علیرضا کریمی ۸۱۰۱۰۱۴۹۲

۱)

الف) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)} = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots) =$

$\dfrac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} \qquad |z|<1,\ z\neq 0$

$f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)} = \dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{z}-1}\right) = \dfrac{1}{z^2}\left(-1-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}-\cdots\right)$

$= \dfrac{-1}{z^2} - \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{z^4} - \cdots = -\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^{n+2}} \qquad |z|>1$

2 ب)

حول $1+i$ است پس باید این عبارت را برحسب نقطه‌مان ایجاد کنیم.

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(z-i-1)+i+1} - \frac{1}{(z-i-1)+i}$$

$$\frac{1}{(z-1-i)+(1+i)} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1}{1+\frac{z-1-i}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n (-1)^n \qquad \left|\frac{z-1-i}{1+i}\right|<1$$

I

$$\frac{1}{z-1-i+1+i} = \frac{1}{z-1-i} * \frac{1}{1+\frac{1+i}{z-1-i}} = \frac{1}{z-1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{z-1-i}\right)^n (-1)^n \qquad \left|\frac{z-1-i}{1+i}\right|>1$$

II

$$\frac{-1}{(z-1-i)+i} = \frac{-1}{i} \times \frac{1}{\frac{z-i-1}{i}+1} = \frac{-1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i-1}{i}\right)^n (-1)^n \qquad \left|\frac{z-1-i}{i}\right|<1$$

III

$$\frac{-1}{z-i-1+1} = \frac{-1}{z-i-1} \times \frac{1}{1+\frac{i}{z-i-1}} = \frac{-1}{z-i-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z-i-1}\right)^n (-1)^n \qquad \left|\frac{z-i-1}{i}\right|>1$$

IV

حال سری‌ها را در نواحی مختلف بدست می‌آوریم

$$\left|\frac{z-1-i}{1+i}\right|<1 \longrightarrow |z-1-i|<|1+i| \longrightarrow |z-1-i|<\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{z-1-i}{1+i}\right|>1 \longrightarrow |z-1-i|>\sqrt{2}$$

ادامه در صفحه بعد

ادامه ب)

$$\left|\frac{z-1-i}{i}\right|<1 \longrightarrow |z-1-i|<|i| \longrightarrow |z-1-i|<1$$

$$\left|\frac{z-1-i}{i}\right|>1 \longrightarrow |z-1-i|>1$$

$$\Longrightarrow |z-1-i|<1 \Longrightarrow f(z)=\frac{1}{(z-1-i)+(1+i)}+\frac{-1}{(z-1-i)+i}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n(-1)^n-\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i-1}{i}\right)^n(-1)^n$$

توان‌های z بزرگتر مساوی صفر ← فقط بسط تیلور داریم

$$\Longrightarrow 1<|z-1-i|<\sqrt{2} \Longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n(-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-1-i}\right)^{n+1}(i)^n$$

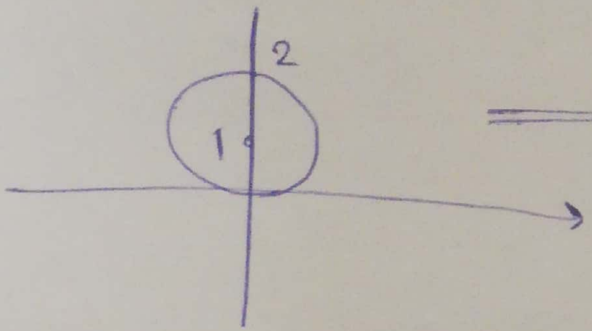
z در مخرج نداریم تیلور است این ترم

z در مخرج داریم ← بسط لوران برای ترم دوم

$$\Longrightarrow |z-1-i|>\sqrt{2} \Longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{(z-1-i)^{n+1}}(-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-1-i}\right)^{n+1}(-1)^n$$

z در مخرج ← بسط لوران

2)



$$\Longrightarrow x^2+(y-1)^2 \le 1$$

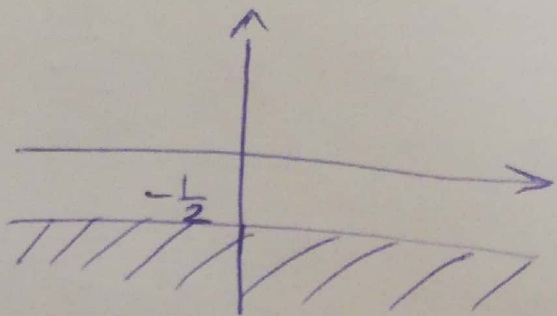
$$\Longrightarrow x^2+y^2-2y \le 0$$

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \xrightarrow{\text{نگاشت } \frac{1}{z}} A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0$$

