

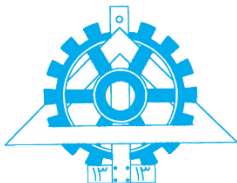
به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره 7

دستیار آموزشی این مجموعه: پاشا براهیمی

pashabarahimi@gmail.com



تاریخ تحویل: 9 آذر (صفحه درس)

(1) با استفاده از لم تزریق نشان دهید زبان‌های زیر مستقل از متن نیستند. (20 نمره)

A) $L = \{a^n b^{3m} a^n b^{2m} \mid n, m \geq 1\}$

B) $L = \{a^n b^{n+1} c^{n+2} \mid n \geq 1\}$

C) $L = \{a^{n^2+1} \mid n \geq 0\}$

D) $L = \{s_1 \# s_2 \# \dots \# s_n \mid n \geq 2 \text{ and } s_i \in \{0, 1\}^* \text{ and } s_i = s_j \text{ for some } i \neq j\}$

پاسخ:

A) $s = a^p b^{3p} a^p b^{2p}, s \in L$

$s = uvwxy, |vwx| \leq p, vx \neq \epsilon$

اگر s را به 4 بخش تقسیم کنیم به طوری که بخش اول شامل p حرف a ، بخش دوم شامل $3p$ حرف b ، بخش سوم شامل p حرف a و بخش چهارم شامل $2p$ حرف b باشد، uwx حداکثر شامل 2 بخش مجاور خواهد بود. در نتیجه اگر i را برابر با 2 در نظر بگیریم، در رشته $s' = uv^2wx^2y$ تناسب تعداد حروف a در بخش 1 و 3 و یا تناسب حروف b در بخش 2 و 4 برهم می‌خورد و در نتیجه s' در زبان L نخواهد بود. پس این زبان مستقل از متن نیست.

B) $s = a^p b^{p+1} c^{p+2}, s \in L$

$s = uvwxy, |vwx| \leq p, vx \neq \epsilon$

با توجه به اینکه طول بخش vwx حداکثر برابر با p است، این بخش نمی‌تواند شامل تمام حروف a و b و c باشد. در نتیجه با در نظر گرفتن $i = 2$ ، تعداد حداقل یکی از این 3 حرف تغییر می‌کند و تعداد حداقل یکی از آن‌ها تغییر نمی‌کند. در نتیجه رشته $s' = uv^2wx^2y$ در زبان L نیست که نشان می‌دهد این زبان مستقل از متن نیست.

C) $s = a^{p^2+1}, s \in L$

$s = uvwxy, |vwx| \leq p, vx \neq \epsilon$

$|vwx| = j \leq p, i = 2 \rightarrow s' = uv^2wx^2y \rightarrow |s'| \leq p^2 + 1 + j \leq p^2 + p + 1$

از طرفی، طول اولین رشته بزرگتر از s که در زبان L باشد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(p + 1)^2 + 1 = p^2 + 2p + 2$$

$$(p^2 + 2p + 2) - (p^2 + p + 1) = p + 1 \geq 2$$

در نتیجه رشته s قطعاً در زبان L نیست که نشان می‌دهد این زبان مستقل از متن نیست.

$$D) s = 0^p 1^p \# 0^p 1^p, s \in L$$

$$s = uvwxy, |vwx| \leq p, vx \neq \epsilon$$

در این مورد 3 حالت برای بخش vwx به وجود می‌آید:

- 1- این بخش کاملاً در یک سمت $\#$ قرار بگیرد. در این صورت با انتخاب $i = 2$ ، پس از تزریق بخش‌های s_1 و s_2 برابر نخواهند بود و رشته s نیز در زبان L نخواهد بود.
- 2- این بخش شامل $\#$ باشد و $\#$ در یکی از بخش‌های v یا x قرار بگیرد. در این صورت با انتخاب $i =$ علامت $\#$ حذف می‌شود و در این صورت هم رشته s در زبان L نخواهد بود.
- 3- این بخش شامل $\#$ باشد اما $\#$ در بخش w قرار بگیرد. در این صورت با انتخاب $i = 2$ ، پس از تزریق s_1 و s_2 برابر نخواهند بود و در این حالت هم رشته s در زبان L نخواهد بود.

با توجه به اینکه در تمام حالات یک مقدار برای i وجود دارد که باعث شود رشته s در زبان L نباشد، این زبان مستقل از متن نیست.

(2) با استفاده از خواص زبان‌های مستقل از متن ثابت کنید زبان زیر مستقل از متن است. الفبای زبان را به صورت $\Sigma = \{0, 1\}$ در نظر بگیرید. (10 نمره)

$$L = \{w \mid n_0(w) = n_1(w), \text{ نباشد } 010 \text{ رشته}\}$$

منظور از $n_x(w)$ تعداد حروف x در رشته w است.

