Random Variable and Expectation

متغیر تصادفی (Random Variable)

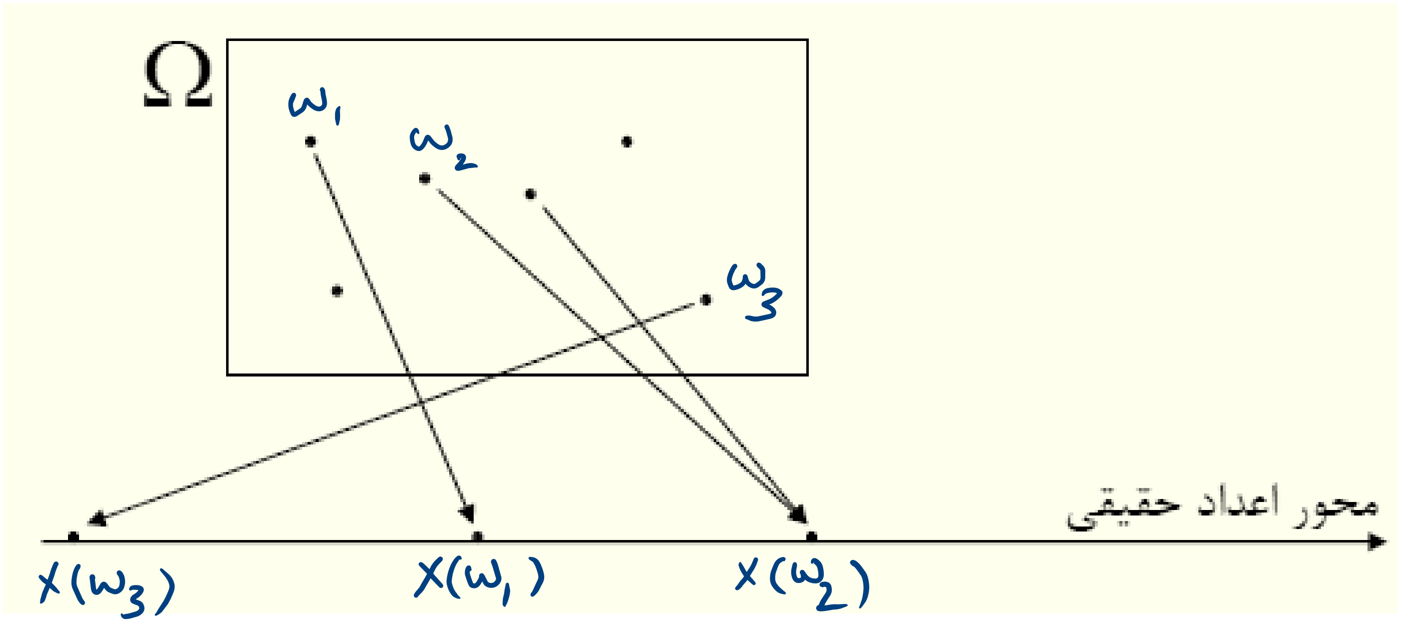
$$\boxed{X : \Omega \to \mathbb{R}}$$

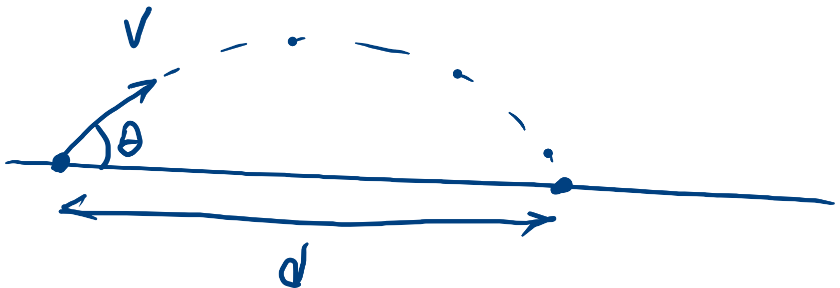
تابع

outcome

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

$X(\omega_i)$





$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

مثال: پرتاب سه سکه سالم

ω	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0

$$X(\omega) \in \{0, 1, 2, 3\}$$

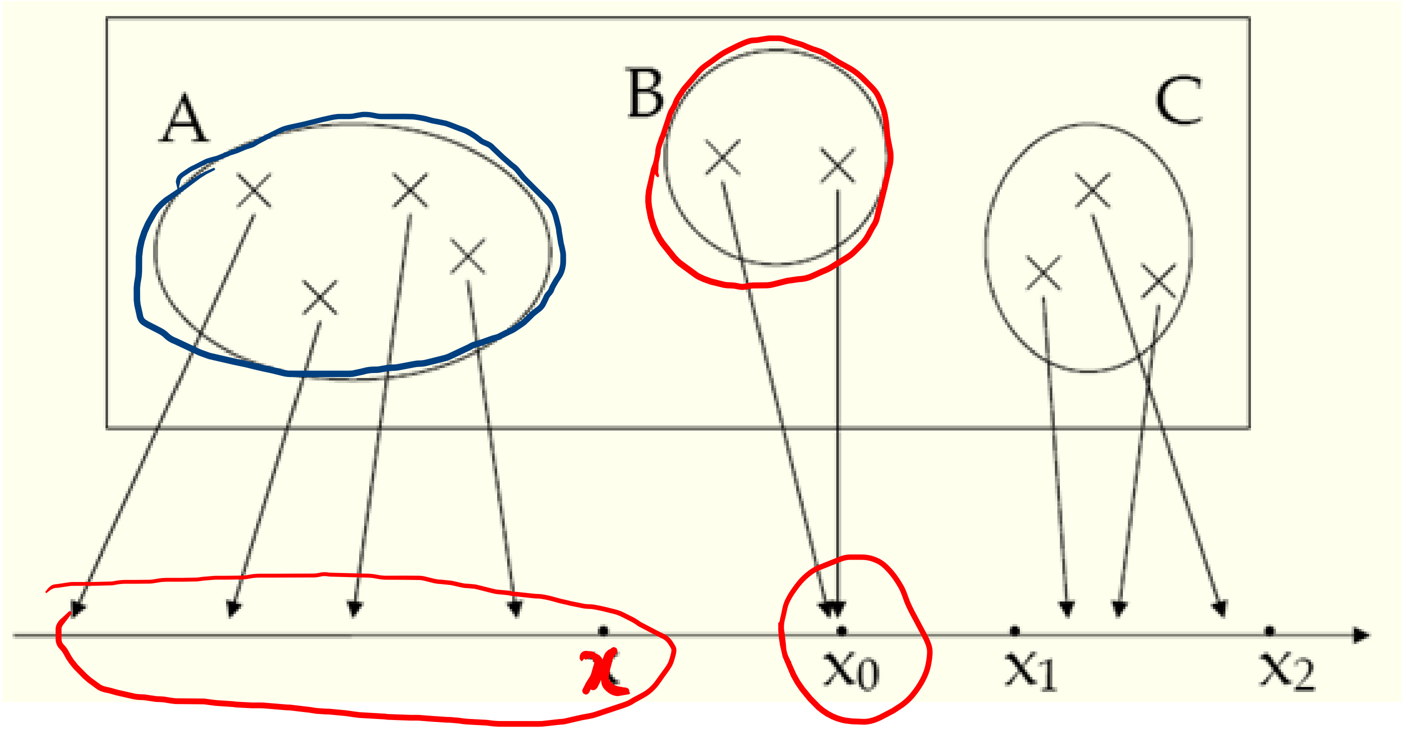
$$P_r(X(\omega) = 2) = 3/8$$

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \in \{2, 4, 6\} \\ 1 & \omega \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = 5 \\ 1 & \omega = 2 \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

متغیر تصادفی



$$A = \{X \le x\}$$
$$B = \{X = x_0\}$$
$$C = \{x_1 \le X \le x_2\}$$

$$\{X \le x\} = \{\omega : X(\omega) \le x\}$$

ویژگی‌های متغیر تصادفی

1. برای هر عدد حقیقی x، مجموعه $\{X(\omega) \leq x\}$ یک پیشامد باشد.

