۸۱۰۱۰۱۴۹۲ علیرضا کریمی

1) a) $L = \{0^i 1^j \mid 2i \le j \le 3i\}$

$$S \to 0S11 \mid 0S111 \mid \varepsilon$$

b) $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \ge 0,\ i+j=k\}$

$$S \to aSc \mid X \mid \varepsilon$$
$$X \to bXc \mid bc$$

اول می‌آییم از انتها و ابتدا، a و c ها را جدا می‌کنیم تا زبانی که رشته‌ی ما فقط شامل b و c باشد. (به ازای هر a یک c جدا کردیم)
(حال به ازای هر b یک c جدا می‌کنیم دوباره)

c)

$$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0X1 \mid 1X0 \mid 01 \mid 10$$
$$X \to 0X \mid 1X \mid 0 \mid 1$$

در واقع ما اینجا دنبال زبان مکمل رشته‌های پالیندروم هستیم. اگر دو بیت انتها و ابتدا متفاوت باشند (حالت‌های $0X1$ و $1X0$) آنگاه می‌توانیم متغیر X را هر گونه بخواهیم گسترش دهیم (به صورت $0X$ یا $1X$) اما اگر دو بیت انتها و ابتدا یکسان بودند، باید در رشته‌ی میانی آن دو بیت، دنبال رشته‌ی غیر پالیندروم بگردیم و عملا با مسئله‌ی کوچک‌تر از همان نوع مواجه خواهیم شد. پس داشتیم $S \to 0S0 \mid 1S1$. قوانین دیگر هم برای حالت‌ها را باید در نظر گرفته شوند.

d)

مکمل $0^n 1^n$ را می‌توان اینگونه در نظر گرفت که، ممکنه اول رشته‌ ما با 1 شروع بشه یا آخر رشته‌ ما با 0 تمام بشه. در این صورت ادامه رشته برای ما اهمیتی نداره و قطعا حالت $0^n 1^n$ رخ نمی‌دهد (فرض کنید با 1 شروع کردیم. بعد از آن صفر نمی‌تواند بیاید چون قطعا $0^n 1^n$ تشکیل نخواهد شد. اگر هم 1 بیاید فقط که قطعا تعداد 1ها از صفرها بیشتر می‌شود. این حالت را برای اتمام با 0 نیز می‌توان به طور متقارن گفت.

حال اگر عبارت ما با 0 شروع و با 1 تمام شود، کافی است مسئله را برای رشته‌ی میانی حل کنیم: $S \to 0S1$

قوانین حالت بالا را هم اضافه می‌کنیم.
پس داریم:

$$S \to 0S1 \mid 1X \mid X0 \mid 1 \mid 0$$
$$X \to 0X \mid 1X \mid 1 \mid 0$$

$L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 1, i=j \text{ or } j=k\}$

e) $S \rightarrow XY \mid ZT$

$X \rightarrow aXb \mid ab$

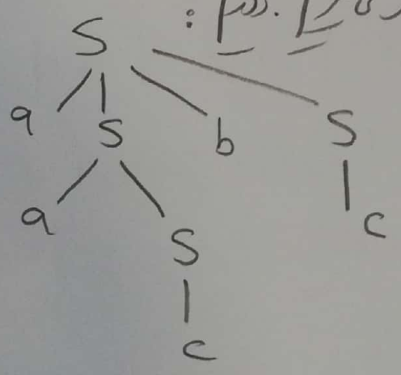
$Y \rightarrow cY \mid c$

$Z \rightarrow aZ \mid a$

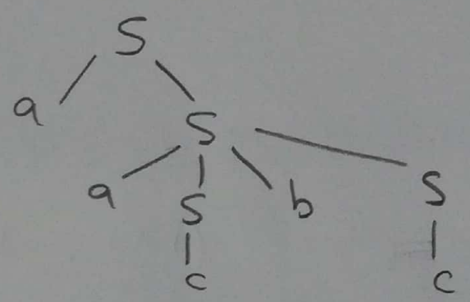
$T \rightarrow bTc \mid bc$

۲)

الف) برای اثبات مبهم بودن کافی است دوتا sparse tree متفاوت برای یک رشته این گرامر رسم کنیم.
رشته aacbc را درنظر می‌گیریم. داریم:



یا



پس زبان مبهم است.

