

به نام خدا



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - بهار ۱۴۰۱

پاسخ تمرین شماره ۷

دستیار آموزشی این مجموعه: محمد عظیم پور

azimpour102@ut.ac.ir



تاریخ تحویل: ۲۷ اردیبهشت

(۱) با استفاده از لم تزریق نشان دهید زبان‌های زیر مستقل از متن نیستند.

(الف) $L = \{a^{2n}b^{3n}c^n | n \geq 0\}$ (نمره ۵)

Demon picks $p \geq 1$

We pick $s = a^{2p}b^{3p}c^p$

Demon picks $u, v, w, x, y | s = uvwxy, vx \neq \epsilon, |vwx| \leq p$

We pick $i = 0$

با توجه به حداکثر طول ممکن برای رشته vwX ، این رشته نمی‌تواند شامل هر سه حرف a و b و c باشد. در نتیجه در صورت برابر قرار دادن i با صفر، تعداد یک یا دو تا از سه حروف رشته کم می‌شود و تعداد حرف دیگر ثابت می‌ماند. در نتیجه دیگر شرط $\frac{N(b)}{3} = \frac{N(a)}{2} = N(c) = n$ برقرار نخواهد بود و رشته جدید عضو زبان نیست.

(ب) $L = \{a^{(n-1)(n+1)} | n \geq 1\}$ (نمره ۵)

Demon picks $p \geq 1$

We pick $s = a^{(p-1)(p+1)} = a^{p^2-1}$

Demon picks $u, v, w, x, y | s = uvwxy, vx \neq \epsilon, |vwx| \leq p$

We pick $i = 2$

طول نزدیک ترین رشته‌ای که عضو زبان باشد و بزرگتر از s باشد برابر $p(p+2) = p^2 + 2p$ است. در صورتی که i را برابر ۲ انتخاب کنیم و بخش‌های v و x را تکرار کنیم، طول رشته حاصل حداقل یکی و حداکثر به اندازه p افزایش می‌یابد (چون این دو قسمت نمی‌توانند تهی باشند و حداکثر طولشان هم p است). بنابراین طول رشته جدید حداقل به اندازه $(p^2 + 2p) - (p^2 - 1 + p) = p + 1$ از رشته معتبر بعدی کمتر خواهد بود و در نتیجه عضو زبان نیست.

(ج) $L = \{a^m b^n c^k | k = m^n \text{ and } m, n \geq 0\}$ (نمره ۱۰)

Demon picks $p \geq 1$

We pick $s = a^p b^p c^{p^p}$

Demon picks $u, v, w, x, y | s = uvwxy, vx \neq \epsilon, |vwx| \leq p$

We pick $i = 0$

با توجه به حداکثر طول ممکن برای رشته vwX ، محل قرارگیری آن می‌تواند در یکی از سه حالت زیر باشد:

۱- کاملاً در محدوده حروف a و b باشد؛ که در این صورت با قرار دادن i برابر صفر مقادیر m و n کم می‌شوند ولی مقدار k ثابت است و در نتیجه شرط $k = m^n$ برقرار نخواهد بود و رشته جدید عضو زبان نیست.

۲- کاملاً در محدوده حرف c باشد؛ که در این صورت با قرار دادن i برابر صفر مقادیر m و n ثابت است ولی مقدار k کم می‌شود و در نتیجه شرط $k = m^n$ برقرار نخواهد بود و رشته جدید عضو زبان نیست.

۳- به اندازه $j \geq 1$ داخل محدوده حرف b و به اندازه $p - j \leq |vwx| - j$ داخل محدوده حرف c باشد (این حالت فق در شرایطی می‌تواند رخ دهد که $p > 1$)؛ که در آن صورت اختلاف تعداد حروف c با مقداری که باید داشته باشند $(k = m^n)$ به این صورت محاسبه می‌شود:

$$p^{p-j} - (p^p - (|vwx| - j)) = p^{p-j} + |vwx| - p^p - j \leq p^{p-j} + p - p^p - j \leq p^{p-1} + p - p^p - 1 = (p^{p-1} - 1)(1 - p)$$

به ازای $p > 1$ پیرانتز سمت راست منفی و پیرانتز سمت چپ مثبت می‌شود و در نتیجه حاصل کل عبارت منفی است و شرط $k = m^n$ نمی‌تواند برقرار باشد و رشته جدید عضو زبان نیست.

