علیرضا کریمی ۸۱۰۱۰۱۴۹۲

۱)

الف) $((a+b)\cdot(a+b))^*(a+b)$

ب) $b^*(a^*b+c)^*a^*$

ج) $(1+01)^*(0+\varepsilon)$

د) $\left(((10+01)(00+11)^*(10+01)) + (00)^* + (11)^*\right)^* = L$

ه) $(10+01)L + L(10+01) + 0L1 + 1L0$ (L زبان قسمت د است)

و) $((a+b)^*a(a+b)^*a(a+b)^*) + (a^*ba^*ba^*)$

م) $(a+b)^*(ab+ba) + a + b + \varepsilon$

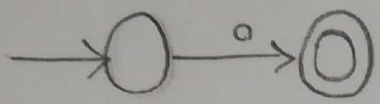
ی) $\left((b+\varepsilon)(ab)^*aa((ba)^*(\underbrace{b+\varepsilon}_{b?}))\right) +$

$\left((a+\varepsilon)(ba)^*bb((ab)^*(\underbrace{a+\varepsilon}_{a?}))\right)$

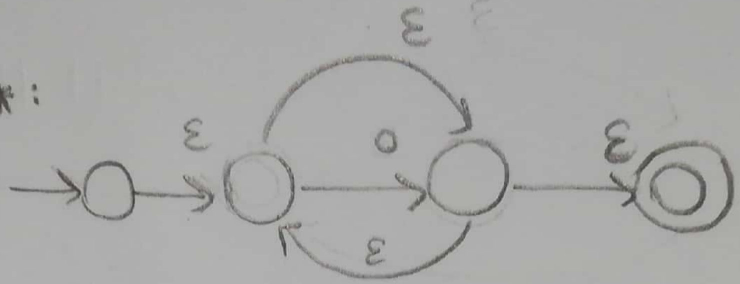
2)

الف)

0:

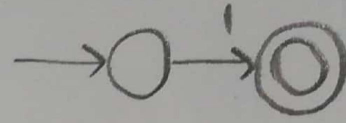


$\Rightarrow$ 0*:



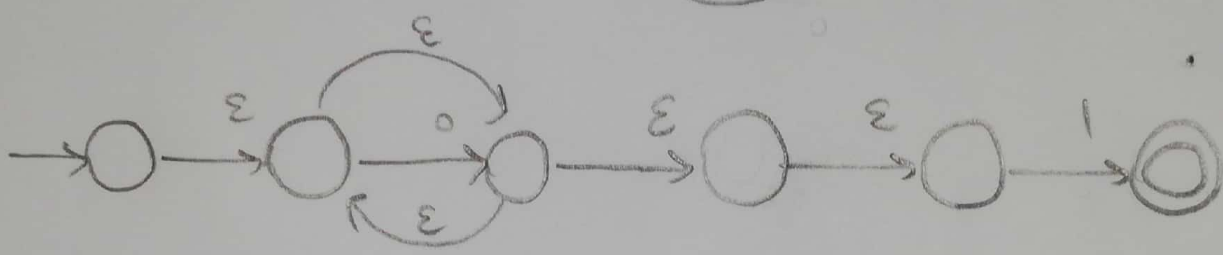
و

1:



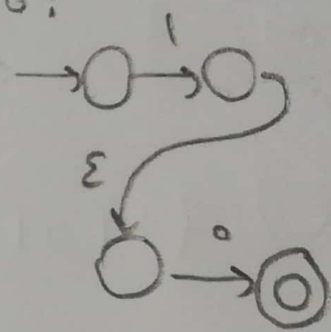
0*1:

$\Rightarrow$



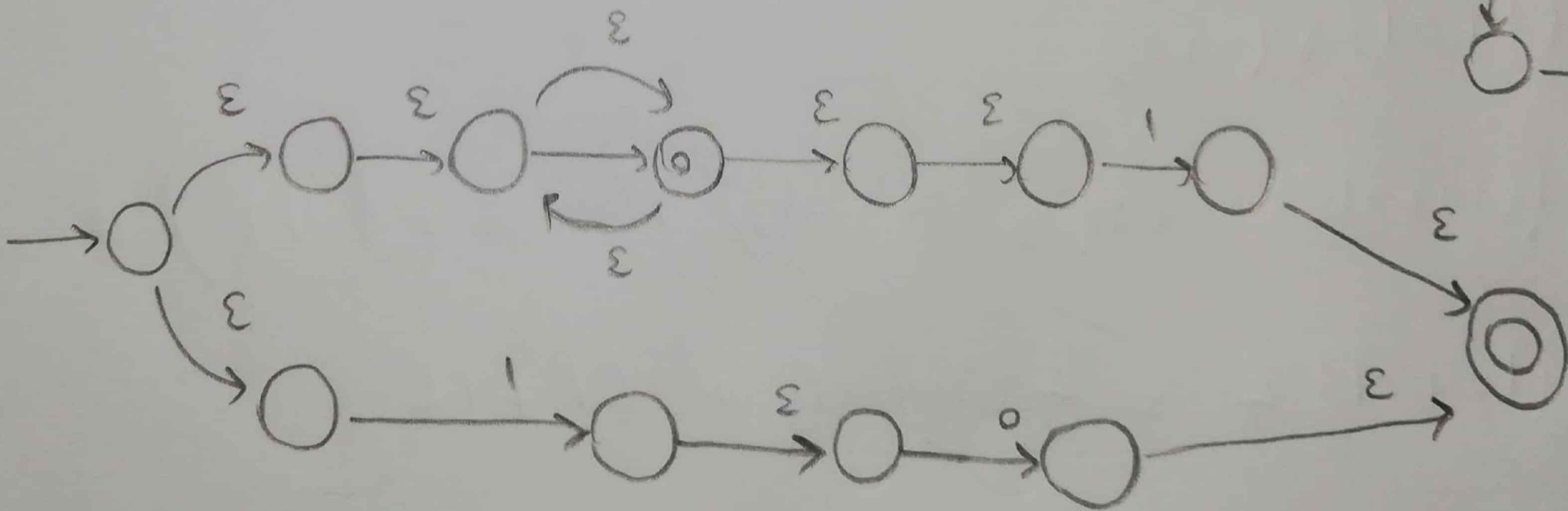
و

10:



