آمار و احتمال مهندسی

مروری بر ترکیبیات

(Ross 1.1-1.6)

مروری بر ترکیبیات

- ترکیبیات چیست؟
  - علم شمارش اشیاء
  - چگونه بدون شمارش بشماریم؟
  - در ترکیبیات شما می‌آموزید چگونه با استفاده از اصول ریاضی، فرمول‌ها و پارامترهای مختلف و بدون استفاده از شمارش به روش سنتی تعداد بعضی اشیاء با ویژگی‌های خاص را بشمرید.
- در علوم مهندسی با مسائل مربوط به شمارش اشیاء بسیار مواجه می‌شویم:
  - تعداد خروجی‌های موفق یا ناموفق یک آزمایش
  - تعداد عملیات ریاضی به کار رفته در یک الگوریتم (جهت محاسبه پیچیدگی الگوریتم)
  - در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی
- در آمار و احتمال، برای تعیین اندازه فضای نمونه و محاسبه احتمال از شمارش استفاده می‌کنیم.

اصل جمع

- اصل جمع: اگر کار ۱ را بتوان به m طریق، و کار ۲ را بتوان به n طریق انجام داد، و اگر هر دو کار را نتوان همزمان انجام داد، آنگاه تعداد راه‌های انجام دادن کار ۱ یا کار ۲ برابر با $m+n$ است.
- مثال: یک دانشجوی مهندسی کامپیوتر قصد دارد در ترم جاری یک درس اختیاری از بین ۲۲ درس اختیاری کارشناسی گرایش نرم‌افزار، و یا یکی از ۲۹ درس کارشناسی ارشد این گرایش انتخاب کند. تعداد انتخاب‌های پیش روی او ۲۹+۲۲=۵۱ است.
- تعبیر مجموعه‌ای اصل جمع: اگر مجموعه‌های محدود A_1، A_2، ...، و A_n دو به دو جدااز‌هم باشند، داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

اصل ضرب

- اصل ضرب: اگر عملی به دو مرحله اول و دوم تقسیم شود و اگر مرحله اول را بتوان به m طریق و مرحله دوم را به n طریق انجام داد، آنگاه کل عمل یادشده را می‌توان به mn طریق انجام داد. گاهی این اصل را اصل انتخاب نیز می‌نامند.
- مثال: اگر به ۳ طریق بتوان از شهر A به شهر B رفت، و به ۵ طریق بتوان از B به C رفت، طبق اصل ضرب به ۳×۵ = ۱۵ طریق می‌توان از A به C رفت.
- تعبیر مجموعه‌ای اصل ضرب: اگر A_1، A_2، ...، و A_n مجموعه‌هایی محدود باشند، تعداد اعضای حاصلضرب دکارتی آنها برابر است با حاصلضرب تعداد اعضای تک تک آنها:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1|.|A_2| \ldots |A_n|$$

جایگشت (Permutation)

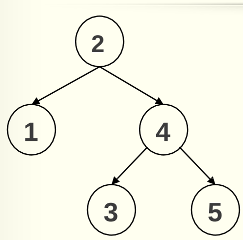
- جایگشت یا ترتیب: دنباله‌ای مرتب و بدون تکرار از عناصر یک مجموعه متناهی، که لزوما همه عناصر مجموعه را شامل نمی‌شود.
  - مثال: همه جایگشت های به طول ۲ از مجموعه {1,2,3} عبارتند از: 12,13,21,23,31,32
- تعداد جایگشت های r عضوی مجموعه‌ای با اندازه n:

عضو r-ام		عضو دوم	عضو اول	
$n-r+1$	…	$n-1$	n	تعداد حالات:

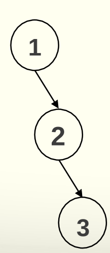
- پس طبق اصل ضرب تعداد کل جایگشت های r عضوی برابر است با:

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)$$

مثال: درخت جستجوی دودویی



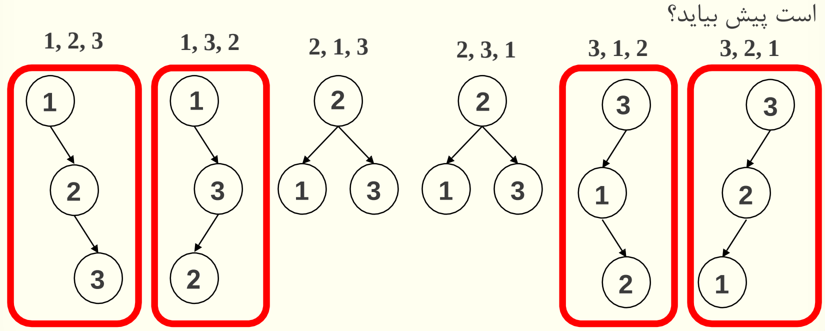
- درخت جستجوی دودویی (binary search tree) و یا به اختصار BST یک درخت دودویی است که برای هر راس با مقدار n ، همه رئوس زیردرخت سمت چپ آن راس از n کوچکتر و همه رئوس زیردرخت سمت راست از n بزرگتر هستند.



- یک ساختار BST را تباه (degenerate) می‌گوییم اگر هر راس آن فقط یک فرزند داشته باشد:

مثال

- برای قرار دادن مجموعه اعداد $\{1,2,\ldots,n\}$ در یک BST چه تعداد ساختار تباه ممکن است پیش بیاید؟



- از $n!$ جایگشت ممکن برای دنباله اعداد 1 تا n، 2^{n-1} جایگشت منجر به ساختارهای تباه می‌شوند.

جایگشت

- تعداد جایگشت های به طول r از یک مجموعه n عضوی را با $P(n,r)$ نمایش می‌دهیم:

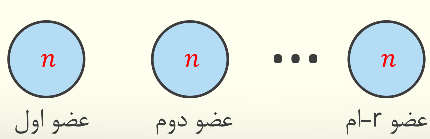
$$P(n,r) = P_r^n = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

  - تعداد راه‌های مرتب کردن r شیء از n شیء متمایز

- تعداد جایگشت های به طول n یا تعداد کل راه های مرتب کردن n شیء متمایز: $n!$

- در ترتیب فرض میکنیم تکرار مجاز نیست، یعنی وقتی شیئی را در جایگاه ۱ گذاشتیم، دیگر همان شیء نمیتواند در جایگاه دیگری هم باشد. ولی اگر تکرار مجاز باشد، تعداد حالات چقدر میشود؟

تعداد حالات:



$\Rightarrow n^r$

ترکیب (Combination)

- ترکیب: مجموعه‌ای نامرتب از عناصر یک مجموعه متناهی
  - مثال: ترکیب‌های دو عضوی مجموعه $\{1,2,3\}$ عبارتند از $\{1,2\}$ و $\{2,3\}$ و $\{1,3\}$
- تعداد ترکیب‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با تعداد جایگشت‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی تقسیم بر تعداد راه‌های مرتب کردن r عضو:

$$C(n,r) = C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

  - تعداد راه‌های انتخاب r شیء از n شیء متمایز، بدون در نظر گرفتن ترتیب
- هر زمان که r عضو از مجموعه n عضوی انتخاب می‌کنیم، $n-r$ عضو باقی می‌ماند، پس:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

ترکیب

- مثال ۱. فرض کنید ۷ توپ سفید و ۳ توپ قرمز داریم. به چند طریق می‌توان این توپ‌ها را در ۱۰ جعبه که از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند قرار داد، به طوری که در هر جعبه فقط یک توپ باشد؟
  - توپهای سفید از هم متمایز نیستند و توپهای قرمز نیز از هم متمایز نیستند، ولی جعبه‌ها از هم متمایزند.
  - در واقع می‌توانیم از میان ده جعبه، ۳ تا را برای قرار گرفتن توپ‌های قرمز انتخاب کنیم (یا معادلاً ۷ تا را برای قرار گرفتن توپ‌های سفید انتخاب کنیم) و ترتیب جعبه‌های انتخابی مهم نیستند.

