Engmath _ HW4 _ 810101492

علیرضا شاکری

1)

$$9\,u_{xx} = u_{tt}, \quad 0<x<\pi$$

$$\begin{cases} u_x(0,t)=0, \ u_x(2,t)=3, \ t>3 \longrightarrow \text{Boundary Condition (BC)} \\ u(x,0)=0, \ u_t(x,0)=\cos 3x+\sin 2x \longrightarrow \text{Initial Condition (IC)} \end{cases}$$

معادله همگن است اما BC ناهمگن است (چون $u_x(2,t)=3$) پس داریم:

$$u(x,t) = \underbrace{w(x,t)}_{\text{پاسخ حالت پایدار}} + \underbrace{V(x,t)}_{\text{پاسخ حالت گذرا}}$$

$$\xrightarrow[55]{\text{neuman BC از نوع}} w(x,t) = x\,a(t) + \frac{x^2}{2L}\left[b(t)-a(t)\right]$$

$$\xrightarrow[,\ L=\pi]{a(t)=0,\ b(t)=3} w(x,t) = \frac{3x^2}{2\pi}$$

$$\Longrightarrow u(x,t) = V(x,t) + \frac{3x^2}{2\pi} \quad (*) \quad \begin{cases} \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}} u_{xx} = V_{xx} + \frac{6}{2\pi} \\ \xrightarrow{\frac{d^2}{dt^2}} u_{tt} = V_{tt} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{9u_{xx}=u_{tt}} 9\left(V_{xx}+\frac{6}{2\pi}\right) = V_{tt} \quad (\bigstar)$$

بررسی همگن شدن BC

اعمال شرایط مرزی : $u_x(0,t)=0 \xrightarrow{(*)} V_x(0,t) + \left.\frac{6x}{2\pi}\right]_{x=0} = 0 \Longrightarrow V_x(0,t)=0$ (I)

$u_x(\pi,t)=3 \xrightarrow{(*)} V_x(\pi,t) + \left.\frac{6x}{2\pi}\right]_{x=2\pi} = 3 \Longrightarrow V_x(\pi,t)=0$ (II)

از (I) و (II) نتیجه می‌گیریم که BC همگن شده است.

اعمال شرایط اولیه : $u(x,0)=0 \xrightarrow{(*)} V(x,0) + \frac{3x^2}{2\pi} = 0 \Longrightarrow V(x,0) = -\frac{3x^2}{2\pi}$

$u_t(x,0) = \cos 3x + \sin 2x \xrightarrow{(*)} V_t(x,0) = \cos 3x + \sin 2x$

طبق $(\bigstar)$ برای حالت گذرا، معادله ناهمگن داریم و طبق (I) و (II)، BC همگن (نیومن) $\Leftarrow$ جواب حدسی می‌گذاریم (صفحه بعد)

ادامه ۱)

$\overset{\text{ص } 4}{\Longleftarrow}$ چون BC از نوع نیومن است، جواب به سری به این شکل است :

(III) $$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\overset{L=\pi}{=\!=}\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos(nx)=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos nx$$

$$\overset{(\star)}{\Longrightarrow}\ 9\left(v_{xx}+\frac{3}{\pi}\right)=v_{tt}\ \overset{(III)}{\Longrightarrow}\ -9\sum_{n=1}T_n(t)\,n^2.\cos nx+\frac{27}{\pi}=\ddot{T}_0(t)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n(t)\cos(nx)\Longrightarrow\frac{27}{\pi}=\ddot{T}_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\underbrace{9n^2T_n(t)+\ddot{T}_n(t)}\Big]\cos(nx)$$