بنابراین، در هیچکدام از حالات رشته جدید عضو زبان نخواهد بود.

۲) با استفاده از خواص زبان‌های مستقل از متن ثابت کنید زبان‌های زیر مستقل از متن هستند.

الف) $L = \{a^m b^k c^n | k, m, n \geq 0 \text{ and } (m = k + n \text{ or } k = m + n \text{ or } n = k + m)\}$ (نمره ۵)

سعی می‌کنیم تا زبان معرفی شده را به صورت اجتماع سه زبان مستقل از متن بنویسیم:

$$L_1 = \{a^m b^k c^n | m, n \geq 0 \text{ and } m = k + n\}: S \rightarrow aSc | B \quad B \rightarrow aBb | \varepsilon$$

$$L_2 = \{a^m b^k c^n | m, n \geq 0 \text{ and } k = m + n\}: S \rightarrow AB \quad A \rightarrow aAb | \varepsilon \quad B \rightarrow bBc | \varepsilon$$

$$L_3 = \{a^m b^k c^n | m, n \geq 0 \text{ and } n = m + k\}: S \rightarrow aSc | B \quad B \rightarrow bBc | \varepsilon$$

$$L = \{a^m b^k c^n | m, n \geq 0 \text{ and } (m = k + n \text{ or } k = m + n \text{ or } n = k + m)\} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$$

هر سه زبان L_1, L_2, L_3 مستقل از متن هستند و در نتیجه زبان L که اشتراک آن‌هاست نیز مستقل از متن است.

ب) $L = \{a^{m_1} b^{k_1} c^{n_1} \dots a^{m_i} b^{k_i} c^{n_i} | i \geq 0 \text{ and } \forall j \leq i, m_j, n_j \geq 0 \text{ and } k_j = 3m_j + 4n_j\}$ (نمره ۵)

زبان‌هایی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_1 = \{a^n b^{3n} | n \geq 0\}: S \rightarrow aSbbb | \varepsilon$$

$$L_2 = \{b^{4n} c^n | n \geq 0\}: S \rightarrow bbbbSc | \varepsilon$$

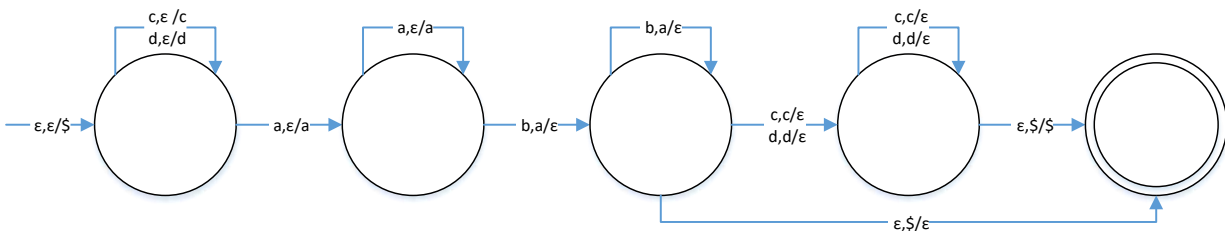
$$L_3 = \{W_1 W_2 | W_1 \in L_1 \text{ and } W_2 \in L_2\} = \{a^m b^{3m+4n} c^n | m, n \geq 0\}$$

