۸۱.۱.۱۴۹۲ علیرضا کریمی

۱) الف) $\iint_{x,y>0} Ae^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy=1 \Longrightarrow \int_0^\infty\int_0^\infty Ae^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy$

$$= A\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\int_0^\infty e^{-\mu y}dy = A\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)_0^\infty\left(-\frac{1}{\mu}e^{-\mu y}\right)_0^\infty$$

$$= A\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{\mu}\right)=1 \Longrightarrow A=\lambda\mu$$

ب) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^\infty \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dy$

$$= \lambda\mu\int_0^\infty (e^{-\lambda x}\cdot e^{-\mu y})\,dy = \lambda\mu e^{-\lambda x}\int_0^\infty e^{-\mu y}\,dy$$

$$= \lambda\mu e^{-\lambda x}\left(-\frac{1}{\mu}e^{-\mu y}\right)_0^\infty = \frac{\lambda\mu e^{-\lambda x}}{\mu} = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^\infty \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx$$

$$= \lambda\mu e^{-\mu y}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\mu e^{-\mu y}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)_0^\infty = \mu e^{-\mu y}$$

$$f_{XY}(x,y)=\lambda\mu e^{-(\lambda x,\mu y)}$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=\lambda e^{-\lambda x}\cdot\mu e^{-\mu y} = \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}$$

$\Longrightarrow f_{XY}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y) \Longrightarrow$ X و Y از هم مستقل هستند.

ج) طبق قسمت ب : $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x} = Exp(\lambda) \longrightarrow E[X]=\frac{1}{\lambda}$

" " " : $f_Y(y)=\mu e^{-\mu y} = Exp(\mu) \longrightarrow E[Y]=\frac{1}{\mu}$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\left(\lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}\right)dx\,dy$$

$$= \overbrace{\int_{0}^{+\infty} \lambda x\, e^{-\lambda x}\, dx}^{A} \; \overbrace{\int_{0}^{+\infty} \mu y\, e^{-\mu y}\, dy}^{B}$$

از طرفی می دانیم که: $E[X] = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx \,,\; E[Y] = \int_0^{\infty} y\mu e^{-\mu y} dy$

$$\Longrightarrow A = E[X] \,,\; B = E[Y] \Longrightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$$

CamScanner

۲) درخواست هر کاربر به سرور یک توضیع نمایی است با

$$\frac{1}{\lambda} = 1000 \longrightarrow \lambda = \frac{1}{1000}$$

(زمان درخواست گرفتن از سوی سرور (همان rate می‌شود)

$$\longrightarrow X \sim Exp(\lambda)$$

← احتمال اینکه یک کاربر از سوی سرور نادیده گرفته شود:

$$P = P\{X > 2\}$$

$$\Longrightarrow P = P\{X > 2\} = 1 - F_{\underset{\text{نمایی}}{X}}(2) = 1 - \Big(\underbrace{1 - e^{-2\lambda}}_{\text{CDF توضیع نمایی}}\Big) = e^{-\frac{2}{1000}}$$

حال چون احتمال به طور مستقل برای هر کاربر ممکن است رخ دهد، می‌توان گفت که این ۱۰۰۰ کاربر، توضیع دوجمله‌ای

دارند با $n = 1000$ و احتمال نادیده گرفته شدن $= q$ پس داریم: $Y \sim Bin(n, q)$

طبق سوال باید محاسبه کنیم احتمال اینکه درخواست حداقل یک کاربر نادیده گرفته شود. برای آن داریم:

$$\underset{\text{خواسته شده در صورت سوال}}{P} = \sum_{i=1}^{1000} P_Y\{Y = y_i\} = 1 - P_Y\{Y = 0\}$$

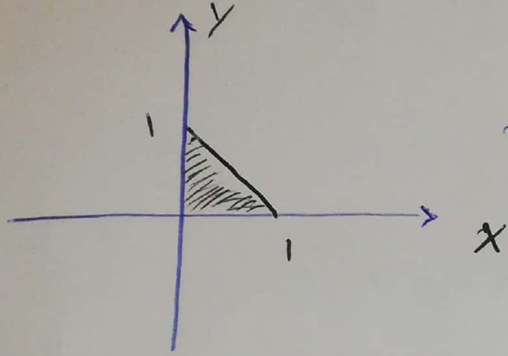
$$= 1 - \binom{1000}{0} \times q^0 \times \underbrace{p}_{\text{احتمال پذیرفته شدن}}^{1000} = 1 - (\underbrace{e^{-\frac{2}{1000}}}_{\text{همان } p \text{ که حساب کردیم}})^{1000} = 1 - e^{-2}$$