2. $P\{X = -\infty\} = P\{X = +\infty\} = 0$

$\boxed{X(\omega) = \mp\infty} \times$

متغیر تصادفی گسسته

مقادیر $X(\omega)$ (برد تابع) قابل شمارش باشد.

Ω :   شمارا

$A \subseteq \Omega$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \in \bar{A} \end{cases}$$

تابع جرمی احتمال (Probability Mass Function)

PMF

- فرض کنید متغیر تصادفی گسسته X مقادیر قابل شمارش x_1، x_2، x_3 و ... را با احتمال‌های p_1، p_2، p_3 و ... اختیار کند.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$$

$$X \in \{x_1, x_2, \dots\}$$

$$P(\{\omega_i\})$$

$$P_X(x) = \text{Prob}\{X = x\}$$

PMF

$$\boxed{P_X(x_i) \quad \forall x_i}$$

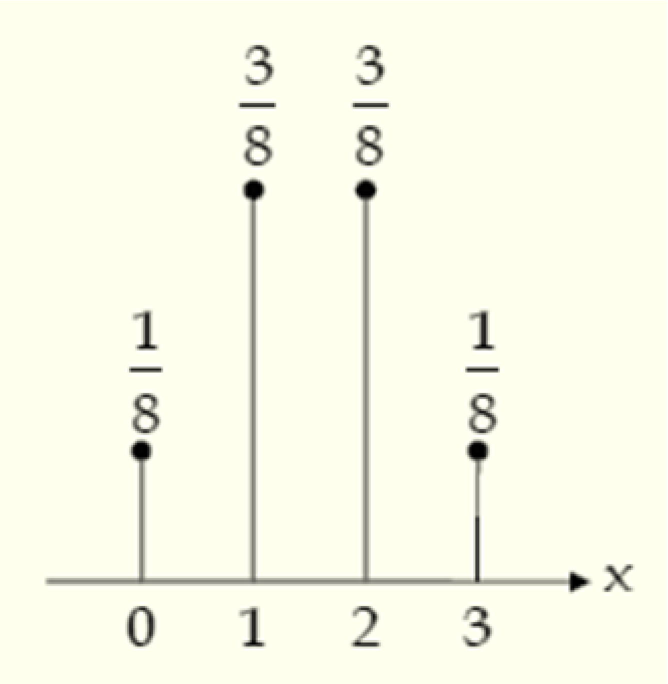
$$\underline{\Omega} = [-273, +\infty)$$

$$t \in \Omega$$

$$X(t) = t$$

PMF: مثال پرتاب سه سکه

$$P_X(i) = \text{Prob}\{X = i\} = \binom{3}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-i} = \begin{cases} 1/8 & i = 0 \\ 3/8 & i = 1 \\ 3/8 & i = 2 \\ 1/8 & i = 3 \end{cases}$$



Random Variable and Expectation

متغیر تصادفی:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$\text{Range}(X) \to$ شمارا $\to$ گسسته

