به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره ۲

دستیار آموزشی این مجموعه: معین شیردل

moein.shirdel@ut.ac.ir

تاریخ تحویل: سه‌شنبه ۱۶ فروردین ۱۴۰۱

---

۱) برای زبان‌های زیر، عبارت منظم معادل را بنویسید: (۳۰ نمره)

الف) تمام رشته‌ها به شکل 0^x1^y به طوری که x+y عددی زوج باشد. ($\Sigma = \{0, 1\}$)

پاسخ:

پاسخ به دو صورت قابل بیان است:

- $(00)^* (01 + \varepsilon) (11)^*$
- $(00)^* (11)^* + 0(00)^* 1(11)^*$

پایه هر دو صورت هم، حالت بندی روی تعداد صفر ها و یک هاست. یک حالت، حالتی‌است که تعداد هر دو زوج باشد و حالت دیگر اینکه تعداد هردو فرد باشد.

ب) اعداد باینری که باقی‌مانده‌ی آن‌ها به ۸، برابر با ۵ است. ($\Sigma = \{0, 1\}$)

پاسخ:

می‌دانیم که اعداد باینری که باقیمانده‌شان به ۸، برابر با ۵ است، سه رقم آخرشان ۱۰۱ است. پس عبارت منظم متناظر به شکل روبرو خواهد بود:

$$(0 + 1)^* 101$$

ج) تمامی رشته‌هایی که دقیقا یک a و دقیقا یک b دارند. ($\Sigma = \{a, b, c, d\}$)

پاسخ:

حالت‌بندی را روی ترتیب تک کاراکترهای a و b نسبت به یکدیگر انجام می‌دهیم:

$$(c + d)^* a (c + d)^* b (c + d)^* + (c + d)^* b (c + d)^* a (c + d)^*$$

د) تمام رشته‌هایی که در آن‌ها، تعداد a های رشته بر ۴ بخش‌پذیر نباشد. ($\Sigma = \{a, b\}$)

پاسخ:

(b*ab* + b*ab*ab*+ b*ab*ab*ab*) (b*ab*ab*ab*ab*)*

پاسخ از دو بخش تشکیل شده‌است. قسمت اول، نشان‌دهنده‌ی باقیمانده‌ی تعداد a های رشته به ۴ است که عددی بین ۱ تا ۳ خواهد بود و در اصل، نوعی حالت بندی روی تعداد a های رشته صورت گرفته‌است. قسمت دوم، قسمت تکرارشونده است که می‌تواند تهی هم باشد و هر واحد از آن، ۴ تا a به رشته اضافه می‌کند. پس باقیمانده‌ی تعداد a های رشته به ۴، عددی غیرصفر خواهد ماند.

ه) تمام رشته‌هایی که در آن‌ها، دقیقا یک بار دو تا a در کنار هم آمده‌باشند. ($\Sigma = \{a, b\}$)

پاسخ:

b*(abb*)*aa(bb*a)*b*

در مجموع در این رشته، باید دقیقا یک بار دو تا a را در کنار هم ببینیم و دیگر هیچ‌جای رشته، دو تا a کنار هم قرار نگیرند و اگر قرار باشد a داشته باشیم، بعد و قبل آن حتما b قرار بگیرد. می‌دانیم که در ابتدا و انتهای رشته به طور نامحدود می‌توانیم b قرار دهیم و محدودیتی نداریم (b* های ابتدا و انتها). حال، aa را جایی در رشته قرار می‌دهیم و کنترل می‌کنیم که بعد و قبل آن کاراکتر a قرار نگیرد. و اگر قرار باشد a بیاید، بین این a و قسمت aa، حتما حداقل یک b قرار بگیرد (bb*). پس قبل از aa به طور نامحدود می‌توانیم abb* داشته باشیم و بعد از آن به طور نامحدود bb*a.