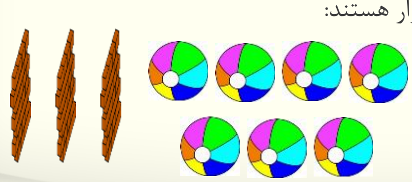
تعداد حالات = $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3!} = 120$

- مثال ۲. تعداد اعداد باینری n-بیتی که دارای m رقم 1 هستند؟

$$\binom{n}{m}$$

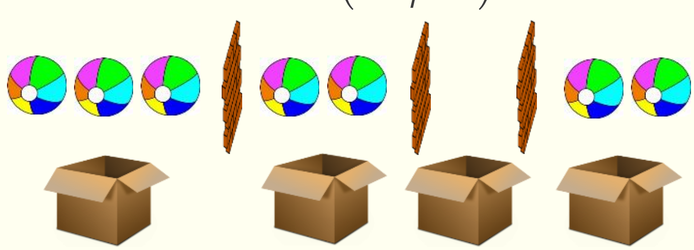
ترکیب با مجاز بودن تکرار

- در بحث جایگشت دیدیم که اگر تکرار مجاز باشد، تعداد ترتیب‌ها به جای $P(n,r)$، برابر با n^r خواهد بود. در ترکیب چه؟
- مثال: r توپ غیرمتمایز داریم که می‌خواهیم آن‌ها را در n جعبه متمایز قرار دهیم.
  - اگر در هر جعبه فقط یک توپ بتوان قرار داد: $C(n,r)$
  - اگر بیش از یک توپ در هر جعبه بتوان قرار داد (حتی همه r توپ)، تعداد حالات چقدر خواهد بود؟
- به r توپ، $(n-1)$ دیواره میانی اضافه می‌کنیم، کلاً $n-1+r$ شیء خواهیم داشت که r تا از آنها توپ و $(n-1)$ تا از آنها دیوار هستند:
  - مثلاً برای ۷ توپ و ۴ جعبه:



ترکیب با مجاز بودن تکرار

- این $n-1+r$ شیء را به $\binom{n+r-1}{r}$ طریق می‌توان کنار هم چید.



- نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$، برابر است با: $\binom{n+r-1}{r}$

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله

- اگر الزام داشته باشیم که هیچ یک از جعبه‌ها نباید خالی بماند ($r \geq n$)، چند حالت خواهیم داشت؟

- اکنون r توپ داریم که بین آنها $(r-1)$ فاصله وجود دارد و ما می‌خواهیم $(n-1)$ تا از این فاصله‌ها را انتخاب کنیم و با قرار دادن دیوار در آن‌ها توپ‌ها را بین n جعبه تقسیم کنیم. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $\binom{r-1}{n-1}$

- نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$، برابر است با: $\binom{r-1}{n-1}$

قاعده پاسکال

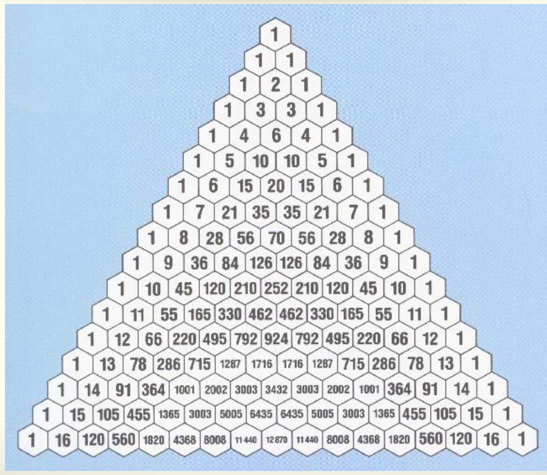
- رابطه بازگشتی زیر به قاعده پاسکال معروف است:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

اثبات:

- مجموعه‌ای n عضوی از اشیاء را در نظر بگیرید، و فرض کنید X یکی از این اشیاء باشد.
- می‌خواهیم r عضو از این مجموعه انتخاب کنیم.
- شیء X یا در بین این r عضو وجود دارد و یا وجود ندارد.
- اگر X بین این r عضو باشد، $(r\text{-}1)$ عضو دیگر باید از بین $(n\text{-}1)$ عضو باقیمانده انتخاب شوند: $\binom{n-1}{r-1}$
- اگر X بین این r عضو نباشد، همه r عضو باید از بین $(n\text{-}1)$ عضو باقیمانده انتخاب شوند: $\binom{n-1}{r}$
- بنابراین طبق اصل جمع: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