$$X \in \{x_1, x_2, \dots\}$$

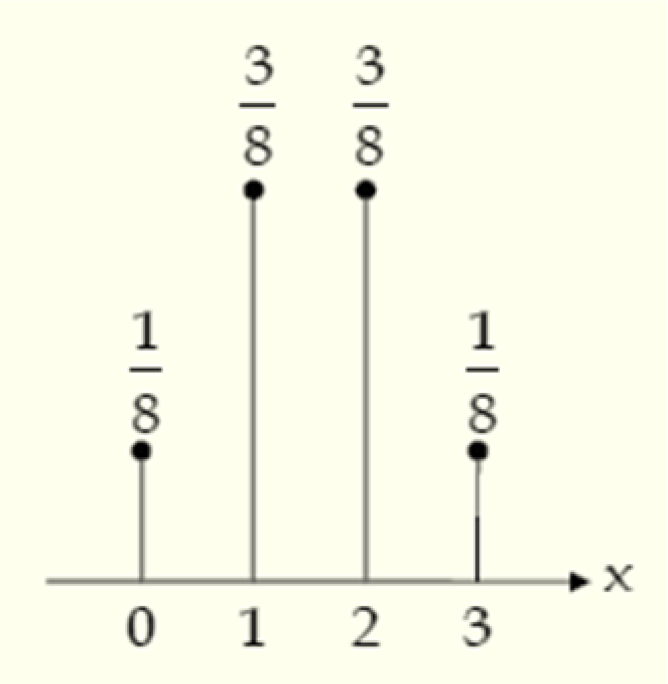
$$P_X(x) = \text{Prob}\{X = x\} \quad \forall x_i$$

PMF توزیع احتمال Probability Distribution

PMF: مثال پرتاب سه سکه

$X \in \{0,1,2,3\}$

$$P_X(i) = \text{Prob}\{X=i\} = \underbrace{\binom{3}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-i}} = \begin{cases} 1/8 & i=0 \\ 3/8 & i=1 \\ 3/8 & i=2 \\ 1/8 & i=3 \end{cases}$$



تابع توزیع تجمعی (Cumulative Distribution Function)