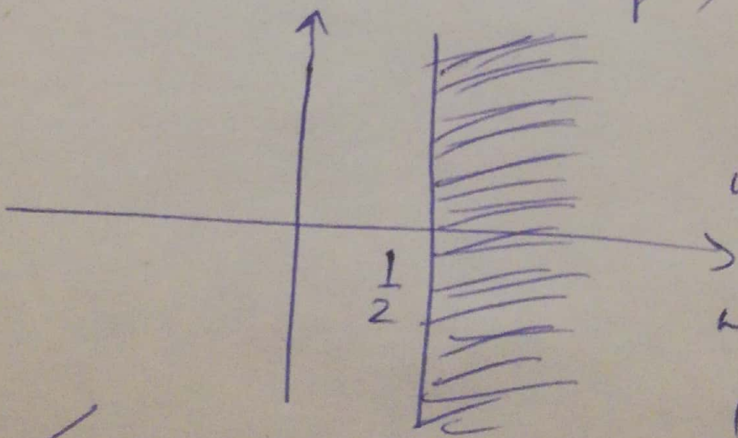
تحت نگاشت $\frac{1}{z}$ داریم

$$\Longrightarrow 1+2v \le 0 \longleftrightarrow (A=1, B=0, C=-2, D=0)$$

$$\Longrightarrow v \le -\frac{1}{2}$$



نگاشت iz
$\Longrightarrow$
(دوران $\frac{\pi}{2}$)



$|i|=1$

زاویه i : $\frac{\pi}{2}$

$w=iz$:

دوران $\frac{\pi}{2}$ داریم

پس در واقع برای نگاشت $w=\frac{i}{z}$ یکبار $\frac{1}{z}$ و یکبار iz استفاده کردیم

پس ناحیه $\begin{cases} w=u+iv \\ -\infty<v<\infty \\ u \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ در واقع نگاشت داده شده در سوال ۱ $x^2+(y-1)^2 \le 1$ تحت

همان نگاشت $w=\frac{i}{z}$ خواهد بود.

4)

الف)

ابتدا با استفاده از قضیه کوشی - ریمان چک می‌کنیم که تابع تحلیلی است یا خیر

$$f(x,y) = \overbrace{x^2 - y^2}^{u} \overbrace{- 2xy}^{v}\, j$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \Longrightarrow u_x = 2x ,\; u_y = -2y \\ v = -2xy \Longrightarrow v_x = -2y ,\; v_y = -2x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u_x \neq v_y ,\; -u_y \neq v_x$$

$\Longrightarrow$ البته تنها در نقطه $x=0 , y=0$ این برابری‌ها صادق است. در نقطه $x=0 , y=0$ تحلیلی است

ولی در کل ناحیه انتگرال‌گیری تحلیلی نیست

ب)

$$f(x,y) = \overbrace{e^x \cos y}^{u} + j \overbrace{e^x \sin y}^{v}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u = e^x \cos y \Longrightarrow u_x = e^x \cos y ,\; u_y = -e^x \sin y \\ v = e^x \sin y \Longrightarrow v_x = e^x \sin y ,\; v_y = e^x \cos y \end{cases}$$

$\Longrightarrow u_x = v_y ,\; v_x = -u_y \Longrightarrow$ کوشی - ریمان برقرار است

تابع تحلیلی است $\Longrightarrow$ در ادامه آن را به صورت تابعی از z می‌نویسیم

ادامه ۴)

$$\Longrightarrow e^{x}\cos y + j e^{x}\sin y = e^{x}(\cos y + j\sin y) = e^{x+jy} = e^{z}$$

$$\Longrightarrow \int_{j+1}^{0} e^{z}dz = e^{z}\Big)_{j+1}^{0} = 1 - e^{j+1} = 1 - e\,(\cos(1) - j\sin(1))$$