پاسخ: دو زبان زیر را در نظر بگیرید:

$$L_1 = \{w \mid n_0(w) = n_1(w)\}$$

$$L_2 = \{w \mid w \text{ شامل زیر رشته } 010 \text{ باشد}\}$$

می‌دانیم زبان L از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$L = L_1 \cap \bar{L}_2$$

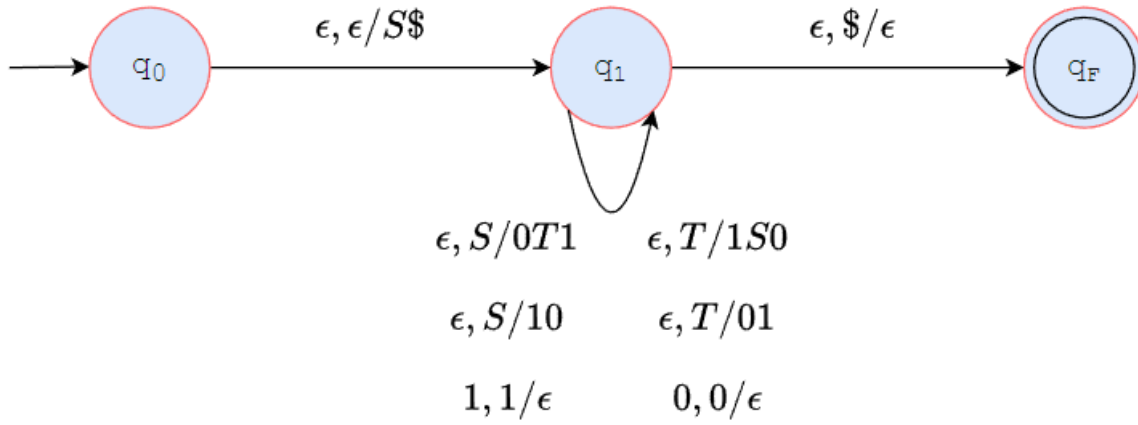
از طرفی می‌دانیم زبان L_2 منظم است و زبان‌های منظم تحت عمل مکمل‌گیری بسته هستند. پیش‌تر در درس خواندید که زبان L_1 مستقل از متن است و اشتراک یک زبان مستقل از متن و یک زبان منظم، مستقل از متن خواهد بود.

(3) برای گرامر مستقل از متن زیر یک PDA ترسیم کنید. (10 نمره)

$$S \rightarrow 0T1 \mid 10$$

$$T \rightarrow 1S0 \mid 01$$

پاسخ:



4) اتوماتون پشته‌ای زیر به شما داده شده است. نمودار آن را ترسیم کنید، زبانی که این اتوماتون می‌پذیرد و یک گرامر مستقل از متن برای آن بنویسید؛ در نهایت مراحل پذیرش رشته 101 را با نمایش حرف خوانده شده، حالت مبدا و مقصد و سمبل پوش/پاپ شده از پشته را مشخص کنید. (20 نمره)

$$\delta(q_0, \epsilon, \epsilon) = \{(q_1, \$)\}$$

$$\delta(q_1, 0, \epsilon) = \{(q_1, 0), (q_2, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_1, 1, \epsilon) = \{(q_1, 1), (q_2, \epsilon)\}$$

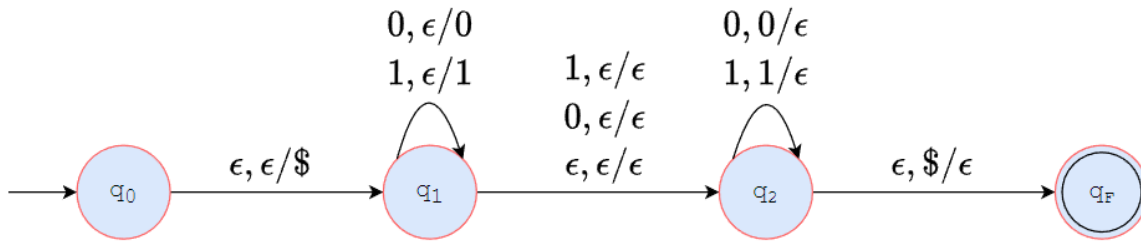
$$\delta(q_1, \epsilon, \epsilon) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_2, 0, 0) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_2, 1, 1) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_2, \epsilon, \$) = \{(q_F, \epsilon)\}$$

پاسخ:



$$L = \{w \mid w = w^R, w \in \Sigma^*\}$$

$$S \rightarrow 1S1 \mid 0S0$$

$$S \rightarrow 1 \mid 0 \mid \epsilon$$

مراحل پذیرش رشته 101:

1) Char: ϵ Source: q_0 Dest: q_1 Push: $\$$	2) Char: 1 Source: q_1 Dest: q_1 Push: 1	3) Char: 0 Source: q_1 Dest: q_2 Push: ϵ	4) Char: 1 Source: q_2 Dest: q_2 Pop: 1	5) Char: ϵ Source: q_2 Dest: q_F Pop: $\$$
--	--	---	---	---

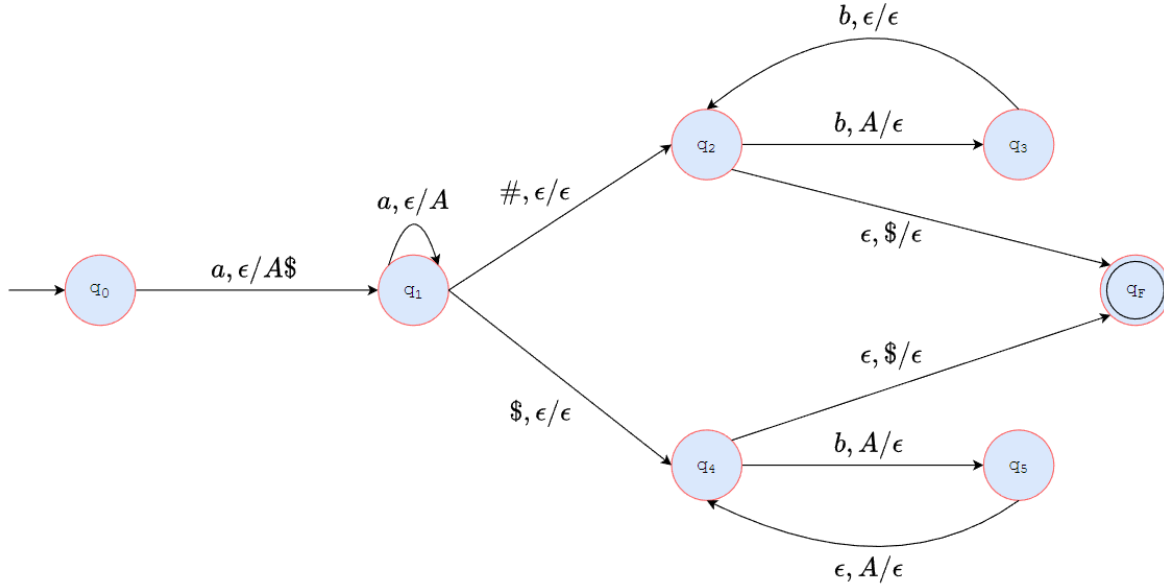
5) دو زبان مستقل از متن زیر به شما داده شده است. برای هر یک از این دو زبان در صورت امکان یک DPDA و در غیر این صورت یک NPDA رسم کنید. (20 نمره)

$$A) L = \{a^n \# b^{2n} \mid n \geq 1\} \cup \{a^{2n} \$ b^n \mid n \geq 1\}$$

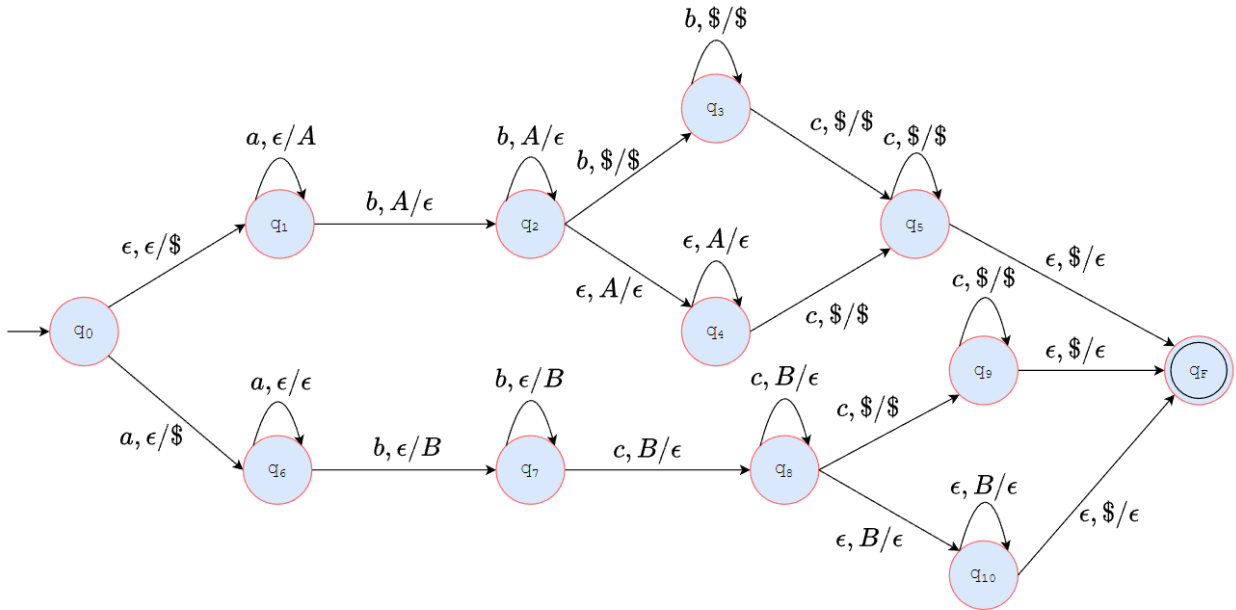
$$B) L = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee j \neq k, i, j, k \geq 1\}$$

