به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره 3

دستیار آموزشی این مجموعه: امیرحسین علیزاد

aalizad79@gmail.com

تاریخ تحویل : 1401/01/23

---

1) ثابت کنید زبان های زیر نامنظم اند.

a) $L_1 = \{a^n b a^{3n} \mid n \geq 0\}$

- devil picks ‘p’
- you: w = $a^p b a^{3p}$
- devil: $a^p b a^{3p} = xyz,\ |xy| \leq p,\ |y| \neq 0$
- you: $xy = a^p,\ |xy| \leq p \rightarrow y = a^k,\ k > 0$

$i = 2 \rightarrow xy^i z = a^{p+k} b a^{3p},\ k > 0 \rightarrow xy^2 z \notin L_1 \rightarrow L_1\ is\ not\ regular.$

b) $L_2 = \{a^n b^l a^k \mid n = l\ or\ l \neq k\}$

- devil picks ‘p’
- you: w = $a^p b^p a^p$
- devil: $a^p b^p a^p = xyz,\ |xy| \leq p,\ |y| \neq 0$
- you: $xy = a^p,\ |xy| \leq p \rightarrow y = a^k,\ k > 0$

$i = 2 \rightarrow xy^i z = a^{p+k} b^p a^p,\ k > 0 \rightarrow xy^2 z \notin L_2 \rightarrow L_2\ is\ not\ regular.$

c) $L_3 = \{a^{n!} \mid n \geq 0\}$

- devil picks ‘p’
- you: w = $a^{p!}$, $unless\ p < 3\ in\ which\ case\ we\ chose\ a^{3!}$
- devil: $a^{p!} = xyz,\ |xy| \leq p,\ |y| \neq 0$
- you: $|xy| \leq p \rightarrow y = a^{k},\ k \geq 1$

  $i = 0 \rightarrow xy^{i}z = a^{p!-k},\ for\ this\ to\ be\ true\ there\ must\ be\ a\ j\ such\ that$

  $j! = m! - k\ but\ this\ is\ not\ possible\ since\ p > 2\ and\ k \leq m.\ we\ have$

  $m! - k > (m - 1)! \rightarrow L_3\ is\ not\ regular.$

d) (امتیازی) $L_4 = \{Va^{2k} \mid V \in \{a, b\}^{*},\ |V| = k\}$

- devil picks ‘p’
- you: w = $b^{p}a^{2p}$
- devil: $b^{p}a^{2p} = xyz,\ |xy| \leq p,\ |y| \neq 0$
- you: $xy = b^{p},\ |xy| \leq p \rightarrow y = b^{k},\ k > 0$

  $i = 2 \rightarrow xy^{i}z = b^{p+k}a^{2p},\ k > 0\ and\ count\ of\ b's\ exceed\ the\ size\ of\ p$

  $therefore\ xy^{2}z \notin L_2 \rightarrow L_2\ is\ not\ regular.$

2) منظم بودن یا نبودن زبان های زیر را مشخص کنید و پاسخ خود را اثبات کنید.(k یک عدد ثابت و مثبت است)

a) $L_1 = \{a^{n}b^{m} \mid 2n + m \leq 100\}$

این زبان منظم است چون تعداد اعضای آن با توجه به تعریف زبان متناهی است. از طرفی هر رشته ی آن به تنهایی یک زبان منظم است زیرا می توان یک nfa برای آن رسم کرد. پس زبان مد نظر از اجتماع تعداد محدودی زبان منظم به وجود آمده و منظم است.

