Alireza Karimi ۸۱۰۱۰۱۴۹۲

۱) الف) از آنجا که تابع چگالی این متغیر تصادفی پیوسته داده شده است داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^3 \frac{x}{9}\,dx + \int_3^6 \left(\frac{2}{3} - ax\right)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{x^2}{18}\right]_0^3 + \left[\frac{2}{3}x - \frac{a}{2}x^2\right]_3^6 = \frac{1}{2} + (4 - 18a) - (2 - 4{,}5a) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + 2 - 13{,}5a = 1 \Rightarrow 13{,}5a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{27} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{9}$$

ب)

$$P\{X < 4\} = F(4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{x}{9}\,dx + \int_3^4 \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{9}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{18}\right]_0^3 + \left[\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{18}\right]_3^4 = \frac{1}{2} + \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{18}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{9}$$

ج)

$$P\{X > 5\} = \int_5^{+\infty} f(x)\,dx = \int_5^6 f(x)\,dx = \int_5^6 \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{9}\right)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{18}\right]_5^6 = (4-2) - \left(\frac{10}{3} - \frac{25}{18}\right) = 2 - \frac{35}{18} = \frac{1}{18}$$

د)

$$P\{2 < X < 3\} = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{x}{9}\,dx = \left[\frac{x^2}{18}\right]_2^3 = \frac{9-4}{18} = \frac{5}{18}$$

و) این زمان قطعا در بازه دوم ($3 < x < 6$) قرار دارد چون همانطور که در قسمت الف حساب کردیم، احتمال آن بازه برابر $\frac{1}{2}$ است. پس t_0 حتما در بازه دوم است. پس داریم:

$$P\{t_0 < X < 6\} = 10 \Rightarrow \int_{t_0}^{6} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{9}\right)dx = \left(\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{18}\right)_{t_0}^{6} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow (4-2) - \left(\frac{2}{3}t_0 - \frac{1}{18}t_0^2\right) = \frac{1}{10} \Longrightarrow$$

ادامه صفحه بعد

$$\Longrightarrow \frac{۱}{۱۸} t_۰^2 - \frac{۲}{۳} t_۰ + ۲ - \frac{۱}{۱۰} = ۰ \Longrightarrow t_۰ = \frac{۳۰ - ۴\sqrt{۵}}{۵} \simeq ۴,۶۶$$

(۵

$$E(x) = \int_۰^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_۰^{3} x \times \frac{x}{۹}\, dx + \int_3^{6} x \left(\frac{۲}{۳} - \frac{x}{۹}\right) dx$$

$$= \int_3^{6} \frac{۲}{۳} x\, dx + \int_۰^{3} \frac{x^2}{۹}\, dx - \int_3^{6} \frac{x^2}{۹}\, dx = \left(\frac{۲}{۶} x^2\right)_3^6 + \left(\frac{x^3}{۲۷}\right)_۰^3 - \left(\frac{x^3}{۲۷}\right)_۳^۶$$

$$= (۱۲ - ۳) + (۱) - (۸ - ۱) = ۹ + ۱ - ۷ = ۳$$

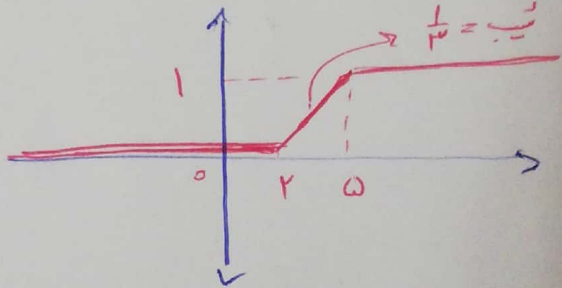
۲) از آنجایی که $Y = g(X)$ است داریم:

$$\text{(I)}: F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = P\{X \le g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y))$$

اینجا تابع g^{-1} رو روی دو طرف معادله اعمال کردیم (با توجه به اینکه X و Y هر دو توابع توزیع‌شان مثبت هستند و صعودی، g^{-1} را نیز صعودی در نظر گرفتیم، پس علامت درون معادله تغییر نخواهد کرد)

