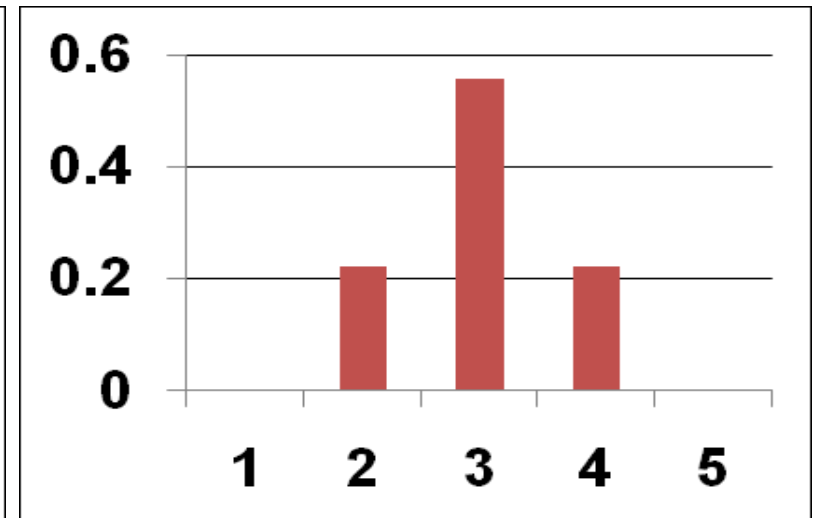
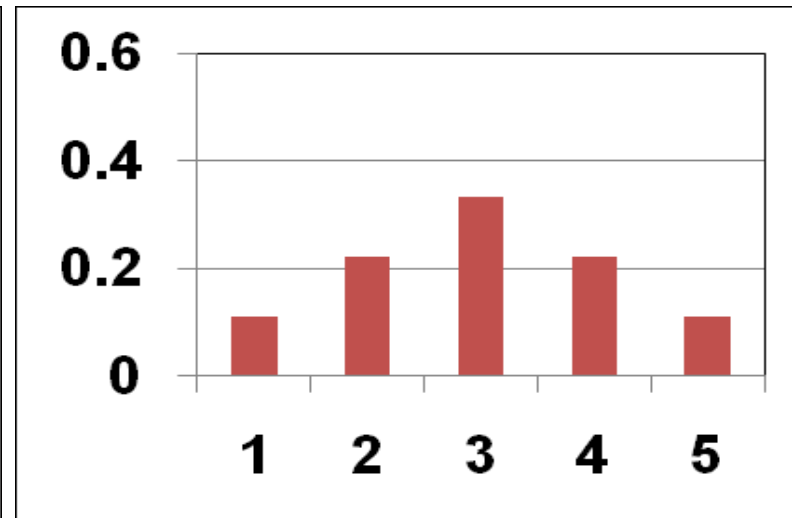
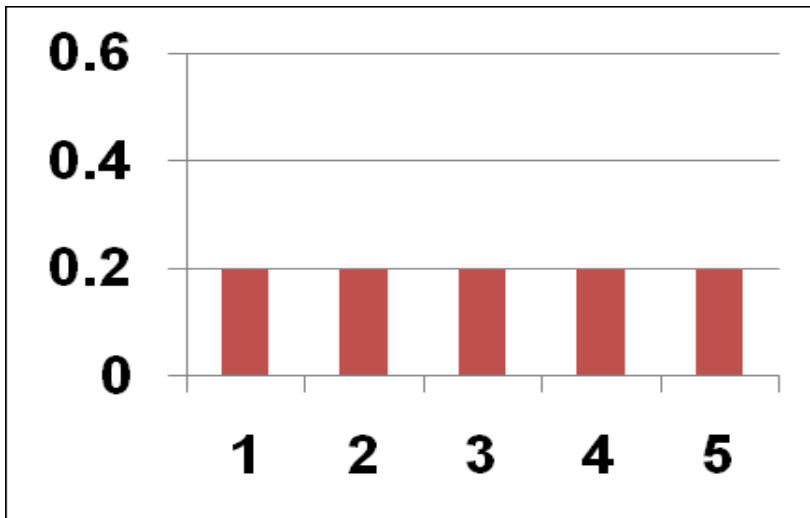