CDF

$\{a \leq X \leq b\}$

$\{X \leq a\}$

$\{X = a\}$

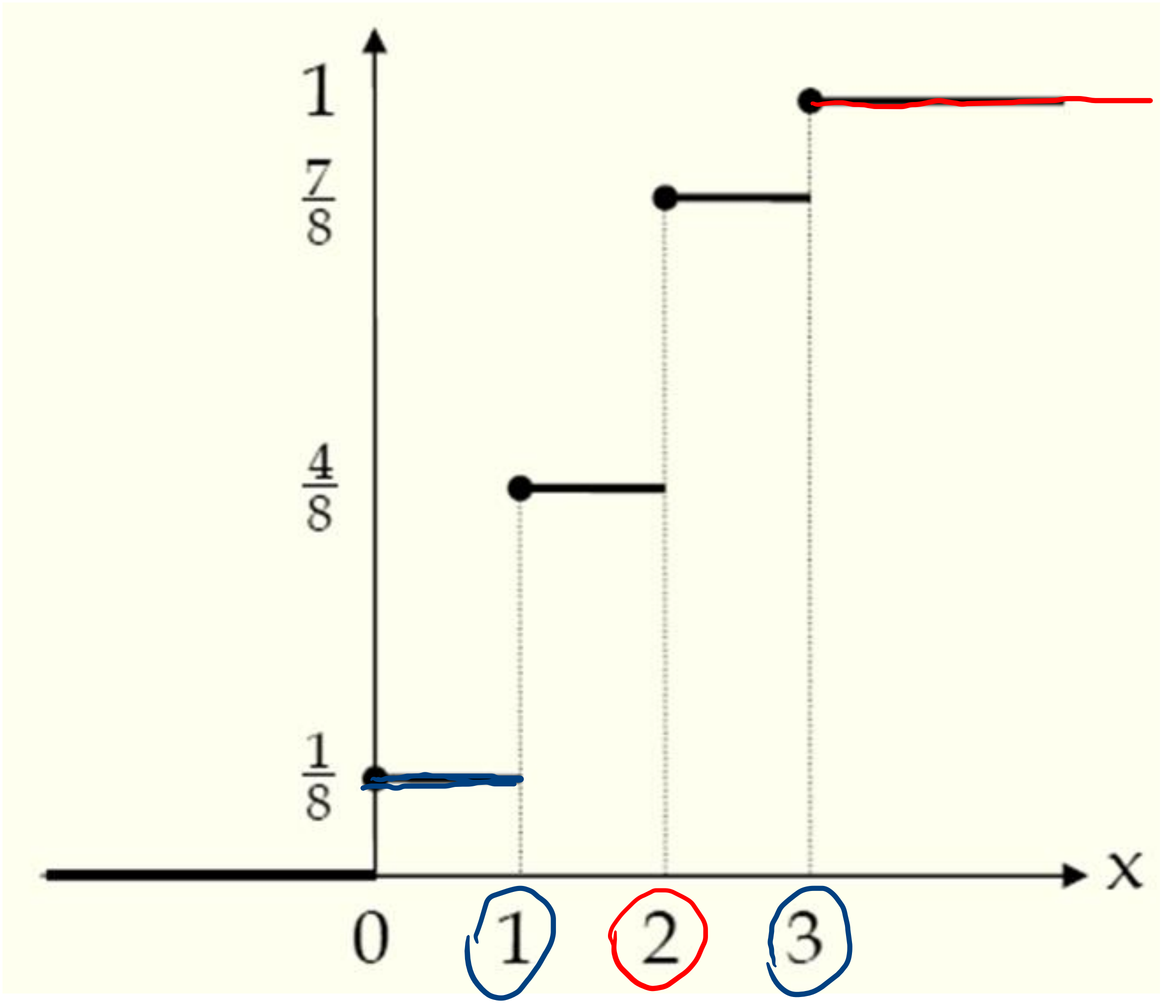
$$F_X(a) = \text{Prob}\{X \leq a\}$$

- چه برای متغیر تصادفی پیوسته و چه گسسته اگر احتمال پیشامدهای $\{X \leq a\}$ را برای هر a بدانیم، احتمال همهٔ پیشامدها مشخص خواهد شد.

- برای متغیر تصادفی گسسته X تابع CDF به شکل زیر خواهد بود:

$$\boxed{F_X(a) = \text{Prob}\{X \leq a\} = \sum_{\forall x_i \leq a} P_X(x_i)}$$

CDF: پرتاب سه سکه



$$P_X(i) = \begin{cases} 1/8 & i=0 \\ 3/8 & i=1 \\ 3/8 & i=2 \\ 1/8 & i=3 \end{cases}$$

