# آمار و احتمال مهندسی

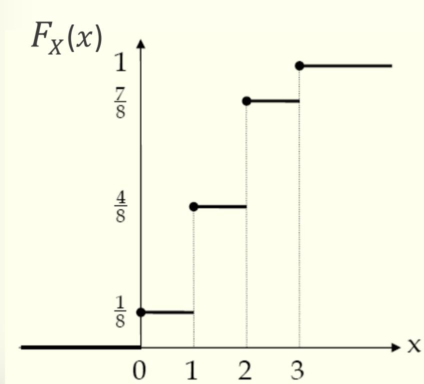
## توزیع‌های پیوسته

(Ross 5.1-5.3)



## متغیر تصادفی گسسته

- متغیر تصادفی $X$ را گسسته (discrete) گویند، اگر $F_X(x)$ (تابع توزیع انباشته آن) به صورت پلکانی باشد.



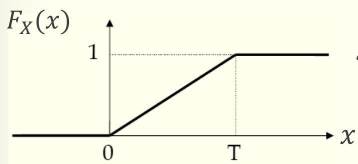

- در این حالت همان طور که قبلاً دیدیم:

$$p_i = P\{X = x_i\} = F(x_i) - F(x_i^-)$$

- تعریف فوق با این تعریف که مقادیر ممکنه برای $X$ قابل شمارش هستند معادل است.

# متغیر تصادفی پیوسته

- متغیر تصادفی $X$ را پیوسته (continuous)گویند، اگر $F_X(x)$ برای هر $x$ پیوسته باشد.




- برای مثال متغیر تصادفی $X$ که مدت زمان یک مکالمه تلفنی را نمایش می‌دهد، از این نوع است.
- با توجه به ویژگی‌های تابع توزیع انباشته، برای متغیر تصادفی پیوسته $X$، نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد $a$ داریم:

$$P\{X = a\} = F(a) - F(a^{-}) = 0$$

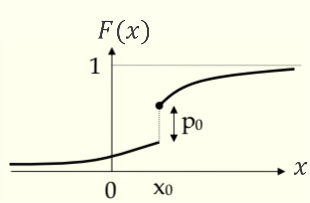
- برای محاسبه احتمال پیشامدهای مربوط به یک متغیر تصادفی پیوسته می‌توانیم از تابع توزیع انباشته آن استفاده کنیم:

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$



# متغیر تصادفی مخلوط

- متغیر تصادفی $X$ را از نوع مخلوط (mixed) می‌گویند، اگر $F_X(x)$ دارای ناپیوستگی باشد، ولی به صورت پلکانی نباشد.




- مثال: تابع توزیع انباشته مقابل متعلق به یک متغیر تصادفی مخلوط است.
- برخی مراجع متغیر تصادفی پیوسته را متغیری تعریف می‌کنند که مقادیر ممکن برای آن غیرقابل شمارش است. این تعریف هر دو نوع پیوسته و مخلوط را با هم در برمی‌گیرد.

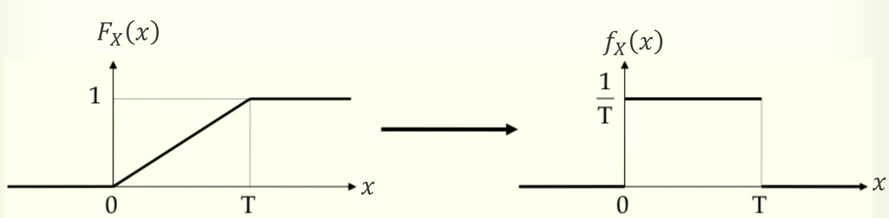
## تابع چگالی احتمال (Probability Density Function)

- برای متغیر تصادفی پیوسته راه دیگر برای مشخص کردن احتمال پیشامدهایی که متغیر تصادفی را تعریف می‌کنند، آن است که تابعی که بیانگر چگالی احتمال است را داشته باشیم.
- به وسیله pdf دید بیشتری (در مقایسه با CDF) نسبت به میزان محتمل بودن مقادیر مختلف پیدا می‌کنیم.
- pdf را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم: $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$
- معمولاً CDF را تابع توزیع و pdf را توزیع متغیر تصادفی $X$ می‌گویند.



## مثال

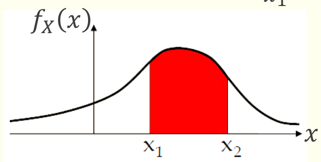
- در مکالمه تلفنی کاملاً تصادفی بین $[0,T]$ دیدیم که:




- توجه کنید که $F(x)$ پیوسته است ولی در نقاط 0 و $T$ مشتق‌پذیر نیست و به همین علت $f(x)$ در این دو نقطه دارای پرش است.