b) $L_2 = \{a^n b^m \mid 2n - m \le 100\}$

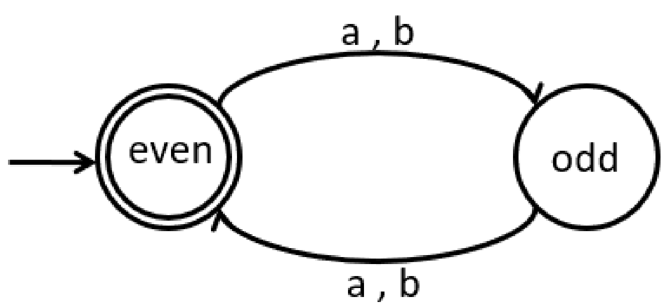
- devil picks ‘p’
- you: w = $a^p b^{2p}$
- devil: $a^p b^{2p} = xyz,\ |xy| \le p,\ |y| \ne 0$
- you: $xy = a^p,\ |xy| \le p \to y = b^k,\ k > 0$

$i = 100p + 1 \to xy^i z = a^{100pk+p} b^{2p},\ 200pk + 2p - 2p = 200pk > 100$

$p, k > 0 \to L_2$ *is not regular.*

c) $L_3 = \{w_1 w_2 \mid w_1,\ w_2 \in \{a,\ b\}^*,\ |w_1| = |w_2|\}$

این زبان نیز منظم است. برای اینکه اندازه w_2 و w_1 برابر باشد، باید اندازه $w_1 w_2$ مقداری زوج باشد. می توانیم برای این که طول یک ورودی زوج است یا فرد یک DFA رسم کرد. پس این زبان منظم است.



d) (امتیازی) $L_4 = \{ww' \mid w \in \{a,\ b\}^*,\ where\ w'\ stands\ for\ w\ with\ each\ occurence\ of\ a\ replaced\ by\ b,\ and\ vice\ versa.\}$

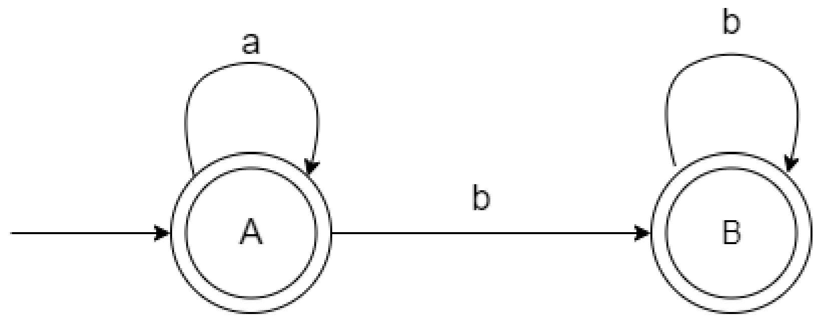
میتوان این مسئله را به کمک قضیه ی "اشتراک دو زبان منظم، حتما یک زبان منظم است" حل کرد. میدانیم که زبان $L' = \{a^n b^m \mid n \ge 0,\ m \ge 0\}$ منظم است (میتوان برای آن یک NFA رسم کرد). زبان L'' را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L'' = L_4 \cap L' = \{a^n b^n \mid n \ge 0\}$$

و می دانیم که این زبان نامنظم است. پس زبان L_4 نیز نامنظم است.

3) درستی یا نادرستی عبارت << اگر زبان L_1 و زبان L_2 هر دو نامنظم باشند، آنگاه زبان $L_1 \cup L_2$ نیز نامنظم است >> را مشخص کنید و برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

این عبارت نادرست است. به عنوان مثال نقض زبان های $L_1 = \{a^n b^m \mid n \le m\}$ و $L_2 = \{a^n b^m \mid n > m\}$ را در نظر می گیریم. نامنظم بودن هر دوی این زبان ها به راحتی توسط pumping lemma قابل اثبات است. در صورتی که $L_1 \cup L_2 = \{a^n b^m \mid n \ge 0,\ m \ge 0\}$ منظم است. برای این زبان میتوان DFA را به صورت زیر رسم کرد:



پس این مثال عبارت را نقض می کند و عبارت نادرست است.

4) نشان دهید که زبان زیر نامنظم است.