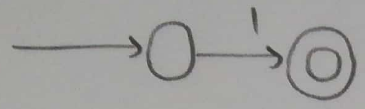
0*1+10:

$\Rightarrow$

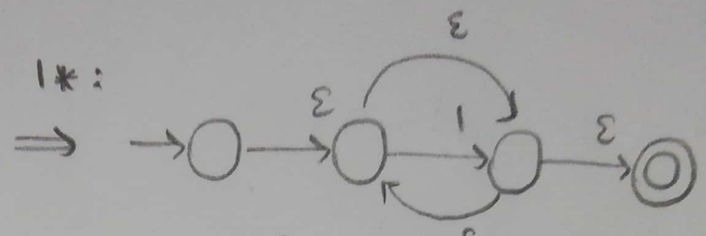


ب)

1:

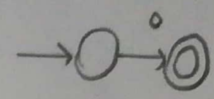


1*:



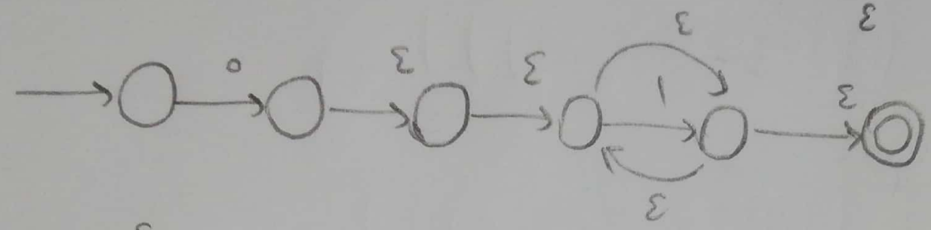
و

0:



01*:

⟹

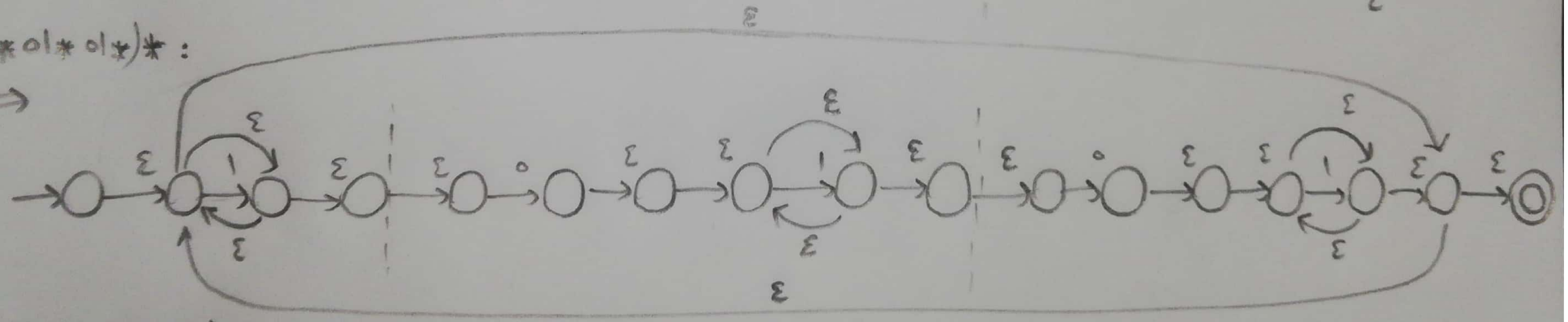


1*01*01*:

⟹

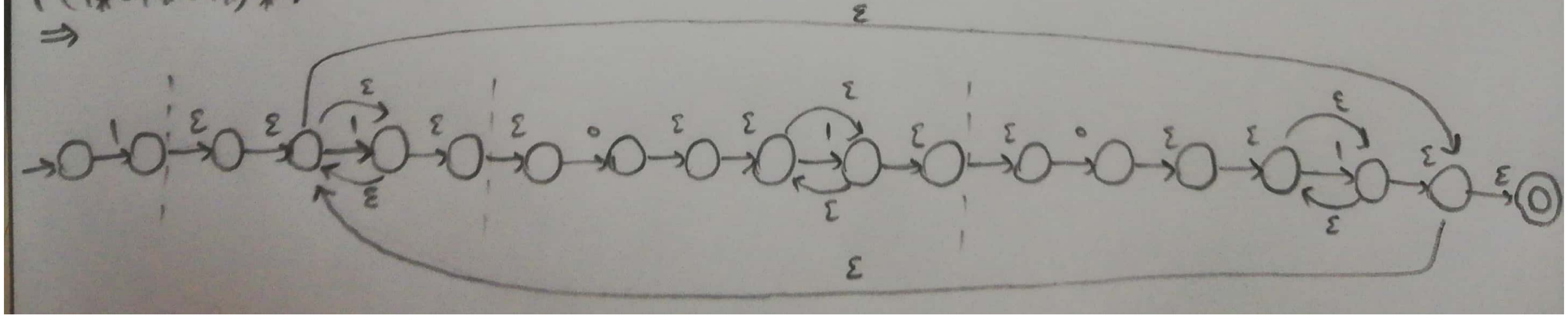
(1*01*01*)*:

⟹



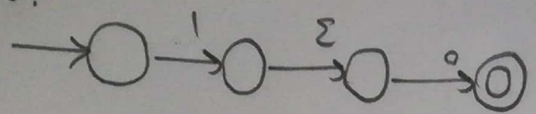
1(1*01*01*)*:

