باسمه تعالی

پاسخ نامه آزمون پایان ترم نظریه زبانها و ماشین ها بهار ۱۴۰۲

سؤال یک)

الف) نادرست.

<u>مثال نقض</u>. زبان $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ مستقل از متن است.

$L^* \cap 0^* 1^* = L$

اگر L^* منظم باشد چون $0^* 1^*$ منظم است به تناقض می رسیم.

ب) نادرست.

<u>مثال نقض</u>. زبان های A_{TM} و $\overline{A_{TM}}$ مستقل از متن نیستند اما $A_{TM} \cup \overline{A_{TM}} = \Sigma^*$

که مستقل از متن است.

پ) درست.

اگر L تصمیم پذیر باشد یک ماشین تورینگ تصمیم گیر D_L دارد.

تصمیم گیر D_{L^*} را برای L^* بر روی ورودی w به صورت زیر می سازیم:

- اگر $w = \varepsilon$ آن گاه بپذیر

- اگر $w \neq \varepsilon$ آن گاه تمام حالات شکستن w به زیررشته های گوناگون $w = w_1 \ldots w_k$ را در نظر بگیر. اگر در یک حالت D_L تمامی زیررشته های $w_1 \ldots w_k$ را بپذیرد آن گاه بپذیر.

در غیر این صورت رد کن

ت) نادرست

<u>مثال نقض</u>. زبان L را بر روی الفبای $\Sigma = \{0,1\}$ به صورت $L = A_{TM} \cup \{0,1\}$

تعریف می کنیم. L به وضوح تصمیم ناپذیر است اما $L^* = \Sigma^*$ تصمیم پذیر است.

<u>نکته ۱</u>: ۴ قسمت هر کدام ۵ نمره $\longleftarrow$ جمعاً ۲۰ نمره

<u>نکته ۲</u>: پاسخ هر قسمت بدون توضیح: ۰ نمره

پاسخ بلی/خیر درست اما توضیح غلط: ۲ نمره

سؤال دو)

الف) زبان پذیرفته شده توسط اتوماتون به شرح زیراست:

$L_2 = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k > 0 \text{ and } k = n+m+1\}$

از $k = n+m+1$ نتیجه می شود $k > n$, $k > m$ پس $L_2 \subseteq L_1$

* $w = aabbccc$ $w \in L_1$, $w \notin L_2$

* چون $L_2 \subseteq L_1$ تمامی رشته های متعلق به L_2 در L_1 هستند پس رشته w وجود ندارد که $w \in L_2$, $w \notin L_1$

(5 نمره مثال نقض و 5 نمره استدلال قسمت دوم)

ب) نشان می دهیم زبان مستقل از متن نیست. فرض کنید p ثابت لم تزریق باشد.

$w = a^p b^p c^{p+1} \in L_1$ $|w| \geq p$

حریف رشته را به $w = uvxyz$ می شکند طوری که $vy \neq \varepsilon$ و $|vxy| \leq p$ باشد.

vxy می تواند در a^p ، $a^p b^p$ ، $b^p c^{p+1}$ یا c^{p+1} باشد.

در سه حالت اول با قراردادن $i = 50$ تعداد a یا b بیشتر از تعداد c می شود.

در حالت c^{p+1} با قراردادن $i = 0$ تعداد c بیشتر از p نخواهد بود.

وقتی رشته در $b^p c^{p+1}$ باشد:

اگر چنانچه v یا y شامل حرف c بشوند: $i = 0$ تعداد c بیشتر از a ها نخواهد بود

" " " نشوند: $i = 50$: مثل حالت بالا تعداد b از c بیشتر می شود

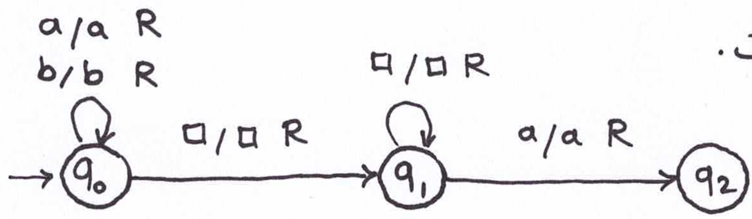
20 نمره لم تزریق

(حالت بندی دقیق برای انتخاب های حریف)

سؤال ۳)