$$L_4 = \{W^* | W \in L_3\} = L$$

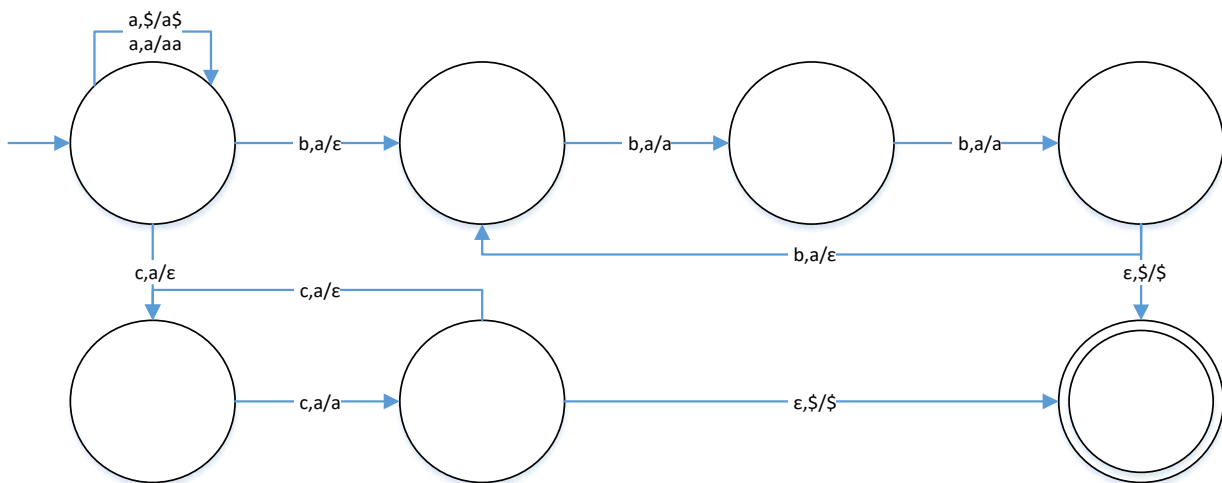
زبان‌های L_1 و L_2 مستقل از متن هستند و برای آن‌ها گرامر مستقل از متن نوشته شده است. زبان L_3 حاصل چسباندن (Concatenation) دو زبان L_1 و L_2 است و از آنجا که زبان‌های مستقل از متن نسبت به این عمل بسته هستند، زبان L_3 نیز مستقل از متن است. زبان L_4 نیز حاصل اجرای عملیات $*$ روی زبان L_3 است و از آنجا که زبان‌های مستقل از متن نسبت به این عمل بسته هستند، زبان L_4 نیز مستقل از متن است. از طرفی این زبان معادل زبان L است؛ در نتیجه زبان L هم مستقل از متن است.

۳) برای زبان‌های زیر DPDA رسم کنید.

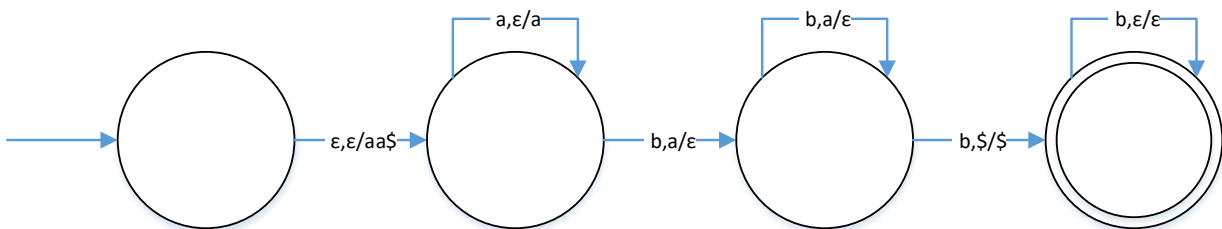
الف) $L = \{Wa^n b^n W^R | W \in (c, d)^*, n \geq 1\}$ (نمره ۱۰)



ب) $L = \{a^n b^{3n} | n \geq 1\} \cup \{a^n c^{2n} | n \geq 1\}$ (نمره ۱۰)



۴) برای زبان متناظر DPDA زیر گرامر مستقل از متن بنویسید. (۱۵ نمره)



DPDA رسم شده ابتدا ۲ عدد a در پشت می‌گذارد. سپس به هر میزان که حرف a در ورودی وارد شود (مثلاً n) همان را در پشت وارد می‌کند (در نهایت $n + 3$ تا a در پشت خواهد بود). سپس تا زمانی که در ورودی حرف b وارد شود، به ازای هر کدام یکی از a های پشت را برمی‌دارد. اگر تعداد این b ها به قدری باشد که پشت را از a خالی کند (یعنی حداقل $n + 3$ تا)، DPDA به State نهایی می‌رود و بدون توجه به تعداد b هایی که از آن به بعد در ورودی موجود باشند رشته را می‌پذیرد. بنابراین زبان مورد پذیرش DPDA به صورت زیر است:

$$L = \{a^m b^n | m \geq 0, n \geq m + 3\}$$

حال برای این زبان گرامر مستقل از متن می‌نویسیم:

$$L: S \rightarrow aSb|bbbB \quad B \rightarrow bB|\epsilon$$

۵) عملیات \circ به صورت زیر تعریف می‌شود. آیا زبان‌های مستقل از متن نسبت به این عملیات بسته هستند؟