⟹



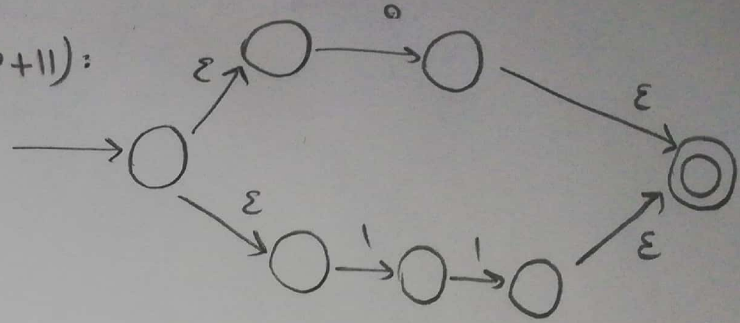
ج)

10:

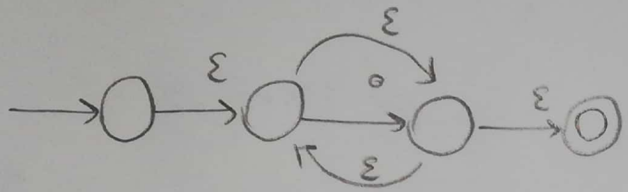


,

(0+11):

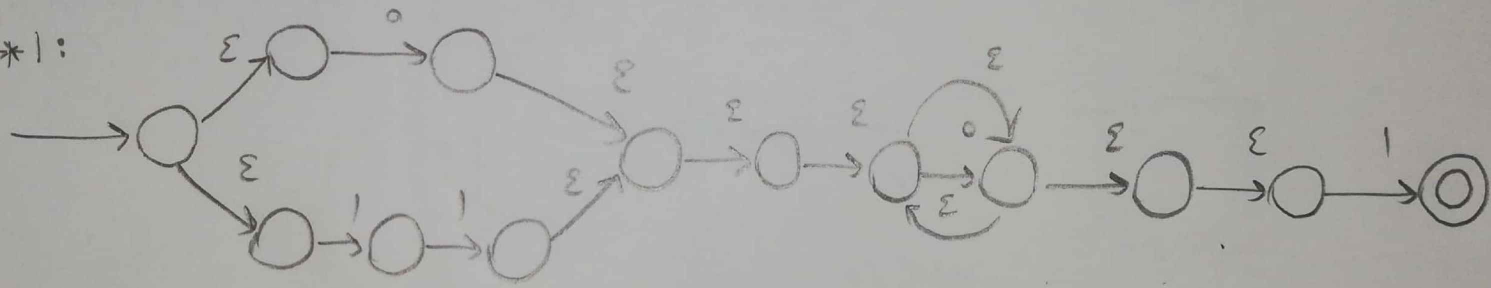


0*:



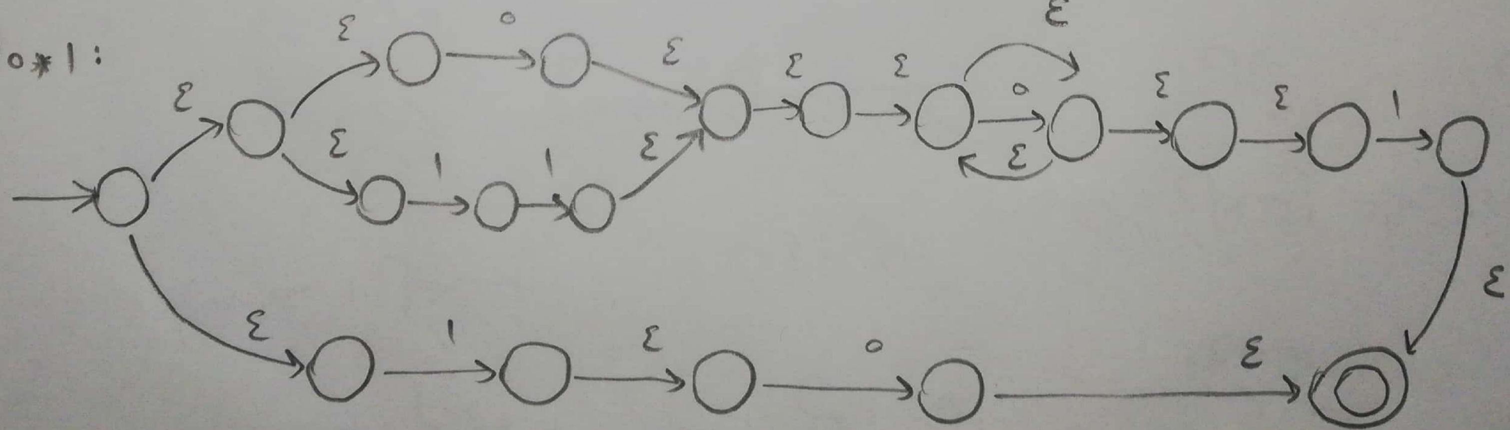
(0+11)0*1:

⟹

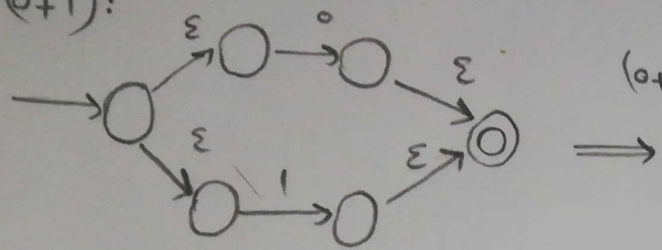


10+(0+11)0*1:

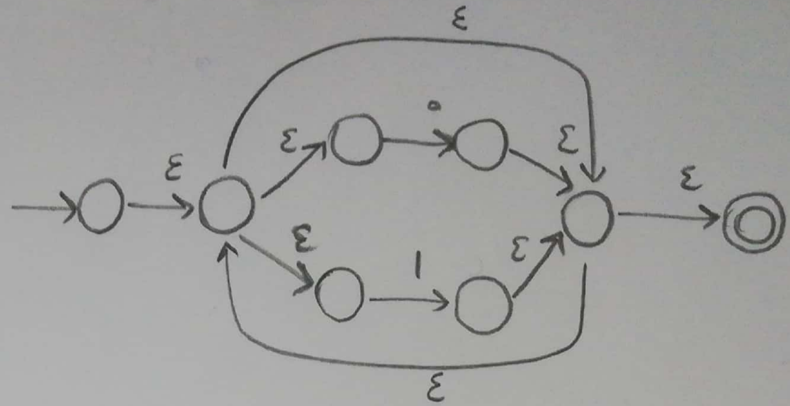
⟹



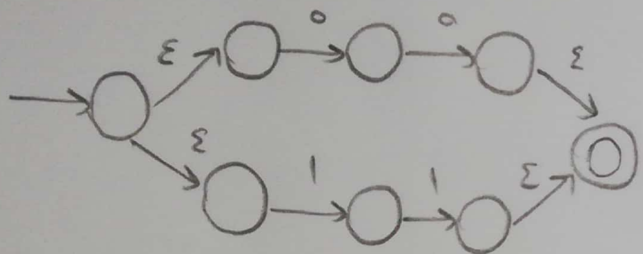
1) (0+1):



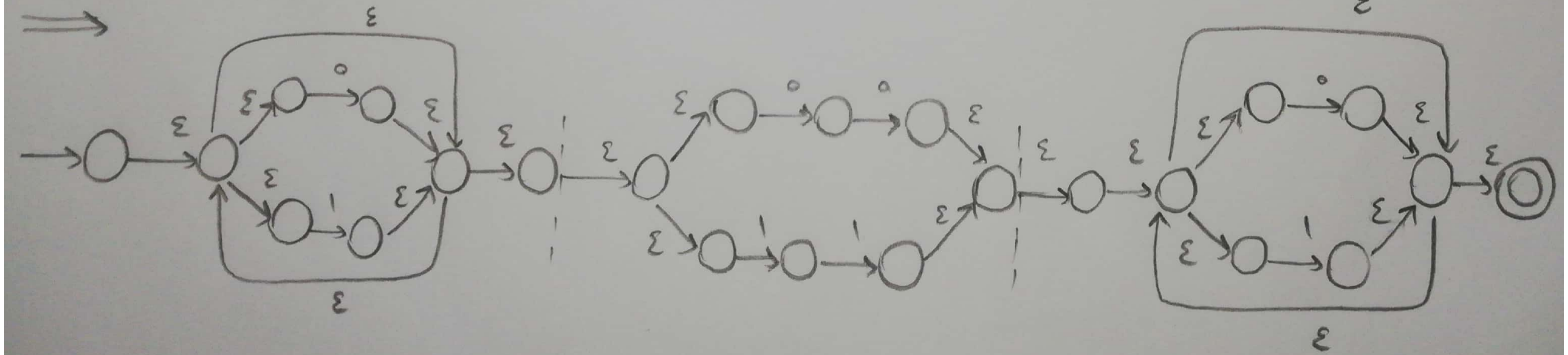
(0+1)*



(00+11):

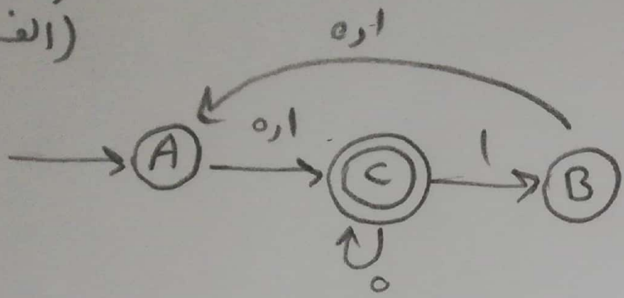


(0+1)*(00+11)(0+1)*

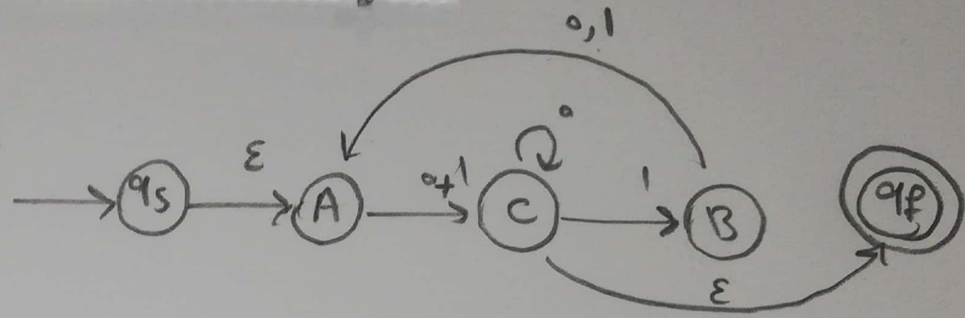


3)

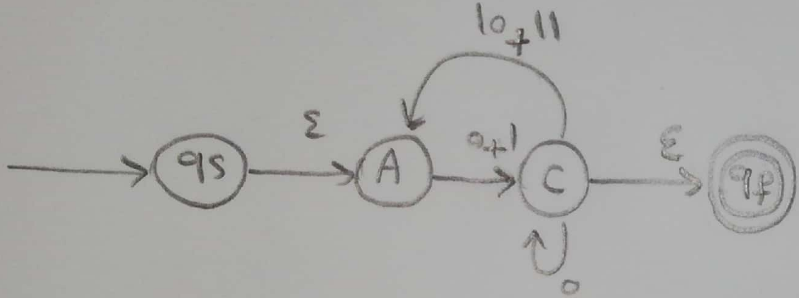
الف)