ج)

$$f(x,y) = \overbrace{\sin x \cosh y}^{u} + j\,\overbrace{\cos x \sinh y}^{v}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u = \sin x \cosh y \Longrightarrow u_x = \cos x \cosh y \,,\; u_y = \sin x \sinh y \\ v = \cos x \sinh y \Longrightarrow v_x = -\sin x \sinh y \,,\; v_y = \cos x \cosh y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u_x = v_y \,,\; v_x = -u_y \Longrightarrow$$ برقراری کوشی - ریمان

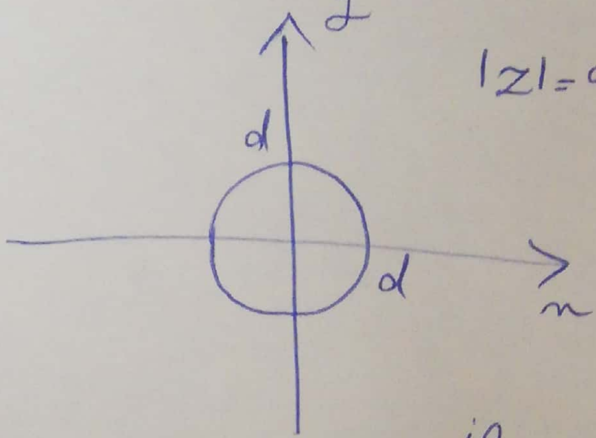
تابع تحلیلی است بر حسب z داریم:

$$\Longrightarrow \sin x \cos(jy) + \cos x \sin(jy)$$

$$= \sin(x + jy) = \sin z \Longrightarrow \int_{1}^{3j} \sin(z)dz = -\cos(z)\Big)_{1}^{3j}$$

$$= \cos(1) - \cos(3j) = \cos(1) - \cosh(3)$$

b)



$|z|=d$

$\xrightarrow[\text{قطبی}]{\text{معادله بفرم}} z = re^{i\theta} = de^{i\theta}$

$$w = z^k + \frac{1}{z^k} \xrightarrow{z=de^{i\theta}} d^k e^{i\theta k} + d^{-k} e^{-i\theta k} =$$

$$d^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) + d^{-k}(\cos k\theta - i\sin k\theta) =$$

$$(d^k + d^{-k})(\cos k\theta) + i(d^k - d^{-k})\sin k\theta$$

$$w = u + iv$$

از طرفی داریم:

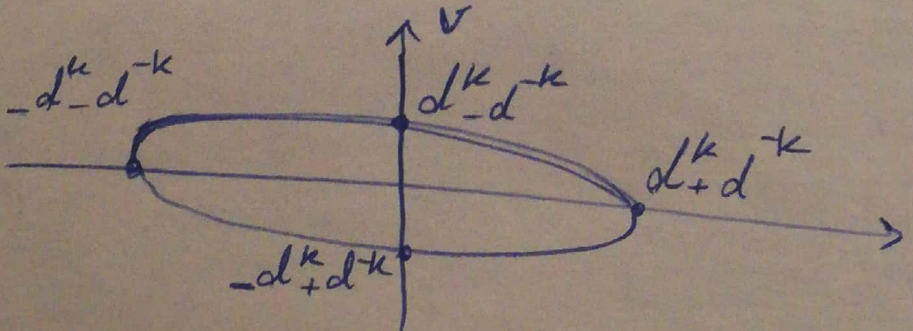
$$\Rightarrow \begin{cases} u = (d^k + d^{-k})\cos k\theta \Rightarrow \cos k\theta = \dfrac{u}{d^k + d^{-k}} \\ v = (d^k - d^{-k})\sin k\theta \Rightarrow \sin k\theta = \dfrac{v}{d^k - d^{-k}} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 t + \cos^2 t = 1} \left(\frac{u}{d^k + d^{-k}}\right)^2 + \left(\frac{v}{d^k - d^{-k}}\right)^2 = 1 \longrightarrow \text{فرم بیضی}$$

$d>1$

$$\Rightarrow d^k + d^{-k} > d^k - d^{-k}$$

$\Rightarrow$



$|z|=d$

$w = z^k + \frac{1}{z^k}$