۸۱۰۱۰۱۴۹۲ علیرضا کریمی

1)

a) ① demon picks: $p \geq 1$

② you pick: $w = a^{p^2}$; $|p^2| \geq p$; $w \in L$

③ demon picks: $w = xyz$; $|xy| \leq p$, $|y| != 0$ $\Rightarrow x = a^{l}, y = a^{j}, z = a^{k}$

④ you pick: $i = 2 \longrightarrow xy^2z = a^{p^2+j}$; $p^2 + j \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$

در واقع عبارت p^2+j قطعا از عدد p بعدی به توان ۲ کوچکتر است، پس $w' = xy^2z \notin L$

b) ① demon picks: $p \geq 1$

② you pick: $w = a^{21p} b^{12p} c^{14p}$; $|w| \geq p$, $w \in L$ $(2(21) + 3(14) = 7(12))$

③ demon picks: $w = xyz$; $|xy| \leq p$, $|y| != 0 \Rightarrow x = a^{l}, y = a^{j}$

④ you pick: $i = 0 \rightarrow w' = xy^0z = xz = a^{21p-j} b^{12p} c^{14p} \Longrightarrow$

از آنجایی که اگر j است، داریم: $2(21-j) + 3(14) \neq 7(12) \Longrightarrow w' \notin L$

c) ① demon picks: $p \geq 1$

② you pick: $w = a^{p} b^{p+9}$; $|w| > p$,

③ demon picks: $w = xyz$; $|xy| \leq p$, $|y| != 0 \Longrightarrow x = a^{l}, y = a^{j}$ $(j \geq 1)$

④ you pick: $i = 20 \Longrightarrow w' = a^{p+19j} b^{p+9}$

$p + 19j \geq p + 19$ & $|p+19 - (p+9)| = 10$

$\Longrightarrow w' \notin L$

d) ① demon picks: $p \geq 1$

② you pick: $a^p bb a^{p!+p} = w$; $|w| \geq p$, $p!+p > p$

③ demon picks: $w = xyz$; $|xy| \leq p$, $|y| > 0 \Rightarrow x = a^{l}$, $y = a^{j}$

④ you pick: $i = \frac{p!}{j} + 1 \rightarrow w' = xy^{\frac{p!}{j}+1}z = a^{p+\frac{p!}{j}\times j} bb a^{p+p!}$

توان y ← j

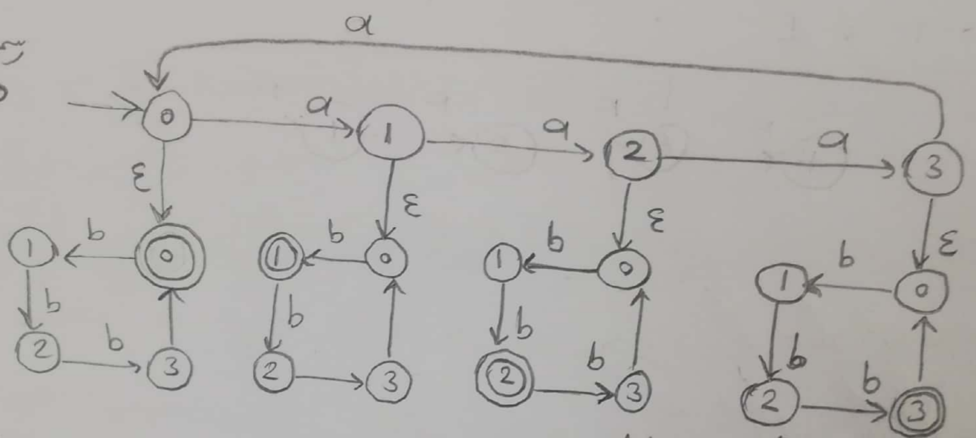
$= a^{p+p!} bb a^{p+p!} \notin L$

دلیل اینکه i را برابر $\frac{p!}{j}+1$ انتخاب کردم، این بود که باید داشته باشم $P \overset{j}{\equiv} C$ به طوری که $P \neq C$ و

