Conditional Distributions

$$\Phi_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)\,dx$$

$$\frac{d^n \Phi_X(s)}{ds^n}\bigg|_{s=0} = E[X^n]$$

$$\boxed{E[X] = 12}$$

$$\boxed{P(X \geq 18)}$$ ✓

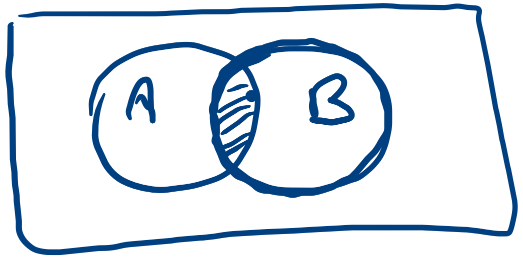
$$E[X^2]$$

$$p(\text{win}) = p^k$$

توزیع شرطی گسسته

A, B

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$



$$P_{X|Y}(x|y) = P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

given

observed

تابع توزیع شرطی انباشته (تجمعی)

$$F_{X|Y}(a|y) = P(X\le a \mid Y=y) = \frac{P(X\le a,\ Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{\sum_{x\le a} P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

$$= \sum_{x<a} \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)} = \sum_{x\le a} P_{X|Y}(x|y)$$

$$F_X(a) = \sum_{x\le a} P_X(x)$$

$$F_{X|Y}(a|y) = \sum_{x\le a} P_{X|Y}(x|y)$$

مثال ۱

Joint Probability Table				
Year \ GPA	A	B	C	Marginal Year
Freshman	0.06	0.04	0.03	0.13
Sophomore	0.21	0.16	0.02	0.39
Junior	0.13	0.06	0.02	0.21
Senior	0.04	0.07	0.01	0.12
5+	0.04	0.09	0.03	0.15
Marginal GPA	0.47	0.43	0.10	1.00

جدول توزیع احتمال مشترک سال تحصیلی و معدل

$$P(\text{GPA} = A \mid \underbrace{\text{year} = \text{junior}}) = \frac{0.13}{0.21}$$

$0.13 \rightarrow P(G = A, Y = \text{junior})$

$0.21 \rightarrow P(Y = \text{junior})$

$$P(Y = \text{senior} \mid G = C) = \frac{0.01}{0.1} = \frac{1}{10}$$

$$P_{XY}(x,y) \to P_X(x)$$

$$P_{XY}(x,y) \to P_Y(y)$$

$$P_{XY}(x,y) \to P_{X|Y}(x|y)$$

$$P_{XY}(x,y) \to P_{Y|X}(y|x)$$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

$$\boxed{P_{XY}(x,y) = P_Y(y)\, P_{X|Y}(x|y)}$$

مثال ۲

$Y \backslash X$	0	1	$P_Y(y)$
0	0.2	0.3	0.5
1	0.1	0.4	0.5
$P_X(x)$	0.3	0.7	1.0

$$P(Y=0 \mid X=0) = \frac{2}{3}$$

$$P(Y=0 \mid X=1) = \frac{3}{7}$$

$$P(Y=1 \mid X=1) = \frac{4}{7}$$

$$P(Y=1 \mid X=0) = \frac{1}{3}$$

$$P_{Y|X}(y \mid X=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{y} \left(\frac{2}{3}\right)^{1-y}$$

$$P_{Y|X}(y \mid X=1) = \left(\frac{4}{7}\right)^{y} \left(\frac{3}{7}\right)^{1-y}$$

$$P_{Y|X}(y|x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{y} \left(\frac{2}{3}\right)^{1-y} (1-x) + \left(\frac{4}{7}\right)^{y} \left(\frac{3}{7}\right)^{1-y} x$$

$$= \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{y} \left(\frac{2}{3}\right)^{1-y}\right)^{1-x} \left(\left(\frac{4}{7}\right)^{y} \left(\frac{3}{7}\right)^{1-y}\right)^{x}$$

مثال

- درخواست‌های دریافت‌شده در یک سرور در طول روز از جانب انسان‌ها و بات‌ها انجام می‌گیرند:
  - X = تعداد درخواست‌های انسان‌ها: $X \sim Poi(\lambda_1)$
  - Y = تعداد درخواست‌های بات‌ها: $Y \sim Poi(\lambda_2)$

- از آنجایی که X و Y مستقل از هم هستند، تعداد کل درخواست‌ها نیز دارای توزیع پواسون است:

$$X + Y \sim \underline{Poi(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

- $P(X = k | X + Y = n)$ چقدر است؟

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 10 \\ \lambda_2 &= 20 \end{aligned}}$$

$$p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n$$

$$\boxed{Bin\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$P(X=k \mid X+Y=n) = \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k, Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$$

$$= \frac{P(X=k)\,P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} = \frac{\cancel{e^{-\lambda_1}}\frac{\lambda_1^k}{k!}\;\cancel{e^{-\lambda_2}}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}$$