مثلث خیام – پاسکال



اتحاد جابجایی

- اتحاد زیر دارای کاربرد فراوان در محاسبات احتمالاتی است:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

اثبات:

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= k \times \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times \big(n-1-(k-1)\big)!}$$

$$= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

قضیه دوجمله‌ای

- برای متغیرهای x و y و عدد صحیح نامنفی n داریم:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

اثبات:

- $(x+y)^n = (x+y) \times (x+y) \times \cdots \times (x+y)$
- ضریب $x^k y^{n-k}$ برابر با تعداد راه‌های انتخاب k عدد x از n پرانتز بالا است: $\binom{n}{k}$
- حالت خاص: اگر $x = y = 1$ آنگاه:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

ترکیب تعمیم یافته

- در ترکیب از n شیء r تا را انتخاب می‌کردیم، به عبارت دیگر این اشیاء را به دو دسته rتایی و $(n-r)$تایی تقسیم می‌کردیم.
- حال اگر n شیء داشته باشیم، و بخواهیم این اشیاء را به k دسته A_1، A_2، … و A_k تقسیم کنیم که به ترتیب r_1، r_2، … ، و r_k عضو داشته باشند، به طوری که $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$ ، آن‌گاه تعداد حالات ممکنه برابر است با:

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$$

اثبات:

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\ldots\binom{n-r_1-\cdots-r_{k-1}}{r_k} = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$$

مثال ۱

- اگر یک سکه را ۱۰ بار پرتاب کنیم، احتمال اینکه حداکثر ۳ بار شیر بیاید چقدر است؟
  - مجموعهٔ Ω، مجموعهٔ ۱۰ تایی‌های مرتبی است که هر عضو این ۱۰ تایی‌های مرتب میتواند H یا T باشد: $\Omega = \{HH..H, TH \dots H, \dots, TT \dots T\}$
  - این فضای نمونه دارای 2^{10} عضو است. فرض میکنیم این 2^{10} عضو متساوی الاحتمال باشند، به عبارت دیگر سکه سالم باشد و پرتاب‌ها مستقل باشند.
  - پیشامد A: حداکثر ۳ بار شیر بیاید. این پیشامد از ۴ پیشامد ناسازگار A_i تشکیل شده است:
    - پیشامد A_i: دقیقاً i بار شیر بیاید ($0 \le i \le 3$)

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$P(A) = \frac{\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3}}{2^{10}} = \frac{176}{1024} = 0.1719$$

مثال ۲

- به طور کاملاً تصادفی m توپ را در n جعبه قرار می‌دهیم ($n \ge m$). احتمال قرار گرفتن هر یک از توپ‌ها در جعبه‌های مختلف مساوی است و حتماً هم در یکی از جعبه‌ها قرار می‌گیرد. احتمال این که این m توپ در m جعبهٔ مورد نظر (یکی در هر جعبه) قرار بگیرند چیست؟

الف) اگر هر جعبه گنجایش فقط یک توپ را داشته باشد، دو حالت داریم:

۱) توپ‌ها غیرمتمایز:

کل حالات قرار گرفتن m توپ در n جعبه: $\binom{n}{m}$ حالت متساوی‌الاحتمال

تعداد حالات قرار دادن m توپ در m جعبهٔ خاص: 1

$$P = \frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!}$$

ادامه مثال ۲

۲) توپ‌ها متمایز:

تعداد حالات ممکنه: $P(n,m)$ حالت متساوی‌الاحتمال (انتخاب m تا از n شیء متمایز با مهم بودن ترتیب)

تعداد حالات قرار دادن m توپ متمایز در m جعبهٔ خاص: $m!$

$$P = \frac{m!}{P(n,m)} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!}$$

- فرقی نمی‌کند چه توپ‌ها را متمایز بگیریم و چه غیرمتمایز!