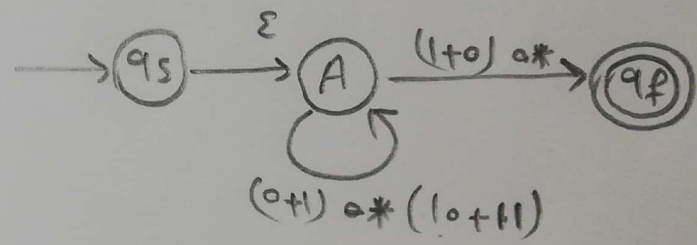
$\xrightarrow{+q_s,\ q_f}$



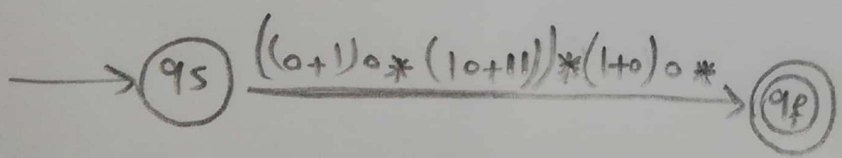
حذف B



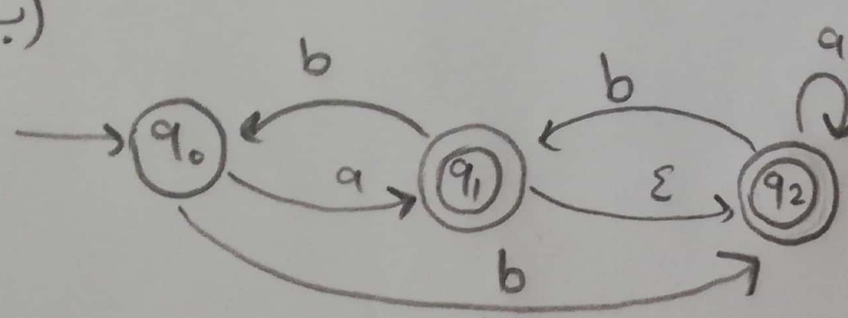
حذف C

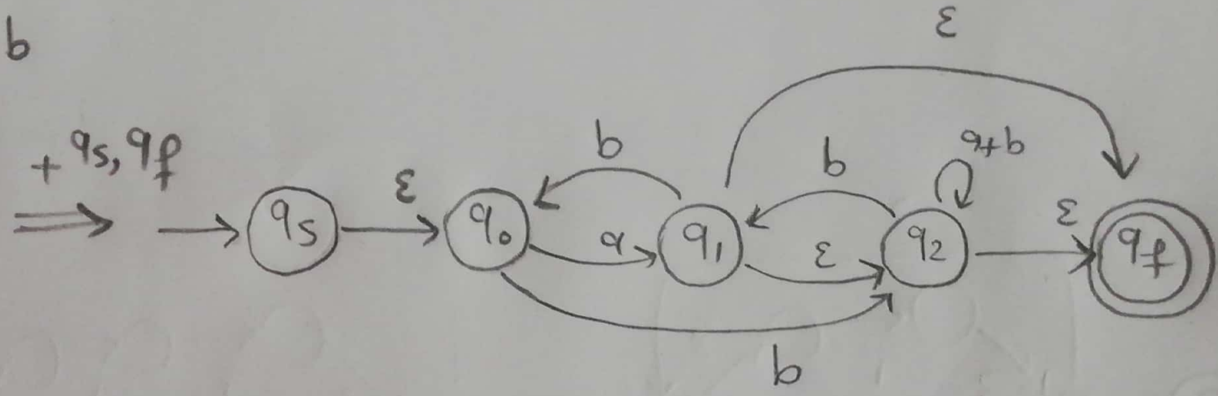


حذف A

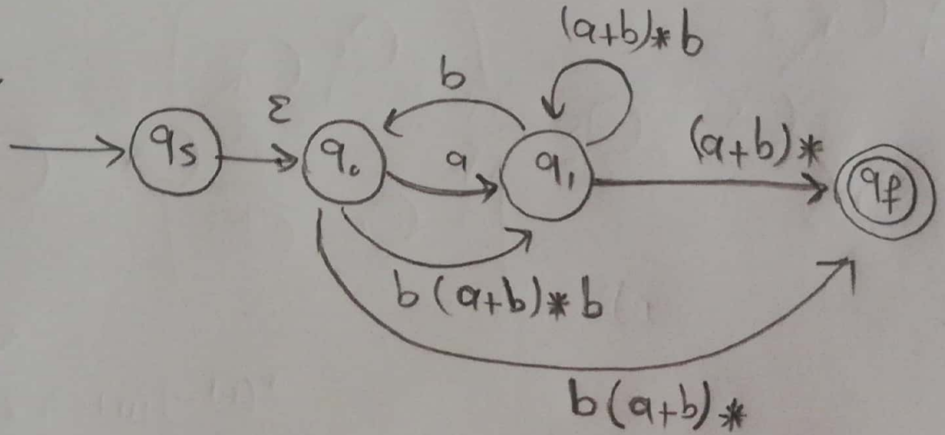


ب)

