



استاد: حجت

۱۳۹۹/۴/۱۸

امتحان پایان ترم نظریه زبانها و ماشین ها

مدت امتحان ۵: ساعت

آزمون در منزل

قبل از شروع امتحان لطفاً به موارد زیر توجه داشته باشید:

- این آزمون غیرحضوری و کتاب باز (open book) است.
- لطفاً برای یافتن پاسخ به یک سوال، دنبال جستجوی صورت آن در اینترنت نباشید. از نرم افزارهای کمک آموزشی برای حل مسائل استفاده نکنید. هدف از این آزمون سنجش دانش شما در درس است.
- در مورد این آزمون با کسی (جز استاد) صحبت یا مشورت نکنید. اگر چنانچه نکته ای برای شما شفاف نیست به صورت خصوصی به استاد ایمیل بزنید. استاد درس تلاش می کند در حین آزمون به ایمیل های شما پاسخ دهد.
- لطفاً پاسخ های خود را قبل از پایان امتحان (ساعت یک بعدازظهر) ارسال کنید. تلاش کنید که پاسخ ها خوانا باشند و با کیفیت خوب آپلود شوند. هیچ پاسخی بعد از پایان زمان امتحان تحویل گرفته نخواهد شد. اگر احتمال می دهید که نزدیک زمان پایان آزمون به اینترنت دسترسی نداشته باشید کمی زودتر پاسخ را ارسال کنید. چنانچه به هر دلیلی سامانه CECM کار نمی کرد پاسخ های خود را ایمیل بزنید. موضوع تمام شدن زمان امتحان در ساعت یک بعدازظهر را **جدی** بگیرید.
- به سؤال ها سرسری پاسخ ندهید! گاهی یک اشتباه به ظاهر کوچک موجب می شود که یک اتوماتون یا یک گرامر کاملاً غلط بشود. بی جهت نمره از دست ندهید.
- این امتحان ۷ سوال دارد و در جمع ۱۰۰ نمره است.
- «اعتماد» متقابل مهم ترین سرمایه ی اجتماعی در مواجهه با بحران هایی نظیر کرونا است. استاد درس به شما اعتماد دارد و از هیچ ابزاری جز اعتماد جهت اطمینان پیدا کردن نسبت به رعایت قوانین آزمون استفاده نخواهد کرد.



- تلاش کنید که در آرامش کافی مسائل را حل کنید. نوشیدن چای، قهوه، دمنوش یا هر نوشیدنی مجاز آرام بخش در حین امتحان فراموش نشود. موفق باشید!

سوال یک: (۲۵ نمره)

یکی از تکنیک های مورد استفاده جهت تولید واکسن کرونا، استفاده از آر ان ای پیام رسان (mRNA) است. این روش هم اکنون در شرکت «مدرنا» در بوستون آمریکا در حال آزمایش نهایی است و پیش بینی می شود که یکی از واکسن هایی باشد که در سال آینده (امید به خدا) بتواند جهان را از بحران کرونا نجات بدهد. آر ان ای پیام رسان یک برنامه حاوی اطلاعات ژنتیکی است که می توان آنرا یک رشته بر روی الفبای $\{a, u, g, c\}$ در نظر گرفت. وقتی آر ان ای پیام رسان در بدن فرد تزریق می شود تولید پروتئین خاصی می کند که به جنگ ویروس کرونا می رود.

الف) فرض کنید که دانشمندان می خواهند بدانند که مجموع تعداد a و u در یک رشته با مجموع تعداد g و c برابر است یا خیر. آیا برای این کار می شود از زبانهای منظم استفاده کرد؟ اگر بلی، با رسم اتوماتون یا ارائه عبارت منظم نشان بدهید. اگر خیر، با کمک لم تزریق (نه با استفاده از خواص زبانهای منظم) اثبات کنید.

ب) حال فرض کنید که دانشمندان می خواهند بدانند که مجموع تعداد a و u در یک رشته با مجموع تعداد g و c در پیمانه ۵ برابر است یا خیر ($\text{mod } 5$). آیا برای این کار می شود از زبانهای منظم استفاده کرد؟ اگر بلی، با رسم اتوماتون یا ارائه عبارت منظم نشان بدهید. اگر خیر، با کمک لم تزریق (نه با استفاده از خواص زبانهای منظم) اثبات کنید.