از طرفی از آنجایی که داریم $Y \sim U(2,5)$ می‌توان نوشت

$$\text{(II)}: F_Y(y) = \frac{1}{3}(y-2)$$



حال با استفاده از رابطه $F_X(x) = 1 - e^{\lambda x}$ برای رابطه توزیع نمایی می‌توان نوشت:

$$\text{(I)},\text{(II)} \Longrightarrow \frac{1}{3}(y-2) = 1 - e^{-\lambda g^{-1}(y)} = 1 - e^{-\lambda x} \Longrightarrow y = 3(1 - e^{-\lambda x}) + 2$$

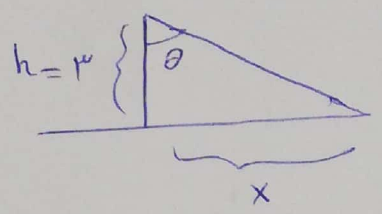
$$\Longrightarrow g(x) = 5 - 3e^{-\lambda x}$$

۳) الف) از آنجایی که $\theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ است، پس داریم:

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{(PDF)}$$

$$F_\theta(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{(CDF)}$$

ب) با توجه به شکلی که می‌توان تصور کرد، داریم:



$$X = h\,tg\theta = 3\,tg\theta \Longrightarrow F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{3\,tg\theta \leq x\}$$

$$= P\{tg\theta \leq \frac{x}{3}\} = P\{\theta \leq tg^{-1}(\frac{x}{3})\} = F_\Theta(tg^{-1}(\frac{x}{3}))$$

طبق رابطه‌ای که برای قسمت الف بدست آوردیم، داریم که $F_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi}(\theta + \frac{\pi}{2})$ ، پس داریم:

$$F_x(X) = F_\Theta(tg^{-1}(\frac{x}{3})) = \frac{1}{\pi}(tg^{-1}(\frac{x}{3}) + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi} tg^{-1}(\frac{x}{3}) + \frac{1}{2}$$

حال برای بدست آوردن تابع pdf آن کافی است از آن نسبت به x مشتق بگیریم، داریم:

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{9}{\pi}\,\frac{1}{9+x^2}$$

$$\Longrightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \frac{9}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{9+x^2} = \frac{9}{\pi}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+9)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

۴) پرتاب n بار سکه و تعریف کردن متغیر تصادفی X برابر با تعداد شیر آمدن، یک توضیح دوجمله‌ای و گسسته است که محاسبه آن نسبتاً سخت است. اما برای nهای بزرگ و $p = ۰/۵$ (احتمال شیر آمدن برابر $\frac{1}{2}$ است) می‌توان آن را با توضیح نرمال، تقریب زد ($np(1-p) = ۲۵۰ > ۱۰$). پس داریم:	الف)

$$X \simeq Y \sim N(E[X], Var(X)) = N(\underbrace{np}_{\mu}, \underbrace{np(1-p)}_{6^2}) = N(۵۰۰, ۲۵۰)$$

$$6^2 = 250 \Rightarrow 6 \simeq ۱۵/۸$$

$$P(۴۸۰ \leq Y \leq ۵۲۰) \overset{\text{continuity correction}}{=\!=} P(۴۷۹/۵ < Y < ۵۲۰/۵)$$

$$\simeq P\left(\frac{۴۷۹/۵ - ۵۰۰}{۱۵/۸} < \frac{Y - ۵۰۰}{۱۵/۸} < \frac{۵۳۰/۵ - ۵۰۰}{۱۵/۸}\right) =$$

$$P\left(-\frac{۲۰/۵}{۱۵/۸} < Z < \frac{۳۰/۵}{۱۵/۸}\right) \simeq P(-1/3 < Z < ۱/۹۳) =$$

$$P(Z < ۱/۹۳) - P(Z < -1/3) = P(Z < ۱/۹۳) - (1 - P(Z < 1/3))$$

$$= ۰/۹۷۳۲ - (1 - ۰/۹۰۳۲) = ۰/۸۷۶۴$$

ب)

$$X \sim N(np, np(1-p)) = N(٠٫٥n , ٠٫٢٥n)$$

$$\sigma^2 = \frac{n}{4} \Longrightarrow \sigma = \frac{\sqrt{n}}{٢}$$

$$P(٠٫٤٨n \leq X \leq ٠٫٥٢n) = ٠٫٩٥$$

حال سوال را به دو شکل حل می‌کنیم. یکبار با continuity correction و یک بار بدون آن