ضریب a_0 سری فوریه تابع $\frac{27}{\pi}$

ضریب کسینوسی a_n سری فوریه تابع $\frac{27}{\pi}$

$$a_0=\ddot{T}_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{27}{\pi}\,dx=\frac{27}{\pi^2}x\Big]_0^{\pi}=\frac{27}{\pi}$$

$$\Longrightarrow T_0(t)=\frac{27}{2\pi}t^2+ct+c'$$

$$a_n=9n^2T_n(t)+\ddot{T}_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{27}{\pi}\cos(nx)\,dx=\frac{54}{\pi^2 n}\sin nx\Big]_0^{\pi}=0$$

$$\Longrightarrow 9n^2T_n(t)+\ddot{T}_n(t)=0\ \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}}\ r^2+9n^2=0\Longrightarrow r=\pm i3n$$

$$\xrightarrow{\text{جواب مختلط است}}\ T_n(t)=A_n\cos(3nt)+B_n\sin(3nt)$$

$$v(x,t)=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos nx=\frac{27}{2\pi}t^2+ct+c'+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos 3nt+B_n\sin 3nt\right)\cos nx$$

$$\overset{t=0}{\Longrightarrow}v(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A(n)(1)+B(n)(0)\right]\cos nx+c'=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+c'=\frac{-3x^2}{2\pi}$$

a_n سری فوریه $\frac{-3x^2}{2\pi}$ ‏— a_0 سری فوریه $\frac{-3x^2}{2\pi}$ ‏— طبق رابطه صفحه قبل

$$c'=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{-3x^2}{2\pi}dx=\frac{-x^3}{2\pi^2}\Big]_0^{\pi}=\frac{-\pi}{2}$$

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{-3x^2}{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{-3}{\pi^2}\left(\cancel{x^2\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_0^{\pi}}-\int_0^{\pi}\frac{2x}{n}\sin nx\,dx\right)=$$

$$\frac{+3}{\pi^2}\left(-\frac{2x}{n^2}\cos nx\Big]_0^{\pi}+\frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\cancel{\cos nx\,dx}\right)=\frac{-6}{\pi n^2}\cos n\pi=\frac{-6}{\pi n^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow V_t(x,t) = \frac{27}{\pi}t + C + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-3nA_n \sin 3nt + 3nB_n \cos 3nt\right]\cos nx$$

$$\xRightarrow{t=0} V_t(x,0) = C + \sum_{n=1}^{\infty}(3nB_n)\cos nx = \cos 3x + \sin 2x$$

$\cos 3x+\sin 2x$ سری فوریه a_0 — $\cos 3x+\sin 2x$ سری فوریه a_n — طبق رابطه بدست آمده در شرط اول

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos 3x + \sin 2x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{+\sin 3x}{3} - \frac{\cos 2x}{2}\right)_0^{\pi} = 0$$

$$3nB_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos 3x + \sin 2x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(n+3)x + \cos(n-3)x\right]dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+2)x - \sin(n-2)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{1}{n+3}\sin(n+3)x + \frac{1}{n-3}\sin(n-3)x\right]_0^{\pi}}_{0} + \left[\frac{-1}{n+2}\cos(n+2)x + \frac{1}{n-2}\cos(n-2)x\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{4(\cos n\pi - 1)}{n^2-4}\right) = \frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n^2-4} \Rightarrow B_n = \frac{4}{3n\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n^2-4}$$

جایگذاری

$$\Longrightarrow u(x,t) = \underbrace{\frac{3x^2}{2\pi}}_{w(x,t)} + \frac{27}{2\pi}t^2 + 0 - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-6}{n^2\pi}(-1)^n\cos(3nt) + \frac{4}{3n\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n^2-4}\sin(3nt)\right]\cos(nx)$$

(2

$$\longrightarrow L = 2\pi$$

$$u_t = 4u_{xx} \qquad 0<x<2\pi \;,\; 0<t$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \;,\; u(2\pi,t)=0 \longrightarrow & \text{BC دیریکله است} \\ u(x,0) = \delta(x-\frac{1}{2}) \longrightarrow IC \end{cases}$$

معادله همگن است و BC نیز همگن است (شرایط مرزی BC نیز دیریکله است، پس داریم)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4}u_t = 4u_{xx} \Rightarrow \frac{1}{4}\sum_{n=1}\dot{T}_n(t)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n}{2}\right)^2 T_n(t)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{4}\dot{T}_n(t) = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 T_n(t) \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \frac{r}{4} = -\frac{n^2}{4} \Rightarrow r = -n^2$$

$$\Longrightarrow T_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

حال IC را اعمال می‌کنیم

$$\xRightarrow{t=0} u(x,0) = \delta(x-\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