پ) گروهی از محققین گرامر زیر را برای تشخیص دادن برخی از آر ان ای های پیام رسان نوشته اند.

$$S \rightarrow Rg \mid SS \mid cT \qquad R \rightarrow Sc \mid uT \mid a \qquad T \rightarrow Ra \mid Tc \mid u$$

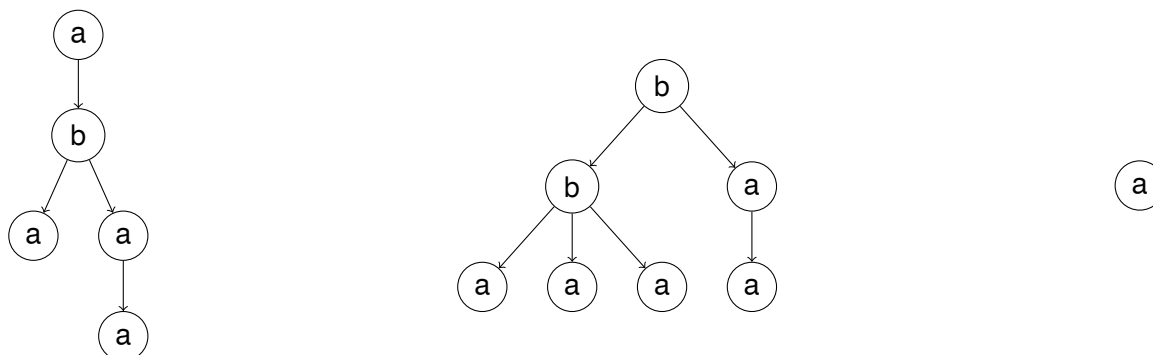
رشته ای عضو زبان گرامر پیدا کنید که برای آن حداقل دو درخت اشتقاق متفاوت وجود داشته باشد. آن دو درخت را ترسیم کنید.

ت) با حذف کردن یک قانون از قوانین فوق، گرامر تبدیل به گرامری غیرمبهم می شود. آن قانون کدام است؟

ث) با گرامر قسمت «پ» و رشته ی ورودی $uagcg$ یک جدول CYK ترسیم کنید. آیا این رشته به زبان گرامر تعلق دارد؟ (برای این کار ممکن است نیاز داشته باشید تغییراتی در گرامر اعمال کنید)

سوال دو: (۱۰ نمره)

فرض کنید که در جامعه دو نوع شهروند داریم: محتاط و غیرمحتاط. افراد محتاط وقتی (خدایی ناکرده) کرونا می گیرند یا هیچ کسی را مبتلا نمی کنند، یا ماکسیم یک نفر را مبتلا می کنند. اما افراد غیرمحتاط وقتی (خدایی ناکرده) کرونا می گیرند n نفر را حتماً مبتلا می کنند ($n > 1$). جهت مطالعه روند انتقال بیماری در جامعه می توان درخت انتقال کرونا رسم کرد. در این درخت شهروند محتاط را با a و شهروند غیرمحتاط را با b نمایش می دهیم. همچنین فرض می کنیم که یک شهروند تنها از یک نفر دیگر ممکن است که کرونا بگیرد. به عنوان مثال، درخت های زیر همگی نشان دهنده ی درخت انتقال کرونا هستند. دقت کنید که با توجه به تعریف تنها a می تواند در برگ درخت قرار بگیرد.



یک روش معمول برای نمایش متنی درخت استفاده از S-expression است. در این روش، یک درخت در داخل یک جفت پرانتز نمایش داده می شود که در آن عنصر اول والد و باقی عناصر لیست بچه های آن والد هستند. به عنوان مثال، نمایش متنی درخت های فوق به صورت زیر است:

$$(a) \qquad (b(b(a)(a)(a))(a(a))) \qquad (a(b(a)(a(a))))$$

یک گرامر بر روی الفبای $\Sigma = \{a, b, (,)\}$ طراحی کنید که رشته های S-expression نشان دهنده ی یک درخت انتقال کرونا ی درست را بپذیرد. به عنوان مثال، گرامر شما سه رشته ی فوق را می پذیرد اما رشته های $(a, (a(a), (a(b))$ و $(a(a(a)))$ را رد می کند. اگر گرامر شما رشته ی اشتباهی بپذیرد یا رشته ی درستی را رد کند کل نمره این سوال را از دست می دهید. لطفاً گرامر خود را به دقت تست کنید.