Variance

واریانس (Variance)



انحراف معیار

مثال: پرتاب تاس

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (1^2) \times \frac{1}{6} + (2^2) \times \frac{1}{6} + (3^2) \times \frac{1}{6} + (4^2) \times \frac{1}{6} + (5^2) \\ &\times \frac{1}{6} + (6^2) \times \frac{1}{6} = \frac{91}{6} \end{aligned}$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

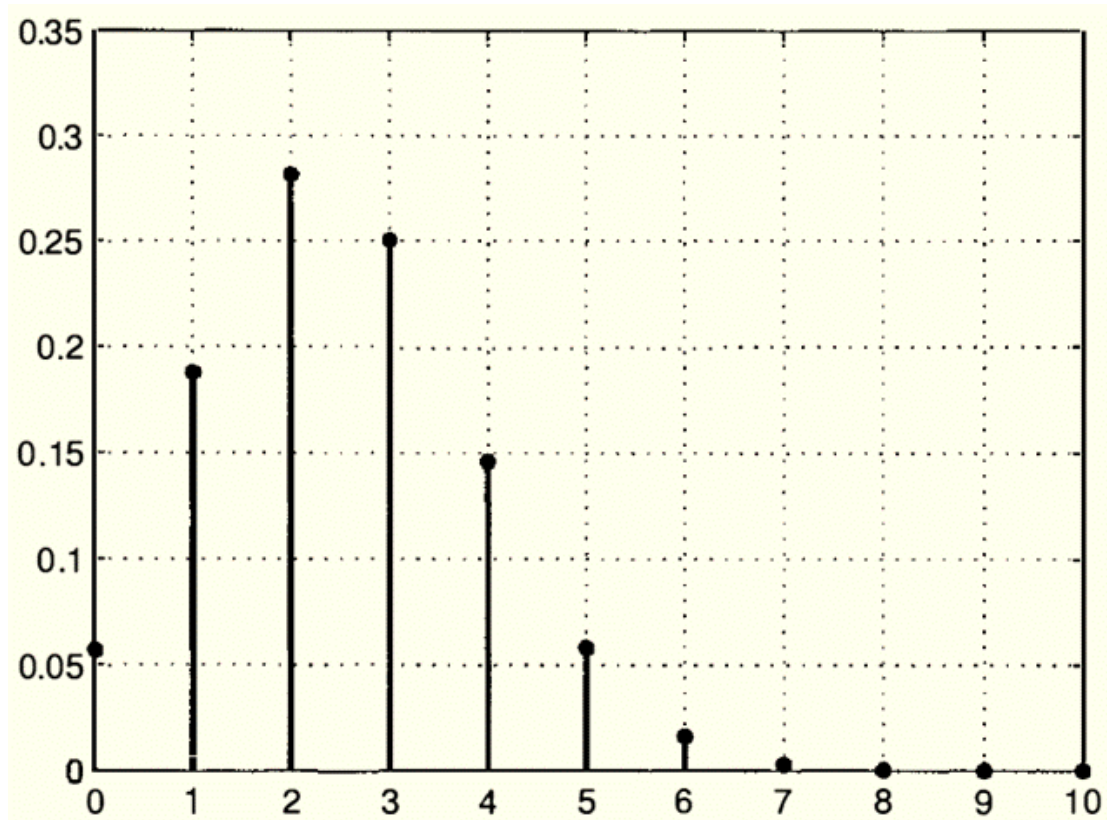
خواص واریانس: $var(aX + b)$

توزیع برنولی

توزیع دو جمله‌ای

رابطه توزیع دو جمله‌ای و توزیع برنولی

خواص توزیع دو جمله‌ای



مثال: کد تصحیح خطا Hamming

یکی از رایج‌ترین کدهای تصحیح خطا، کد $\text{Hamming}(7,4)$ است. در این کد پس از هر چهار بیت داده $d_1d_2d_3d_4$ ، سه بیت توازن $p_1p_2p_3$ اضافه می‌شود:

$$p_1 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_4$$

$$p_2 = d_1 \oplus d_3 \oplus d_4$$

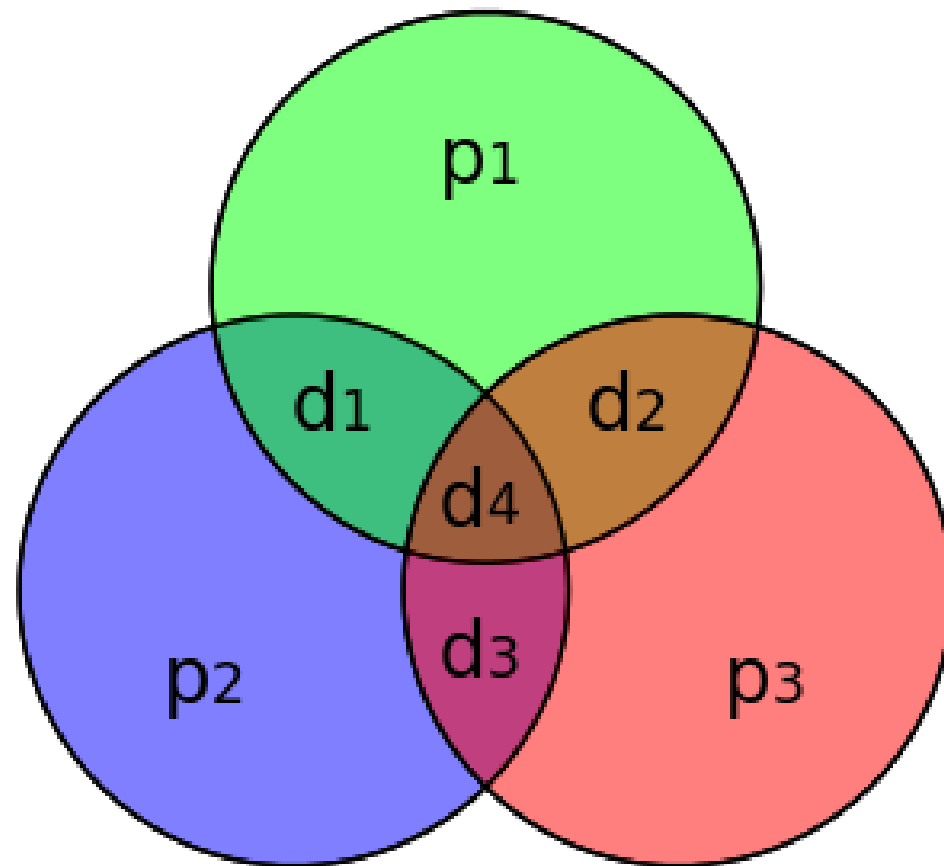
$$p_3 = d_2 \oplus d_3 \oplus d_4$$

$$p_1 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_4$$

$$p_2 = d_1 \oplus d_3 \oplus d_4$$

$$p_3 = d_2 \oplus d_3 \oplus d_4$$

1100 → 1100011



مثال: دریافت صحیح یک دنباله ۴ بیتی

• احتمال خطا: 0.1

مثال: احتمال دریافت صحیح برای $\text{Hamming}(7, 4)$

میانگین توزیع دو جمله‌ای

واریانس توزیع دو جمله‌ای

توزیع دو جمله‌ای در حالت خاص

n بسیار بزرگ

p بسیار کوچک

حالت حدی توزیع دو جمله‌ای

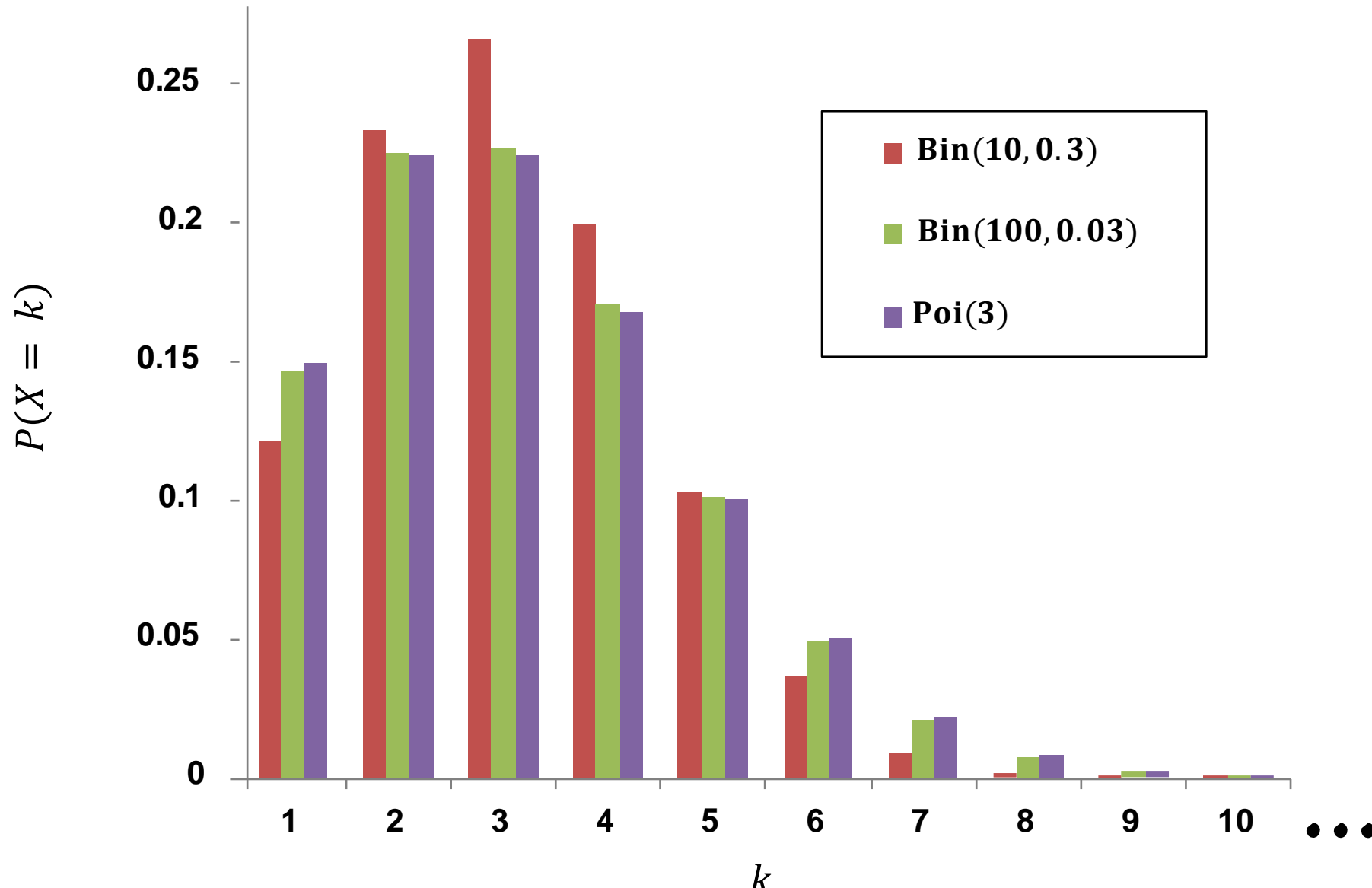
قضیه: اگر p خیلی کوچک، n خیلی بزرگ، و $\lambda = np$ عددی متوسط (حدوداً بین ۱ تا ۱۰) باشد، خواهیم داشت:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cong e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$$

توزيع بواسون (Poisson Distribution)

$$P_X(k) = P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots, +\infty$$

مقایسه توزیع دو جمله‌ای و پواسون



مثال

○ برای یک دنباله بیتی به اندازه $n = 10^4$ و احتمال خطای کوچک $p = 10^{-6}$ برای یک بیت، احتمال دریافت صحیح دنباله چقدر است؟

○ تعداد بیت‌های خطادار در دنباله یک متغیر تصادفی با توزیع $Y \sim \text{Bin}(10^4, 10^{-6})$ است که می‌توانیم آن را با یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = 10^4 \times 10^{-6} = 0.01$ تخمین بزنیم، آنگاه

$$X \sim \text{Poi}(0.01)$$

$$P\{X = 0\} = e^{-0.01} \frac{0.01^0}{0!} = 0.990049834$$

○ مقدار دقیق برابر است با:

$$P\{Y = 0\} = \binom{10^4}{0} (10^{-6})^0 (1 - 10^{-6})^{10^4} \approx 0.990049829 \cdot$$

میانگین و واریانس توزیع پواسون