ضریب سینوسی b_n برای سری فوریه تابع $\delta(x-\frac{1}{2})$ است، پس داریم

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(x-\frac{1}{2})\sin\left(\frac{nx}{2}\right)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)f(x) = f(x_0)$$

$$\Longrightarrow A_n = \frac{1}{\pi}\sin\frac{n}{4}$$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n}{4})}{\pi}e^{-n^2 t}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

3)

$$u_t = 4u_{xx} + \Pi\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right), \qquad 0<x<\underset{L=2\pi}{2\pi}\,, \quad 0<t$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0\,, \quad u(2\pi,t)=1 & \Longrightarrow \text{BC دیریکله} \\ u(x,0)=\Pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)+\frac{x}{2\pi} & \Longrightarrow \text{IC} \end{cases}$$

از آنجا که معادله ناهمگن با BC ناهمگن از نوع دیریکله داریم، پس می‌نویسیم: $u(x,t)=\overset{\text{گذرا}}{v(x,t)}+\overset{\text{پایدار}}{w(x,t)}$

$$\xRightarrow{\text{دیریکله}} w(x,t) = a(t) + \frac{x}{L}\big(b(t)-a(t)\big)$$

$$\xrightarrow[a(t)=0,\ b(t)=1]{L=2\pi} w(x,t) = \frac{x}{2\pi} \qquad \Longrightarrow u(x,t) = v(x,t)+\frac{x}{2\pi}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{cases} u_t = v_t \\ u_{xx}=v_{xx} \end{cases}\right\} \Longrightarrow \underbrace{v_t = 4v_{xx} + \Pi\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right)}_{\text{معادله ناهمگن برای } V}$$

اعمال شرایط مرزی BC : $u(0,t)=v(0,t)=0$

$$u(2\pi,t)=v(2\pi,t)+1=1 \Longrightarrow v(2\pi,t)=0$$

BC همگن شد $\Longleftarrow$

اعمال شرایط اولیه IC: $u(x,0)=v(x,0)+\frac{x}{2\pi}=\Pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)+\frac{x}{2\pi}$

$$\Longrightarrow v(x,0)=\Pi\left(\frac{x}{2\pi}\right) \longrightarrow \text{IC}$$

حال یک معادله ناهمگن با BC همگن برای V داریم. پس جواب حدسی دیریکله را استفاده می‌کنیم:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \overset{L=2\pi}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

ادامه صفحه بعد

$$v_t = 4v_{xx} + \Pi \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(t) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 4\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n}{2}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) - \Pi\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right)$$

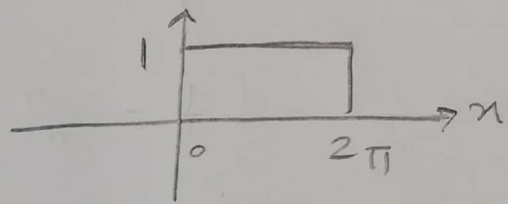
$$\Longrightarrow \Pi\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\dot{T}_n(t) + 4\frac{n^2}{4} T_n(t)}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

ضریب سینوسی b_n برابر سری فوریه Π با $L=2\pi$

$$\Longrightarrow \dot{T}_n(t) + n^2 T_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L \Pi\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Pi\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\frac{nx}{2}\, dx = \frac{-2\left((-1)^n - 1\right)}{n\pi}$$

$$\Pi\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right) \xrightarrow{\text{demos}}$$



$$\Longrightarrow \dot{T}_n(t) + \underbrace{n^2}_{p} T_n(t) = \underbrace{\frac{2}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right)}_{q}$$

طبق فرمول معادلات دیفرانسیل

$$T_n(t) = e^{-\int p\,dt}\left[\int q e^{\int p\,dt} dt + c\right]$$

$$\Longrightarrow T_n(t) = e^{-\int n^2 dt}\left[\int \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) e^{\int n^2 dt} dt + C_n\right]$$

$$\Longrightarrow T_n(t) = e^{-n^2 t}\left[\frac{2}{\pi n^3} e^{n^2 t}\left(1-(-1)^n\right) + C_n\right]$$

$$\Longrightarrow T_n(t) = \frac{2}{\pi n^3}\left(1-(-1)^n\right) + C_n e^{-n^2 t}$$

$$\Longrightarrow v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi n^3}\left(1-(-1)^n\right) + C_n e^{-n^2 t}\right] \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