سوال سه: (۱۵ نمره)

فاصله گذاری اجتماعی از مهم ترین روش های جلوگیری از انتقال کرونا در پروتکل های بهداشتی است. آیدا و بیتا همسایه یکدیگر هستند. این دو عصرها جهت پیاده روی و خرید از خانه خارج می شوند. برای کنترل فاصله ی آیدا و بیتا در حین پیاده روی، یک سیستم کنترلی به شرح زیر طراحی می کنیم. الفبای $\{a, b\}$ را در نظر بگیرید. علامت a نشان می دهد که آیدا یک متر حرکت کرده است. به همین شکل b نشان می دهد که بیتا یک متر حرکت کرده است. یک رشته از a و b نشان دهنده ی نحوه ی پیاده روی آیدا و بیتا است. برای مثال، در انتهای پیاده روی طبق رشته $aaab$ آیدا دو متر جلوتر از بیتا است. در پایان پیاده روی طبق رشته $baba$ بیتا و آیدا هر دو در یک مکان قرار می گیرند. طبق پروتکل بهداشتی، در هر زمان بین افراد بایستی حداقل دو متر فاصله وجود داشته باشد. در مثال بالا، رشته ی اولی مطابق پروتکل های بهداشتی است اما دومی نیست. در رشته $aaba$ با اینکه درنهایت آیدا دو متر جلوتر از بیتا است اما در حین پیاده روی در یک مکان بیتا و آیدا یک متر از هم فاصله دارند که موجب نقض پروتکل بهداشتی می شود.

الف) مجموعه ی پیشوندهای رشته ی w را با $prefix(w)$ نشان می دهیم. ابتدا مجموعه پیشوندها را تعریف کنید و سپس با استفاده از آن مجموعه ی رشته های پیاده روی مجاز آیدا و بیتا (مطابق با پروتکل های بهداشتی) را به صورت ریاضی تعریف کنید.

ب) آیا زبان تعریف شده در قسمت (الف) مستقل از متن است؟ اگر بلی، یک اتوماتون پشته ای (pushdown automaton) جهت تشخیص رشته های آن طراحی کنید. اگر خیر، یک ماشین تورینگ جهت تشخیص رشته های آن طراحی کنید. (دقت: اگر زبان مستقل از متن باشد ولی شما ماشین تورینگ ارائه کنید نمره ی این قسمت را از دست می دهید)

سوال چهار: (۱۵ نمره)

یک جوان مبتکر ایرانی به اسم «عمو پورنگ» ادعا دارد ایده ی اصلی ماشین تورینگ از اوست لذا باید این ماشین را به افتخار او «ماشین پورنگ» نامید. ماشین پورنگ بر خلاف ماشین تورینگ استاندارد دو هد دارد: یک هد فقط می تواند بخواند، هد دیگر فقط می تواند بنویسد. در ابتدا، هد خواننده در انتهای سمت چپ نوار و هد نویسنده در اولین خانه خالی بعد از رشته ورودی قرار گرفته است. در هر حرکت ماشین پورنگ:

- هد خواننده یا یک سلول به سمت راست حرکت می کند یا سر جایش می ماند.
- هد نویسنده حتماً یک علامت در سلول کنونی اش می نویسد و یک سلول به سمت راست می رود.

دقت کنید که هدهای ماشین پورنگ هیچ گاه نمی توانند به سمت چپ حرکت کنند.

به نظر شما توانایی ماشین پورنگ به اندازه ی ماشین تورینگ است؟ اگر بله نشان بدهید که چگونه می تواند یک ماشین تورینگ استاندارد را شبیه سازی کند. اگر خیر، زبانی را مثال بزنید که ماشین تورینگ استاندارد آنرا می پذیرد اما ماشین پورنگ نمی تواند آنرا بپذیرد.