حالت اول: بدون continuity correction

$$P(٠٫٤٨n \leqslant X \leqslant ٠٫٥٢n) = P\left(\frac{٠٫٤٨n - ٠٫٥n}{\frac{\sqrt{n}}{٢}} \leqslant \frac{X - ٠٫٥n}{\frac{\sqrt{n}}{٢}} \leqslant \frac{٠٫٥٢n - ٠٫٥n}{\frac{\sqrt{n}}{٢}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{٠٫٠٢n}{\frac{\sqrt{n}}{٢}} \leqslant Z \leqslant \frac{٠٫٠٢n}{\frac{\sqrt{n}}{٢}}\right) = P(-٠٫٠٤\sqrt{n} \leq Z \leq ٠٫٠٤\sqrt{n}) = ٠٫٩٥$$

$$\Longrightarrow P(Z \leq ٠٫٠٤\sqrt{n}) + (1 - P(Z \leqslant ٠٫٠٤\sqrt{n})) = ٢P(Z \leq ٠٫٠٤\sqrt{n}) + ١$$

$$= ٠٫٩٥ \Longrightarrow P(Z \leq ٠٫٠٤\sqrt{n}) = ٠٫٩٧٥$$

طبق جدول تابع Φ خواهیم داشت:

$$٠٫٠٤\sqrt{n} = ١٫٩٦ \Longrightarrow \sqrt{n} = ٤٩$$

$$\Longrightarrow n = ٤٩ \times ٤٩ = ٢٤٠١$$

حالت دوم: بدون continuity correction

$$\Rightarrow P(٠٫٤٨n - ٠٫٥ < X < ٠٫٥٢n + ٠٫٥) = P\left(\frac{٠٫٤٨n - ٠٫٥ - ٠٫٥n}{\frac{\sqrt{n}}{٢}} < Z < \frac{٠٫٥٢n + ٠٫٥ - ٠٫٥n}{\frac{\sqrt{n}}{٢}}\right)$$

$$= P\left(-٠٫٠٤\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} < Z < ٠٫٠٤\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z < ٠٫٠٤\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - P\left(Z < -٠٫٠٤\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z < ٠٫٠٤\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - P\left(Z < ٠٫٠٤\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = ٠٫٩٥$$

$$\Rightarrow ٢P\left(Z < ٠٫٠٤\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = ١٫٩٥ \Rightarrow P\left(Z < ٠٫٠٤\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = ٠٫٩٧٥$$

طبق جدول تابع Φ داریم:

$$۰/۰۴\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = ۱/۹۶ \Longrightarrow n = ۲۳۵۱$$

۵) طبق گفته‌ی مسئله داریم :

$X_2 \sim N(12,6)$: فاصله تیر شخص دوم تا مرکز هدف ، و $X_1 \sim N(14,2)$: فاصله تیر شخص اول تا مرکز هدف

مستقل از هم

از آنجایی که هر دو آنها توزیع نرمال هستند، پس اختلاف آنها نیز توزیع نرمال خواهد بود و داریم : $X = X_2 - X_1$

(که ترکیب خطی از آن دو است)

حال امید ریاضی و واریانس این متغیر جدید را حساب می‌کنیم و داریم :

$$E[X] = E[X_2 - X_1] = E[X_2] - E[X_1] = 12 - 14 = -2$$

$$E[X^2] = E[(X_2 - X_1)^2] = E[X_2^2 - 2X_2X_1 + X_1^2] \underset{\underline{\underline{\quad}}}{\overset{E[X_1X_2]=E[X_1]E[X_2]}{=}}$$

$$E[X_2^2] - 2E[X_2]E[X_1] + E[X_1^2]$$

$$\mathrm{var}[E] = E[X^2] - E^2[X] = E[X_2^2] - 2E[X_2]E[X_1] + E[X_1^2] -$$

$$\left(E^2[X_2] - 2E[X_2]E[X_1] + E^2[X_1]\right)$$

$$= E[X_2^2] - E^2[X_2] + E[X_1^2] - E^2[X_1] = \mathrm{Var}[X_2] + \mathrm{Var}[X_1]$$

$$= 6 + 2 = 8 \implies X \sim N(-2, 8) \qquad \sigma^2 = 8 \to \sigma = \sqrt{8}$$

برای برنده شدن کافی است که تیر شخص دوم از تیر شخص اول به هدف نزدیک‌تر باشد $(X_2 < X_1)$ $\Leftarrow$ $X < 0$

$$\implies P\{X < 0\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0-(-2)}{\sqrt{8}}\right\} = \Phi\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 0.76$$