ب) گرامر روبرو توصیف کننده همین زبان اما غیر مبهم است:

$S' \rightarrow X \mid Y$

$X \rightarrow aXbX \mid c$

$Y \rightarrow aS' \mid aXbY$

۳)

الف) منظم رشته‌های این زبان به این صورت هستند: $a^k b (a+b)^n b^k + a^k (a+b)^n a b^k$

$k, n \geq 0$

درواقع رشته‌های زبان این گرامر یا با b شروع می‌شوند یا با a تمام می‌شوند، و درصورتی که با a شروع و با b تمام شوند، به مسئله‌ای مثل خودش و کوچک‌تر از آن دوباره برمی‌خوریم (همانطور که در سوال اول قسمت d توضیح دادیم، این زبان مکمل زبان $a^n b^n$ می‌شود). شروع با b یا پایان با a برای هر زیرمسئله و non terminal، تقارن حالت $a^n b^n$ را به هم می‌زند.

ب) مکمل این زبان، رشته‌هایی را دربرمی‌گیرد که فقط با a شروع و با b تمام می‌شود و اینگونه هر دفعه می‌تواند به زیرمسئله‌ای از نوع خودش تبدیل شود ($S \to aSb$) اما هیچ قانون دیگری که این تقارن را به هم بزند وجود ندارد و در هر مرحله همیشه از سمت چپ a و از سمت راست b تولید می‌شود. منظور از تقارن این است که تعداد aها در سمت چپ با تعداد bها در سمت راست برابر باشد و a فقط در چپ و b فقط در راست رشته باشد. پس مکمل زبان بخش الف برابر است با

$$\Longrightarrow \bar{L}(G) = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$$

$$S \to aSb \mid \varepsilon$$ حالت پایه

ج) CFLها تحت عمل مکمل شدن بسته نیستند و مکمل CFL می‌تواند CFL باشد یا نباشد. مثال نقض:

(صفحه بعد)

ج) CFL ها تحت عملیات مکمل شدن، بسته نیست و مکمل CFL می‌تواند یک CFL باشد یا نباشد.

به عنوان مثال: زبان روبرو CFL نیست

$$L = \{ ww \mid w \in \Sigma^* \}$$

اما مکمل آن یک CFL است و گرامر آن به صورت روبرو خواهد شد:

$$S \to AB \mid BA \mid A \mid B$$

$$A \to aAa \mid bAb \mid aAb \mid bAa \mid a$$

$$B \to aBa \mid bBb \mid aBb \mid bBa \mid b$$

توضیح:

دقت کنید که اگر طول رشته ما فرد باشد، قطعا به صورت ww نیست. پس اگر $S \to A$ و یا $S \to B$ داشته باشیم، چون طول رشته‌های تولید شده توسط A و B فرد است، این حالت پوشش داده می‌شود. حال، حالتی را در نظر می‌گیریم که $S \to AB$ و $S \to BA$ (برای رشته‌های با طول زوج). بدون کاستن از کلیت، فرض کنید که $S \to AB$. در این صورت رشته ما به این شکل خواهد شد:

$$(a+b)^k\, a\, (a+b)^k\, (a+b)^m\, b\, (a+b)^m$$

$$\underbrace{\underbrace{\_\_\_}_{k}\ a\ \underbrace{\_\_\_}_{k}}_{\text{رشته } A}\ \ \underbrace{\underbrace{\_\_\_}_{m}\ b\ \underbrace{\_\_\_}_{m}}_{\text{رشته } B}$$

$$m = k + z$$

$$z \in \mathbb{Z}$$

حال رشته حاصل را از میان به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. طول هر قسمت برابر است با:

$$\frac{2k+1+2m+1}{2} = \frac{2k+1+2\overbrace{(k+z)}^{m}+1}{2} = 2k+z+1$$

$$\Longrightarrow (a+b)^k\, a\, (a+b)^k \overbrace{(a+b)^z \,\vdots\, (a+b)^k}^{m}\, b\, (a+b)^{\overbrace{k+z}^{m}}$$

