

Sum of Independent Random Variables

Sum of Independent Random Variables

مجموع دو متغیر تصادفی مستقل دو جمله‌ای

$$X \sim \text{Bin}(n_1, p)$$

$$Y \sim \text{Bin}(n_2, p)$$

$$Z = X + Y$$



$$Z \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$$

مجموع چند متغیر تصادفی مستقل دو جمله‌ای

$$X_i \sim \text{Bin}(n_i, p)$$

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$Z \sim \text{Bin}\left(\sum_{i=1}^N n_i, p\right)$$

مجموع دو متغیر تصادفی پواسون

$$X \sim \text{Poi}(\lambda_1)$$

$$Y \sim \text{Poi}(\lambda_2)$$

$$X \perp Y$$

$$Z = X + Y$$

$$P_Z(z) = ?$$

$$z = 0, \dots, +\infty$$

$$P_Z(z) = P(Z=z) = P(X+Y=z) = \sum_{k=0}^z P(X=k, Y=z-k) \quad k \leq z$$

$$= \sum_{k=0}^z P(X=k) P(Y=z-k) = \sum_{k=0}^z e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{z-k}}{(z-k)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{z!} \underbrace{\sum_{k=0}^z \frac{\binom{z}{k}}{k! (z-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{z-k}}_{\text{رابطه درجه اولی}} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{z!} (\lambda_1 + \lambda_2)^z$$

رابطه درجه اولی

$$= \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^z$$

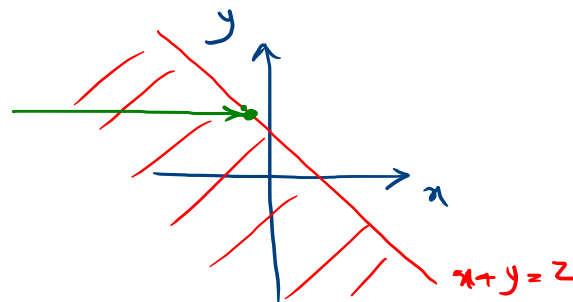
مجموع دو متغیر تصادفی مستقل پیوسته

$$X \sim f_X(x)$$

$$X \perp Y$$

$$Y \sim f_Y(y)$$

$$Z = X + Y \quad f_Z(z) = ?$$



$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) dx}_{F_X(z-y)} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) F_X(z-y) dy$$

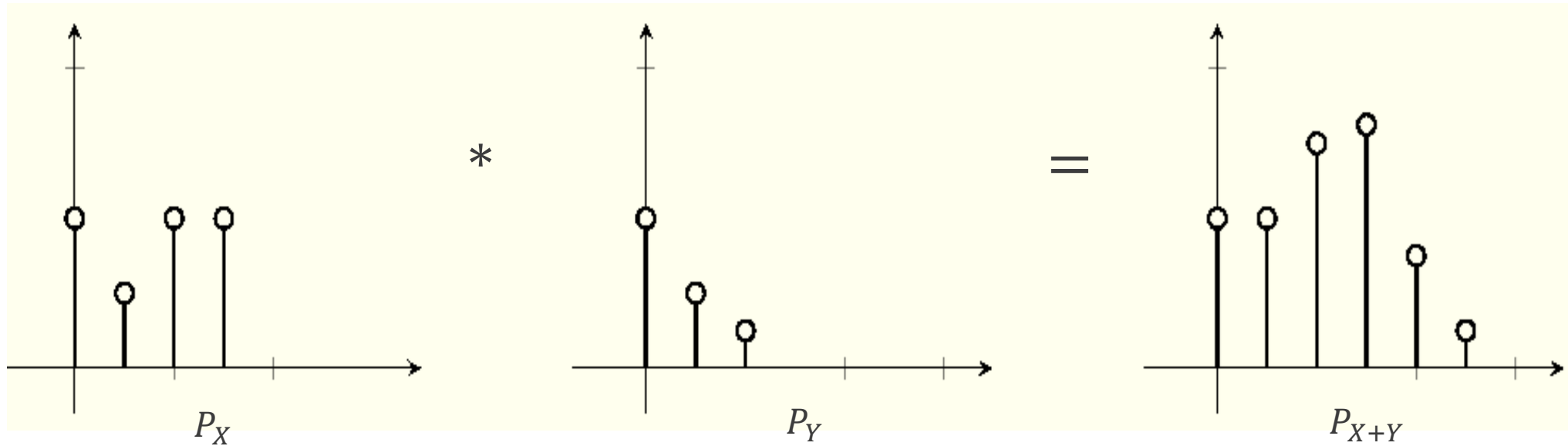
$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \underbrace{\frac{dF_X(z-y)}{dz}}_{f_X(z-y)} dy$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(z-y) dy$$