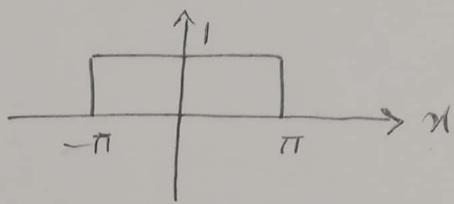
$$\xrightarrow[\text{برابر } v]{IC} v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{2}{\pi n^3}\left(1-(-1)^n\right) + C_n\right]} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = \Pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)$$

ضریب سینوسی b_n سری فوریه تابع $\Pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ با $L=2\pi$

ادامه صفحه بعد

بازه مسئله
$0 < x < 2\pi$

$\Pi\left(\frac{x}{2\pi}\right) \xrightarrow{\text{demos}}$



$$\Longrightarrow \frac{2}{\pi n^3}\left(1-(-1)^n\right)+C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Pi\left(\frac{x}{2\pi}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx$$

$$\xrightarrow[0<x<2\pi]{-\pi<x<\pi} \frac{2}{\pi n^3}\left(1-(-1)^n\right)+C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{-2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right)$$

$$\Longrightarrow C_n = \left((-1)^n-1\right)\frac{2}{\pi n^3} - \frac{2}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right)$$

حال جایگذاری می‌کنیم:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

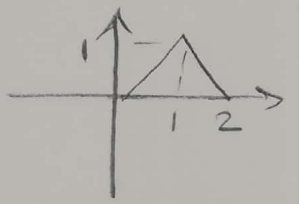
$$= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) + w(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi n^3}\left(1-(-1)^n\right) + \left(\left((-1)^n-1\right)\frac{2}{\pi n^3} - \frac{2}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right)\right) \times e^{-n^2 t}\right] \sin\left(\frac{nx}{2}\right) + \underbrace{\frac{x}{2\pi}}_{w(x,t)}$$

علامت ضرب

(٤

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0<x<\overset{\to L=1}{1}, \qquad 0<t$$



$$\begin{cases} u_x(0,t) = t-6 \ , \ u(1,t) = 7t \implies BC \\ u(x,0) = 6-6x \ , \ u_t(x,0) = \Lambda(x-1) \implies IC \end{cases}$$

$$u(x,t) = \overset{\text{گذرا}}{V(x,t)} + \overset{\text{پایدار}}{W(x,t)}$$

⇐ معادله همگن با BC ناهمگن داریم.

نوع ناهمگنی BC، از نوع 4 (ترکیب 2) است. پس داریم:

$$W(x,t) = (x-L)\,a(t) + b(t) \xrightarrow[\substack{a(t)=t-6 \\ b(t)=7t}]{L=1} (x-1)(t-6) + 7t = W(x,t)$$

$$\xRightarrow{\text{جایگذاری}} u(x,t) = V(x,t) + (x-1)(t-6) + 7t$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u_{tt} = V_{tt} \\ u_{xx} = V_{xx} \\ W_t = x-1+7 = x+6 \\ W_x = t-6 \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \xRightarrow{u_{tt}=u_{xx}} V_{tt} = V_{xx}$$

BC اعمال شرایط مرزی :

$$u_x(0,t) = t-6 = V_x(0,t) + \underbrace{W_x(0,t)}^{t-6} = V_x(0,t) + t-6$$

$$\Longrightarrow V_x(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 7t = V(1,t) + \underbrace{W(1,t)}^{((1)-1)(t-6)+7t} = V(1,t) + 7t \Rightarrow V(1,t) = 0$$