$1 \leq j \leq P$. بنابراین انتخاب کردم: $C = P! + P$ چون $P!$ بر تمام اعداد کوچکتر مساوی P بخش پذیر است و در mod صفر می شود

2)

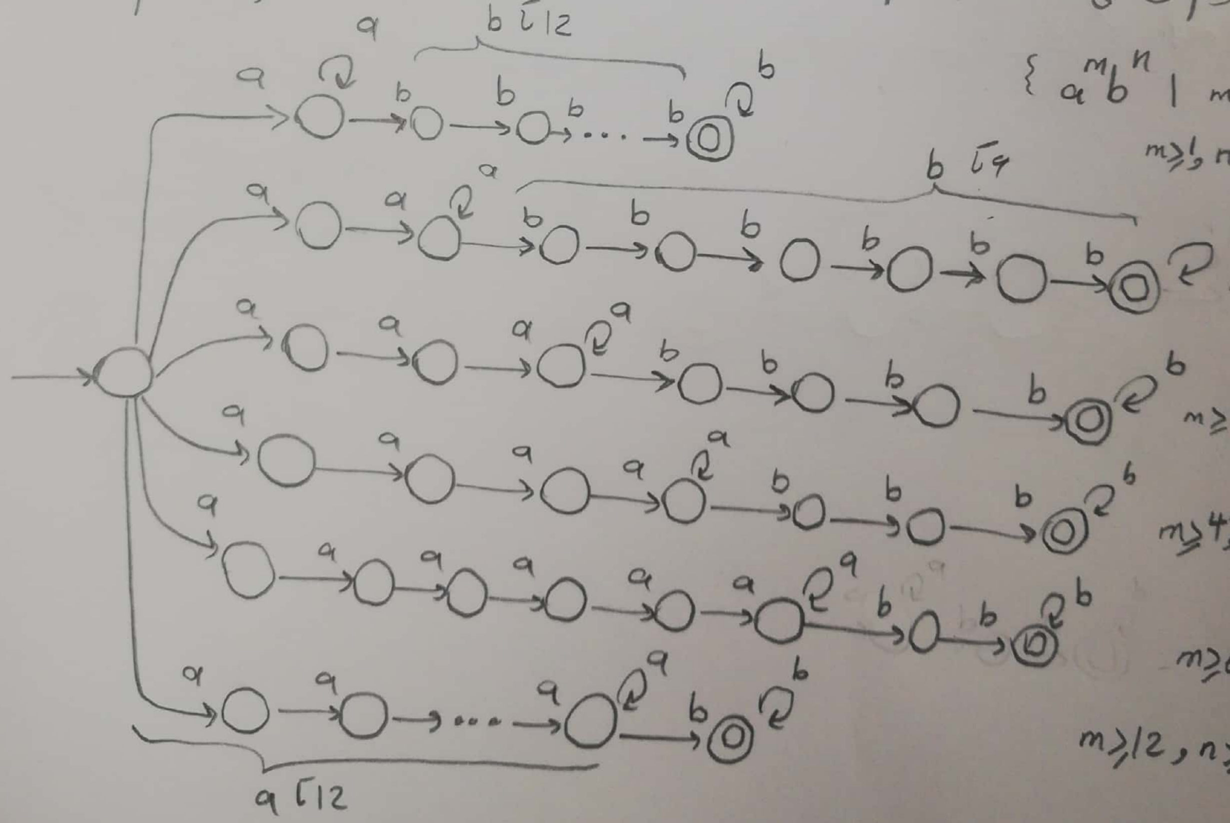
a) منظم است $\xrightarrow{\text{NFA رسم}}$



b) منظم است $\xrightarrow{\text{NFA رسم}}$

چون NFA رسم شد می توان گفت زبان منظم است.