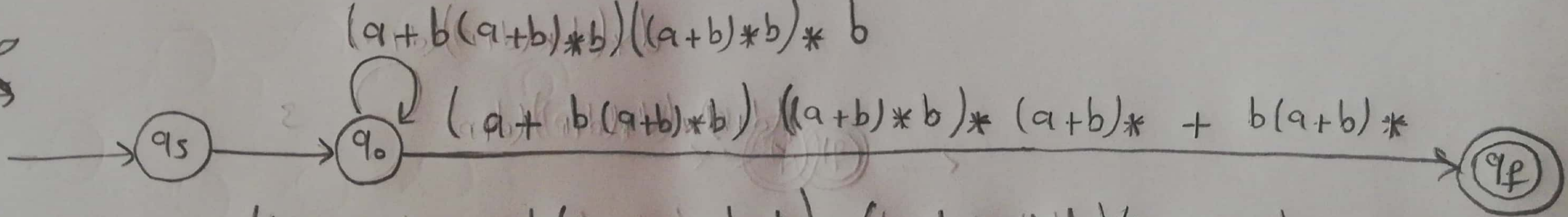




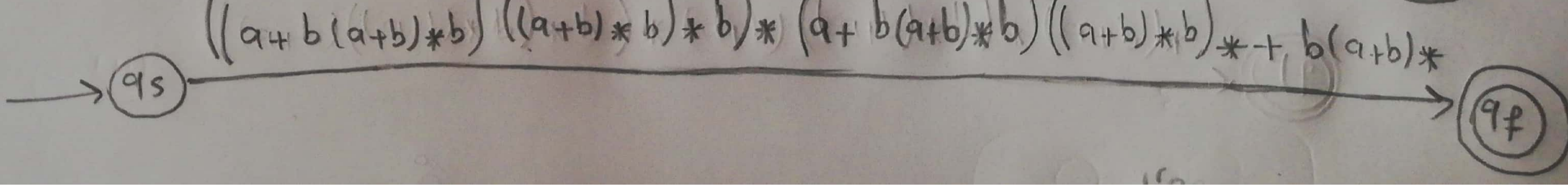
حذف q_2



حذف q_1



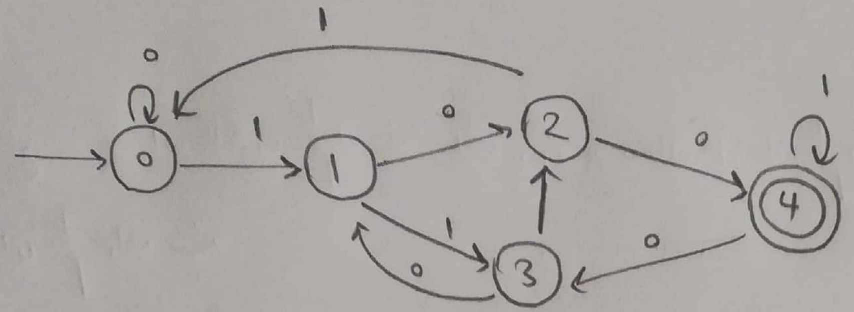
حذف q_0



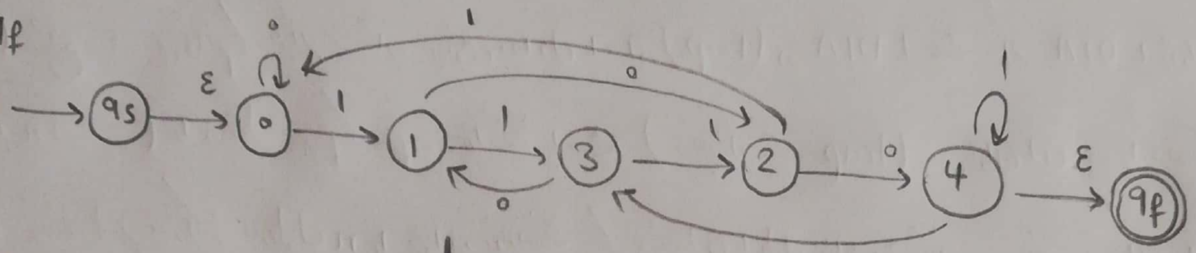
4)

اعداد داخل هر state نماینده عدد به mod 5 است.

