



به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره ۴

دستیار آموزشی این مجموعه: فاطمه کرمی محمدی

[phateme.k@gmail.com](mailto:phateme.k@gmail.com)

تاریخ تحویل: ۲ اردیبهشت (صفحه درس)

---

۱. برای هر یک از زبان‌های زیر یک گرامر مستقل از متن بنویسید. (۳۰ نمره)

a)  $L = \{0^i 1^j \mid 2i \leq j \leq 3i\}$

پاسخ:

$$S \rightarrow 0S11 \mid 0S111 \mid \varepsilon$$

b)  $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i + j = k\}$

پاسخ:

$$S \rightarrow aSc \mid X$$

$$X \rightarrow bXc \mid \varepsilon$$

c) زبان شامل همه رشته‌های غیر پالیندروم با الفبای  $\{a, b\}$  (پالیندروم به رشته‌ای

گفته می‌شود که اگر آن را قرینه کنیم برابر با خودش شود).

پاسخ:

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid D$$

$$D \rightarrow bCa \mid aCb$$

$$C \rightarrow aC \mid bC \mid \varepsilon$$

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

(d) زبان مکمل زبان روبرو:

پاسخ:

$$S \rightarrow S_1 S_2 S_3$$

$$S_1 \rightarrow 0S_1 1 \mid 0S_1 \mid 0$$

$$S_2 \rightarrow 0S_2 1 \mid S_2 1 \mid 1$$

$$S_3 \rightarrow X1X0X$$

$$X \rightarrow 0X \mid 1X \mid \varepsilon$$

$$e) L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1, i = j \text{ or } j = k\}$$

پاسخ:

$$S \rightarrow A \mid B$$

$$A \rightarrow DC$$

$$D \rightarrow aDb \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow Cc \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow aBc \mid F$$

$$F \rightarrow bF \mid \varepsilon$$

۲. گرامر  $G$  را در نظر بگیرید.

$$G: S \rightarrow aS \mid aSbS \mid c$$

الف) آیا  $G$  دارای ابهام است؟ ثابت کنید. (۵ نمره)

ب) در صورتی که  $G$  دارای ابهام است یک گرامر بدون ابهام بسازید که  $L(G)$  را بسازد. (۱۰ نمره)

پاسخ:

الف) بله. رشته  $aacbc$  دارای دو اشتقاق است.

ب)

$$S \rightarrow T \mid U$$

$$T \rightarrow aTbT \mid c$$

$$U \rightarrow aS \mid aTbU$$

۳. گرامر زیر را در نظر بگیرید.

$$S \rightarrow aSb \mid bX \mid Xa$$

$$X \rightarrow bX \mid aX \mid \varepsilon$$

الف) توصیفی برای رشته‌های زبانی که این گرامر تولید می‌کند بیاورید. (۱۰ نمره)

ب) با استفاده از توصیف خود، مکمل این زبان را پیدا کرده و گرامر مستقل از متنی برای ساخت

آن بنویسید. (۱۰ نمره)

ج) آیا در حالت کلی مکمل یک زبان مستقل از متن، مستقل از متن است؟ ثابت کنید. (۱۰ نمره)

پاسخ:

الف) متغیر  $X$ ،  $(a \cup b)^*$  را تولید می‌کند. سپس متغیر  $S$  رشته‌های به شکل  $a^n b (a \cup b)^* b^n$  و  $a^n (a \cup b)^* a b^n$  را تولید می‌کند. در نتیجه این گرامر می‌تواند رشته‌های به شکل  $a^i b^j$  را به شرطی که  $i = j$  نباشد تولید کند. از طرفی هر رشته که با  $b$  شروع شده یا با  $a$  خاتمه می‌یابد و هر رشته که با  $a$  شروع شده و با  $b$  خاتمه یافته ولی به شکل  $a^i b^j$  نیست هم توسط این گرامر تولید می‌شود.