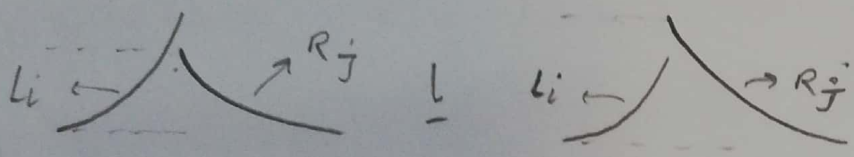
همانطور که می‌بینید، حرف a در قسمت اول در جایگاه k+1 ام و حرف b نیز در قسمت دوم در جایگاه k+1 ام قرار گرفته است. پس چون دو حرف متفاوت نسبت به هر قسمت در جایگاه یکسانی هستند، پس ww در این حالت نیز نخواهیم داشت.

۴) این گرامر، یکی از این ۳ رشته زیر را تولید می‌کند.

نوع اول) رشته‌هایی که به صورت L_i هستند، می‌توانند اعداد صعودی در بازه 1 تا 9 را تولید کنند.

نوع دوم) رشته‌هایی که به صورت R_j هستند، می‌توانند اعداد نزولی در بازه 1 تا 9 تولید کنند. R_j

نوع سوم) رشته‌هایی که به صورت L_iR_j هستند، در ابتدا می‌توانند دنباله اعداد صعودی از 1 تا 9 را تولید کنند و در آخر هم می‌توانند دنباله نزولی اعداد در بازه 1 تا 9 را تولید کنند. فقط توجه شود که عدد اول دنباله نزولی R_j حتما بزرگتر مساوی عدد اول دنباله صعودی L_i است.



5)

right linear

$S \to 0X$

$X \to 0X \mid 0Y$

$Y \to 11Z$

$Z \to 1Z \mid 1$

Left linear

$S \to X11$

$X \to Y1 \mid X1$

$Y \to Z0$

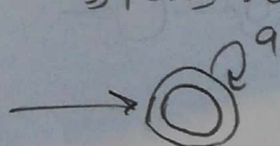
$Z \to Z0 \mid 0$

۶) الف) برای زبان $L=\{b^nc^n \mid n\geq 0\}$ داریم: $S \to bSc \mid \varepsilon$ ⟸ گرامر متقارن است.

مثال دیگر $L=\{ww^R \mid w\in\{a,b\}^*\}$ داریم: $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$ ⟸ گرامر متقارن است.

ب) برای زبان خطی با الفبای یک حرفه، قوانین را بازنویسی می‌کنیم و خواهیم داشت: $S \to \underset{①}{aSa} \mid \underset{②}{a} \mid \underset{③}{\varepsilon}$

که اگر بررسی کنیم می‌بینیم که تمام رشته‌های a^* را تولید می‌کند. پس می‌توان DFA آن را اینگونه رسم کرد.



چون DFA را رسم کردیم، پس منظم است.

(در واقع رشته a^{2k} را می‌توان با اعمال k بار قانون ① و یک بار قانون ③ تولید کرد و رشته a^{2k+1} را با اعمال k بار قانون ① و یک بار قانون ② می‌توان تولید کرد که $k\geq 0$)

ادامه ب) درواقع به طور دقیق‌تر باید اینطوری بنویسیم که

$S \rightarrow aS_1a \mid a \mid \varepsilon$

$S_1 \rightarrow aS_2a \mid a \mid \varepsilon$

$S_2 \rightarrow aS_3a \mid a \mid \varepsilon$

$\vdots$

$S_{n-1} \rightarrow aS_na \mid a \mid \varepsilon$

که همانطور که می‌بینید، اگر مقادیر S_iها را به صورت بازگشتی جایگزین کنیم، به رابطه خلاصه شده زیر می‌رسیم:

$S \rightarrow aSa \mid a \mid \varepsilon$