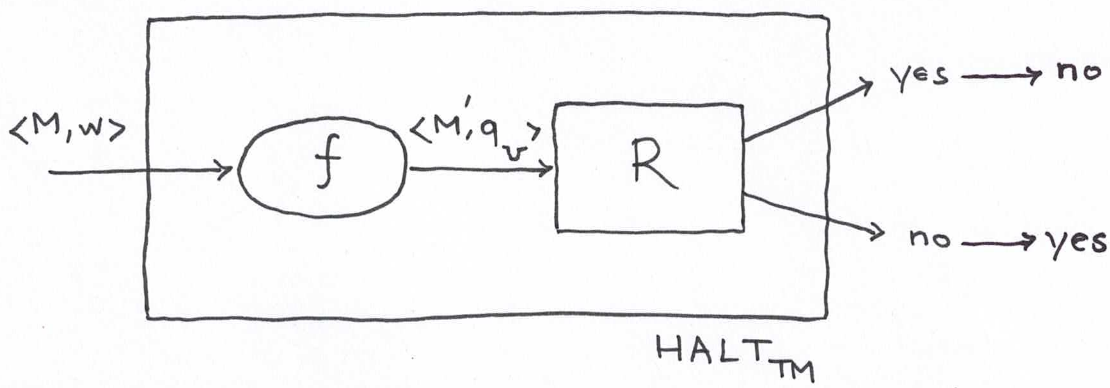
الف) یک حالت غیر قابل دسترسی از حالت شروع بیهوده است اما لزوماً تمام حالات بیهوده غیر قابل دسترس نیستند.

به عنوان مثال، در ماشین تورینگ زیر با الفبای $\Gamma = \{a, b, \square\}$ ، q_2 یک حالت بیهوده اما قابل دسترس از q_0 است.



(5 نمره)

ب) فرض کنیم R یک تصمیم گیر برای $USELESS_{TM}$ باشد. نشان می دهیم که در این صورت مساله $HALT_{TM}$ هم تصمیم پذیر خواهد بود.



M' on input x:

- Run M on w
- If M halts: enter special state q_v

R ادعا می کند که می تواند تعیین کند حالت q_v در M' بیهوده است یا خیر.

اگر q_v بیهوده باشد ⟵ M روی w متوقف نمی شود

اگر q_v بیهوده نباشد ⟵ M روی w متوقف می شود

پس روشی برای تصمیم گیری مساله $HALT_{TM}$ پیدا کردیم که خلاف قضیه تورینگ است.

مساله ی چهار :

* ابتدا نشان می دهیم مساله‌ی SAT با n متغیر در فضای چندجمله‌ای قابل حل است.

برای این کار یک شمارنده به طول n درنظر می گیریم. با شمارش از 0 تا 2^n-1 تمامی سطرهای جدول درستی فرمول بولین رایک به یک تولید می کنیم و چک می کنیم که آیا فرمول را صحیح می کند یا خیر. اگر سطری فرمول را درست کند "بلی" برمی گردانیم. در غیر این صورت سطر را پاک می کنیم و سطر بعدی را به جایش می نویسیم. اگر هیچ سطری فرمول را صحیح نکند، "خیر" برمی گردانیم. کل این کار به $O(n)$ حافظه نیاز دارد.

* مساله‌ی SAT طبق قضیه‌ی Cook - Levin به کلاس پیچیدگی NP-hard تعلق دارد یعنی تمامی مسائل کلاس NP به SAT درزمان چندجمله‌ای کاهش داده می شوند.
هر عملیاتی که زمان چندجمله‌ای صرف کند ناچار فضای چندجمله‌ای می تواند استفاده کند
پس تمامی مسائل NP در فضای چندجمله‌ای حل خواهند شد.

۱۵ نمره توضیح مسالهٔ NP-hard و کاهش تمامی مسائل NP به آن

۱۵ نمره روش حل مساله NP-hard درفضای چندجمله‌ای

سؤال پنجم)

الف) خیر. مسائل P به NP هم تعلق دارند و یک مسأله دلخواه در NP می‌تواند خود یک مساله در P باشد.

ب) بلی. زبان $a^n b^n c^n$ را به راحتی در یک ماشین تورینگ سه نواره در زمان چندجمله‌ای می‌توان تشخیص داد پس در P است.
کاهش مساله 3SAT به یک مساله در P در زمان چندجمله‌ای به $P = NP$ منجر می‌شود.

پ) خیر. کاهش یک مساله P به NP-C بدیهی و قابل انجام است.

ت) خیر. کاهش دو مساله NP-C به یکدیگر نتیجه خاصی در مورد $P = NP$ نمی‌دهد.

ث) خیر. هر ماشین تورینگ غیرقطعی قابل شبیه سازی در ماشین تورینگ قطعی است (با صرف هزینه زمانی نمایی) پس این نتیجه اصلاً قابل اثبات هم نیست.

۵ آیتم هرکدام $\frac{1}{2}$ نمره. اگر توضیح غلط باشد یا دقیق نباشد در آن قسمت 1 نمره

پاسخ بلی/خیر بدون توضیح نمره ای نمی گیرد