$\{ a^m b^n \mid mn \geq 12 \}$



حالت ۱: $m \geq 1, n \geq 12$

حالت ۲: $m \geq 2, n \geq 6$

حالت ۳: $m \geq 3, n \geq 4$

حالت ۴: $m \geq 4, n \geq 3$

حالت 5: $m \geq 6, n \geq 2$

حالت 6: $m \geq 12, n \geq 1$

c) نامنظم است $\Longrightarrow$ استفاده از روش pumping lemma

① demon picks : $p \geq 1$

② you pick : $w = a^q$ s.t. q is a prime number & $q > p$

③ demon picks : $w = xyz$; $|xy| \leq p$, $|y| > 0 \longrightarrow y = a^j \quad (j \geq 1)$

④ You pick : $i = q+1 \Rightarrow w' = xy^{q+1}z = a^{q+qj} = a^{q(j+1)}$

از آنجا که هم $j+1$ و هم q بزرگتر از 1 هستند، پس $q(j+1)$ عدد اول نیست $\Longrightarrow$ $w' \notin L$

d) منظم است

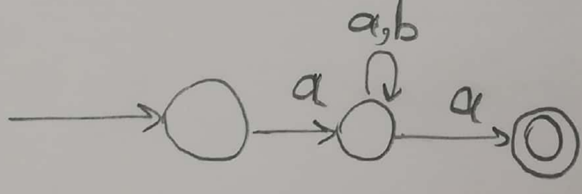
می‌دانیم که حداقل یک a در چپ و یک a در راست رشته باید باشند تا رشته توسط زبان پذیرفته شود. اگر به صورت بازگشتی به رشته نگاه کنیم، می‌توانیم بگوییم که هر رشته پذیرفته شده توسط این زبان به صورت $a w a$ است. یعنی زبان L معادل است با زبان $L' = a(a+b)^* a$. برای اثبات آن، رشته پذیرفته x که توسط زبان L پذیرفته شده است را در نظر بگیرید.

$\longrightarrow x = a^k w a^k \in L$

$x = a^k w a^k = a(\underbrace{a^{k-1} w a^{k-1}}_{w'})a = a w' a$ ؛ در نتیجه خواهیم داشت

حال تعریف می‌کنیم $w' = 1^{k-1} w 1^{k-1} \longleftarrow$ در نتیجه

پس تمام رشته‌های پذیرفته شده توسط L به صورت $a w' a$ هستند. پس کافی است ثابت کنیم که $a w a$ منظم است. برای آن NFA رسم می‌کنیم و داریم:



3)

برای حل این سوال باید دو مورد را بررسی کنیم طبق جزوه

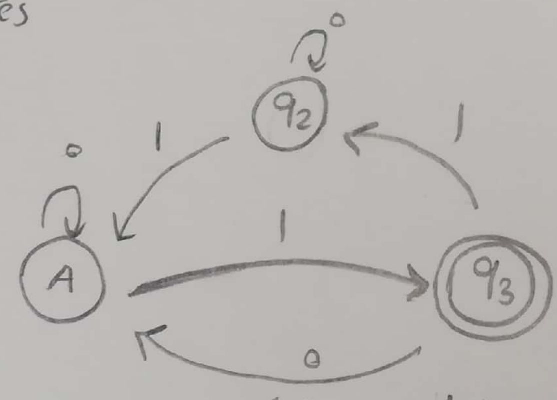
1) finding indistinguishable pairs by table and merge them

2) removing unreachable states

a)

