

به نام خدا



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- بهار ۱۴۰۱
تمرین شماره 12
دستیار آموزشی این مجموعه: آوا میرمحمد مهدی
avamir80@gmail.com



تاریخ تحویل: 1401/10/14

1) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. (16 نمره)

الف) اگر اثبات شود که یک مساله‌ی NP-complete درون دسته‌ی P قرار می‌گیرد، آنگاه تمامی مسائل NP درون دسته‌ی P قرار می‌گیرند.

ب) اگر در آینده ثابت شود مساله‌ی 3-SAT در زمان $O(n^6)$ قابل حل است، تمام مسائل NP در زمان $O(n^6)$ قابل حل هستند.

ج) اگر یک مساله‌ی NP در زمان چندجمله‌ای حل شود، تمام مسائل NP نیز در زمان چندجمله‌ای حل می‌شوند.

د) مساله‌ی A را در نظر بگیرید؛ اگر بتوان در زمان چندجمله‌ای مساله‌ی 3-SAT را به مساله‌ی A کاهش داد و همچنین بتوان در زمان چندجمله‌ای مساله‌ی A را به مساله‌ی 3-SAT کاهش داد، مساله‌ی A در دسته‌ی NP-complete قرار دارد.

2) گراف G را در نظر بگیرید؛ ثابت کنید تعیین این که گراف G' زیرگراف G است یا خیر، در کلاس پیچیدگی NP-COMplete قرار دارد. (15 نمره)

3) ثابت کنید مکمل زبان REG-EQ در دسته زبان‌های NP قرار دارد. (20 نمره)

$$\text{REG-EQ} = \{ \langle L_1, L_2 \rangle \mid$$

زبان‌های L_1 و L_2 دو زبان منظم و معادل هم هستند به طوری که در تعریف آنها به شکل عبارت منظم، از علامت * استفاده نشده باشد. $\}$

4) گزاره‌های زیر را در صورت درست بودن، اثبات کنید و در غیر این صورت برای آن مثال نقض بیاورید. (14 نمره)

الف) اگر A و B دو زبان NP-complete باشند، $A \cap B$ نیز عضو NP-complete است.

ب) اگر A و B دو زبان NP-complete باشند، $A \cup B$ نیز عضو NP-complete است.

(5) مجموعه‌ی M را در نظر بگیرید؛ مجموعه‌ی D شامل تعدادی از زیرمجموعه‌های دو عضوی M است. مجموعه S را یک زیرمجموعه‌ی تکمیل می‌گوییم هرگاه $S \subseteq M$ و همچنین این زیرمجموعه با تمام اعضای D حداقل در یک عضو مشترک داشته باشد. زبان Common-Subs شامل تمام وروی‌ها به شکل $\langle D, M, k \rangle$ است به طوری که به ازای مجموعه‌های D و M حداقل یک زیرمجموعه‌ی تکمیل با k عضو وجود داشته باشد. ثابت کنید این زبان از نظر پیچیدگی زمانی در دسته‌ی NP-COMPLETE قرار دارد. (15 نمره)

(6) گراف G را با V راس در نظر بگیرید به طوری که هر راس نماینده‌ی یک فرد در یک مدرسه است. دو فرد در صورتی به یکدیگر یال دارند که با یکدیگر رابطه‌ی دوستی داشته باشند. می‌خواهیم ببینیم که آیا می‌شود مجموعه رؤس گراف G را به حداکثر k دسته‌ی T_1, T_2, \dots, T_k افراز کرد به طوری که هر فرد در یک دسته با تمامی افراد آن دسته رابطه‌ی دوستی داشته باشد و همچنین هر فرد دقیقاً در یک دسته وجود داشته باشد. ثابت کنید زبان L که در واقع توصیف کننده‌ی این مساله است، یک زبان NP-complete است.

$$L = \{ \langle G, k \rangle \mid$$

گراف G دارای افرازی با حداکثر k دسته است. $\}$

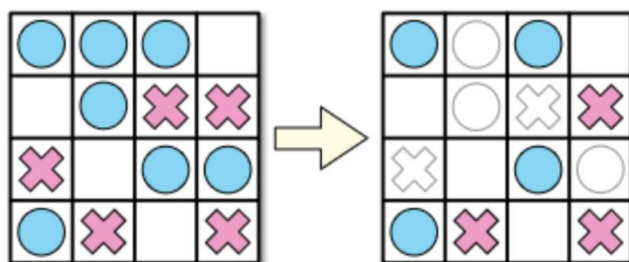
راهنمایی: برای حل این مساله می‌توانید از NP-complete بودن مساله‌ی [k-colouring](#) استفاده کنید. (20 نمره)

(7) جدولی با n سطر و m ستون داریم به طوری که در هر خانه از این جدول علامت x یا o قرار گرفته است و یا هیچ علامتی قرار نگرفته است. هدف این است که با حذف برخی از علامت‌ها جدول را به شکل ایده‌آل درآوریم که تعریف آن در زیر آمده است:

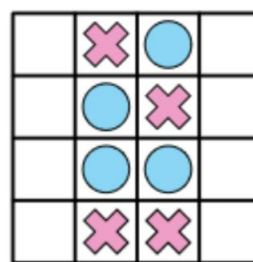
(الف) در هر سطر حداقل یکی از علامت‌های x یا o قرار دارد.

(ب) در هیچ ستونی دو نوع علامت وجود ندارد.

ثابت کنید فهمیدن اینکه می‌توان با داشتن یک جدول اولیه به جدول ایده‌آل رسید یا خیر، در دسته مسائل NP-hard قرار دارد. (قطعا برای برخی حالات نمی‌توان به جدول ایده‌آل رسید.) (10 نمره امتیازی)



A solvable puzzle and one of its many solutions.



An unsolvable puzzle.