

به نام خدا



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- پاییز ۱۴۰۰

تمرین شماره 6

دستیار آموزشی این مجموعه: کیانوش عرشی

kianoosharshi@gmail.com



تاریخ تحویل : 13 اردیبهشت (صفحه درس)

1) گرامر زیر را در نظر بگیرید (برای هر بخش، عمل خواسته شده را روی نتیجه بخش قبل اعمال کنید).

$$S \rightarrow bCBD \mid AcA \mid dD$$

$$A \rightarrow a \mid B \mid abC \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow b \mid C \mid A$$

$$C \rightarrow S \mid B$$

$$D \rightarrow d \mid C$$

الف) قواعد افسیلون را حذف کنید.

برای حذف قواعد افسیلون باید مراحل زیر را پیش بگیریم:

a. سمبل جدید  $S'$  را اضافه می‌کنیم و قاعده  $S' \rightarrow S$  را می‌نویسیم.

b. برای هر قاعده افسیلون  $A \rightarrow \varepsilon$  مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

i. حذف قاعده

ii. برای هر قاعده ای که  $A$  را دارد، تمامی قواعدی که  $A$  سمت چپشان هست جایگزین

می‌شوند، در صورتیکه این جایگزینی به قاعده افسیلون جدیدی ختم شد، باید قاعده

جدید را هم درست کنیم.

بنابراین مراحل بالا را انجام می‌دهیم:

اول قاعده افسیلون  $A$  را حذف می‌کنیم.

$$S' \rightarrow S$$

$$S \rightarrow bCBD \mid AcA \mid cA \mid Ac \mid c \mid dD$$

$$A \rightarrow a \mid B \mid abC \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow b \mid C \mid A \mid \epsilon$$

$$C \rightarrow S \mid B$$

$$D \rightarrow d \mid C$$

حال قاعده افسیلون جدید B را باید حذف کنیم:

$$S' \rightarrow S$$

$$S \rightarrow bCBD \mid bCD \mid AcA \mid cA \mid Ac \mid c \mid dD$$

$$A \rightarrow a \mid \epsilon \mid abC \mid B$$

$$B \rightarrow b \mid C \mid A \mid \epsilon$$

$$C \rightarrow S \mid B \mid \epsilon$$

$$D \rightarrow d \mid C$$

اینکار را برای قواعد افسیلون جدید دیگر هم تکرار می‌کنیم، درنهایت داریم:

$$S' \rightarrow S$$

$$S \rightarrow bCBD \mid bCB \mid bBD \mid bB \mid bCD \mid bC \mid bD \mid b \mid AcA \mid cA \mid Ac \mid c \mid dD \mid d$$

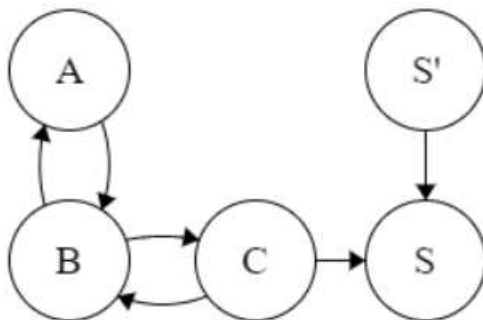
$$A \rightarrow a \mid abC \mid ab \mid B$$

$$B \rightarrow b \mid C \mid A$$

$$C \rightarrow S \mid B$$

$$D \rightarrow d$$

ب) گراف قواعد یک‌ه را رسم کرده و با کمک آن قواعد یک‌ه را حذف نماییم.



طبق گراف جای B، A قرار می‌دهیم و درنهایت هم جای C، A پس داریم:

$$S' \rightarrow S$$

$$S \rightarrow bAAD \mid bAA \mid bAD \mid bA \mid bD \mid b \mid AcA \mid cA \mid Ac \mid c \mid dD \mid d$$

$$A \rightarrow a \mid abA \mid ab$$

$$A \rightarrow b$$

$$A \rightarrow S$$

$$D \rightarrow d$$

ج) قواعد بی کاربرد را حذف کنید.