	q_1	q_2	q_3
q_2	X		
q_3	X	X	
q_4	A	X	X

ادغام q_1 و q_4 $\Longrightarrow$



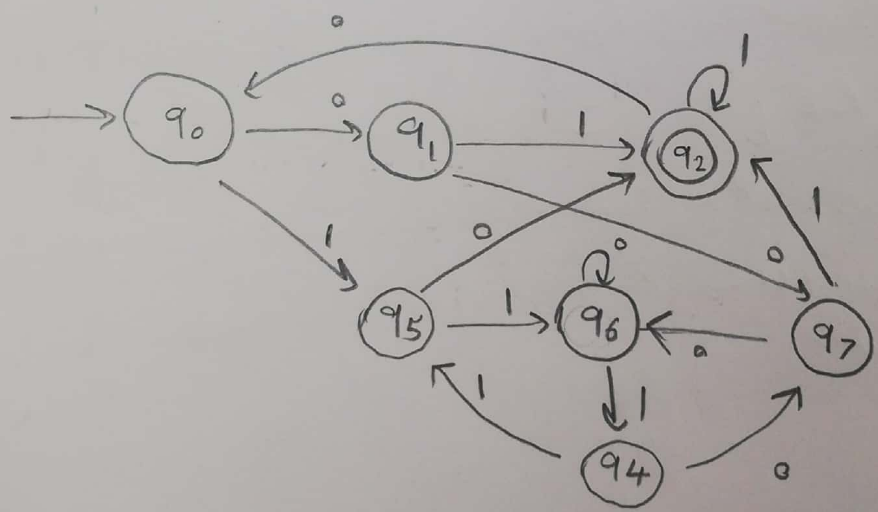
هیچ استیت unreachable نداریم

b)

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_1	X						
q_2	X	X					
q_3	X	X	X				
q_4	X	X	X	X			
q_5	X	X	X	X	X		
q_6	X	X	X	X	X	X	
q_7	X	X	X	X	X	X	X

از آنجایی که هیچ یال ورودی به q_3 نداریم، q_3 استیت unreachable است و باید حذف شود. (دقت شود با اینکه q_3 و q_5 دارای خروجی یکسان هستند، می توانستند با هم نیز ادغام شوند و در این حالت هم q_3 حذف می شد یعنی کاری که ما با همان روش حذف استیت unreachable آن را حذف می کنیم.)

پس خواهیم داشت:

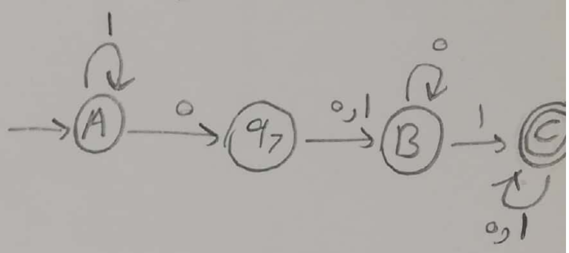


c)

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_1	A						
q_2	X	X					
q_3	X	X	~~B~~				
q_4	X	X	B	~~B~~			
q_5	X	X	X	X	X		
q_6	X	X	X	X	X	C	
q_7	X	X	X	X	X	X	X

با توجه به جدول ، pairهای (q_1, q_0) و (q_4, q_2) و q_3 و (q_6, q_5) که هیچ کدام از مراحل حذف نشدند، می‌توانند با یکدیگر ادغام شوند.

از طرفی استیت q_3 نیز unreachable است و یال ورودی ندارد پس آن را نیز حذف می‌کنیم. در نهایت خواهیم داشت:



q_3 چون یال ورودی نداره تو مرحله اول حذف می‌شه.
توی ادغام هم می‌تونه حذف بشه. ادغام با q_2 و q_4

4)

برای lهای زوج

در روش استدلال مثال، در مرحله آخر، رشته بدست آمده را می‌توان به این صورت تغییر داد و خواهیم داشت:

$$w' = a^{p+l} b^p = a^{p+\frac{l}{2}} a^{\frac{l}{2}} b^p$$

حال می‌توان $a^{\frac{l}{2}} b^p$ را به صورت w'' در نظر گرفت و خواهیم داشت:

$$w' = a^{p+\frac{l}{2}} w'' \; ; \; |w''| = p + \frac{l}{2} \Longrightarrow w' \in L$$

پس برای تمام حالات اثبات درست نیست. در واقع مقدار اضافی a را به رشته w اضافه کردم چون w هم a هم b داره.