$L = \{w \in \{a,\ b\}^* \mid w\ contains\ exactly\ to\ more\ b's\ than\ a's\}$

میدانیم که زبان $L' = \{a^n b^m \mid n \ge 0,\ m \ge 0\}$ منظم است. زبان L'' را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$L'' = L \cap L' = \{a^n b^{n+2} \mid n \ge 0\}$

این زبان تنها در صورتی منظم است که زبان L نیز منظم باشد. پس اگر L'' نامنظم باشد، L نیز نامنظم است. به راحتی به کمک pumping lemma ثابت می کنیم که L'' نامنظم است.

- devil picks ‘p’
- you: w = $a^p b^{p+2}$
- devil: $a^p b^{p+2} = xyz,\ |xy| \le p,\ |y| \ne 0$
- you: $xy = a^p,\ |xy| \le p \rightarrow y = a^k,\ k > 0$

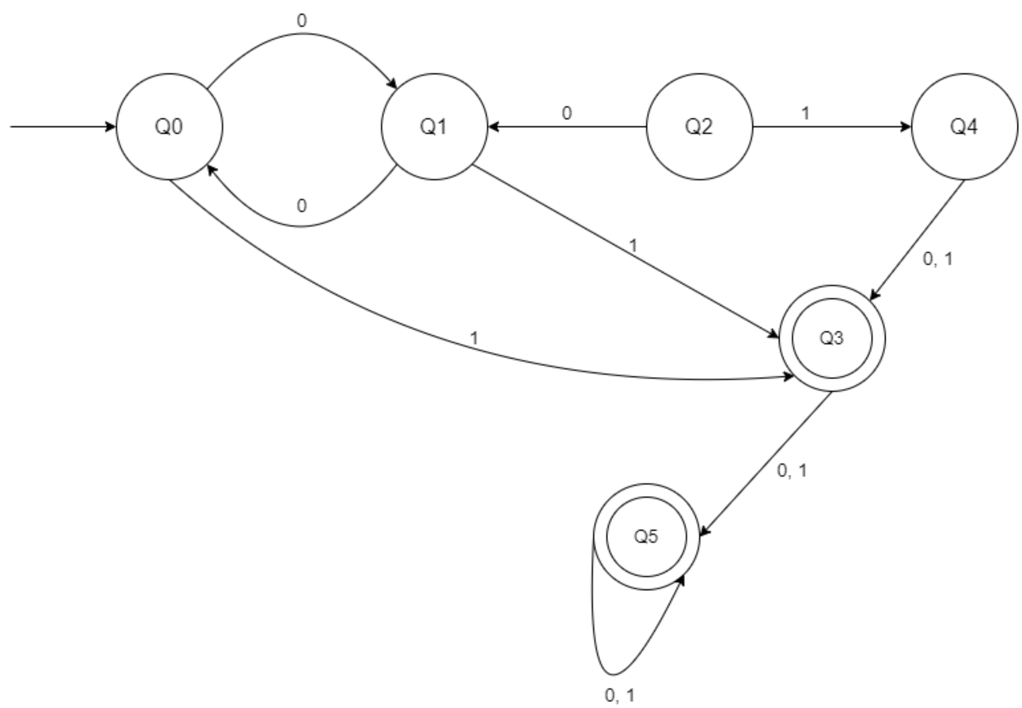
$$i = 4 \rightarrow xy^i z = a^{p+3k} b^{p+2}\ ,\ k > 0 \rightarrow p + 3k > p + 2$$