ادامه مثال ۲

ب) اگر گنجایش جعبه محدود نباشد، دو حالت داریم:

۱) توپ‌ها متمایز:

کل حالات قرار گرفتن m توپ در n جعبه: n^m زیرا برای هر توپ n حالت داریم.

تعداد حالات قرار دادن m توپ در m جعبهٔ خاص: $m!$

$$P = \frac{m!}{n^m}$$

۲) توپ‌ها غیرمتمایز:

کل حالات قرار گرفتن m توپ در n جعبه: $\binom{m+n-1}{m}$ زیرا ترتیب مهم نیست و تکرار مجاز است.

تعداد حالات قرار دادن m توپ در m جعبهٔ خاص: 1

$$P = \cancel{\frac{1}{\binom{n+m-1}{m}}}$$

ادامه مثال ۲

- این جواب با توجه به مفروضات مسأله (که احتمال قرار گرفتن هر توپ در جعبه‌های مختلف مساوی است) غلط است، زیرا در این صورت $\binom{n+m-1}{m}$ حالت یاد شده متساوی‌الاحتمال نیستند.

- مثال: اگر $m=2$ و $n=2$، اگر چه سه حالت داریم: 20,02,11

این سه حالت متساوی‌الاحتمال نیستند و احتمال وقوع 11 برابر $\frac{2}{4}$ است و نه $\frac{1}{3}$.

مثال ۳

- جعبه‌ای شامل ۶۰ توپ قرمز و ۴۰ توپ سیاه است. ۲۰ توپ از این جعبه به طور کاملاً تصادفی انتخاب می‌کنیم (بدون جایگزینی). احتمال اینکه ۱۵ تا از این توپ‌ها قرمز و ۵تا سیاه باشند چیست؟

تعداد حالات ممکن انتخاب ۲۰ توپ: $\binom{100}{20}$ حالت متساوی‌الاحتمال (تعداد نقاط Ω)

تعداد حالات مطلوب: $\binom{60}{15}\times\binom{40}{5}$

(انتخاب ۱۵ توپ از ۶۰ توپ قرمز و ۵ توپ از ۴۰ توپ سیاه)

$$P=\frac{\binom{40}{5}\times\binom{60}{15}}{\binom{100}{20}}=0.065$$

- توجه: همواره Ω را طوری تعریف کنید که نقاط متساوی‌الاحتمال شوند.
  - راه غلط: تعداد حالات ممکنه: ۲۱ حالت (0-20,1-19,...,20-0)، و تعداد حالات مطلوب: ۱ حالت. ولی این ۲۱ حالت متساوی الاحتمال نیستند.

مساله گالیله

- نشان دهید اگر سه تاس همزمان پرتاب شوند، احتمال این که مجموع حاصل ۱۰ شود، از احتمال این که این مجموع ۹ شود، بیشتر است.
- وقتی سه تاس پرتاب می‌شوند، تعداد کل حالات ممکن برابر با 6^3 یا 216 است.
- تعداد حالاتی که مجموع برابر با ۹ می‌شود، معادل است با تعداد جوابهای معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 : \quad 1 \le x_i \le 6$$

- تعداد کل جوابهای صحیح و مثبت این معادله برابر است با:

$$\binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

- تعداد جوابهای خارج از محدوده که در بالا شمارش شده‌اند برابر است با: 3

(تنها حالت غیرمجاز شمرده شده وقتی است که یکی از متغیرها برابر با 7 و دو متغیر دیگر 1 شوند.)

مساله گالیله

- پس تعداد حالاتی که مجموع برابر با ۹ می‌شود برابر است با: $28 - 3 = 25$
- تعداد حالاتی که مجموع برابر با ۱۰ می‌شود، معادل است با تعداد جوابهای معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 : \quad 1 \le x_i \le 6$$