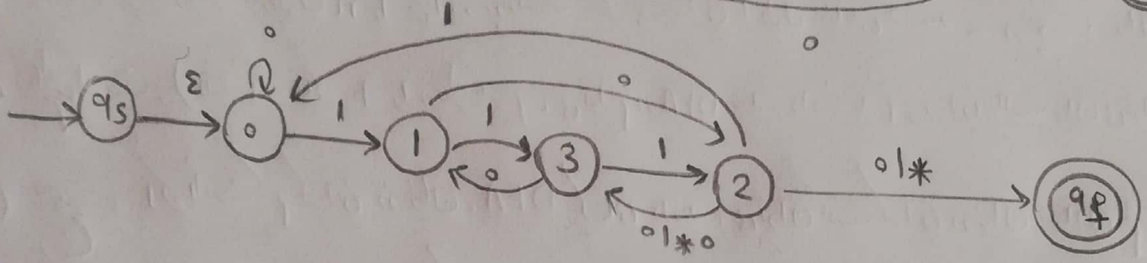
: DFA



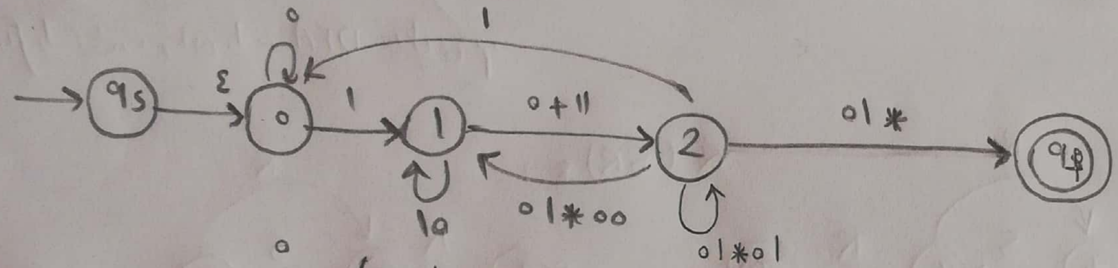
$+q_s, q_f \Longrightarrow$



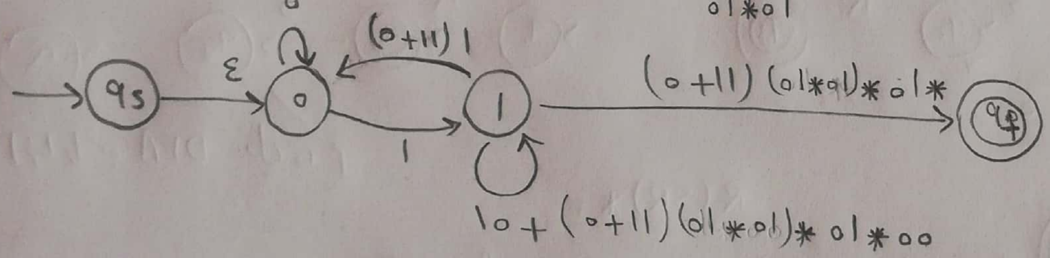
حذف 4 $\Longrightarrow$



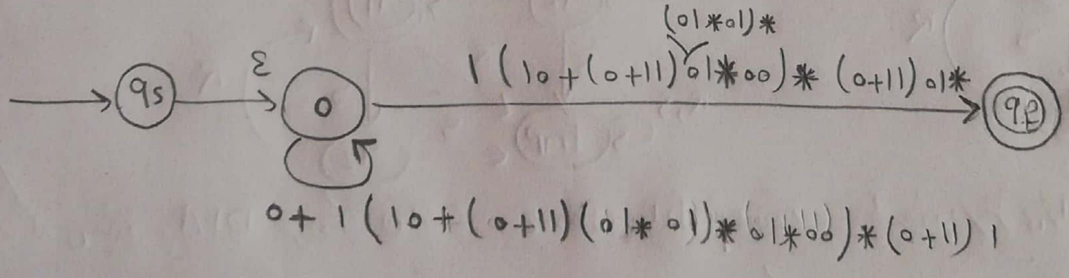
حذف 3 $\Longrightarrow$



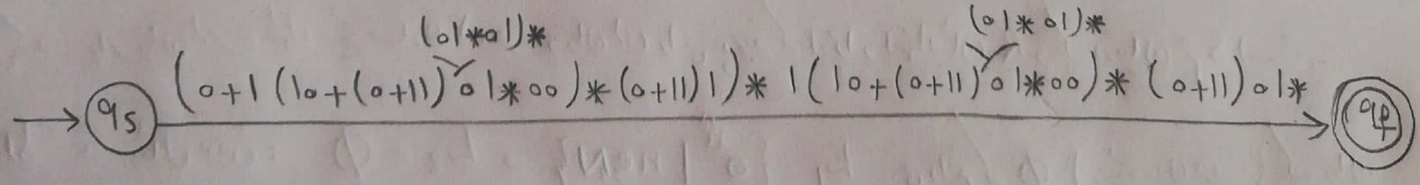
حذف 2 $\Longrightarrow$



حذف 1 $\Longrightarrow$



حذف 0 $\Longrightarrow$



$$\Longrightarrow L = \{(0+1(10+(0+11)(01^*01)^*01^*00)^*(0+11)1)^*1(10+(0+11)(01^*01)^*01^*00)^*(0+11)01^*\}$$

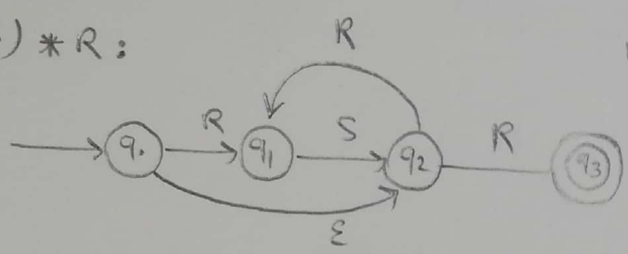
(5

الف) صحیح ؛ هر زبان متناهی، منظم است. از آنجایی که هر دو زبان F و L منظم هستند و عملگر اجتماع بسته است، اجتماع دو زبان منظم، زبان منظم خواهد شد.

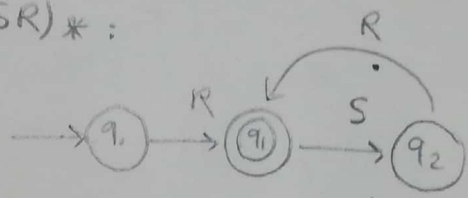
ب) صحیح ؛ می دانیم که عملگر ستاره به نوعی معادل با حلقه (loop) در DFA است. اگر DFA با تعداد متناهی استیت (مثلا n استیت) را در نظر بگیریم که loop نداشته باشد (به جز استیت trap)، می توان این نتیجه را گرفت که زبان مربوط به آن، رشته های حداکثر به طول n را خواهد پذیرفت ـ که رشته هایی با طول متناهی هستند ـ. در نتیجه ؛ زبان دارای کلمات با طول متناهی، زبانی متناهی است. (البته اگر عملگر + را در نظر بگیریم، می توانیم در DFA حلقه داشته باشیم و در این حالت زبان می تواند متناهی نباشد.)

ج) صحیح ؛ اگر ثابت کنیم که این دو زبان، DFA یکسانی دارند، می توان گفت که این دو زبان معادل هم هستند. ابتدا NFA هر کدام را کشیده و آن را به DFA تبدیل می کنیم.

