Independence

مساله مونتی هال (Monty Hall)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

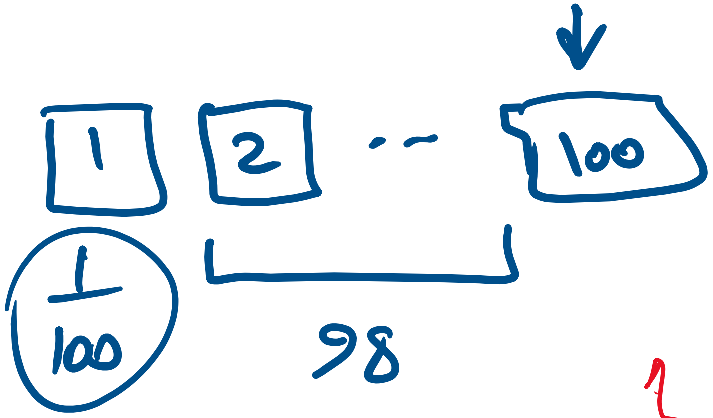
$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
$1/3$	$1/3$	$1/3$
0	$\underbrace{1/3 + 1/6}_{1/2}$	$\underbrace{1/3 + 1/6}_{1/2}$

A_i : جایزه در جعبه i ام باشد

$P(A_i) = 1/3$

B_i : جعبه i ام پوچ شود

$P(A_i | B_1)$



$$P(A_1 \mid B_1) = 0$$

$$P(A_2 \mid B_1) = ?$$

$$P(A_3 \mid B_1) = ?$$

$$P(A_2 \mid B_1) = \frac{\overbrace{P(B_1 \mid A_2)}^{1}\ \overbrace{P(A_2)}^{1/3}}{P(B_1)} = \frac{1/3}{P(B_1)}$$

$$P(A_3 \mid B_1) = \frac{\overbrace{P(B_1 \mid A_3)}^{1/2}\ \overbrace{P(A_3)}^{1/3}}{P(B_1)} = \frac{1/6}{P(B_1)}$$

$$P(B_1) = \overbrace{P(A_1)}^{1/3}\,\overbrace{P(B_1 \mid A_1)}^{0} + \overbrace{P(A_2)}^{1/3}\,\overbrace{P(B_1 \mid A_2)}^{1} + \underbrace{P(A_3)}_{1/3}\,\underbrace{P(B_1 \mid A_3)}_{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

استقلال

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A\cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A\cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$\Rightarrow P(B|A) = P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

تعبیر بسامدی و بیزی استقلال

A: شیر آمدن سکه اول

B: دوم " " "

$$P(A) \cong \frac{n_A}{n}$$

$$P(A|B) \cong \frac{n_{A\cap B}}{n_B}$$

1

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = P(A)$$

قضیه: اگر A و B مستقل باشند، آنگاه A و $\bar{B}$ مستقلند.

$$P(\bar{B}|A) = P(\bar{B}) \qquad P(A\cap\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$$

$$P(\bar{B}|A) = 1 - \underbrace{P(B|A)} = 1 - P(B) = P(\bar{B})$$

استقلال سه پیشامد

$A \quad B \quad C$

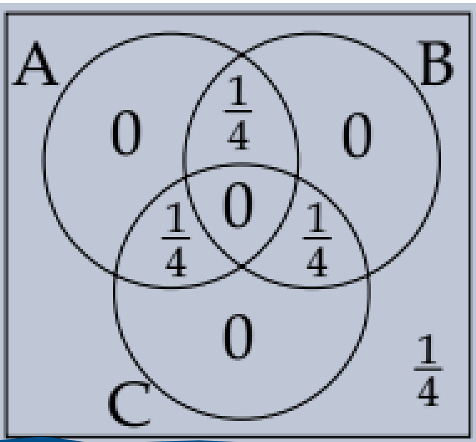
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

مثال



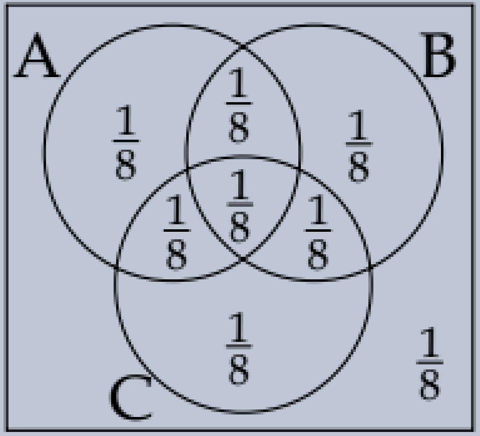
☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C)$