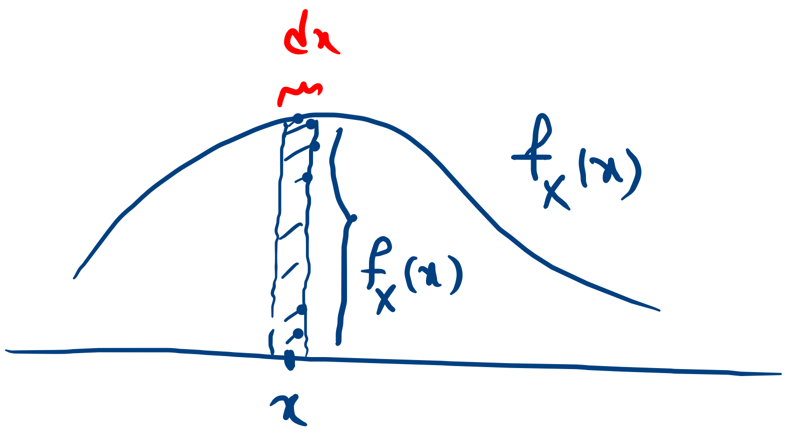
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{\lambda_1^k}{(\lambda_1+\lambda_2)^k}\,\frac{\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n-k}} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(1-\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}\right)^{n-k}$$

$$= \mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

توزیع شرطی پیوسته

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$f_X(x)$



$$\underline{P(x \le X \le x + dx)} = f_X(x)\,dx$$

$$f_{X|Y}(x|y)\,dx = \frac{f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}{f_Y(y)\,dy} = \boxed{\frac{P(x \le X \le x+dx,\ y \le Y \le y+dy)}{P(y \le Y \le y+dy)}}$$

تابع CDF شرطی

$$\overbrace{F_{X|Y}(a|y)} = P(X \leq a \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

$$\boxed{P(X \leq a,\ Y = y) = 0}$$

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx$$

$$F_{X|Y}(a|y) = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

مثال ۱

- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال مشترک زیر باشند:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2-x-y) & 0 < x,y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

چگالی شرطی $f_{X|Y}(x|y)$ را محاسبه کنید.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{12}{5}(2-x-y)x\,dx$$

$$= \frac{12}{5}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}yx^2\right)\Big|_0^1 = \frac{12}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}y\right) \qquad 0 < y < 1$$

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{12}{5}x(2-x-y)}{\frac{12}{5}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}y\right)} \qquad 0 < x < 1}$$

مثال ۲

○ مقدار $P\{X > 1|Y = y\}$ را برای توزیع زیر پیدا کنید:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P(X>1 | Y=y) = \int_{1}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/y}\, e^{-y}}{y}\, dx = \frac{e^{-y}}{\cancel{y}} \left(-\cancel{y}\, e^{-x/y}\right)\Big|_0^{+\infty} = e^{-y} \qquad y>0$$

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{e^{-x/y}\, e^{-y}/y}{e^{-y}} = \frac{1}{y} e^{-x/y} \qquad x>0,\ y>0}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$P(X>1 | Y=y) = \int_{1}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-x/y}\, dx$$

توزیع شرطی و استقلال

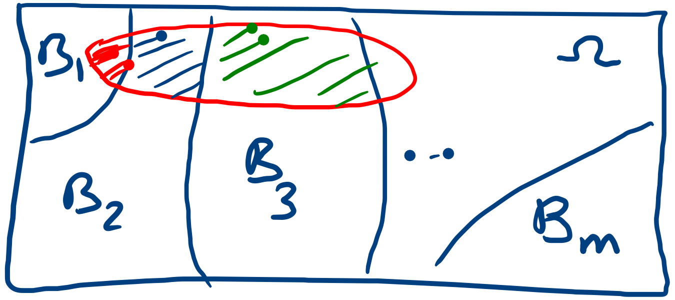
$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$P_{XY}(x,y) = P_X(x)\,P_Y(y) \longrightarrow P_{X|Y}(x|y) = P_X(x)$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \longrightarrow f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)} = \frac{P_X(x)\,\cancel{P_Y(y)}}{\cancel{P_Y(y)}} = P_X(x)$$

قضیه احتمال کل



$$P(A) = \boxed{\sum_{i=1}^{m} P(B_i)\, P(A \mid B_i)}$$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)} \Rightarrow \underline{P_{XY}(x,y)} = P_Y(y)\, P_{X|Y}(x|y)$$

$$P_X(x) = \sum_i P_{XY}(x, y_i) = \boxed{\sum_i P_Y(y_i)\, P_{X|Y}(x|y_i)}$$

$f_X(x)$

$f_Y(y)$

$f_{X|Y}(x|y) \longrightarrow f_X(x)$

$f_{Y|X}(y|x) \longrightarrow f_Y(y)$

$f_{XY}(x,y) \longrightarrow f_X(x)\, f_Y(y)$

$f_X(x)$

$f_{X|Y}(x|y) \longrightarrow f_X(x)$

مثال

- متغیر تصادفی N یک متغیر تصادفی گسسته یکنواخت است که مقادیر $\{2,3,4\}$ را اختیار می‌کند. متغیر تصادفی X با توزیع $X \sim Geo(1/N)$ انتخاب می‌شود. تابع جرمی احتمال متغیر تصادفی X را به دست آورید.