$(RS)^*R$:

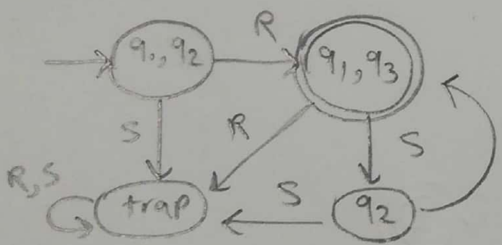


$R(SR)^*$:

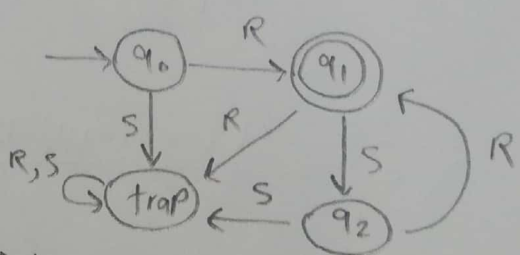


حال آنها را به DFA تبدیل می کنیم.

$(RS)^*R$:



$R(SR)^*$:

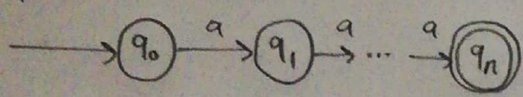


همانطور که می بینید، DFA هر دو یکسان است ← دو زبان معادل هم هستند. به طور شهودی نیز می توانستیم به این برسیم. هر دو R را قبول می کنند. برای زبان ها به طول بیشتر مساوی ۳، هر دو زبان هایی را می پذیرند که ابتدا و انتهایشان R و یک در میان هم S است.

د) غلط ؛ مثال نقض: $L_2=\emptyset$ و $L_1=\{0^{2^n} \mid n\in N\}$. می دانیم که $\emptyset$ (رشته بدون حرف) یک زبان منظم است. همچنین داریم: $L\emptyset=\emptyset L=\emptyset$ ← L_2 و L_1L_2 و L_2L_1 نیز زبان ها منظم هستند اما L_1 زبان منظمی نیست.

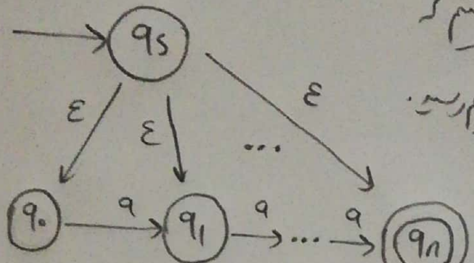
16) فرض کنید که NFA مربوط به زبان L را به این صورت نمایش دهیم:
(البته NFA یا DFA بودن زیاد فرقی ندارد. من برای راحتی درک پاسخ NFA را مثال زدم ولی خب می‌دانیم که هر NFA قابل تبدیل به DFA است.)

L:



حال برای تولید زبانی که suffix(L) باشد، کافی است استیت جدید q_s را اضافه کنیم و به عنوان استیت شروع قرار دهیم و از q_s به تمامی استیت‌های موجود، با ε-transition یال بزنیم. در این صورت خواهیم داشت:

suffix(L):



(اگر بخواهیم دقیق‌تر بگوییم، به استیت‌هایی ε-transition می‌زنیم که مطمئن هستیم که در زبان L، با شروع از استیت q_0 و گرفتن رشته x، به آن استیت‌ها خواهیم رسید.
درواقع برای آن استیت‌ها، مطمئن هستیم رشته x ای وجود دارد که:
q استیت‌هایی است که به آنها ε-transition داریم $\quad x \in \Sigma^*, \; q_0 \xrightarrow{x} q$

از آنجایی که suffix(L) یک NFA با تعداد استیت متناهی است، زبانی منظم است و قابل تبدیل به DFA. اگر بخواهیم به صورت ریاضیاتی اثبات کنیم، از آنجایی که L یک زبان منظم است، یک DFA متناظر با آن به صورت $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ وجود دارد. برای ساخت NFA N به طوری که $L(N)=suffix(L(M))$ باشد و $N=(Q',\Sigma,\delta',q_0',F')$ است، باید یکی یکی پارامترهای آن را مشخص کنیم. برای تولید N، به جای شروع از استیت q_0، باید در استیتی باشیم که می‌دانیم رشته‌ای هست که x وجود دارد که $xy \in L$. برای این کار می‌توانیم اینگونه عمل کنیم:

$$Q' = Q \cup q_s \;, \quad F'=F \;, \quad q_0'=q_s$$

برای δ نیز یال‌های قبلی دست‌نخورده باقی می‌مانند و تنها ε-transitionها اضافه می‌شوند که خواهیم داشت:

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{برای } q\in Q \\ \{q' \in Q \mid \exists x \;\; q_0 \xrightarrow{x} q'\} & \text{برای } a=\overset{\varepsilon\text{-transition}}{\varepsilon}, q=q_s \\ \emptyset \end{cases}$$

برای تکمیل اثبات، ثابت می‌کنیم که رشته y توسط N پذیرفته است، اگر و تنها اگر $y\in suffix(L(M))$. اگر y توسط N پذیرفته شود، درواقع داشتیم $q_s \xrightarrow{\varepsilon} q \xrightarrow{y} q'$ (که $q'\in F'=F$). از طرفی می‌دانیم که در DFA مربوط به M، q استیتی است که می‌توان با رشته x از q_0 به آن رسید و داشته‌ایم: $q_0 \xrightarrow{x} q \xrightarrow{y} q'$. درواقع $y=suffix(L) \Leftarrow xy\in L(M)$. از طرفی، اگر فرض کنیم که $y \in suffix(L)$، می‌توان نتیجه گرفت که رشته x ای وجود دارد، به طوری که $xy\in L(M)$ و داریم $q_0 \xrightarrow{x} q \xrightarrow{y} q'$ که q استیتی از Q برای M است و $q'\in F$، با توجه به تعریف N، داریم: $q_s \xrightarrow{\varepsilon} q \xrightarrow{y} q'$ که در آن $F=F'$ است. پس می‌توان نتیجه گرفت y توسط N پذیرفته است و $y\in L(N)$
⟸ اثبات درستی منظم بودن زبان کامل شد.

(برای تکمیل اثبات از مرجعی در اینترنت کمک گرفتم)