Functions of Two Random Variables

Functions of Two Random Variables

$$X \sim f_X(x)$$

$$\boxed{Y = g(X)} \longrightarrow x_1, x_2, \ldots$$

$$f_Y(y) = ?$$

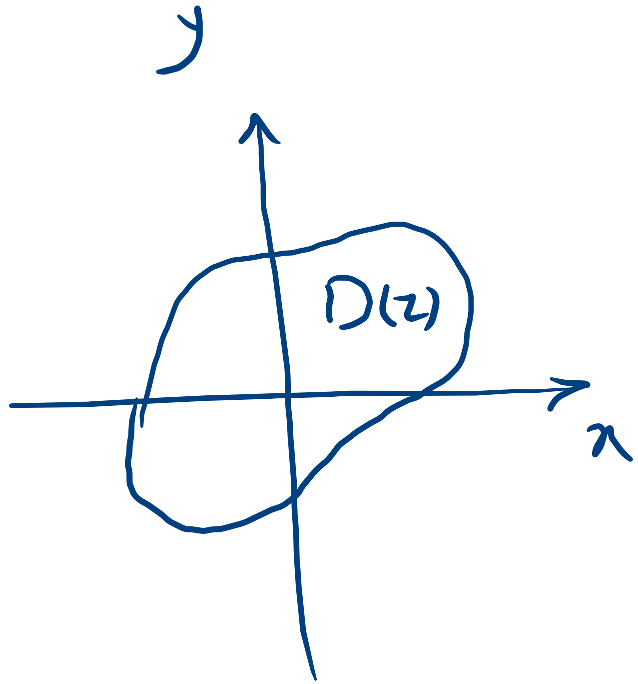
$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

توابعی از دو متغیر تصادفی

$$Z = g(X,Y)$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(g(x,y) \le z)$$

$$= \iint_{D(z)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

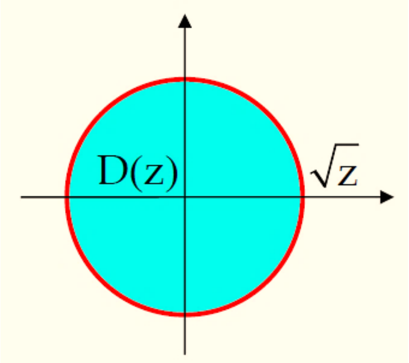


مثال ۱

$$Z = X^2 + Y^2$$

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}}$$

$$f_Z(z) = ?$$

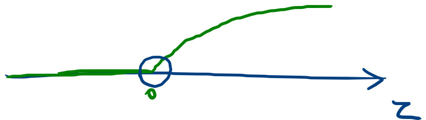


$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(x^2+y^2 \le z)$$

$$= \iint_{\text{دایره به شعاع } \sqrt{z}} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\sqrt{z}} e^{-r^2/2\sigma^2}\, r\,dr = \left(1 - e^{-z/2\sigma^2}\right)u(z) \qquad \boxed{z \geqslant 0}$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}z}\, u(z) = Exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$$



توزیع χ^2

- اگر $Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ باشد، و هر X_i دارای توزیع نرمال $N(0,1)$ و **مستقل** از یکدیگر باشند، Z دارای توزیع χ^2 با درجه آزادی n خواهد بود.

$n=2 \longrightarrow$ نمایی

مثال ۲

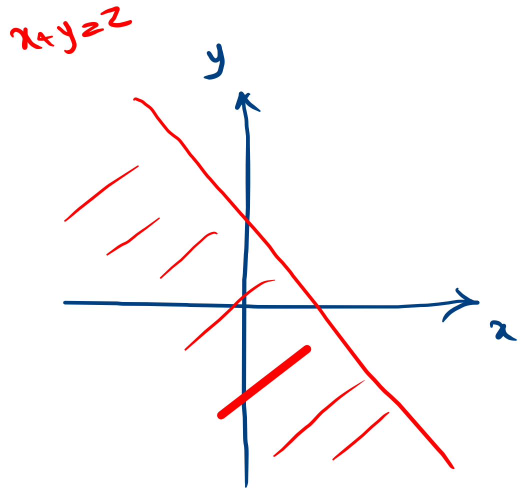
$$Z = X + Y$$

$$(X, Y) \sim f_{XY}(x, y)$$

$$f_Z(z) = ?$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_{xy}(x, y)\, dx\, dy$$



$$\boxed{f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(z-y, y)\, dy}$$

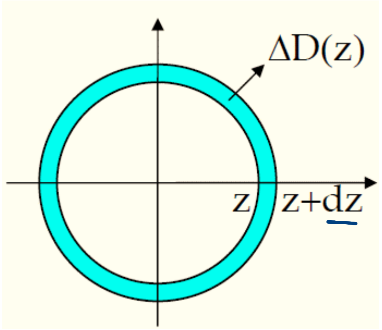
$$\frac{d}{dx} \int_{a}^{f(x)} g(t)\, dt = f'(x)\, g(f(x))$$

