s \mu e^{-\mu y} - \mu e^{-\mu y - \lambda s + \lambda y}\, dy = \left(-e^{-\mu y} - \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\mu y - \lambda s + \lambda y}\right)\Big|_0^s$$

$$= \left(-e^{-\mu s} - \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\mu s} + 1 + \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\lambda s}\right) = F_S(s)$$

ب) $F_R(r) = P\left(\frac{X}{X+Y} \leqslant r\right)$

از آنجایی که $X>0$ و $Y>0$ $\Longleftarrow$ $0 < \frac{X}{X+Y} < 1$ $\Longleftarrow$ برای r دو حالت درنظر می‌گیریم:

حالت اول: $r<1 \Rightarrow P\left(\frac{X}{X+Y} \leqslant r\right) = P\left(X \leqslant Xr + Yr\right) = P\left(\frac{(1-r)}{r} X \leqslant Y\right)$

$$= \iint_{\frac{(1-r)}{r}x<y} f_X(x) f_Y(y)\, dy\, dx = \int_0^{+\infty}\int_{\frac{1-r}{r}x}^{+\infty} \mu e^{-\mu y} dy\; f_X(x)\, dx$$

$$\int_{\frac{(1-r)}{r}x}^{+\infty} \mu e^{-\mu y} = -e^{-\mu y}\Big|_{\frac{1-r}{r}x}^{+\infty} = e^{-\mu\left(\frac{1-r}{r}x\right)}$$

$$\Rightarrow F_R(r) = \int_0^{+\infty} e^{-\mu\left(\frac{1-r}{r}x\right)} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\left(\lambda + \mu\left(\frac{1-r}{r}\right)\right)x}\, dx$$

$$= \left(-\frac{\lambda}{\lambda+\mu\left(\frac{1-r}{r}\right)} e^{-\left(\lambda+\mu\left(\frac{1-r}{r}\right)\right)x}\right)\Big|_0^{+\infty} = +\frac{\lambda}{\lambda+\mu\left(\frac{1-r}{r}\right)}$$

حالت دوم: $r \geqslant 1 \Longrightarrow F_R(r) = 1$ چون تمام $R = \frac{X}{X+Y}$ های ممکن کمتر از یک هستند

$$\Rightarrow F_R(r) = \begin{cases} 1 & r \geqslant 1 \\ \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu\left(\frac{1-r}{r}\right)} & 0<r<1 \end{cases}$$

4)

الف) می‌دانیم که: $X+Y=N$

طبق قانون احتمال کل:

$$\Longrightarrow P_{XY}(x,y) = P_{XY|N}(x,y \mid n=x+y)\,P_N(n=x+y) + \underbrace{P_{XY|N}(x,y \mid n\neq x+y)\,P_N(n\neq x+y)}_{\text{صفر}}$$

$$\Longrightarrow P_{XY}(x,y) = P_{XY|N}(x,y \mid n=x+y)\,P_N(n=x+y)$$

$$= \binom{x+y}{x} p^x (1-p)^y \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x+y}}{(x+y)!}$$

$$= \frac{\cancel{(x+y)!}}{x!\,y!} p^x (1-p)^y \times e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^x \cdot \lambda^y}{\cancel{(x+y)!}} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}p^x \cdot \frac{\lambda^y}{y!}(1-p)^y$$

چون توانستیم قسمت های شامل x و y را به طور کامل از هم جدا کنیم، پس $X \perp Y$

ب) $$P_X(x) = \sum_{y_i} P_{XY}(x,y_i) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda}\left(\frac{(\lambda p)^x}{x!}\right)\left(\frac{(\lambda(1-p))^y}{y!}\right)$$

$$= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^x}{x!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^y}{y!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^x}{x!}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^x}{x!} \sim Poi(\lambda p)$$

$$P_Y(y) = \sum_{x_i} P_{XY}(x_i,y) = e^{-\lambda}\frac{(\lambda(1-p))^y}{y!}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda p)^x}{x!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda(1-p))^y}{y!}e^{\lambda p}$$

$$= e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^y}{y!} \sim Poi(\lambda(1-p))$$

5)

الف) $P(u_1 \mid u_1 > u_2) = \dfrac{P(u_1 > u_2 \mid u_1)\, P(u_1)}{P(u_1 > u_2)}$ $\qquad f_{u_1}(u_1) = f_{u_2}(u_2) = \frac{1}{2}$

برای محاسبه $P(u_1 > u_2 \mid u_1)$ چون u_1، given است، پس تنها کافی است روی مقادیر u_2 که از u_1 کوچک‌تر هستند، انتگرال بزنیم. اما برای محاسبه $P(u_1 > u_2)$، چون اطلاع از محدودیت u_1 نداریم، روی تمام مقادیر u_1 نیز انتگرال می‌زنیم. پس داریم:

$$\Longrightarrow \frac{\int_0^{u_1} f_{u_2}(u_2)\,du_2 \times P(u_1)}{\int_0^{2}\int_0^{u_1} \underbrace{f_{u_1,u_2}(u_1,u_2)}_{f_{u_1}(u_1)\times f_{u_2}(u_2)}\,du_2\,du_1} = \frac{\int_0^{u_1} \frac{1}{2}\,du_2 \times \frac{1}{2}}{\int_0^{2}\int_0^{u_1} \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\,du_2\,du_1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}u_1 \times \frac{1}{2}}{\int_0^{2} \frac{1}{4}u_1\,du_1} = \frac{\frac{1}{4}u_1}{\underbrace{\left(\frac{1}{8}u_1^2\right)\Big|_0^{2}}_{\frac{1}{2}}} = \frac{u_1}{2}$$

$$P(u_2 \mid u_1 > u_2) = \frac{P(u_1 > u_2 \mid u_2)\, P(u_2)}{P(u_1 > u_2)}$$

در اینجا برای محاسبه $P(u_1 > u_2 \mid u_2)$، چون u_2، given است و از آن اطلاع داریم، تنها روی مقادیر u_1 که بزرگ‌تر از u_2 هستند، انتگرال می‌زنیم. $P(u_1 > u_2)$ را هم که در قسمت قبل برابر $\frac{1}{2}$ بدست آوردیم. پس داریم:

$$\Longrightarrow \frac{\int_{u_2}^{\text{٢}} u_1\, du_1 \times \frac{1}{\text{٢}}}{\frac{1}{\text{٢}}} = \int_{u_2}^{2} \frac{1}{\text{٢}}\, du_1 = \frac{1}{\text{٢}} (u_1)\Big|_{u_2}^{2} = 1 - \frac{u_2}{2}$$

ب) $$E(u_1 \mid u_1 > u_2) = \int_{u_2}^{\text{٢}} u_1 \times \frac{u_1}{2}\, du_1 = \frac{u_1^3}{6}\Big|_{u_2}^{2} = \frac{\text{٨} - u_2^3}{6}$$

$2 > u_1 > u_2$

$$E(u_2 \mid u_1 > u_2) = \int_{\text{٠}}^{u_1} u_2 \times \left(1 - \frac{u_2}{2}\right) du_2 = \left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_2^3}{6}\right)\Big|_{\text{٠}}^{u_1} = \frac{u_1^2}{2} - \frac{u_1^3}{6}$$

$u_1 > u_2 > \text{٠}$