$$therefore,\ L''\ is\ not\ regular.$$

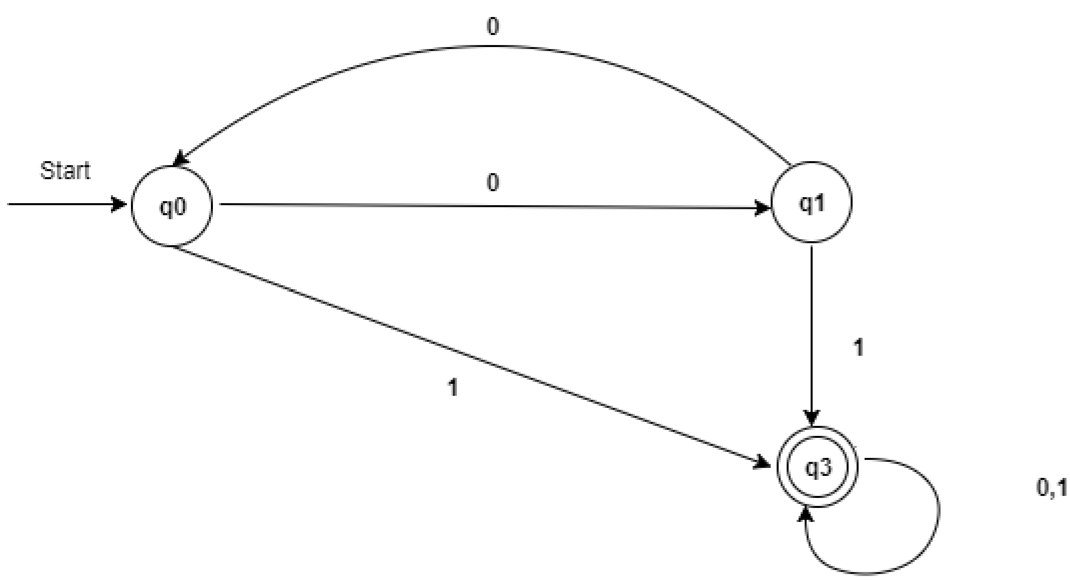
ثابت می شود که L'' نامنظم است بنابراین L نیز نامنظم است.

5) DFA های زیر را کمینه کنید.

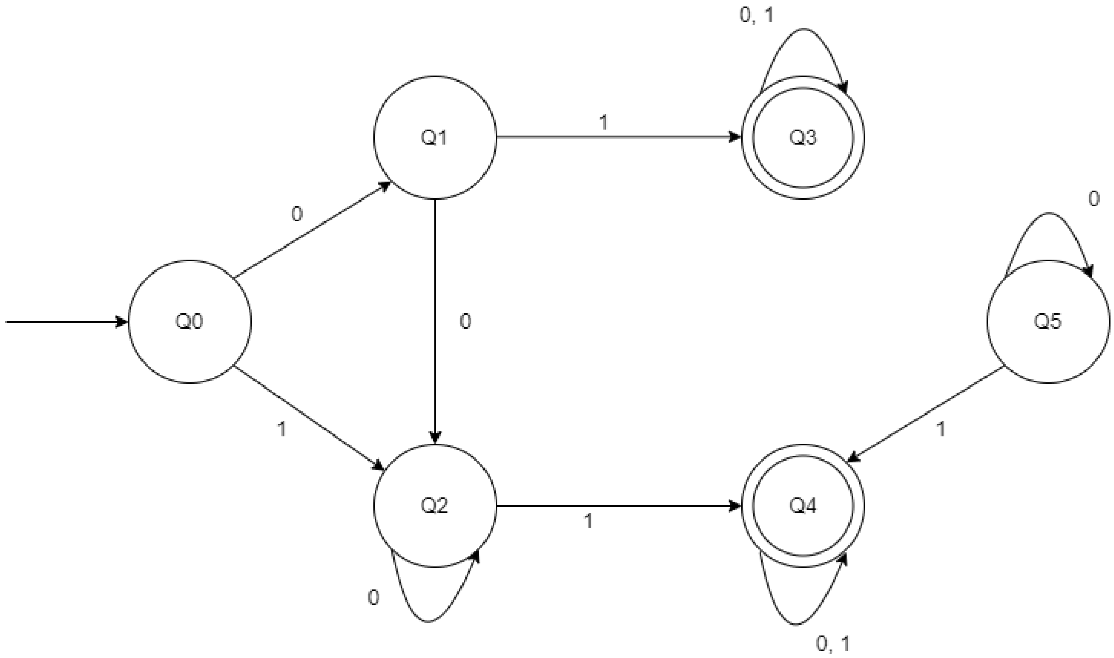
a)