پاسخ:

(A) برای این زبان یک DPDA رسم می‌کنیم:



(B) این زبان مستقل از متن قطعی نیست پس برای آن یک NPDA رسم می‌کنیم:



(6) عملیات ادغام که آن را با Ω نشان می‌دهیم، بر روی دو زبان L_1 و L_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega(L_1, L_2) = \{w \mid w = x_1 y_1 \dots x_k y_k, \text{ where } x_1 \dots x_k \in L_1 \text{ and } y_1 \dots y_k \in L_2 \text{ and } x_i, y_i \in \Sigma^*\}$$

عبارت $x_1 \dots x_k$ به معنی الحاق¹ رشته‌های x_1 تا x_k است.
آیا زبان‌های مستقل از متن تحت عملیات ادغام بسته هستند؟ پاسخ خود را اثبات کنید. (20 نمره)

پاسخ: خیر، زبان‌های مستقل از متن تحت عملیات ذکر شده بسته نیستند. برای اثبات این مورد دو زبان زیر را تعریف می‌کنیم:

$$L_1 = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, n_0(w) = n_1(w)\}$$

$$L_2 = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, n_a(w) = n_b(w)\}$$

بدیهی‌ست که این دو زبان مستقل از متن هستند. در این حالت عملیات ادغام بر روی این دو زبان به صورت زیر خواهد بود:

$$\Omega(L_1, L_2) = \{w \mid w \in \{0, 1, a, b\}^*, n_0(w) = n_1(w) \text{ and } n_a(w) = n_b(w)\}$$

این زبان مستقل از متن نیست. برای اثبات، از لم تزریق استفاده می‌کنیم.

$$s = 0^p a^p 1^p b^p, s \in \Omega(L_1, L_2)$$

$$s = uvwxy, |vwx| \leq p, vx \neq \epsilon$$

با توجه به طول بخش vwx ، این بخش نمی‌تواند هم شامل 0 و هم شامل 1 و یا هم شامل a و هم شامل b باشد. در نتیجه با انتخاب $i = 2$ ، تعادل بین تعداد حروف a و b یا تعادل بین تعداد 0 و 1 بر هم می‌خورد و رشته جدید عضو زبان نخواهد بود؛ در نتیجه این زبان مستقل از متن نیست. پس می‌توان گفت زبان‌های مستقل از متن تحت این عملیات بسته نیستند.

(7 امتیازی: نشان دهید که زبان زیر مستقل از متن است ولی مستقل از متن قطعی نیست. (10 نمره)

$$L = \{w \mid w \in \{a^+ b^+ c^+\} \text{ and } w \notin \{a^n b^n c^n\}\}$$

پاسخ: این زبان همان زبان بخش دوم سوال 5 است که پیش‌تر برای آن یک NPDA رسم کردیم؛ در نتیجه می‌توان گفت این زبان مستقل از متن است. فرض خلف می‌کنیم L مستقل از متن قطعی باشد، در این صورت \bar{L} نیز مستقل از متن قطعی خواهد بود. در واقع زبان \bar{L} نشان‌دهنده رشته‌هایی است که یا به فرم $a^+ b^+ c^+$ نیستند و یا اینکه تعداد حروف a و b و c با هم برابر است. زبان L' را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$L' = \bar{L} \cap a^+ b^+ c^+ = \{a^n b^n c^n, n \geq 1\}$$

می‌دانیم زبان‌های مستقل از متن تحت عمل اشتراک با زبان‌های منظم بسته هستند؛ پس می‌توان گفت زبان L' نیز مستقل از متن است در حالی که می‌دانیم اینطور نیست. پس فرض خلف باطل است زبان L مستقل از متن قطعی نیست.

¹ concatenation