قاعده‌ای حذف نمی‌شود.

د) گرامر حاصل را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

برای تبدیل گرامر به فرم چامسکی باید یکسری غیرپایانه جدید (fresh) اضافه کنیم تا شرایط فرم نرمال رعایت شود. درنهایت داریم:

$$S' \rightarrow A' D \mid A'' A \mid B' A \mid A'' D \mid B' D \mid b \mid T A \mid C' A \mid A C' \mid c \mid D D \mid d$$

$$A \rightarrow a \mid B'' A \mid Y B' \mid b \mid A' D \mid A'' A \mid B' A \mid A'' D \mid B' D \mid T A \mid C' A \mid A C' \mid c \mid D D \mid d$$

$$D \rightarrow d$$

$$A' \rightarrow A'' A$$

$$A'' \rightarrow B' A$$

$$B' \rightarrow b$$

$$T \rightarrow A C' C' \rightarrow c$$

$$C' \rightarrow c$$

$$B'' \rightarrow Y B' Y \rightarrow a$$

$$Y \rightarrow a$$

(2) گرامر زیر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aAbB \\ A &\rightarrow aAB \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow BbA \mid A \mid \varepsilon \end{aligned}$$

مثل سوال قبل غیرپایانه‌های جدیدی اضافه می‌کنیم تا گرامر به فرم چامسکی تبدیل شود:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow FB \mid GB \mid IH \mid JH \\ A &\rightarrow IB \mid JB \mid JA \mid a \\ B &\rightarrow KA \mid BH \mid HA \mid b \mid IB \mid JB \mid JA \mid a \\ F &\rightarrow IH \\ G &\rightarrow JH \\ H &\rightarrow b \\ I &\rightarrow JA \\ J &\rightarrow a \\ K &\rightarrow BH \end{aligned}$$

دقت کنید که نخست باید قواعد افسیلون حذف شوند که در صورت حذف‌شان برخی قواعد تغییر می‌کنند، برای مثال S یک تعداد قاعده جدید بهش اضافه می‌شود.

(3) گرامر زیر را رفع چپگردی کنید.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AS \mid SBS \mid SA \\ A &\rightarrow SB \mid aS \mid a \\ B &\rightarrow B \mid b \end{aligned}$$

برای رفع چپگردی، غیرپایانه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

در غیرپایانه S، تمامی قواعد چپگردی مستقیم یا غیرمستقیم دارند، بنابراین برای رفع چپگردی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

برای چپگردی مستقیم صرفاً یک غیرپایانه جدید تولید می‌کنیم و قواعد چپگرد را در این غیرپایانه جدید تغییر می‌دهیم:

$$S \rightarrow ASS'$$

که در S' قواعد جدیدی که چپگردی را رفع می‌کنند، می‌سازیم:

$$S' \rightarrow BS S' \mid AS' \mid \varepsilon$$

برای چپگردی غیرمستقیم هم کافیست چپگردی را مستقیم کرده و در نهایت چپگردی مستقیم را رفع کنیم.

غیر پایانه A نیز یک چپگردی غیرمستقیم دارد:

$$A \rightarrow a S A' \mid a A'$$

$$A' \rightarrow S S' B A' \mid \varepsilon$$

در نهایت هم B دارای یک چپگردی مستقیم است:

$$B \rightarrow b B'$$

$$B' \rightarrow B' \mid \varepsilon$$

می‌توانیم به سادگی قواعد افسیلون را هم حذف کنیم، در نهایت داریم:

$$S \rightarrow A S S' \mid A S$$

$$S' \rightarrow B S S' \mid A S' \mid B S \mid A$$

$$A \rightarrow a S A' \mid a A' \mid a S \mid a$$

$$A' \rightarrow S S' B A' \mid S S' B$$

$$B \rightarrow \cancel{b B'} \mid b$$

$$\cancel{B'} \rightarrow B'$$

قواعد  $B \rightarrow b B'$  و  $B' \rightarrow B'$  بی‌معنا بودند و حذف شدند.