# خواص تابع چگالی احتمال

1) $P\{x_1 \le X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\mathrm{d}x$




اثبات: می‌دانیم که

$$P\{x_1 \le X \le x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

از طرفی با توجه به تعریف pdf داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}F_X(x) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

- اگر در رابطه فوق $x_1 = -\infty$ قرار دهیم، داریم:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

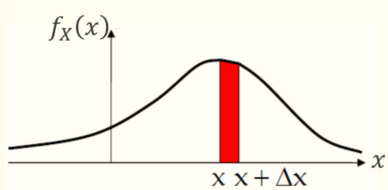


# خواص تابع چگالی احتمال

- همچنین از خاصیت (۱) وقتی $\Delta x \to 0$ داریم:

$$P\{x \le X \le x + \Delta x\} = \int_{x}^{x+\Delta x} f_X(x)dx = f_X(x)\Delta x \;\; \to$$ مفهوم چگالی

یا




$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X \le x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

- توجه کنید که $f_X(x)$ بر خلاف $P_X(x)$ احتمال نیست و احتمال در یک واحد $X$ (چگالی) است، بنابراین می‌تواند مقادیر بزرگتر از یک اختیار کند.

# خواص تابع چگالی احتمال

2) $\forall x : f(x) \geq 0$

اثبات: $F(x)$ تابعی غیرنزولی است.

- تابع چگالی احتمال $f$ مانند تابع احتمال $P$ نامنفی است، ولی $f$ می‌تواند بزرگتر از یک هم بشود و حتی می‌تواند به سمت بی‌نهایت برود، مثلاً $f(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}u(x)$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

اثبات: $F(+\infty) = 1$

- مشابه خاصیت $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$ برای تابع جرمی احتمال یک متغیر تصادفی گسسته.



# مثال ۱

- فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

الف) $C$ چقدر است؟

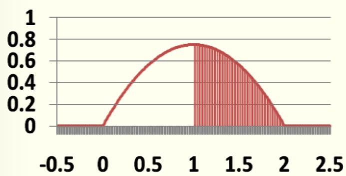
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{2} C\left(4x - 2x^2\right)dx = 1$$

$$\Rightarrow C\left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)|_0^2 = C\left(8 - \frac{16}{3} - 0\right) = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{8}$$

# ادامه مثال ۱

ب) احتمال $P(X > 1)$ چقدر است؟

$$P\{X > 1\} = \int_1^{+\infty} f(x)dx$$




$$P\{X > 1\} = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx$$

$$P\{X > 1\} = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right)\Big|_1^2 = (3 - 2) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



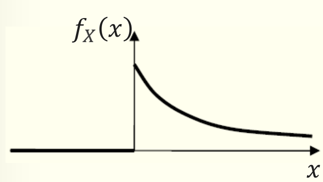
# مثال ۲

- مدت زمان کارکرد یک سرور (بر حسب روز) قبل از خرابی، یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

الف) احتمال این که سرور بین ۵۰ تا ۱۵۰ روز کار کند، چیست؟

ب) احتمال این که کمتر از ۱۰۰ روز کار کند چقدر است؟




ابتدا باید پارامتر $\lambda$ را محاسبه کنیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\Rightarrow \lambda \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{100}} dx = 1$$

$$\Rightarrow \lambda(-100\, e^{-x/100})|_0^{\infty} = 100\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = 0.01$$

# ادامه مثال ۲

الف)

$$P\{50 < X < 150\} = \int_{50}^{150} 0.01 e^{-\frac{x}{100}} dx =$$

$$(-\, e^{-x/100})|_{50}^{150} = e^{-1/2} - e^{-3/2} = 0.384$$

ب)

$$P\{0 < X < 100\} = \int_{0}^{100} 0.01 e^{-\frac{x}{100}} dx =$$

$$(-\, e^{-x/100})|_{0}^{100} = 1 - e^{-1} = 0.632$$



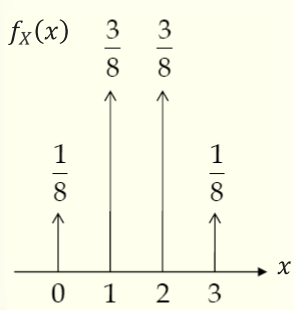
# pdf برای متغیرهای تصادفی ناپیوسته

- در مورد متغیر تصادفی گسسته یا مخلوط چون CDF دارای ناپیوستگی است، مشتق بی‌معنی خواهد بود (بینهایت می شود).
- ولی با استفاده از تابع ضربه $\delta$ می‌توانیم آن را بیان کنیم.
- مثلاً برای متغیر تصادفی گسسته در مثال پرتاب سه سکه داریم:

$$f(x) = \sum_i P(x_i)\delta(x - x_i)$$

- همان طور که داشتیم:

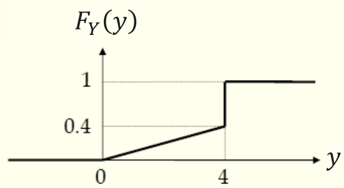
$$F(x) = \sum_i P(x_i)u(x - x_i)$$

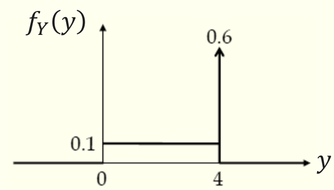



- یعنی نقاط تابع احتمال به دلتاهایی با آن وزن‌ها تبدیل شد.

# مثال

- در تقویت‌کننده‌ای که اشباع می‌شود داریم:




- وقتی که $f(x)$ حاوی تابع ضربه باشد، خواهیم داشت:

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1^-}^{x_2^+} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1^+}^{x_2^+} f(x)\,\mathrm{d}x$$



# امید ریاضی و واریانس

برای متغیر تصادفی پیوسته $X$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x) dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x) dx$$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, f_X(x) dx$$

برای متغیر تصادفی گسسته $X$

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i\, P(X = x_i)$$

$$E[g(X)] = \sum_{x_i} g(x_i)\, P(X = x_i)$$

$$E[X^n] = \sum_{x_i} x_i^n\, P(X = x_i)$$

# امید ریاضی و واریانس

- روابط زیر که برای امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی گسسته اثبات کردیم، برای متغیر تصادفی پیوسته نیز برقرار هستند:

$$E[aX+b] = a\,E[X] + b$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

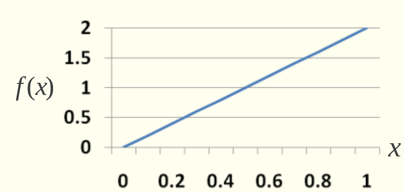
$$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$



# مثال

- متغیر تصادفی $X$ با چگالی احتمال خطی زیر مفروض است:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$




- امید ریاضی و واریانس $X$ چقدر است؟

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx = \int_0^1 x \times 2x\, dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}$$

# ادامه مثال

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \times 2x \, dx$$

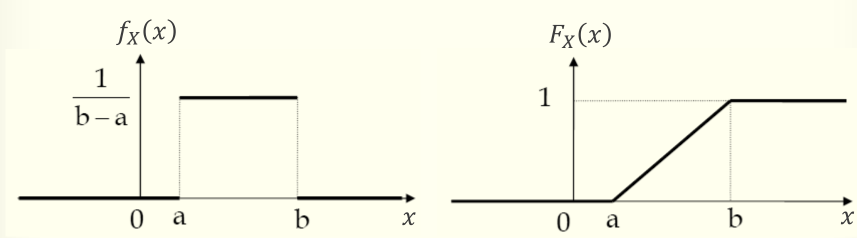
$$= \int_0^1 2x^3 dx = \frac{2}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{2}{4}(1-0) = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$



# توزیع یکنواخت پیوسته

- گوییم متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع یکنواخت بین $a$ و $b$ است، $X \sim U(a,b)$، اگر:

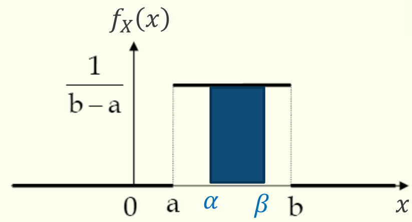



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

# توزیع یکنواخت پیوسته

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a} x \,\Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$




$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx = \int_{a}^{b} x \times \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{2(b-a)} x^2 \Big|_{a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



# مثال ۱

- قطارها در خط ۳ متروی تهران در روزهای عادی هر ۱۵ دقیقه یک بار از مبدا حرکت می‌کنند (۵:۳۰، ۵:۴۵، ۶:۰۰ و ...)
- دانشجویی در زمانی با توزیع یکنواخت بین ساعت ۷:۰۰ و ۷:۳۰ به ایستگاه مبدا این خط می‌رسد: $X \sim U(0,30)$
- احتمال این که کمتر از ۵ دقیقه منتظر قطار شود، چقدر است؟

$$P\{10 < X < 15\} + P\{25 < X < 30\} = \frac{15-10}{30-0} + \frac{30-25}{30-0} = \frac{1}{3}$$