- تعداد کل جوابهای صحیح و مثبت این معادله برابر است با:

$$\binom{10-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

- تعداد جوابهای خارج از محدوده که در بالا شمارش شده‌اند برابر است با: 9
- تنها دو مجموعه $\{1,2,7\}$ (شامل 6 حالت) و $\{1,1,8\}$ (شامل 3 حالت) غیرمجاز هستند.
- پس تعداد حالاتی که مجموع برابر با ۱۰ می‌شود برابر است با: $36 - 9 = 27$

$$P(10) = \frac{27}{216} > \frac{25}{216} = P(9)$$

مساله گالیله

- اگر اهمیتی به ترتیب ندهیم، برای مثال بین (1,2,6) و (6,1,2) تمایز قائل نشویم، تعداد حالاتی که مجموع سه تاس ۹ می‌شود، با تعداد حالاتی که مجموع سه تاس ۱۰ می‌شود یکسان خواهند بود:
- مجموع ۹: (1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3)
- مجموع ۱۰: (1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)
- اما از آنجایی که این حالات متساوی‌الاحتمال نیستند، نباید در محاسبه احتمال با استفاده از تعریف کلاسیک تعداد آنها را به کار برد.

مساله روز تولد

- گروهی از افراد را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. حداقل تعداد افراد این گروه چقدر باشد تا احتمال این که دو نفر در این گروه روز تولد یکسانی داشته باشند، بیش از ۵۰ درصد شود؟
- محاسبه احتمال پیشامد مکمل ساده‌تر است:

A = روز تولد هیچ دو نفری یکسان نباشد

- تعداد کل حالات ممکن روز تولد n فرد متمایز:

365^n

- تعداد حالاتی که در آن هیچ دو نفری روز تولد یکسانی ندارند:

$$365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365 - n)!}$$

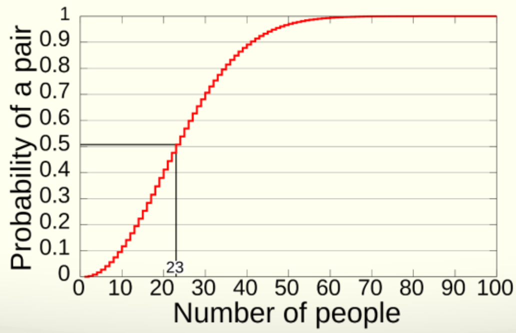
- بنابراین:

$$P(A) = \frac{365!}{365^n (365 - n)!}$$

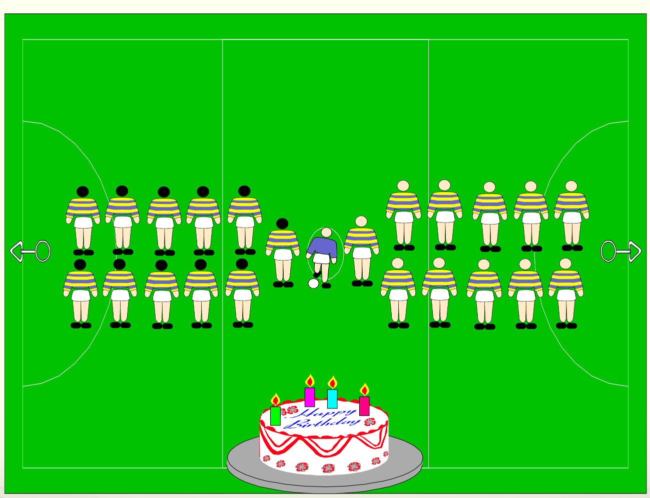
مساله روز تولد

○ پس احتمال این که دو نفر در یک گروه n نفره روز تولد یکسانی داشته باشند، برابر است با:

$$1-\frac{365!}{365^n(365-n)!}$$



پارادوکس روز تولد



آمار و احتمال مهندسی
بهنام بهرک

31 of 33

آمار و احتمال مهندسی
بهنام بهرک

32 of 33

مثال

- احتمال این که در یک گروه n نفری، حداقل یک نفر روز تولد یکسانی با شما داشته باشد، چقدر است؟

E_i : پیشامد این که تولد نفر i-ام با شما یکسان نباشد

A : پیشامد این که تولد حداقل یک نفر با شما یکسان باشد

$$P(A) = 1 - P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

$$n = 70 \ \rightarrow P(A) \approx 0.175$$

$$n = 253 \ \rightarrow P(A) \approx 0.5$$