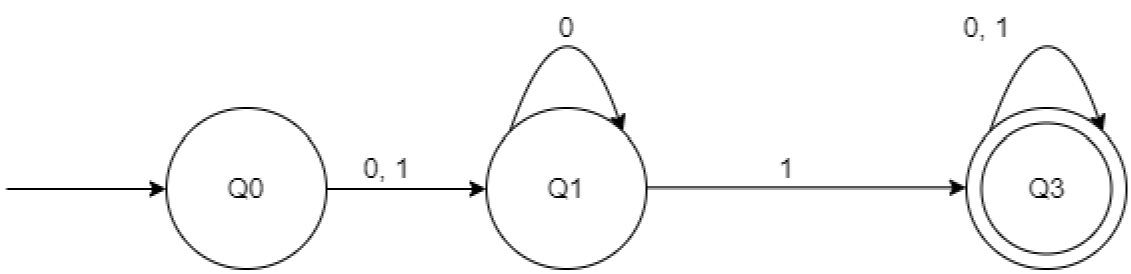
استیت های 2 و 4 غیرقابل دسترسی هستند پس این استیت ها را حذف کرده و DFA جدید را به شکل زیر minimize می کنیم.



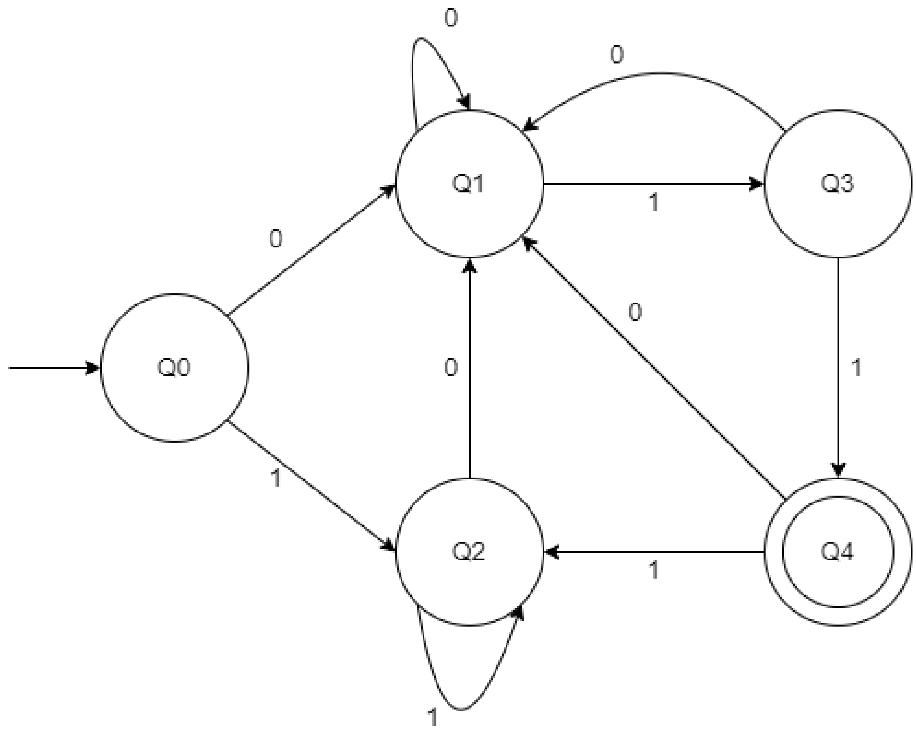
b)