راه حل: $i = 0$ قرار می‌دهیم. در این حالت خواهیم داشت: $w' = a^{p-l} b^p$

در این حالت تعداد aها کمتر از bهاست و چون رشته باید به صورت $a^k w$ باشد، نمی‌توانیم از w کم کنیم و به قبل خودش بدهیم. پس طول bها به طول aها نمی‌رسد و مساوی نخواهند شد. رشته w با حداقل همان طول p باقی خواهند ماند.

5) در مورد این سوال، من حدس هایی زدم مثل 2^n که به صورت 10^* در مبنای دو نمایش داده می شود ولی در مبنای ۳ با ارائه مثال های مختلف می توان به طور شهودی دید که نمی توان به الگوی مشخصی رسید. به همین شکل می توان حدس زد که عبارت 2^n-1 نیز که در مبنای ۲ به صورت 1^* نمایش داده می شود، الگوی مشخصی که منظم است در مبنای ۳ ندارد و در مبنای ۳ نامنظم است. حال برای اثبات نامنظم بودن الگوی 2^n-1 در مبنای ۳ از قضیه pumping lemma کمک می گیریم و داریم: درواقع برهان خلف می زنیم

① demon picks: $p \geq 1$ — منظور اینه که نمایش عدد در مبنای ۳ است

② you pick: $[w]_3 = 2^n-1$, $|w| > p$ — حداقل p+1 طوله

③ demon picks: $w = xyz$; $|xy| \leq p$, $|y| > 0$

$$\Rightarrow [w]_3 = [xyz]_3 = [x]_3 \times 3^{|y|+|z|} + [y]_3 \times 3^{|z|} + [z]_3$$

④ you pick: $i = 2$

$$\Rightarrow [w']_3 = [xy^2z]_3 = [x]_3 \times 3^{2|y|+|z|} + [y]_3 \times 3^{|z|+|y|} + [y]_3 \times 3^{|z|} + [z]_3$$

حال اگر دو عبارت به صورت $xyz = 2^n-1$ و $xy^2z = 2^m-1$ داریم و اولی را از دومی کم می کنیم و خواهیم داشت:

$$\Rightarrow [xy^2z]_3 - [xyz]_3 = [x]_3 \times 3^{2|y|+|z|} + [y]_3 \times 3^{|z|+|y|} + \cancel{[y]_3 \times 3^{|z|}} + \cancel{[z]_3} - \left([x]_3 \times 3^{|y|+|z|} + \cancel{[y]_3 \times 3^{|z|}} + \cancel{[z]_3}\right)$$

$$= 3^{|y|+|z|}\left([x]_3 \times (3^{|y|}-1) + [y]_3\right)$$

از طرفی چون قطعا $m>n$ است، داریم: $(2^m-1)-(2^n-1) = 2^n(2^{m-n}-1)$

در نتیجه اضافات آن ها باید خود دارای مضربی توانی از ۲ باشد. چون $3^{|y|+|z|}$ فرد است، این مضرب در عبارت $[x]_3 \times (3^{|y|}-1)+[y]_3$ دیده می شود. در ادامه داریم: (درواقع چون دارای توانی از ۲ است)

$$\Longrightarrow [x]\times 3^{|y|} + [y]_3 - [x]_3 < [x]\times 3^{|y|} + [y]_3 = [xy]_3 < [xyz]_3$$

طول w حداقل p+1 بود و طول xy حداکثر p، پس $|z|>0$

از طرفی داشتیم: $[w] = [xyz] = 2^n-1$

$$[xy]_3 < [xyz]_3 = 2^n-1$$

از طرفی برای ساخته شدن عبارت 2^m-2^n توسط آن باید حتما از 2^n بزرگتر باشد و مضربی از 2^n باشد اما دیدیم از 2^{n-1} هم کوچکتر است پس به تناقض رسیدیم و زبان نامنظم است.