☒ $0\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)P(C)$

دو به دو مستقل



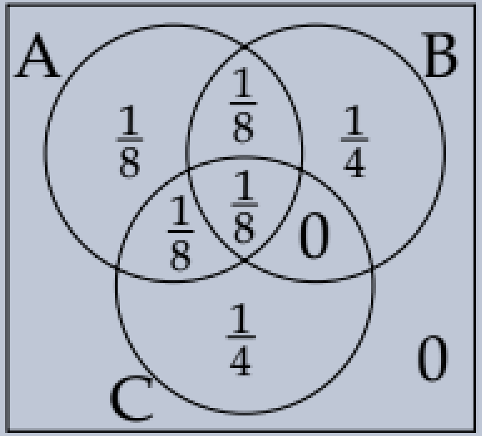
☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C)$

☑ $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)P(C)$

مستقل



☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$

☑ $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C)$

☒ $\frac{1}{8}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C)$

☑ $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)P(C)$

A و B مستقل، A و C مستقل

استقلال بیش از دو پیشامد

n پیشامد A_1، A_2، ... ، A_n، را مستقل گویند، هرگاه برای هر دسته اعداد صحیح $k_1, k_2, \dots, k_r$، که $r \leq n$، داشته باشیم:

$$P\left(A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_r}\right) = P\left(A_{k_1}\right) P\left(A_{k_2}\right) \dots P\left(A_{k_r}\right)$$

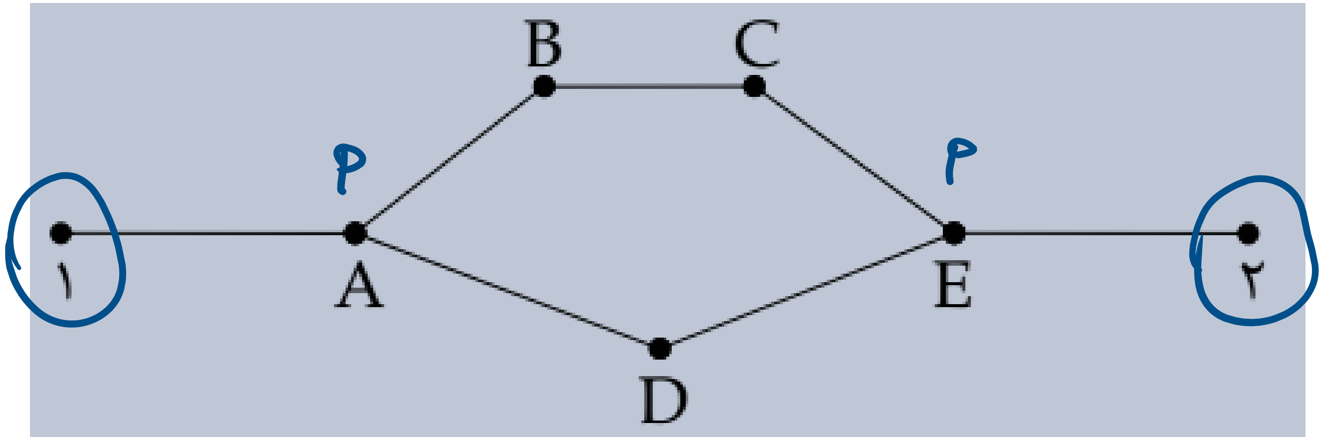
- برای استقلال n پیشامد، چه تعداد رابطه باید برقرار باشند؟

$2^n - n - 1$

مثال: لینک مخابراتی

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

p : احتمال سالم بودن آنتن ها



$$P\big(A(BC\cup D)E\big) = P(\underbrace{ABCE}\cup\underbrace{ADE})$$

$$= \underbrace{P(ABCE)} + \underbrace{P(ADE)} - P(ABCDE)$$

$$= p^4 + p^3 - p^5$$

مثال

- دو تاس را پرتاب می‌کنیم و خروجی آن‌ها را D_1 و D_2 می‌نامیم.