اعمال شرایط اولیه IC :

$$u(x,0) = V(x,0) + \underbrace{W(x,0)}^{(x-1)(0-6)+7(0)} = -6(x-1) + V(x,0) = 6-6x$$

$$\Longrightarrow V(x,0) = 0$$

$$u_t(x,0) = V_t(x,0) + W_t(x,0) = V_t(x,0) + x + 6 = \Lambda(x,1)$$

$$\Longrightarrow V_t(x,0) = \Lambda(x-1) - x - 6$$

حال معادله v همگن است با BC همگن. پس از جواب حدسی استفاده می کنیم طبق شرایط مرزی ترکیبی ـ نوع سوم

$$\Longrightarrow v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{2n-1}{2L}\pi x\right)$$

$$\xrightarrow{v_{xx}=v_{tt}} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\left[-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)$$

$$\Longrightarrow -T_n(t)\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 = \ddot{T}_n(t) \Longrightarrow r^2 = -\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2$$

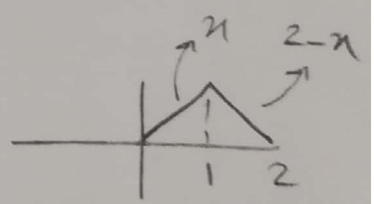
$$\Longrightarrow r = \pm i\,\frac{2n-1}{2}\pi \xrightarrow{\text{جواب مختلط}} T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi t\right) + B_n \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi t\right)$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi t\right) + B_n \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi t\right)\right] \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)$$

$$\xRightarrow{IC1} v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) = 0 \Longrightarrow A(n) = 0$$

$$\xRightarrow{IC2} v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\underbrace{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) B(n)}_{\text{ضریب کسینوسی } a_n \text{ سری فوریه تابع } \Lambda - x - 6} \cdot \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)\Big] = \Lambda - x - 6$$

$$\Longrightarrow \frac{2n-1}{2}\pi\, B(n) \overset{L=1}{=} 2\int_0^1 (\Lambda - x - 6) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) dx$$



$$= 2\int_0^1 (x - x - 6) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) dx = \frac{-24}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{2n-1}{n}\pi x\right)\Big|_0^1 =$$

$$\frac{-24}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) = \frac{2n-1}{2}\pi\, B(n) \Longrightarrow B(n) = \frac{2}{(2n-1)\pi} \cdot \frac{-24}{(2n-1)\pi} \sin\frac{2n-1}{2}\pi$$

$$\Longrightarrow B(n) = \frac{-48}{(2n-1)^2\pi^2} \overbrace{\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}^{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) = -\cos(n\pi)} = \frac{+48}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^n$$

حال $A(n)$ و $B(n)$ را جایگذاری می کنیم:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{48(-1)^n}{(2n-1)^2 \pi^2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi t\right) \right] \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) +$$

$$(x-1)(t-6) + 7t$$

(6

$$u_{xx} - u_{tt} = 7xt \, ; \, 0<x<2 \Longrightarrow L=2$$

$$\begin{cases} u(0,t)=4 \, , \quad u(2,t)=7 \xrightarrow{\text{دریکله}} \text{از نوع } BC \\ u(x,0)=x^2+\frac{3}{2}x \, , \quad u_t(0,x)=2 \Longrightarrow IC \end{cases}$$

معادله ناهمگن است و BC ناهمگن از نوع دریکله :

$$u(x,t) = \underbrace{v(x,t)}_{\text{گذرا}} + \underbrace{w(x,t)}_{\text{پایدار}}$$

$$\xRightarrow{\text{دریکله}} w(x,t) = a(t) + \frac{x}{L}(b(t)-a(t)) \xrightarrow[a(t)=4,\ b(t)=7]{L=2}$$

$$w(x,t) = 4 + \frac{3x}{2}$$

$$\xRightarrow{\text{جایگذاری}} u(x,t) = v(x,t) + 4 + \frac{3x}{2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}} u_{xx} = v_{xx} \\ \xrightarrow{\frac{d^2}{dt^2}} u_{tt} = v_{tt} \end{cases} \xrightarrow{u_{xx}-u_{tt}=7xt} v_{xx} - v_{tt} = 7xt$$

BC

اعمال شرایط مرزی :

$$u(0,t) = v(0,t) + 4 = 4 \Longrightarrow v(0,t) = 0$$

$$u(2,t) = v(2,t) + 4 + 3 = 7 \Longrightarrow v(2,t) = 0$$

: اعمال شرایط اولیه IC

$$u(x,0) = V(x,0) + 4 + \frac{3x}{2} = x^2 + \frac{3}{2}x \Longrightarrow V(x,0) = x^2 - 4$$

$$u_t(x,0) = V_t(x,0) = 2$$

حال یک معادله ناهمگن با BC همگن داریم پس می توانیم از جواب حدسی استفاده کنیم. پس داریم:

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$\xrightarrow{V_{xx} - V_{tt} = 7xt} \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = 7xt$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{-\left(\frac{n^2\pi^2}{4} T_n(t) + \ddot{T}_n(t)\right)}_{\text{ضریب سینوسی } b_n \text{ سری فوریه تابع } 7xt} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = 7xt$$

$$\Longrightarrow -\left(\frac{n^2\pi^2}{4} T_n(t) + \ddot{T}_n(t)\right) = \int_0^2 7xt \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = 7t \int_0^2 x \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$$

$$= 7t\left(\left[-\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2}x\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx\right) = 7t\left(\frac{(-1)^{n+1} 4}{n\pi}\right)$$

چندجمله‌ای درجه ۱

$$\Longrightarrow \frac{n^2\pi^2}{4} T_n(t) + \ddot{T}_n(t) = 7t\left(\frac{4(-1)^n}{n\pi}\right)$$

از آنجایی که معادله ناهمگن است، داریم:

جواب عمومی — جواب خصوصی

$$T_n(t) = T_{nh}(t) + T_{np}(t)$$

ابتدا فرض می‌کنیم معادله همگن است و جواب عمومی $T_{nh}(t)$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{n^2\pi^2}{4} T_n(t) + \ddot{T}_n(t) = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \frac{n^2\pi^2}{4} + r^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm i\,\frac{n\pi}{2}$$

تعداد ریشه‌های مادر صفر برابر صفر است. ⟸

$$\Longrightarrow T_{nh}(t) = A(n) \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) + B(n) \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

ادامه صفحه بعد

بخش ناهمگن چندجمله ای درجه ۱ است

$$\Rightarrow T_{np}(t) = Ct + k \xrightarrow[\text{معادله اصلی}]{\text{جایگذاری در}} \frac{n^2\pi^2}{4}(Ct+k) + 0 = 7t\left(\frac{(-1)^n 4}{n\pi}\right)$$

$$\Rightarrow k = 0 \,,\; C = \frac{4\times 4 \times (-1)^n}{n^3\pi^3} \times 7t = \frac{112(-1)^n}{n^3\pi^3} t$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(T_{nh}(t) + T_{np}(t)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right) + \frac{112(-1)^n}{n^3\pi^3}t\right] \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

IC1

$$\Rightarrow v(x,0) = x^2 - 4 = \sum_{n=1}^{\infty} A(n) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

ضریب سینوسی bn برای سری فوریه تابع x^2-4 با $L=2$

با ماشین حساب

$$\Rightarrow A(n) = \int_0^2 (x^2-4)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{-8}{n^3\pi^3}\left(n^2\pi^2 - 2(-1)^n + 2\right)$$

IC2

$$\Rightarrow v_t(x,0) = 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\pi}{2}B(n) + \frac{112(-1)^n}{n^3\pi^3}\right] \sin\frac{n\pi}{2}x \Rightarrow$$

ضریب سینوسی bn سری فوریه تابع ثابت 2 با $L=2$

$$\frac{n\pi}{2}B(n) + \frac{112(-1)^n}{n^3\pi^3} = \int_0^2 2\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx = \left.\frac{-4}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]_0^2$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) \Rightarrow B(n) = \left(\frac{4((-1)^n-1)}{n\pi} - \frac{112(-1)^n}{n^3\pi^3}\right)\frac{2}{n\pi}$$

حال باید همه مقادیر بدست آمده را جایگذاری کنیم:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-8}{n^3\pi^3}\left(n^2\pi^2 - 2(-1)^n + 2\right)\cos\frac{n\pi}{2}t + \left(\frac{4((-1)^n-1)}{n\pi} - \frac{112(-1)^n}{n^3\pi^3}\right)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t + \frac{112(-1)^n}{n^3\pi^3}t\right] +$$

$$+ \underbrace{4 + \frac{3x}{2}}_{w(x,t)}$$