6)

عملگر بسته

الف) فرض می‌کنیم زبان L منظم است (فرض خلف) $\Longleftarrow$ $L \cap ab^*c^*$ نیز باید منظم باشد

$$\Rightarrow L \cap ab^*c^* = ab^nc^n$$

پس بنابراین زبان ab^nc^n باید منظم باشد. اگر reverse کنیم نیز باید منظم باشد پس c^nb^na نیز باید منظم باشد

چون عملگر بسته است

اما ثابت می‌کنیم که این زبان منظم نیست. با استفاده از pumping lemma داریم:

1. demon picks: $P \geq 1$
2. you pick: $w = c^P b^P a$
3. demon picks: $w = xyz$; $|xy| \leq P$, $|y| > 0 \Rightarrow x = c^l$, $y = c^j$
4. you picks: $i = 0 \Rightarrow w' = xy^0z = xz = c^{P-j} b^P a \notin L$

چون توان‌های c و b برابر نشدند، جزو زبان نیست و نامنظم است.

چون نامنظم شد، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود که L نامنظم است.

ب)

ب) برای اثبات از طریق روش Myhill Nerode ابتدا یک مجموعه نامتناهی از رشته ها (با نام S) در نظر می گیریم. حال عملگر $\equiv_L$ را به این شکل تعریف می کنیم.

کلاس هم ارزی در زبان L

$$x \not\equiv_L y := \exists z \in \Sigma^* \text{ s.t. } (xz \in L \wedge yz \notin L) \vee (xz \notin L \wedge yz \in L)$$

حال اگر ثابت کنیم که

$$\forall x,y \in S \qquad x \neq y \Longrightarrow x \not\equiv_L y$$

آنگاه می توان گفت که زبان ما نامنظم است. در واقع می خواهیم با ارائه مجموعه S، ثابت کنیم هر رشته در کلاس هم ارزی خودش قرار دارد و به نوعی می توان گفت چون رشته S یک مجموعه نامتناهی از رشته ها است و هر رشته نیز در یک کلاس هم ارزی از زبان L قرار می گیرد پس بی شمار کلاس هم ارزی داریم و از آنجا که بی شمار کلاس هم ارزی داریم، Myhill Nerode، هیچ DFA ای وجود ندارد که زبان L با بی نهایت کلاس هم ارزی را بپذیرد.

اثبات: مجموعه S را به این شکل در نظر می گیریم: $S = \{ab^n ; n \geq 0\}$

حال x و y را از S به گونه ای انتخاب می کنیم که برابر نباشند. $\Longleftarrow$ $x = ab^l$, $y = ab^u$ $(l \neq u)$

برای اینکه ثابت کنیم $x \not\equiv_L y$ باید یک z (از زبان) انتخاب کنیم به گونه ای که $(xz \in L$ and $yz \notin L)$ or $(xz \notin L$ and $yz \in L)$

باید بگیم چنین z وجود دارد

در نظر می گیریم

$$\Longrightarrow z = c^l \Longrightarrow xz = ab^lc^l \in L \text{ and } yz = ab^uc^l \notin L$$

$$\Longrightarrow x \not\equiv_L y$$

$$\Longrightarrow \forall x,y \in S \text{ s.t. } x \neq y \Longrightarrow x \not\equiv_L y$$

از آنجا که به ازای انتخاب x و y هایی که با هم متفاوت هستند، توان های l و u با یکدیگر متفاوت خواهند بود، کافی است z را برابر c^l (توان c برابر توان یکی از آنها) انتخاب کنیم. اینگونه در دو کلاس هم ارزی جدا قرار می گیرند. برای هر دو رشته انتخابی اینگونه است که در دو کلاس جدا هستند. چون بی نهایت رشته داریم و دو به دو کلاس های جداگانه دارند $\Longleftarrow$ بی شمار کلاس هم ارزی داریم و هم ارزی به کلاس L (یا همان $\equiv_L$) بی شمار اندیس دارد

$\Longleftarrow$ طبق Myhill Nerode زبان L نامنظم است.