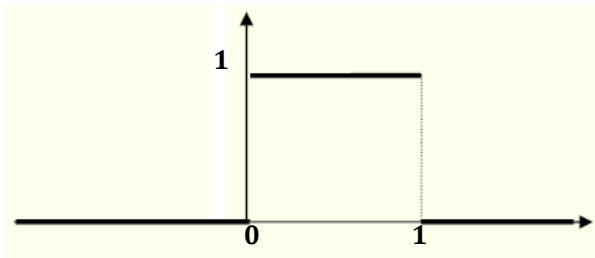
$$(f_X * f_Y)(z)$$

مجموع دو متغیر تصادفی مستقل گسسته

$$P_Z(z) = \sum_i P_Y(y_i) P_X(z - y_i)$$



جمع دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت



$$X \sim U(0,1) \quad X \perp Y$$

$$Y \sim U(0,1)$$

$$Z = X + Y \quad f_Z(z) = ?$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(z-y) dy = \int_0^1 \underbrace{f_Y(y)}_{0 \leq y \leq 1} \underbrace{f_X(z-y)}_{0 \leq z-y \leq 1} dy$$

$$0 \leq y \leq 1 \quad 0 \leq z-y \leq 1$$

$$z-1 \leq y \leq z$$

$$z \geq 1 \Rightarrow z-1 \leq y \leq 1$$

$$z \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq z$$

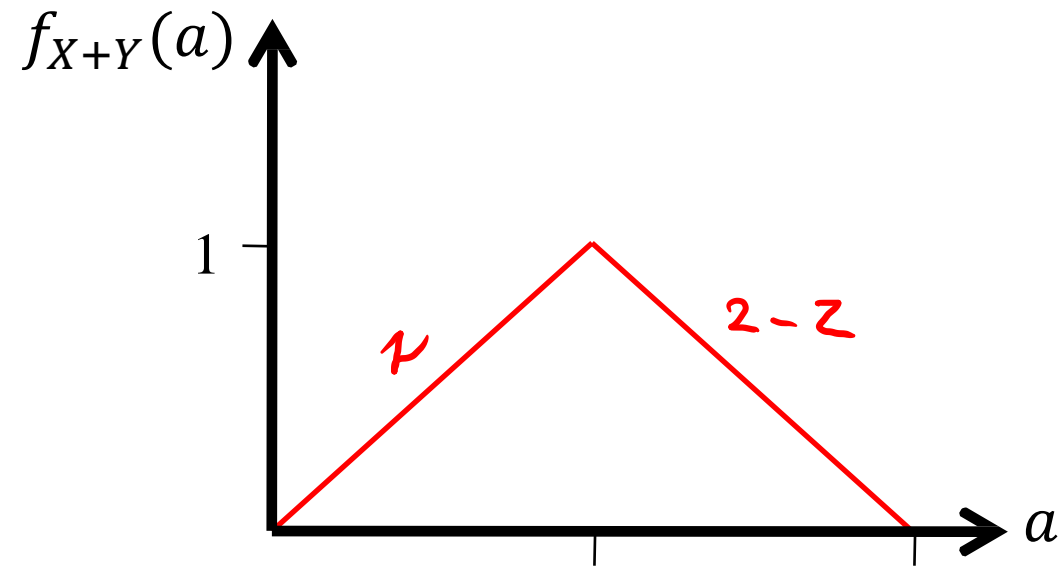
$$\int_{z-1}^1 dy = 1 - (z-1) = 2-z$$

$$z \geq 1$$

$$\int_0^z dy = z$$

$$z \leq 1$$

جمع دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت



جمع دو متغیر تصادفی مستقل نمایی

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

مجموع دو متغیر تصادفی مستقل نرمال