$\implies$ $p = 0.76$: احتمال برنده شدن شخص ۲ در هر دور $\qquad q = 1 - p$

$\implies$ احتمال برنده شدن شخص دوم در کل بازی $= \underbrace{\binom{5}{3} p^3 q^2}_{\text{۳ دور از ۵ دور را ببرد}} + \underbrace{\binom{5}{4} p^4 q^1}_{\text{۴ دور از ۵ دور را ببرد}} + \underbrace{\binom{5}{5} p^5}_{\text{هر ۵ دور را ببرد}} \simeq 0.9$

سمت آخر چون آزمایش‌ها (هر دور بازی) مستقل از هم هستند، توزیع binomial داریم.

۴) برای محاسبه $f_y(y)$ آن را به طور مستقیم از f_x بدست می‌آوریم. پس برای محاسبه $g'(x)$ داریم:

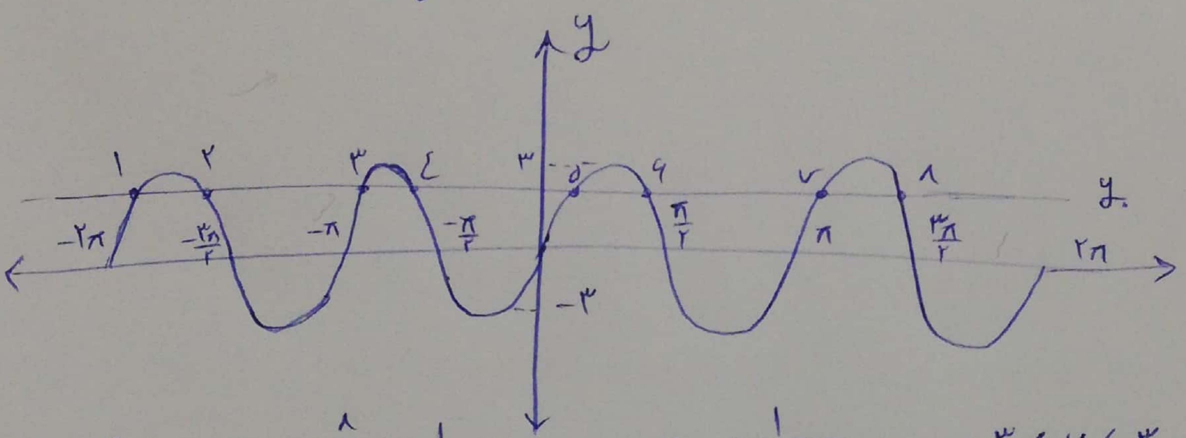
$$y = g(x) = 3\sin(2x) \longrightarrow g'(x) = 6\cos(2x) = \pm 6\sqrt{1-\sin^2(2x)}$$

$$\Longrightarrow g'(x) = \pm 2\sqrt{9-(3\sin(2x))^2} = \pm 2\sqrt{9-y^2}$$

چون x دارای توزیع یکنواخت در بازه $(-2\pi, 2\pi)$ است

$$\Longrightarrow f_y(y) = \sum \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

پس: $f_x(x_i) = \underbrace{\frac{1}{4\pi}}_{2\pi-(-2\pi)}$



$$\Longrightarrow f_y(y) = \sum_{i=1}^{8} \frac{\frac{1}{4\pi}}{2\sqrt{9-y^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{9-y^2}} & -3 \leq y \leq 3 \\ 0 & y>3 \text{ یا } y<-3 \end{cases}$$

در نتیجه PDF آن را به این شکل حساب کردیم، برای محاسبه CDF آن نیز می‌کافیم از PDF، انتگرال بگیریم. داریم:

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_y(y)\,dy = \int_{-3}^{y} f_y(y)\,dy = \int_{-3}^{y} \frac{1}{\pi\sqrt{9-y^2}}\,dy$$

بقیه را طبق ماشین حساب از اینترنت پیشرفته حساب می‌کنیم ☺ و داریم (مقصودم جواب انتگرال بود):

$$\Rightarrow F_y(y) = \frac{1}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)\Big|_{-3}^{y} = \frac{1}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{y}{3}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow F_y(y) = \begin{cases} 0 & y<-3 \\ \frac{1}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{y}{3}\right) + \frac{1}{2} & -3 \leq y \leq 3 \\ 1 & y>3 \end{cases}$$

(CDF)