و) (امتیازی) تمام رشته‌هایی که عبارت aba در آن‌ها وجود ندارد. ($\Sigma = \{a, b\}$)

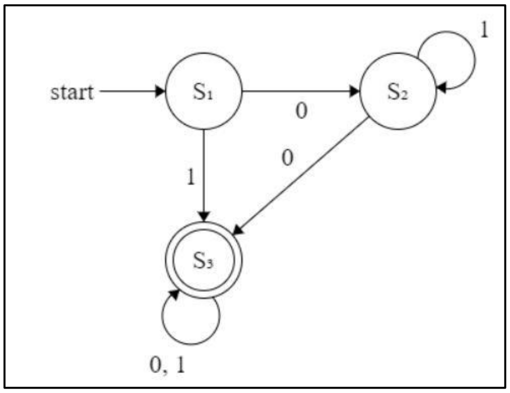
پاسخ:

b*(a + bbb*)*b*

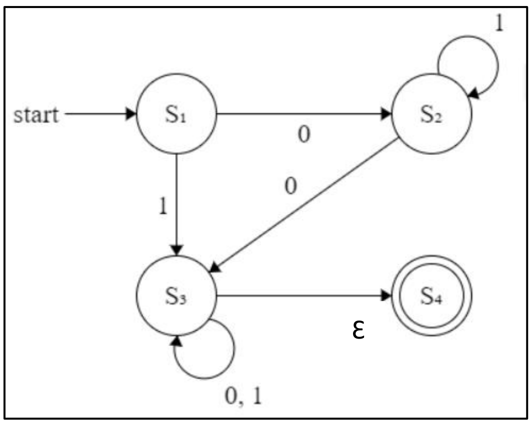
در ابتدا و انتهای این زبان به طور نامحدود می‌توانیم b داشته باشیم چون ابتدا و انتهای aba، فقط a داریم. همچنین پس از b های ابتدایی که می‌توانند تهی هم باشند، می‌توانیم a ببینیم، به شرطی که پس از آن، یا حداقل دوتا b ببینیم یا اگر یک b می‌بینیم، آن b نشان‌دهنده‌ی انتهای رشته باشد (توسط b* انتهایی به وجود آمده‌باشد). پس عبارت میانی، تکراری نامتناهی از a یا بخش‌های حداقل دوتایی از b هاست (bbb*). بدین صورت به عبارت منظمی که در پاسخ آورده شده است می‌رسیم.

۲) عبارت منظم متناظر با NFA های زیر را بنویسید و مراحل تبدیل و حذف هر state را نیز رسم کنید: (۳۰ نمره)

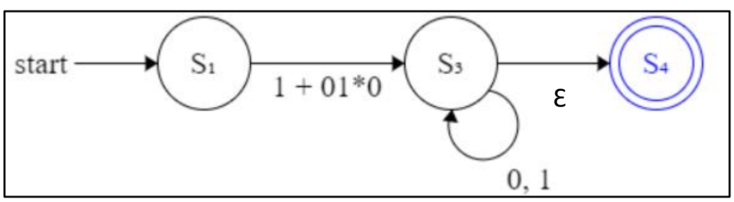
الف)



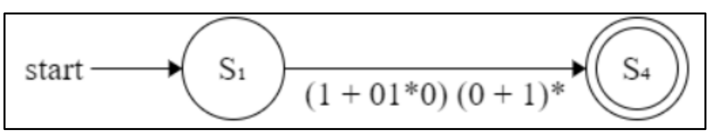
ابتدا تبدیل به GNFA را انجام می‌دهیم:



سپس استیت S_2 را حذف می‌کنیم:

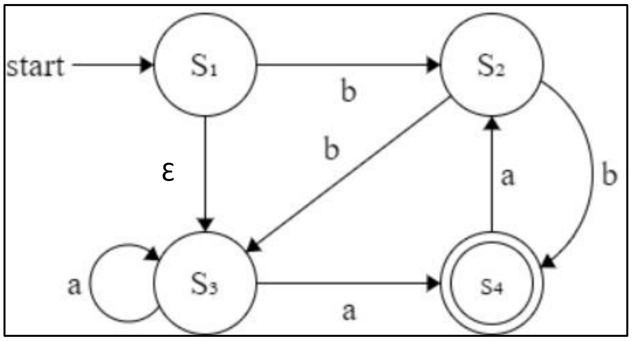


سپس استیت S_3 را به راحتی حذف می‌کنیم:

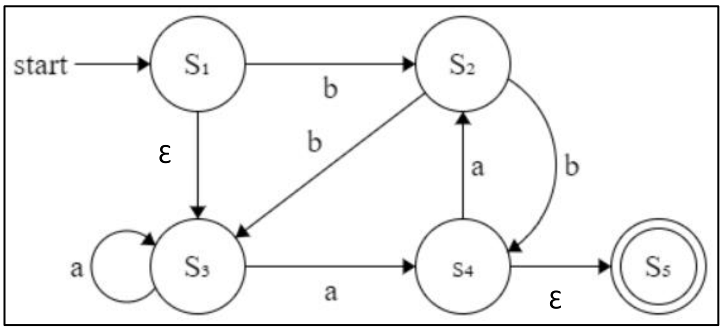


و به عنوان پاسخ، به عبارت منظم روبرو می‌رسیم: $\underline{(1 + 01^*0)\ (0 + 1)^*}$

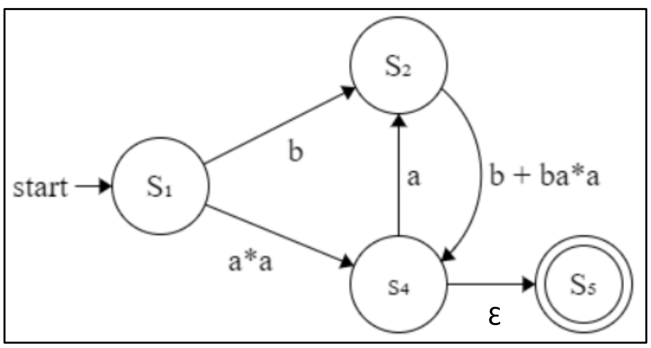
ب)



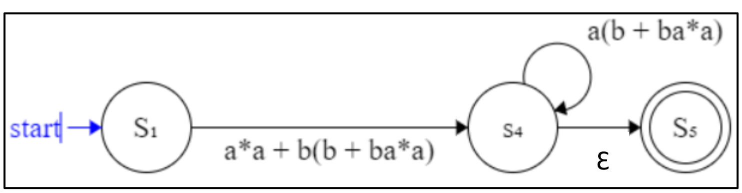
ابتدا تبدیل به GNFA را انجام می‌دهیم:



سپس استیت S_3 را حذف می‌کنیم:



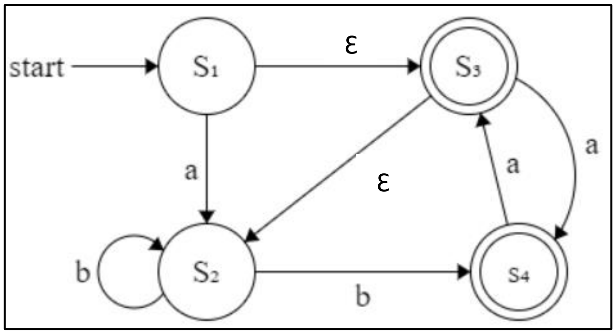
سپس استیت S_2 را حذف می‌کنیم:



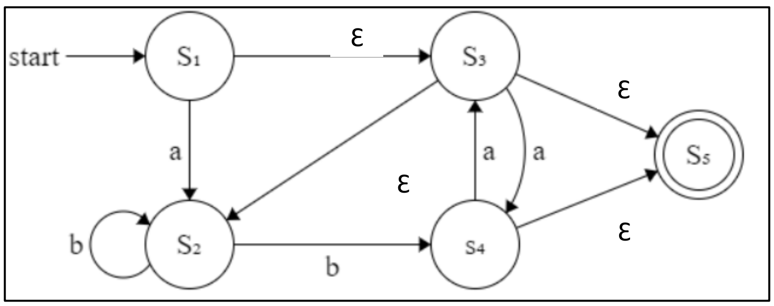
بدین ترتیب، به عنوان پاسخ، به عبارت منظم زیر می‌رسیم:

$(a^*a + bb + bba^*a)\ (ab + aba^*a)^*$

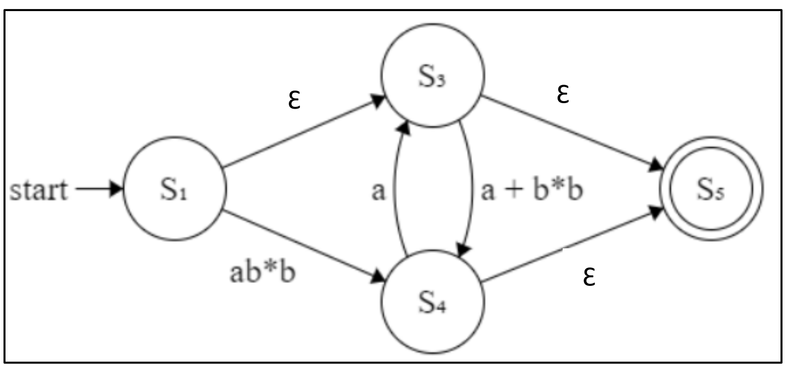
ج)



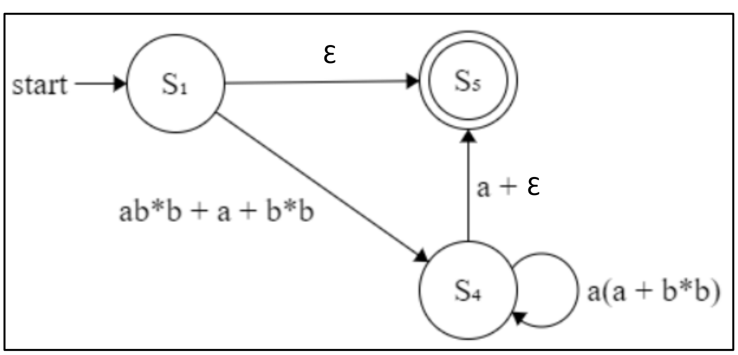
ابتدا تبدیل به GNFA را انجام می‌دهیم:



سپس استیت S_2 را حذف می‌کنیم:



سپس استیت S_3 را حذف می‌کنیم:

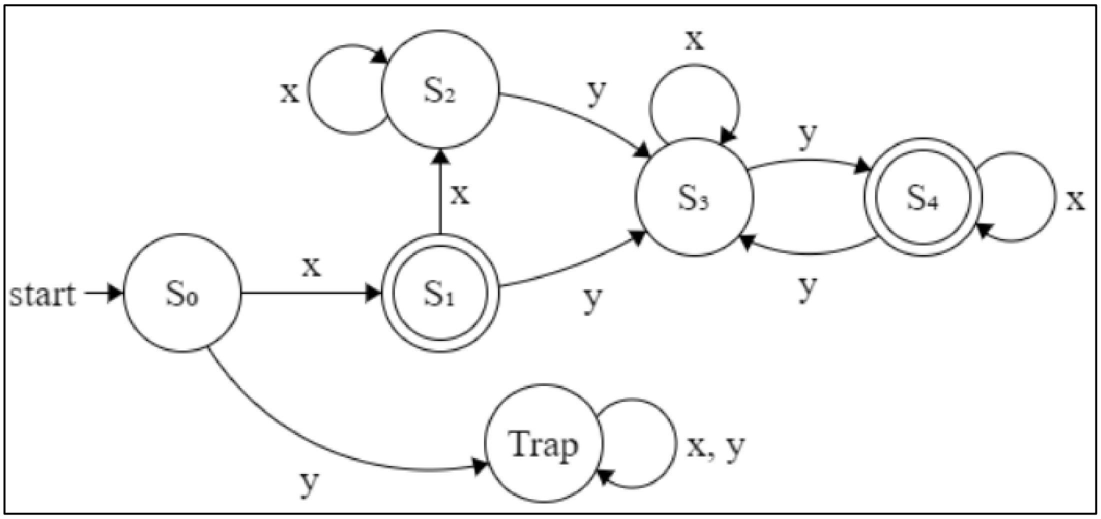


بدین ترتیب، به عنوان پاسخ، به عبارت منظم زیر می‌رسیم:

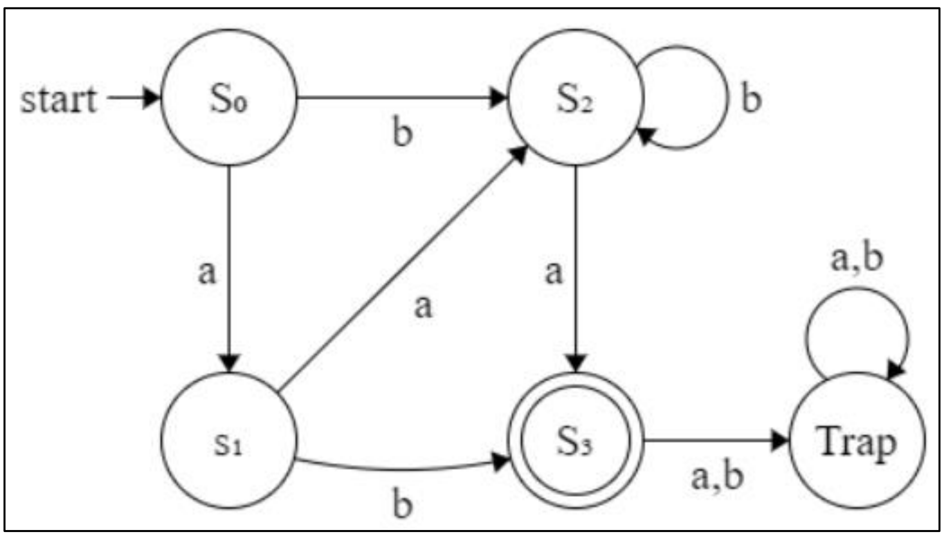
$\varepsilon + ((a + b^*b + ab^*b)\ (a(a + b^*b))^*\ (a + \varepsilon))$

۳) DFA متناظر با هریک از عبارات منظم زیر را رسم کنید. (۲۰ نمره)