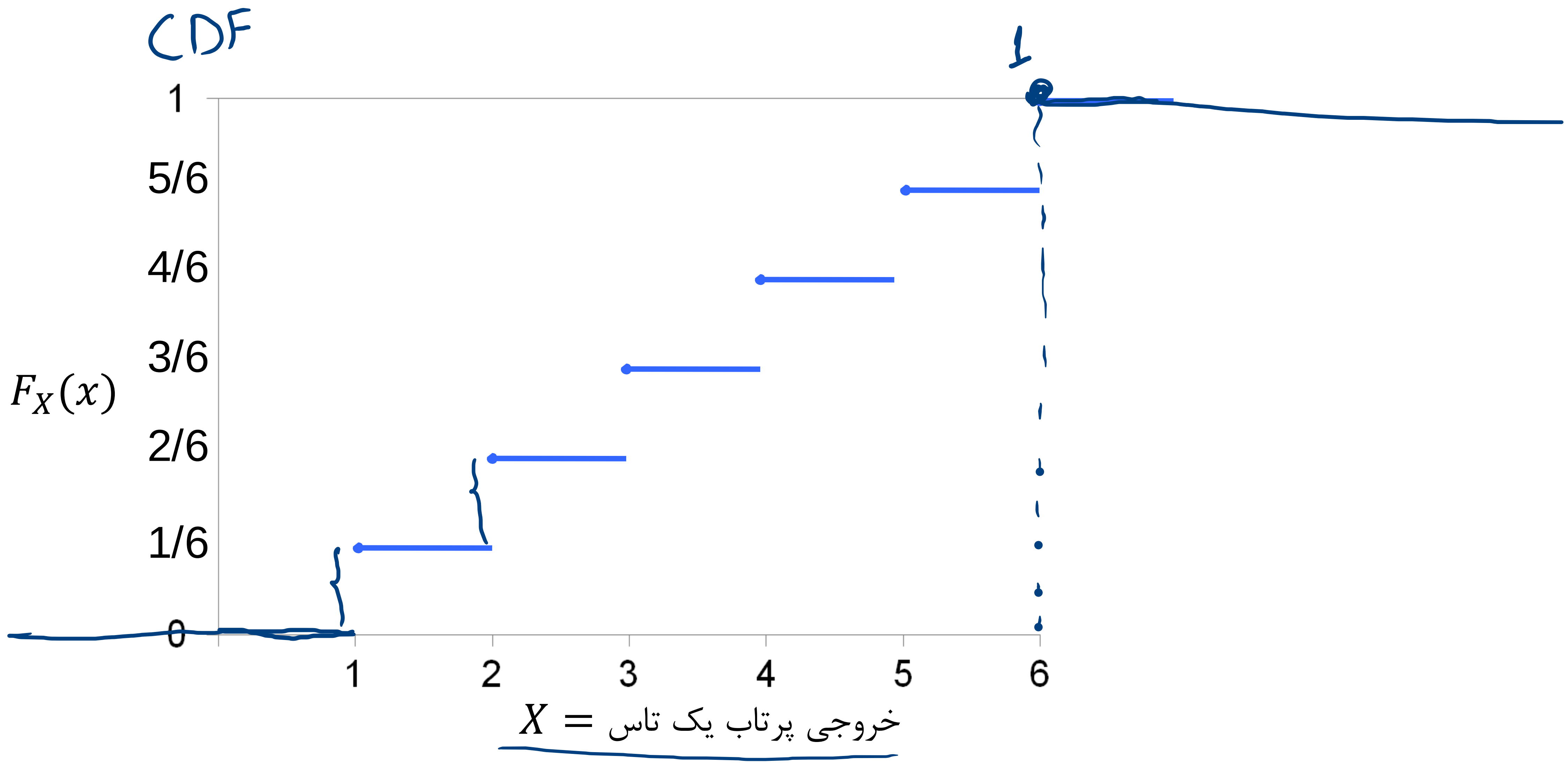
$$F_X(a) = \text{Prob}\{X \le a\}$$

$a = 0^-$

$F_X(0.5) =$

$F_X(5) = 1$

CDF: پرتاب تاس



خواص تابع توزیع تجمعی

1. $F(-\infty) = 0$

$F_X(-\infty) = \text{prob}\{X < -\infty\} = 0$

2. $F(+\infty) = 1$

$F_X(+\infty) = \text{prob}\{X \le +\infty\}$

3. $x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

$\{\omega : X(\omega) \le x_1\} \subseteq \{\omega : X(\omega) \le x_2\}$

$A \subseteq B$

$$\underbrace{pr(\{X \le x_1\})}_{F_X(x_1)} \le Pr(\{X \le x_2\})$$

$$F_X(x_1) \le F_X(x_2)$$

خواص تابع توزیع تجمعی

4. $P\{X > x\} = 1 - F(x)$

$$1 = P(\Omega) = P\left(\underbrace{\{X \leq x\}} \cup \underbrace{\{X > x\}} \right)$$

$$= \underbrace{P\{X \leq x\}} + P(X > x)$$

$$1 = F_X(x) + P(\{X > x\})$$

خواص تابع توزیع تجمعی

$$5.\ P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$F(x_2) = P\{X \leq x_2\} = P(\{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\})$$

$$= \underbrace{P\{X \leq x_1\}} + P(\{x_1 < X \leq x_2\})$$

$$F_X(x_2) = \underbrace{F_X(x_1)} + P(\{x_1 < X \leq x_2\})$$

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

x $\qquad$ $x - \epsilon$ $\qquad$ $\epsilon > 0$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \underbrace{P\{x-\epsilon < X \le x\}} = F(x) - F(x-\epsilon)$$

$$\boxed{P\{X = x\} = F(x) - F(x^-)}$$

$$P(X = 3.5)$$

خواص تابع توزیع تجمعی: پیوستگی از راست

6. $F(x) = F(x^+)$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - \cancel{F(x_1)} + \underbrace{P(X=x_1)}_{\cancel{F(x_1)} - F(x_1^-)}$$