(راهنمایی: می‌توان ثابت کرد زبان $L = \{a^n b^n a^n b^n | n \geq 0\}$ مستقل از متن نیست.) (۱۵ نمره)

$$O(L_1, L_2) = \{W_1 W_2 | W_1 \in L_1 \text{ and } W_2 \in L_2 \text{ and } |W_1| = |W_2|\}$$

زبان‌های مستقل از متن نسبت به این عملیات بسته نیستند. می‌توانیم به عنوان مثال نقض، هر دو زبان L_1 و L_2 را برابر $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ قرار دهیم. آن‌گاه حاصل اجرای عملیات O برابر زبان L می‌شود که بنابر راهنمایی صورت سوال، مستقل از متن نیست.

۶) عملیات O^* روی دو زبان به این صورت تعریف می‌شود که به ازای جفت رشته‌های با طول یکسان در دو زبان (یکی در زبان اول و دیگری در زبان دوم)، بلندترین رشته‌ای که پسوند رشته زبان اول و پیشوند رشته زبان دوم است از انتهای رشته زبان اول و ابتدای رشته زبان دوم حذف می‌کند و آن‌ها را به هم پیوند می‌زند؛ به عنوان مثال حاصل اجرای عملیات روی دو رشته **aaab** و **bbba**، برابر رشته **aaabba** خواهد بود. اگر دو زبان $L_1 = \{a^{2m} b^m | m \geq 0\}$ و $L_2 = \{b^n a^{3n} | n \geq 0\}$ را داشته باشیم، آیا حاصل $O^*(L_1, L_2)$ مستقل از متن است؟ (۲۰ نمره)

برای آنکه طول دو رشته در این دو زبان برابر شود، نیاز است تا $3m = 4n$ برقرار باشد. در نتیجه حاصل عملیات به این صورت خواهد بود:

$$L = \{a^{2m} b^{m-n} a^{3n} | m, n \geq 0 \text{ and } 3m = 4n\} = \{a^{8k} b^k a^{6k} | k \geq 0\}$$

این زبان مستقل از متن نیست. برای اثبات این امر از لم تزریق استفاده می‌کنیم:

$$\text{Demon picks } p \geq 1$$

$$\text{We pick } s = a^{8p} b^p a^{6p}$$

$$\text{Demon picks } u, v, w, x, y | s = uvwxy, vx \neq \varepsilon, |vwx| \leq p$$

$$\text{We pick } i = 0$$

با توجه به حداکثر طول ممکن برای رشته $vwxy$ ، این رشته نمی‌تواند شامل هر سه قسمت حروف باشد. در نتیجه در صورت برابر

$$\frac{N_2(a)}{3} = \frac{N_1(a)}{2} = N(b) = n$$

قرار دادن i با صفر، طول یک یا دو تا از سه بخش رشته کم می‌شود و تعداد حرف دیگر ثابت می‌ماند. در نتیجه دیگر شرط

در نتیجه فرضمان غلط است و زبان L مستقل از متن قطعی نیست.

۷) ثابت کنید زبان زیر مستقل از متن است، ولی مستقل از متن قطعی نیست. (۲۰ نمره)

$$L = \{a^m b^n | m = 2, 4, 6 \dots \text{ and } (m = 2n \text{ or } n = 2m)\}$$

ابتدا این زبان را به صورت اجتماع دو زبان مستقل از متن می‌نویسیم:

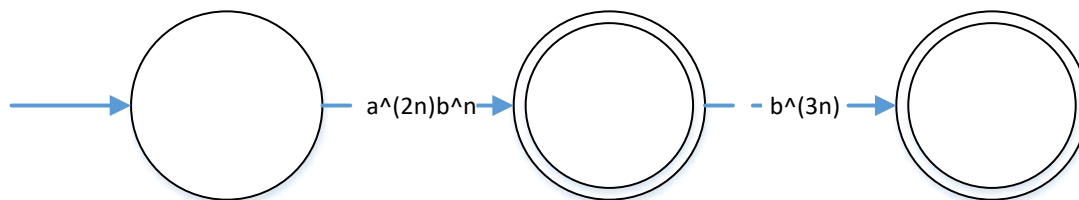
$$L_1 = \{a^{2n} b^n | n \geq 1\}: S \rightarrow aaSb | \varepsilon$$