- احتمال این که بیشتر از ۱۴دقیقه منتظر قطار شود، چقدر است؟

$$P\{0 < X < 1\} + P\{15 < X < 16\} = \frac{1-0}{30-0} + \frac{16-15}{30-0} = \frac{1}{15}$$

# مثال ۲

- دانشجویی برای آمدن به دانشگاه از دوچرخه استفاده می‌کند.
  - او $t$ دقیقه قبل از شروع کلاس به سمت دانشگاه حرکت می‌کند.
  - مدت زمان سفر او بر حسب دقیقه متغیر تصادفی $X$ با تابع چگالی احتمال $f(x)$ است.
  - زود رسیدن به کلاس برای او $c$ ریال در دقیقه هزینه دارد (هزینه اتلاف وقت!)
  - دیر رسیدن به کلاس برای او $k$ ریال در دقیقه هزینه دارد (هزینه جریمه توسط استاد!)
- تابع هزینه: $$C(X,t)=\begin{cases}c(t-X) & X<t\\ k(X-t) & X\geq t\end{cases}$$
- زمان حرکت $t$ را به گونه‌ای انتخاب کنید که امید ریاضی هزینه $E[C(X,t)]$ کمینه شود.



# ادامه مثال ۲

$$E[C(X,t)]=\int_0^{+\infty}C(x,t)f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{t}c(t-x)f(x)dx+\int_t^{+\infty}k(x-t)f(x)dx$$

- برای کمینه کردن از رابطه بالا نسبت به $t$ مشتق می‌گیریم.
- قضیه انتگرال لایبنیتز:

$$\frac{d}{dt}\int_{f_1(t)}^{f_2(t)}g(x,t)dx=\frac{df_2}{dt}g(f_2(t),t)-\frac{df_1}{dt}g(f_1(t),t)+\int_{f_1(t)}^{f_2(t)}\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}dx$$

# ادامه مثال ۲

$$E[g(X,t)] = \int_0^t c(t-x)f(x)dx + \int_t^{+\infty} k(x-t)f(x)dx$$

$$\frac{d}{dt}E[g(X,t)] = c(t-t)f(t) + \int_0^t cf(x)dx - k(t-t)f(t) - \int_t^{+\infty} kf(x)dx$$

$$c\big(F(t)-F(0)\big) - k\big(F(+\infty)-F(t)\big) = 0$$

$$cF(t) - k\big(1-F(t)\big) = 0$$

$$F(t) = \frac{k}{c+k} \;\; \Rightarrow \;\; t = F^{-1}\left(\frac{k}{c+k}\right)$$



# محاسبه $E[X]$ به کمک تابع CDF

- اگر $X$ یک متغیر تصادفی پیوسته نامنفی باشد، آن‌گاه:

$$E[X] = \int_0^\infty P(X \geq x)dx = \int_0^\infty \big(1-F_X(x)\big)\, dx$$

اثبات:

$$\int_0^\infty P(X \geq x)dx = \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(t)dt\;\, dx$$

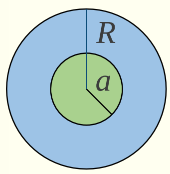
با تعویض ترتیب انتگرال‌ها داریم:

$$\int_0^\infty \int_x^\infty f_X(t)dt\;\, dx = \int_0^\infty \int_0^t f_X(t)dx\;\, dt = \int_0^\infty \big(x.f_X(t)\big)\Big|_0^t\; dt$$

$$= \int_0^\infty t\, f_X(t)\, dt = E[X]$$

# مثال

- یک نقطه را به طور یکنواخت داخل دایره‌ای به شعاع $R$ انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی $D$ را فاصله این نقطه از مرکز دایره می‌گیریم. امید ریاضی $D$ چقدر است؟




$$F_D(a) = P(D \le a) = \frac{\pi a^2}{\pi R^2} = \frac{a^2}{R^2}$$

$$E[D] = \int_0^{\infty} \left(1 - F_D(a)\right) da = \int_0^{R} \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) da$$

$$E[D] = \left(a - \frac{a^3}{3R^2}\right)\Bigg|_0^R = \left(R - \frac{R^3}{3R^2}\right) - 0 = \frac{2R}{3}$$