سوال پنج: (۱۵ نمره)

یکی از درس های دشوار ارائه شده در مؤسسه فناوری ممسنی (Mamasani Institute of Technology – MIT) درس نظریه زبانها و ماشین ها است. در دوران کرونا، به دلیل مشکلات تحویل حضوری، دستیارهای آموزشی مجبور هستند تمرین های بسیاری را تصحیح کنند که وقت بسیار زیادی از آنها می برد. مبحث ماشین های تورینگ از آخرین مباحث این درس است و نزدیک آزمون نهایی ارائه می شود. دستیاران آموزشی خیلی وقتها با کمبود زمان برای تصحیح مسائل ماشین تورینگ مواجه می شوند. محسن که دستیار ارشد این درس است برای حل این مشکل یک ایده به ذهنش رسیده است: نوشتن یک نرم افزار که به صورت خودکار ماشین های تورینگ ارسال شده توسط دانشجویان را به ماشین های سخت و ساده طبقه بندی کند. ماشین های ساده را می توان به دستیارهایی داد که وقت کافی برای تصحیح تمرین ها ندارند. محسن ایده خود را «دستیار آموزشی خودکار» (یا داخ) نامیده است. نسخه یک داخ (داخ-۱) به عنوان ورودی توصیف یک ماشین تورینگ دلخواه $\langle M \rangle$ را دریافت می کند. سپس تعیین می کند که آیا M روی تمامی ورودی های ممکن خود کمتر از صد حرکت انجام می دهد یا خیر. در این نسخه داخ، ماشین هایی که کمتر از صد حرکت انجام می دهند ماشین های ساده محسوب می شوند. نسخه دو داخ (داخ-۲) به عنوان ورودی یک ماشین تورینگ دلخواه $\langle M' \rangle$ می گیرد. سپس تعیین می کند که آیا M' تنها تعداد محدودی از رشته های ورودی را می پذیرد یا خیر. در این نسخه داخ، ماشین هایی که تعداد محدود از رشته های ورودی را می پذیرند ساده محسوب می شوند.

داخ-۱ و داخ-۲ در رده ی کدام مسائل (decidable، undecidable) قرار می گیرند؟ استدلال خود را توضیح دهید. اگر مساله تصمیم پذیر است توصیف سطح بالا از ماشین تورینگ ارائه کنید. اگر نیست کاهش مناسب را پیدا کنید.

سوال شش: (۱۵ نمره)

در دوران قرنطینه کرونا، یکی از سرگرمی های خوب بازی های فکری است. زیوار یک تیله بازی جدید اختراع کرده است که با تیله بازی های معمول تفاوت دارد. این بازی بر روی یک گراف ساده بدون جهت G انجام می گیرد. هر گره در این گراف به تعداد صفر یا بیشتر تیله دارد. یک حرکت از این بازی شامل برداشتن دو تیله از گره v و اضافه کردن یک تیله به یک همسایه دلخواه u می شود (گره u قبل از انجام حرکت باید حداقل دو تیله داشته باشد). هدف از این بازی این است که در نهایت با انجام چند حرکت تمامی تیله ها به جز یک تیله برداشته شود. ثابت کنید که این بازی NP-hard است. به عبارت دقیق تر، فرض کنید که یک گراف ساده بدون جهت G به همراه تابع $m(v)$ داده شده است که در آن تابع m تعداد تیله های گره v را بر می گرداند. ثابت کنید مساله ی یافتن دنباله ای از حرکات تیله بازی که تمامی تیله ها جز یکی را حذف کند NP-hard است.

سوال هفت: (۵ نمره)

به نظر نمی رسد که به زودی بحران کرونا در دنیا به اتمام برسد. احتمال زیادی وجود دارد که نیمسال (یا سال تحصیلی) آینده هم کلاس ها به صورت مجازی برگزار شوند. استاد درس در این آزمون هیچ گونه روش کنترلی برای امتحان استفاده نکرد، به شما اعتماد کرد که در این امتحان قوانین را اجرا می کنید و تقلبی انجام نمی دهید. اگر بخواهید به خودتان یک نمره عادلانه از ۲۰ بدهید که چقدر به این اعتماد پایبند بودید، چند می دهید؟

(نمره ای که در این قسمت می دهید هیچ تاثیری در نمره ی درس ندارد. پاسخ شما در این سوال تنها جهت آمارگیری و اتخاذ سیاست های بهتر برای آینده استفاده خواهد شد)