(دقت کنید که آرگومان احتمال توضیع bin را q در نظر گرفتیم و نه p، چون می‌خواستیم که با تعریف p و q برای هر کاربر، متفاوت نشود)

۳) ابتدا CDF متغیر تصادفی Z را حساب می‌کنیم و داریم: $Z = X - Y$

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X - Y \le z\}$$

با توجه به بازه‌ی داده شده می‌دانیم که مساحت احاطه شده در بازه $x,y>0$ و $x+y\le 1$ به این شکل است:




با توجه به آن نشان می‌توان نتیجه گرفت که: $-1 \le Z \le 1$

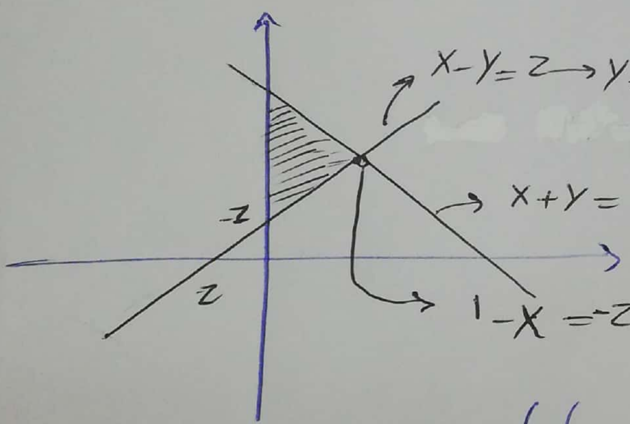
$x=0, y=1$     $x=1, y=0$

حال برای Z بازه منفی و مثبت حالت بندی می‌کنیم.

حالت اول: $Z<0$

$$\Longrightarrow X-Y\le Z<0 \Longrightarrow Y\ge X-Z$$

که اگر شکل آن را رسم کنیم، داریم:




$X-Y=Z \rightarrow Y=X-Z,\ X=Z+Y$

$X+Y=1 \rightarrow Y=1-X,\ X=1-Y$

$1-\cancel{X} = -Z+\cancel{X} \Longrightarrow X=\frac{1+Z}{2}$

$$\Longrightarrow Z<0:\ F_Z(z) = \iint_{X+Y\le Z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$

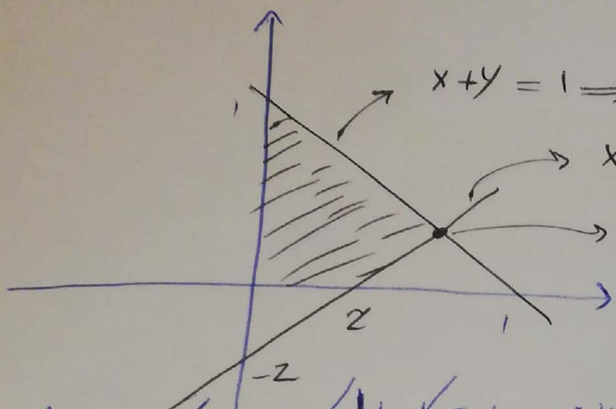
$$\int_0^{\frac{1+Z}{2}} \int_{X-Z}^{1-X} 6x\,dy\,dx = \int_0^{\frac{1+Z}{2}} 6x(\overbrace{1-x-x+z}^{1+Z-2x})\,dx$$

$$= \left(3x^2+3zx^2-4x^3\right)\Big|_0^{\frac{1+Z}{2}} = \frac{(1+Z)^3}{4}$$

حالت دوم: $z > 0$

$$\Rightarrow 0 \leq x - y \leq z \Rightarrow y \geq x - z$$

با توجه به مثبت بودن $z$، شکل آن به اینگونه است:




$x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y \,,\; y = 1 - x$

$x - y = z \Rightarrow y = x - z \,,\; x = z + y$

$1 - y = z + y \Rightarrow y = \frac{1-z}{2}$

مسلما بهتر و راحت تر است که برای محاسبه مساحت هاشور خورده، مساحت کل را (که برابر با یک است) از مساحت هاشور نخورده کم کنیم. برای محاسبه آن داریم:

$$\Rightarrow z > 0: F_z(z) = 1 - \iint_{x-y>z} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$1 - \int_0^{\frac{1-z}{2}} \int_{z+y}^{1-y} 6x\,dx\,dy = 1 - \int_0^{\frac{1-z}{2}} \left(3x^2\right)_{z-y}^{1-y} dy =$$

$$1 - \int_0^{\frac{1-z}{2}} 3(1-y)^2 - 3(z+y)^2 = 3 - 6y + 3y^2 - 3z^2 - 6zy - 3y^2 =$$

$$1 - \int_0^{\frac{1-z}{2}} \left(3 - 6y - 3z^2 - 6zy\right) dy = 1 - 3\left(\frac{1-z}{2}\right) + 3\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 +$$

$$3z^2\left(\frac{1-z}{2}\right) + 3z\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \overset{\text{ساده سازی}}{=} 1 - \frac{3(1-z)^3}{4}$$

$$\Rightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{4}(1-z)^3 & 1 > z \geq 0 \\ \frac{(1+z)^3}{4} & -1 \leq z < 0 \end{cases}$$

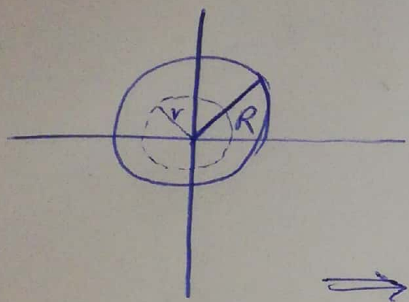
$$\Rightarrow f_z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} -\frac{3}{4} \times \frac{-3}{4}(1-z)^2 = \frac{9}{4}(1-z)^2 & 1 > z \geq 0 \\ \frac{3}{4}(1+z)^2 & -1 \leq z < 0 \end{cases}$$

۴) از آنجایی که برای بردِ ۱٫۲، لازم است هر شرکت کننده داخل بازی با احتمال کمتر از ۰٫۱ به هدف بزند، پس خود ۱٫۲ نیز که از شرکت کنندگان است باید با احتمال کمتر از ۰٫۱ به هدف بزند پس داریم:

$$\begin{cases} X \sim N(۰, ۳) \\ Y \sim N(۰, ۳) \end{cases}$$

انحراف معیار

$$\Longrightarrow P\{X^2+Y^2 \le r^۲\} \le ۰٫۱$$



$$\xrightarrow{R = r_{max}} P\{X^2+Y^2 \le R^2\} = ۰٫۱$$

که این همین مفهوم CDF است. پس داریم:

$$\Longrightarrow F_Z(R) = \iint_{x^2+y^2 \le R^2} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

از آنجایی که طبق گفته سوال X و Y دو متغیر مستقل از هم هستند، پس داریم:

$$\Rightarrow F_Z(R) = \iint_{x^2+y^2 \le R^2} f_X(x)\, f_Y(y)\,dx\,dy$$

طبق فرمول توزیع نرمال داریم:

$$f_X(x) = \frac{1}{۳\sqrt{۲\pi}} e^{\frac{-x^2}{۱۸}} \quad , \quad f_Y(y) = \frac{1}{۳\sqrt{۲\pi}} e^{\frac{-y^۲}{۱۸}}$$

$$\Longrightarrow F_Z(R) = \iint_{x^2+y^2 \le R^2} \frac{1}{۱۸\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{۱۸}}\,dx\,dy$$

از تغییر مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. پس داریم:

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

ژاکوبین

$$x^2+y^2 = r^2 \qquad x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$$

$$\Longrightarrow F_Z(R) = \frac{1}{۱۸\pi}\int_0^{۲\pi} d\theta \int_0^R e^{-\frac{r^2}{۱۸}}\, r\,dr = \frac{1}{9}\int_0^R e^{-\frac{r^2}{18}}\, r\,dr$$

$$= \frac{1}{9}\left(-9e^{-\frac{r^2}{۱۸}}\right)_0^R = -e^{-\frac{R^2}{۱۸}} + 1 = ۰٫۱ \Rightarrow e^{-\frac{R^2}{۱۸}} = ۰٫۹$$

$$\Rightarrow \frac{-R^2}{۱۸} = \ln(۰٫۹) \Rightarrow R^2 = -۱۸\ln(۰٫۹) \simeq ۱٫۸۹۶۴۸۹ \Rightarrow R \simeq 1.377$$