ب) مکمل این زبان، زبان  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  است. گرامر این زبان به شکل

زیر است:

$$S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$$

ج) خیر، در حالت کلی مکمل یک زبان مستقل از متن مستقل از متن

نیست. برای اثبات یک مثال نقض می‌زنیم. زبان  $L$  مستقل از متن نمی‌باشد:

$$L = \{w_1 w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, w_1 = w_2\}$$

پس کافی است برای مثال نقض، گرامر مستقل از متنی برای مکمل این زبان بنویسیم. این زبان رشته‌های با طول زوج می‌پذیرد که نصف راست آن‌ها با نصف چپ آن‌ها برابر باشد. پس مکمل این زبان زبانی است که رشته‌هایی را می‌پذیرد که طول آن‌ها فرد باشد یا طول آن زوج باشد و نصفه چپ و راست آن برابر نباشد:

$$S \rightarrow A \mid B \mid C$$

$$D \rightarrow a \mid b$$

$$A \rightarrow DAD \mid a$$

$$B \rightarrow DBD \mid b$$

$$C \rightarrow AB \mid BA$$

۴. رشته‌های زبانی را که گرامر زیر تولید می‌کند توصیف کنید. (۱۰ نمره)

$$S \rightarrow L_1 | L_2 | \dots | L_9 | R_1 | R_2 | \dots | R_9 | L_i R_j \quad (1 \leq i \leq j \leq 9)$$

$$L_i \rightarrow i \mid iL_j \quad (1 \leq i \leq j \leq 9)$$

$$R_i \rightarrow i \mid iR_j \quad (1 \leq j \leq i \leq 9)$$

پاسخ:

این زبان رشته‌هایی شامل ارقام ۱ تا ۹ تولید می‌کند که در آن هر رقم یا بزرگتر مساوی همه ارقام سمت راست خود است یا بزرگتر مساوی همه ارقام سمت چپ خود است.

۵. برای زبان زیر یک گرامر *right linear* و یک گرامر *left linear* بنویسید. (۱۰ نمره)

$$L = \{0^i 1^j \mid i \geq 2, j \geq 3\}$$

پاسخ:

*right linear:*

$$S \rightarrow 00A$$

$$A \rightarrow 0A \mid B$$

$$B \rightarrow 111C$$

$$C \rightarrow 1C \mid \varepsilon$$

*left linear:*

$$S \rightarrow A111$$

$$A \rightarrow A1 \mid B$$

$$B \rightarrow C00$$

$$C \rightarrow C0 \mid \varepsilon$$

۶. می‌گوییم گرامر  $G$  یک گرامر خطی متقارن است اگر قوانین آن به یکی از اشکال زیر باشد:

$$A \rightarrow aBc$$

$$A \rightarrow a$$

$$A \rightarrow \varepsilon$$

زبان  $L$  یک زبان خطی متقارن است اگر بتوان آن را با یک گرامر خطی متقارن توصیف کرد.

الف) مثالی از یک زبان خطی متقارن که منظم نیست بیاورید. (۵ نمره)

ب) نشان دهید هر زبان خطی متقارنی که الفبای آن فقط شامل یک حرف باشد زبانی منظم است. (۱۰ نمره) (امتیازی)

پاسخ:

الف) زبان  $L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$  یک زبان خطی متقارن نامنظم است.

ب) وقتی الفبای زبان فقط شامل یک حرف باشد ترتیب non-terminal ها

اهمیتی ندارد. در نتیجه قوانین یک گرامر خطی متقارن که فقط شامل حرف  $a$  است را می‌توان به شکل زیر تغییر داد:

$$A \rightarrow aBa \quad \Rightarrow \quad A \rightarrow aaB$$

$$A \rightarrow a \quad \text{بدون تغییر}$$

$$A \rightarrow \varepsilon \quad \text{بدون تغییر}$$

گرامر جدیدی که تولید می‌شود یک گرامر right linear است پس زبان آن یک زبان منظم است.