



استاد: حجت

۱۴۰۲/۴/۱۱

امتحان پایان ترم نظریه زبانها و ماشین ها

مدت امتحان: ۲/۵ ساعت

نام، نام خانوادگی، شماره دانشجویی:

قبل از شروع امتحان لطفاً به موارد زیر توجه داشته باشید:

- نام خود را حتماً روی برگه سوال بنویسید و آنرا همراه با برگه پاسخ تحویل بدهید.
- این امتحان ۵ سوال دارد و در جمع ۱۰۰ نمره است.
- استفاده از هرگونه وسایل الکترونیکی نظیر موبایل، ساعت هوشمند، تبلت، لپ تاپ، ایکس باکس، ... ممنوع است.
- همکلاسی های شما در سکوت تمرکز بهتر دارند. جهت رعایت حال آنها از استاد در حین امتحان کمتر سوال کنید. در یک ساعت ابتدای این آزمون به هیچ سوالی پاسخ داده نخواهد شد.

### سوال یک: (۲۰ نمره)

تعیین کنید که آیا هر یک از گزاره های زیر درست یا نادرست هستند. برای گزاره های نادرست مثال نقض بیاورید. برای گزاره های درست دلیلی مختصر ذکر کنید.

(الف) اگر  $L$  مستقل از متن باشد آنگاه  $L^*$  منظم است.

(ب) اجتماع دو زبان نامستقل از متن، همیشه نامستقل از متن است.

(پ) زبان های تصمیم پذیر تحت عمل ستاره (Kleene star) بسته هستند.

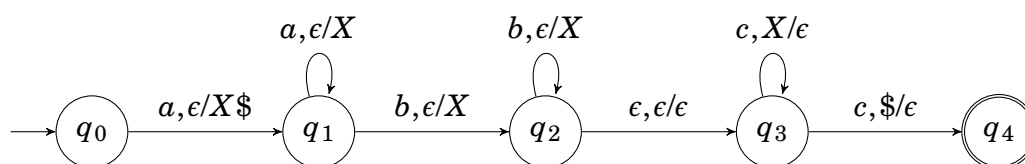
(ت) زبان های تصمیم ناپذیر تحت عمل ستاره (Kleene star) بسته هستند.

### سوال دو: (۳۰ نمره)

زبان  $L_1$  را بر روی الفبای  $\Sigma = \{a, b, c\}$  در نظر بگیرید:

$$L_1 = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k > 0 \text{ and } k > n \text{ and } k > m\}$$

«آیدین» یک جوان پرتلاش است که اتوماتون پشته ای (pushdown automaton) زیر را برای زبان  $L_1$  ترسیم کرده است. این اتوماتون نادرست است (زبان  $L_1$  را نمی پذیرد). هدف از این سوال یاری رساندن به آیدین است.



الف) زبان پذیرفته شده توسط اتوماتون فوق را  $L_2$  می نامیم. آیا رشته  $w \in \Sigma^*$  وجود دارد به نحوی که:

- $w \notin L_2$  و  $w \in L_1$  یا
- $w \in L_2$  و  $w \notin L_1$

برقرار باشد؟ برای هر کدام از موارد فوق اگر رشته  $w$  هست مثال بزنید. اگر نیست توضیح دقیق بدهید. (۱۰ نمره)

ب) اتوماتون صحیح برای زبان  $L_1$  را ترسیم کنید. اگر فکر می کنید که آیدین به اشتباه فکر می کند که زبان  $L_1$  مستقل از متن است با لم تزریق برای او اثبات کنید. (۲۰ نمره)

### سوال سه: (۲۰ نمره)

در نمودار حالات یک ماشین تورینگ، به حالتی که تحت هیچ ورودی قابل دسترسی نباشد اصطلاحاً یک حالت «بیهوده» یا useless می گوئیم. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$USELESS_{TM} = \{ \langle M, q \rangle \mid \text{در ماشین تورینگ } M \text{ بیهوده است} \}$$

«آذین» یک جوان پرتلاش است که الگوریتم تصمیم گیری ساده ای برای حل مساله  $USELESS_{TM}$  پیشنهاد داده است: در نمودار حالات ماشین تورینگ  $M$  یک جستجو به صورت سطح اول (breadth-first) از حالت شروع انجام می دهیم. اگر  $q$  قابل دسترسی بود "خیر" در غیر این صورت "بلی" برمی گردانیم.

الف) آیا روش تصمیم گیری آذین صحیح است؟ به دقت شرح بدهید.

ب) تنها در صورتی که پاسخ شما در قسمت الف منفی است، روش صحیح تصمیم گیری را بنویسید. اگر هم فکر می کنید که زبان تصمیم ناپذیر است، اثبات ارائه کنید.

برای کاهش (در صورت نیاز) می توانید از مساله  $HALT_{TM}$  یا متمم آن  $\overline{HALT_{TM}}$  استفاده کنید.  
(از قضیه رایس اجازه استفاده ندارید)

### سوال چهار: (۲۰ نمره)

همان طور که می دانیم، کلاس  $P$  مسائل تصمیم گیری هستند که توسط یک ماشین تورینگ قطعی در زمان چند جمله ای قابل حل هستند. مشابه این تعریف برای فضای مورد استفاده هم وجود دارد: کلاس مسائل  $PSPACE$  مسائل تصمیم گیری هستند که توسط یک ماشین تورینگ قطعی در فضای چند جمله ای قابل حل هستند. نشان دهید که تمامی مسائل کلاس  $NP$  به کلاس  $PSPACE$  هم متعلق هستند:  $NP \subseteq PSPACE$ .

### سوال پنج: (۱۰ نمره)

به دست آوردن کدامیک از نتایج زیر منجر به حل شدن مساله ی مشهور  $P \stackrel{?}{\neq} NP$  خواهد شد؟  
علاوه بر پاسخ بلی/خیر، برای پاسخ خود دلیلی مختصر بیاورید.

الف) برای یک مساله در  $NP$  الگوریتمی با زمان اجرای چند جمله ای پیدا کنیم.

ب) کاهشی با پیچیدگی زمانی چند جمله ای از 3SAT به  $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$  پیدا کنیم.

پ) کاهشی با پیچیدگی زمانی چند جمله ای از  $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$  به 3SAT پیدا کنیم.

ت) کاهشی با پیچیدگی زمانی چند جمله ای از مساله ی Independent-Set به مساله 3SAT پیدا کنیم.

ث) ماشین تورینگی غیرقطعی با زمان اجرای چند جمله ای بیابیم که توسط ماشین تورینگ قطعی قابل شبیه سازی نباشد.