• ضمناً با توجه به $P\{X = x\} = F(x) - F(x^-)$ داریم:

$$\boxed{P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2^+) - F(x_1^-)}$$

$$\to \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

شیر $\longrightarrow$ ۰

خط $\longrightarrow$ ۱

۷

$$P(X=0) = 0.9$$

امید ریاضی (Expectation)

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i P_X(x_i)$$

مثال:

$$E[X] = \sum_i x_i \, p_X(x_i)$$

- اگر X متغیر تصادفی خروجی پرتاب یک تاس باشد داریم:

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

- متغیر تصادفی Y سه مقدار ۱، ۲، و ۳ را با احتمال‌های زیر اختیار می‌کند:

$$p(Y=1) = \frac{1}{3}, \qquad p(Y=2) = \frac{1}{6}, \qquad p(Y=3) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$$

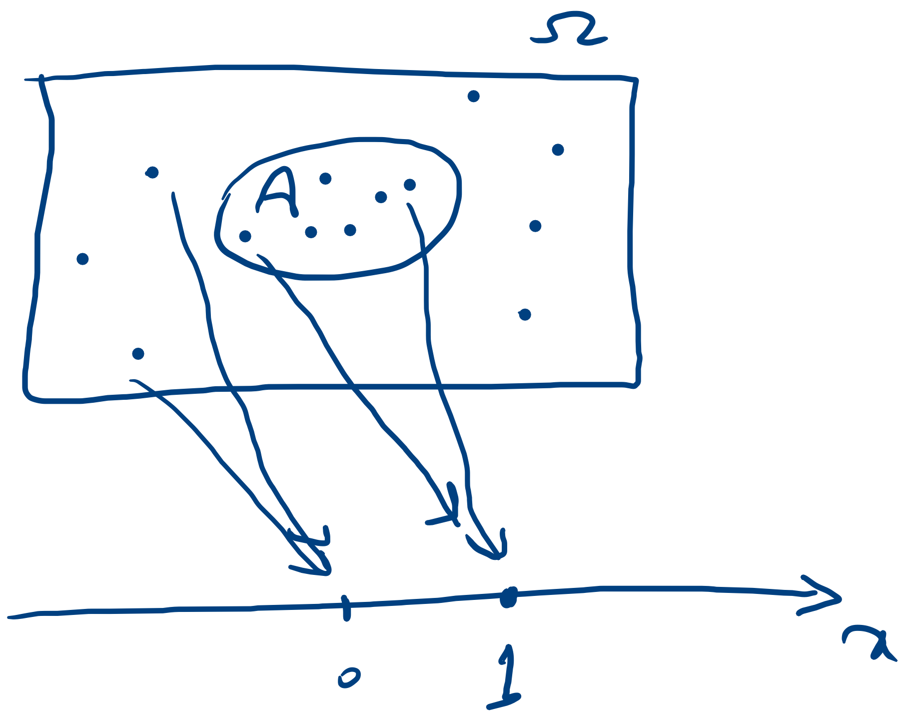
متغیر تصادفی شاخص (متغیر تصادفی برنولی)

○متغیر تصادفی شاخص (indicator) متناظر با پیشامد A:

$$I(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

$X \in \{0, 1\}$

$E[X] = ?$ $\quad P(\{A\})$



$$X = \begin{cases} 0 & \text{رخ ندهد } A \\ 1 & \text{رخ بدهد } A \end{cases}$$

$$P_X(0) = \text{Prob}\{X=0\} = 1 - P(\{A\})$$

$$P_X(1) = \text{prob}\{X=1\} = P(\{A\}) = p$$

$$E[X] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

مثال: مدرسه

- مدرسه‌ای دارای سه کلاس با ۵، ۱۰، و ۱۵۰ دانش‌آموز است. یک کلاس را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X را اندازه کلاس انتخاب شده بگیریم، داریم:

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{3} + 150 \times \frac{1}{3} = \frac{165}{3} = 55$$

- حال یک دانش‌آموز را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی Y را اندازه کلاسی که دانش‌آموز انتخاب شده در آن قرار دارد بگیریم، داریم:

$$E(Y) = 5 \times \left(\frac{5}{165}\right) + 10 \times \left(\frac{10}{165}\right) + 150 \times \left(\frac{150}{165}\right) = \frac{22635}{165} \approx 137$$

- توجه کنید که احساسی که دانش‌آموزان این مدرسه به طور متوسط از اندازه یک کلاس دارند $E(Y)$ است ولی معمولا $E(X)$ گزارش می‌شود!

مثال: نظریه بازی‌ها

- سارا معتقد است در بازی استقلال و پرسپولیس در جام حذفی، استقلال با احتمال 5/8 برنده می‌شود. از سوی دیگر دارا اعتقاد دارد که پرسپولیس این مسابقه را با احتمال 3/4 می‌برد.

الف) شما با سارا شرط می‌بندید که اگر استقلال برنده شد به او ۲۰۰۰ تومان بدهید، و در غیر این صورت از او ۳۰۰۰ تومان بگیرید. آیا شرکت در این شرط‌بندی برای سارا منطقی است؟

$$E[X] = 2000 \times \frac{5}{8} - 3000 \times \frac{3}{8} = 125$$

$$X = \begin{cases} 2000 \\ -3000 \end{cases}$$

ب) شما با دارا شرط می‌بندید که اگر پرسپولیس برنده شد به او ۲۰۰۰ تومان بدهید، و در غیر این صورت از او ۳۰۰۰ تومان بگیرید. آیا شرکت در این شرط‌بندی برای دارا منطقی است؟

$$E[Y] = 2000 \times \frac{3}{4} - 3000 \times \frac{1}{4} = 750$$

قضیه اساسی امید ریاضی

$$Y = g(X) \qquad Y = X^2 \qquad Y = aX + b$$

$$E[Y] = ? \qquad E[Y] = \sum_{y_j} y_j P_Y(y_j)$$

$$\boxed{E[Y] = \sum_{x_i} g(x_i) P_X(x_i)}$$

$$E[Y] = \sum_j y_j P_Y(y_j)$$

$$Y = g(X)$$

$$X = \{0, 1, 2\}$$

$$Y = \{0, 1\}$$

$$\boxed{P_Y(y_j)} = \text{Prob}\{Y = y_j\} = \text{Prob}\{g(X) = y_j\} = \boxed{\sum_{i:\, g(x_i) = y_j} P_X(x_i)}$$

$$E[Y] = \sum_j y_j \sum_{i:\, g(x_i) = y_j} P_X(x_i) = \sum_j \sum_{\substack{i \\ i:\, g(x_i) = y_j}} \overset{g(x_i)}{y_j}\, P_X(x_i)$$

$$= \overbrace{\sum_j \sum_{i:\, g(x_i) = y_j}} g(x_i) P_X(x_i) = \boxed{\sum_i g(x_i) P_X(x_i)}$$

خطی بودن امید ریاضی

E

X

$Y = aX + b$

$$\boxed{E[Y] = E[aX+b] = aE[X] + b}$$

$$E[X+a] = E[X] + a$$

$$E[\underbrace{aX+b}_{Y}] = \sum_i (ax_i + b)\, P_X(x_i)$$

گشتاور (moment) مرتبه n

$$E[X^n]$$

$$E[X]$$

$$E[X^2]$$

$$E[X^3]$$

محاسبه E[X] به کمک تابع CDF

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر صحیح و نامنفی باشد:
$X = 0,1, 2, \dots, n$، آن‌گاه امید ریاضی X برابر است با:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} P(X > i) = \boxed{\sum_{i=0}^{n} (1 - F_X(i))}$$

مثال: پرتاب سه سکه