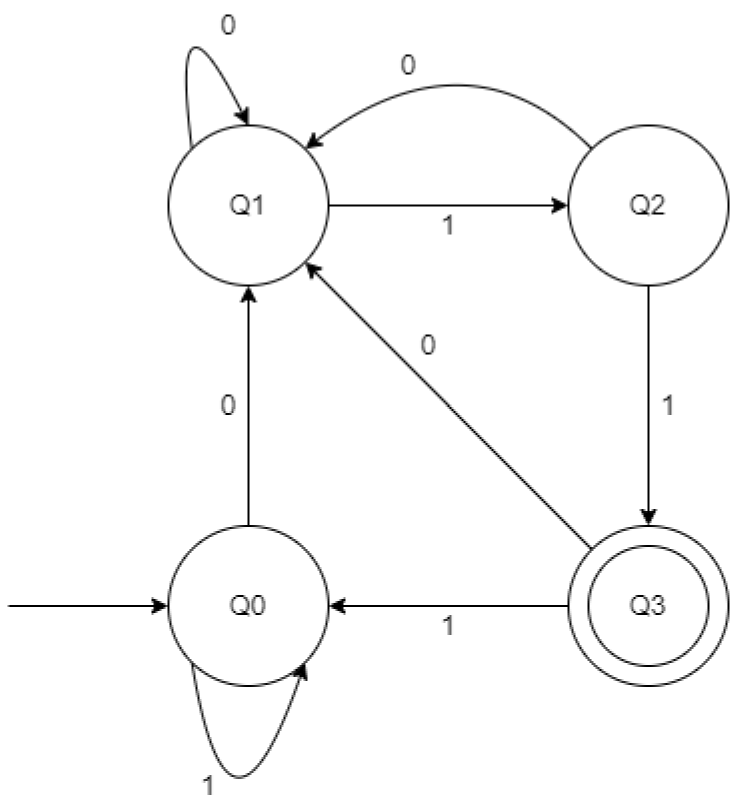
مانند قسمت قبل استیت 5 غیرقابل دسترسی است. DFA جدید را بدون این استیت به شکل زیر minimize می کنیم:



c)



به صورت زیر minimize می کنیم:



6) فرض کنید L زبانی با متناهی عضو باشد:(20 نمره)

الف) ثابت کنید L منظم است.

هر عضو از این زبان، با یک سری transition در NFA به استیت نهایی میرسد. پس میتوان نتیجه گرفت که برای هر عضو این زبان می توانیم یک NFA داشته باشیم. در نهایت NFA مربوط به زبان L، اجتماع تعداد محدودی NFA است که هر NFA مربوط به رشته ای از این زبان است.

ب) فرض کنید D، DFA کمینه برای L باشد. ثابت کنید D دقیقا یک استیت دارد که وقتی وارد آن می شود، دیگر از آن خارج نمی شود.

ابتدا ثابت می کنیم که هر DFA بعد از کمینه شدن حداکثر یک استیت trap خواهد داشت. فرض کنید در ابتدا یک DFA داریم که k استیت trap دارد. با توجه به تعریف trap رفتار همه ی استیت های trap مانند هم خواهد بود و همگی آن ها را می توان به یک استیت trap تبدیل شوند و اگر k برابر 0 باشد یعنی در ابتدا trap نداشته ایم که بنابراین در انتها نیز استیت trap نخواهیم داشت.
حال ثابت می کنیم دقیقا یک trap داریم. یک استیت پایانی نمیتواند در دور قرار داشته باشد. پس اگر دوری داشته باشیم تمام استیت های آن نیز غیر پایانی خواهند بود و از هیچ کدام به یک استیت پایانی مسیر وجود ندارد پس همه ی آن هها قابل جایگزین شدن با یک trap هستند پس ثابت کردیم همه ی دور ها trap هستند از طرفی حتما دور داریم پس حتما trap هم داریم و با توجه به نکته ای که ابتدا ثابت کردیم دقیقا یک trap داریم.