(4) گرامر زیر را به نرمال گریباخ تبدیل کنید.

$$S \rightarrow A B C \mid A A$$

$$A \rightarrow S B \mid a$$

$$B \rightarrow S C \mid b$$

$$C \rightarrow c$$

ابتدا گرامر را رفع چپگردی می‌کنیم، دقت کنید قواعد افسیلون و قواعد یکه وجود ندارند که حذف شوند.

تنها چپگردی برای A هستش که غیرمستقیم از قواعد S بوجود آمده، بنابراین داریم:

$$S \rightarrow A B C \mid A A$$

$$A \rightarrow a A' \mid a$$

$$B \rightarrow a A' B C C \mid a B C C \mid a A' A C \mid a A C \mid b$$

$$C \rightarrow c$$

$$A' \rightarrow B C B A' \mid A B A' \mid B C B \mid A B$$

حال سمت راست قواعد را آنقدگسترش می‌دهیم تا در سمت چپ یک پایانه داشته باشیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow aA'B C | aBC | aA'A | aA \\
 A &\rightarrow a A' | a \\
 B &\rightarrow a A' B C C | aBCC | a A' A C | aAC | b \\
 C &\rightarrow c \\
 A' &\rightarrow a A' B C C C B A' | aBCC C B A' | a A' A C C B A' \\
 &\quad | aAC C B A' | b C B A' | aA' B A' | a B A' | \\
 &\quad a A' B C C C B | aBCC C B | a A' A C C B | aAC C B | bCB \\
 &\quad | a A' B | a B
 \end{aligned}$$

درنهایت هم پایانه‌های وسط سمت راست قواعد را با یک غیرپایانه جایگزین می‌کنیم. که در این گرامر نیازی به این کار نیست.

(5) با کمک الگوریتم CYK و رسم جدول اجرای الگوریتم مشخص کنید آیا رشته aaabbccc در گرامر زیر پذیرفته می‌شود یا خیر.

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow AB | BC | \varepsilon \\
 A &\rightarrow BC | aA \\
 B &\rightarrow C | bB \\
 C &\rightarrow c | \varepsilon
 \end{aligned}$$

اول باید گرامر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنیم. پس داریم:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow AB | BC | \varepsilon | A0 A | B0 B | b | c | a \\
 A &\rightarrow BC | A0 A | a | b | c | B0 B \\
 B &\rightarrow c | b | B0 B \\
 C &\rightarrow c \\
 A0 &\rightarrow a \\
 B0 &\rightarrow b
 \end{aligned}$$

حال به کمک جدول الگوریتم، مسئله را حل می‌کنیم:

S							
S,A	S						
S,A	S,A	S					
S,A	S,A	S,A	S				
S,A	S,A	S,A	S,A	S			
S,A	S,A	S,A	S,A,B	S,A	S		
S,A	S,A	S,A	S,A,B	S,A,B	S,A	S,A	
S,A,A0	S,A,A0	S,A,A0	S,A,B,B0	S,A,B,B0	S,A,B,C	S,A,B,C	S,A,B,C
a	a	a	b	b	c	c	c

همانطور که مشاهده می‌شود، درنهایت امکان ساخت رشته موردنظر وجود دارد.

6) (امتیازی) گرامر مستقل از متن  $G$  به صورت  $G = (V, \Sigma, R, S)$  تعریف می‌شود. همچنین این گرامر قواعد اِپسیلون و یک‌ه ندارد و سمت راست هر قاعده حداکثر  $k$  سمبل وجود دارد. بعد از تبدیل این گرامر به فرم نرمال چامسکی چند قاعده حداکثر تشکیل شده است؟

فرم چامسکی ماکسیمم دو سمبل در سمت راستش دارد، بنابراین تبدیل  $G$  به فرم نرمال برای هر قاعده حداکثر  $k-1$  قاعده جدید خواهیم داشت، بنابراین تا اینجا  $|R|(K-1)$  قاعده داریم. همچنین در فرم چامسکی برای هر پایانه یک قاعده داشتیم، بنابراین درنهایت داریم:

$$|R|(K-1) + |\Sigma|$$