$$L_2 = \{a^{2n} b^{4n} | n \geq 1\}: S \rightarrow aaSbbbb | \varepsilon$$

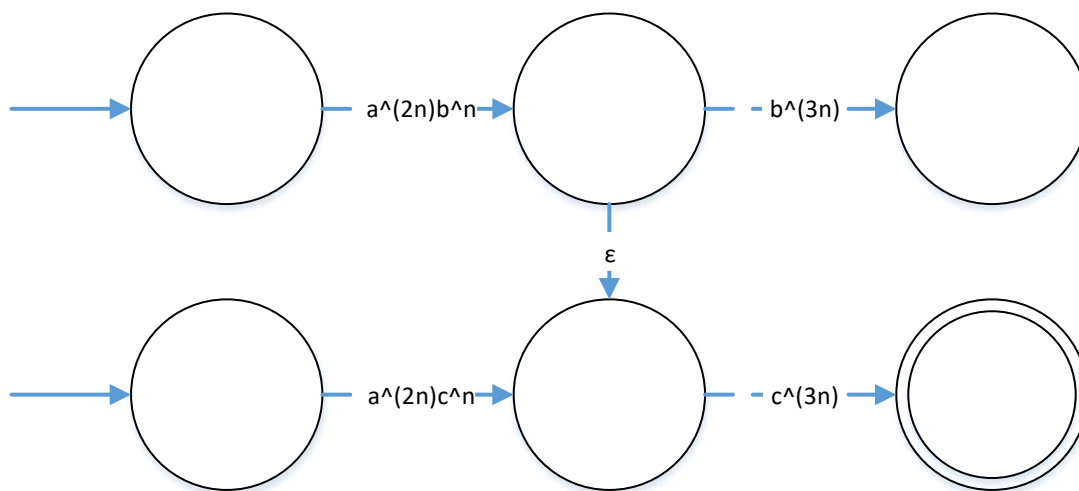
$$L = \{a^m b^n | m = 2, 4, 6 \dots \text{ and } (m = 2n \text{ or } n = 2m)\} = L_1 \cup L_2$$

دو زبان L_1 و L_2 مستقل از متن هستند زیرا می‌توان برایشان گرامر مستقل از متن نوشت. در نتیجه از آنجا که زبان‌های مستقل از متن نسبت به اجتماع گیری بسته هستند، زبان L هم مستقل از متن است.

حال به کمک برهان خلف ثابت می‌کنیم زبان L مستقل از متن قطعی نیست. فرض می‌کنیم این زبان مستقل از متن قطعی است و نتیجه یک DPDA دارد. این DPDA باید حتماً به شکل زیر باشد، یعنی دو State پایانی داشته‌باشد که در یکی رشته‌های $a^{2n}b^n$ و در دیگری رشته‌های $a^{2n}b^{4n}$ پذیرش شود؛ به شکلی که در مسیر رسیدن به دومی نیاز باشد تا از اولی نیز بگذریم.



در صورتی که این DPDA موجود باشد، می‌توانیم با کنار هم گذاشتن DPDA متناظر دو زبان و تغییر آن به شکل زیر، به یک DPDA برسیم متناظر زبان $L = \{a^{2n}b^nc^{3n} | n \geq 1\}$ باشد:



حال آنکه این زبان مستقل از متن نیست. برای اثبات این مساله از لم تزریق استفاده می‌کنیم:

Demon picks $p \geq 1$
We pick $s = a^{2p}b^pc^{3p}$
Demon picks $u, v, w, x, y | s = uvwxy, vx \neq \epsilon, |vwx| \leq p$
We pick $i = 0$

با توجه به حداکثر طول ممکن برای رشته $vwxy$ ، این رشته نمی‌تواند شامل هر سه حرف a و b و c باشد. در نتیجه در صورت برابر قرار دادن i با صفر، تعداد یک یا دو تا از سه حوف رشته کم می‌شود و تعداد حرف دیگر ثابت می‌ماند. در نتیجه دیگر شرط $\frac{N(c)}{3} = \frac{N(a)}{2} = N(b) = n$ برقرار نخواهد بود و رشته جدید عضو زبان نیست. در نتیجه فرضمان غلط است و زبان L مستقل از متن قطعی نیست.