مثال ۳

• اگر $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ و $X \sim N(0,\sigma)$ و $Y \sim N(0,\sigma)$ و X و Y مستقل از هم باشند.

$W = X^2 + Y^2$

$Z = \sqrt{W}$

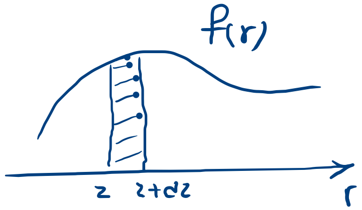


$$f_Z(z)\,dz = P(z \le Z \le z+dz)$$

$$= P\left(z \le \sqrt{x^2+y^2} \le z+dz\right)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_z^{z+dz} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\int_z^{z+dz} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\, r\,dr$$



$$= \frac{1}{\sigma^2} e^{-z^2/2\sigma^2}\, z\,dz$$

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{\sigma^2}\, z\, e^{-z^2/2\sigma^2} \qquad z \geq 0}$$

رایلی

دو تابع از دو متغیر تصادفی

- قضیه. اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{cases}$ دارای ریشه‌های (x_1,y_1)، (x_2,y_2) و … باشد، آنگاه:

$$f_{ZW}(z,w) = \sum_i \frac{f_{XY}(x_i,y_i)}{|J(x_i,y_i)|}$$

$$J(x,y) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

مثال ۱

$$\begin{cases} Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ W = \dfrac{X}{Y} \end{cases}$$

$X, Y \sim N(0, \sigma^2)$

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}}$$

$x = wy$

$$z = \sqrt{w^2y^2 + y^2} \Rightarrow y = \pm \frac{z}{\sqrt{w^2+1}}$$

$$\boxed{\Big(\underbrace{\frac{wz}{\sqrt{w^2+1}}}_{x_1}, \underbrace{\frac{z}{\sqrt{w^2+1}}}_{y_1}\Big)} \qquad \boxed{\Big(\underbrace{\frac{-wz}{\sqrt{w^2+1}}}_{x_2}, \underbrace{\frac{-z}{\sqrt{w^2+1}}}_{y_2}\Big)}$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{y} & \dfrac{-x}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{-x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-w^2}{z} - \frac{1}{z}$$

$$= -\frac{1+w^2}{z}$$

$$f_{ZW} = \left(\frac{z}{1+w^2}\right)\left[f_{xy}(x_1,y_1) + f_{xy}(x_2,y_2)\right] = \frac{2z}{1+w^2} f_{xy}(x_1,y_1)$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}$$

ادامه مثال ۱

- اگر X و Y هر دو $N(0,\sigma)$ و مستقل از هم باشند.

$$Z = g(X,Y)$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\underbrace{g(x,y) \le z}_{D(z)}) = \iint_{D(z)} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$

$$f_Z(z)\,dz = P(z \le Z \le z+dz) = P(\underbrace{z \le g(x,y) \le z+dz}_{\Delta D(z)}) = \iint_{\Delta D(z)} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{cases}$$

$$f_{xy}(x,y)$$

$$f_{ZW}(z,w) = ?$$

w,z تابع

$(x_1,y_1), \dots, (x_n,y_n)$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{f_{ZW}(z,w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{xy}(x_i,y_i)}{|J(x_i,y_i)|}}$$

مثال ۲

$$\begin{cases} Z = aX + bY \\ W = cX + dY \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix} =$$

$$f_{ZW}(z, w) = \frac{f_{XY}(x_1, y_1)}{|\det(A)|}$$

ادامه مثال ۲

اگر $\begin{cases} Z = X + Y \\ W = X - Y \end{cases}$ ، داریم:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$X \sim N(0,1)$