E: تاس اول ۱ بیاید

F: تاس دوم ۶ بیاید

G: مجموع دو تاس ۷ شود

- آیا E و G مستقل هستند؟
- آیا F و G مستقل هستند؟
- آیا E، F و G مستقل هستند؟

$$P(E) = 1/6 \qquad \boxed{P(G) = 1/6}$$

$$P(E \cap G) = \underbrace{P(E)} \, \underbrace{P(G \mid E)} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\boxed{P(G \mid E) = \frac{1}{6}}$$

آزمایش تکراری (Repeated Trials)

- وقتی یک آزمایش تصادفی را تحت شرایط یکسانی تکرار می‌کنیم.

  - **تعبیر تجربی**: احتمال پیشامد A در فضای Ω حدود n_A/n است.

  - **تعبیر مفهومی**: با تکرار آزمایش، به جای فضای Ω قبلی، یک فضای جدید Ω_n داریم که $\Omega_n = \Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega$

$\Omega = \{H, T\}$ $\Omega_3 = \{(H, H, H), \ldots, (T, T, T)\}$

مثال: پرتاب سکه ۵ بار

2: شیر

3: خط

p: احتمال شیر آمدن

A_i: احتمال شیر آمدن در پرتاب iام

$$\boxed{\cancel{\binom{5}{2}}\, p^2 (1-p)^3}$$

$$\Omega = \{(HHHHH), \dots, (TTTTT)\}$$

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5) = \underbrace{P(A_1)}_{p}\, \underbrace{P(A_2)}_{p}\, \underbrace{P(\bar{A}_3)}\, \underbrace{P(\bar{A}_4)}\, \underbrace{P(\bar{A}_5)}$$

آزمایش برنولی (Bernoulli Trials)

$$P(\underbrace{A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5}_{p^2(1-p)^3} \cup \underbrace{\bar{A}_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5}_{p^2(1-p)^3} \cup \cdots)$$

$$= \binom{5}{2} p^2 (1-p^3)$$

آزمایش برنولی

- اگر پیشامد B در فضای Ω_n این باشد که پیشامد A، k بار با ترتیب خاصی اتفاق افتد.

$P(A) = p$

$P_n(K) = p^k (1-p)^{n-k}$

$= p^k q^{n-k}$

$q = 1-p$

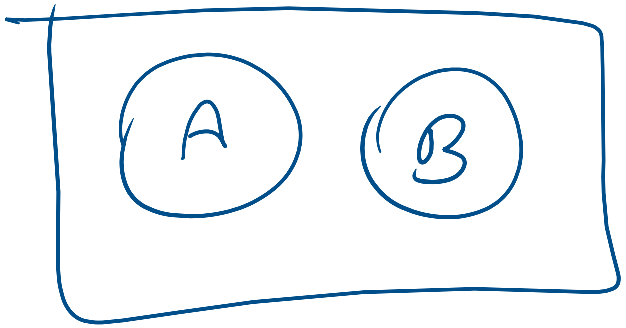
آزمایش برنولی

- اگر پیشامد D در فضای Ω_n این باشد که پیشامد A، k بار با هر ترتیبی اتفاق بیافتد.

$$P(D) = P_n(k) = ?$$

$$\boxed{P_n(k)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

آیا پیشامدهای ناسازگار، مستقلند؟



$A \qquad \bar{A}$

آزمایش برنولی تعمیم‌یافته

- در آزمایش برنولی فقط دو حالت داشتیم: وقوع A یا وقوع $\bar{A}$

$A_1 \cdots A_r$

- در حالت کلی اگر A_iها مجموعه Ω را افراز کنند.

$A_i \quad k_i$

$$\boxed{k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n}$$

$P(A_i) = p_i$

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_r!}$$

آزمایش برنولی تعمیم‌یافته

- احتمال پیشامد B در فضای Ω_n، که در n آزمایش، A_iها هر یک k_i بار با ترتیب خاصی اتفاق افتند، به شرط
$$k_1 + \cdots + k_r = n$$

آزمایش برنولی تعمیم‌یافته

- احتمال پیشامد D که A_iها هر یک k_i بار (با هر ترتیبی) اتفاق افتند؟