$$\boxed{P_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} & n = 2,3,4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}}$$

$$X|N \sim Geo(1/N)$$

$$\boxed{P_{X|N}(x|n) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{x-1}}$$

$$P_X(x) = ?$$

$$\boxed{P_{XN}(x,n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{x-1} \quad \begin{array}{l} x = 1,2,\ldots \\ n = 2,3,4 \end{array}}$$

$$P_X(x) = \sum_{n=2}^{4} P_{XN}(x,n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x|y)}{f_Y(y)}$$

$$\Phi_X(s) = E[e^{sX}] = E[1] = 1$$

$$f_{XY}(x,y) = f_Y(y)\, f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, f_{X|Y}(x|y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)\,dy$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{c} f_{XY}(x,y)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c} f_{XY}(x,y)\,dx = \frac{1}{c} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx} = \frac{1}{c} f_Y(y) = 1$$

$f_X(x)$

$f_{X|Y}(x|y) \longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)\, dy$$

$$f_{X|Y}(x|y) \propto f_{XY}(x,y)$$

مثال ۲

- متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه (0,1) است. متغیر تصادفی Y با احتمال یکنواخت در بازه $(0,X)$ انتخاب می‌شود. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را به دست آورید.

$$X \sim U(0,1) \qquad f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$Y|X \sim U(0,X) \qquad f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1/x & \boxed{0 \le y \le x} \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = ?$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_y^1 \overbrace{f_X(x)}^{0 \le x \le 1} \overbrace{f_{Y|X}(y|x)}^{0 \le y \le x}\,dx$$

$$= \int_y^1 1 \times \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_y^1 = -\ln y \qquad 0 < y < 1$$

قضیه بیز

- قضیه بیز: اگر مجموعه‌های B_i، که $1 \leq i \leq m$ ، افرازی از Ω باشند، برای هر پیشامد دلخواه A از Ω داریم:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)}$$

- مشابه قضیه بیز برای پیشامدها، برای توابع جرمی احتمال داریم:

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)}$$

$$= \frac{P_{X|Y}(x|y)P_Y(y)}{\sum_{y=-\infty}^{\infty} P_{X|Y}(x|y)P_Y(y)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)\,f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)\,f_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_{Y|X}(y|x)\,dx}$$

مثال

✓ $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \boxed{0 \le x \le 1} \\ 0 & o.w. \end{cases}$

✓ $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1/x & \boxed{0 \le y \le x} \\ 0 & o.w. \end{cases}$

$f_Y(y) = -\ln y \qquad 0 \le y \le 1$

? $\boxed{f_{X|Y}(x|y)} = \dfrac{f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)} = \dfrac{1 \times \frac{1}{x}}{-\ln y} = \dfrac{-1}{x \ln y}$ $\quad y \le x \le 1$, $\quad 0 \le y \le 1$

$f_{XY}(x,y) = 1 \times \frac{1}{x}$ $\quad 0 \le x \le 1$, $\quad 0 \le y \le x$ $\qquad y \le x \le 1$, $\quad 0 \le y \le 1$ $\qquad 0 \le y \le x \le 1$

ترکیب شرطی متغیرهای پیوسته و گسسته

X : پیوسته

N : گسسته

$$P_{N|X}(n|x) = \frac{P_{NX}(n,x)}{f_X(x)} = \frac{P_N(n)\, f_{X|N}(x|n)}{f_X(x)}$$

$$f_{X|N}(x|n) = \frac{P_{NX}(n,x)}{P_N(n)} = \frac{f_X(x)\, P_{N|X}(n|x)}{P_N(n)}$$

مثال

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد، و B یک متغیر تصادفی برنولی با احتمال موفقیت p باشد:

$$X \sim N(0,1) \quad , B \sim Ber(p)$$

- متغیر تصادفی Y به صورت مقابل تعریف می‌شود: $\boxed{Y = X(2B - 1)}$ تابع چگالی احتمال Y را به دست آورید.

$f_Y(y) = ?$

طبق قضیه احتمال کل داریم:

$$f_Y(y) = f_{Y|B}(y|B = 0)P(B = 0) + f_{Y|B}(y|B = 1)p(B = 1)$$

$Y = X(2B-1)$

$$f_Y(y) = P(B=0)\, f_{Y|B}(y|B=0) + P(B=1)\, f_{Y|B}(y|B=1)$$

$$= (1-p)\, f_X(-y) + p\, f_X(y)$$