$Y \sim N(0,1)$

$f_{XY} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

$Z = g(x,y)$

استفاده از متغیر تصادفی کمکی

روش اول:

$$F_Z(z) = \iint\limits_{D(z)} f_{XY}(x,y)dx\,dy$$

روش دوم:

$$f_Z(z)dz = \iint\limits_{\Delta D(z)} f_{XY}(x,y)dx\,dy$$

روش سوم: استفاده از متغیر کمکی $W = X$

مثال

$$\begin{cases} \boxed{z = xy} \\ w = x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = w \\ y = z/w \end{cases}$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x$$

$$\underline{f_{ZW}(z,w)} = \frac{f_{xy}(w, z/w)}{|-x|} = \frac{f_{xy}(w, z/w)}{|w|}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{xy}(w, z/w)}{|w|} \, dw$$

مثال (پایان ترم ۱۳۹۵)

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x+4y & 0<y<x<1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

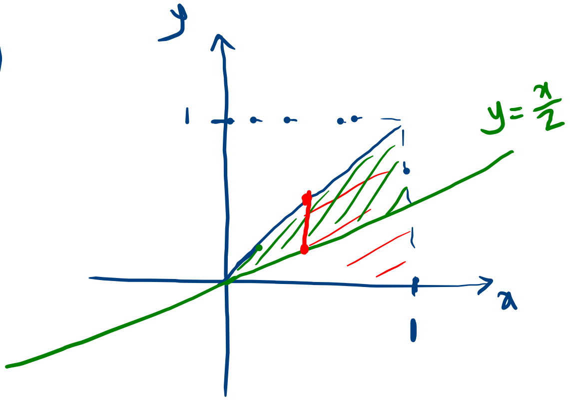
تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = X/Y$ را حساب کنید.

$f_Z(z) = ?$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X/Y \le z) = P(\underbrace{X \le zY})$$

$$= P\left(\frac{X}{z} \le Y\right) = \int_{0}^{1} \int_{x/2}^{x} (x+4y)\,dy\,dx$$

$x \quad y$



$$= \int_0^1 xy + 2y^2 \Big|_{x/z}^{x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + 2x^2 - \frac{x^2}{z} - \frac{2x^2}{z^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3z} - \frac{2}{3z^2} = 1 - \frac{1}{3z} - \frac{2}{3z^2}$$

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{3z^2} + \frac{4}{3z^3} \qquad z>1}$$

$$\begin{cases} Z = X/Y \\ W = Y \end{cases} \qquad J(x,y) = \begin{vmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y} = \frac{1}{w}$$

$$\begin{cases} X = ZW \\ Y = W \end{cases} \qquad f_{ZW}(z,w) = \frac{f_{XY}(zw, w)}{\left|\frac{1}{w}\right|} = |w|\,(zw + 4w)$$

$$\boxed{0 < y < x < 1}$$

$$0 < \boxed{w < \boxed{zw}} \boxed{< 1}, \quad z > 1$$

$$\boxed{0 < w < \frac{1}{z}, \quad z > 1}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{ZW}(z,w)\,dw = \int_0^{1/z} w(zw + 4w)\,dw$$

متغیرهای تصادفی مشترکاً نرمال

X و Y مشترکاً نرمال هستند، اگر و تنها اگر

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \underbrace{2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}$$

- اگر X و Y مشترکاً نرمال بوده و ناهمبسته نیز باشند ($\rho = 0$)، آنگاه مستقل خواهند بود.

مستقل $\Rightarrow$ uncorrelation

$\rho = 0$

$X, Y \longrightarrow$ مشترکاً نرمال باشند

$$Z = aX + bY$$

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

متغیرهای تصادفی مشترکاً نرمال

- می‌دانیم که در حالت کلی: استقلال $\Leftarrow$ ناهمبستگی، اما: ناهمبستگی $\nLeftarrow$ استقلال؛

- ولی در مورد متغیرهای تصادفی مشترکا نرمال داریم: استقلال $\Leftrightarrow$ ناهمبستگی.

- قضیه: اگر X و Y مشترکاً نرمال بوده و $\begin{cases} Z = a_{11}X + a_{12}Y \\ W = a_{21}X + a_{22}Y \end{cases}$، آنگاه Z و W نیز مشترکاً نرمال خواهند بود.

• اثبات: هر ترکیب خطی از Z و W، یک ترکیب خطی از X و Y خواهد بود، پس نرمال است (چون X و Y مشترکاً نرمال هستند). درنتیجه Z و W نیز مشترکاً نرمال هستند.