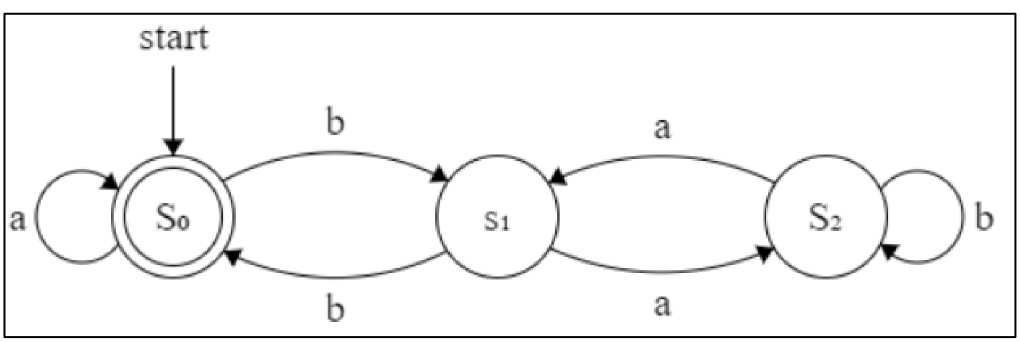
الف) x(x*yx*yx*)*



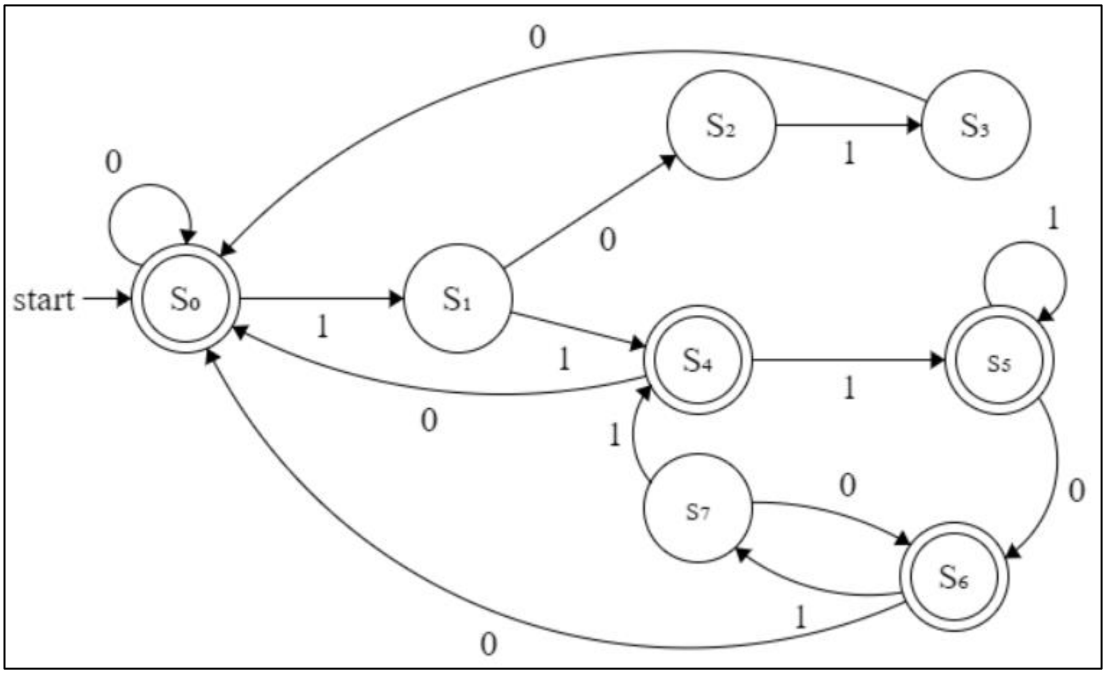
ب) ab + (b + aa)b*a



ج) (b(ab*a)*b + a)*



د) (امتیازی) $((111^* + 0)^* + (1010)^*)^*$



۴) با فرض منظم بودن زبان‌های L_1 و L_2، درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. برای اثبات نادرست بودن عبارات، اشاره کردن به یک مثال نقض کافیست. (۲۰ نمره)

الف) $L_1^*L_2^* = (L_1L_2)^*$

پاسخ:

غلط است. مثال نقض:

$L_1 = \{a, b\}$ / $L_2 = \{c, d\}$

$ac \in L_1L_2$/ $bc = L_1L_2 \Rightarrow acbc \in (L_1L_2)^*$ / $acbc \notin L_1^*L_2^*$

ب) زبان L_b با تعریف زیر، زبانی منظم است:

$$L_b = \{ wu \mid w \in L_1, u \in L_1^R \}$$

پاسخ:

صحیح. اگر L_1 زبان منظم باشد، L_1^R نیز منظم است. به این دلیل که می‌توان در DFA پذیرنده زبان L_1، جهت تمامی فلش‌ها را برعکس کرد و استیت نهایی را به استیت آغازین و استیت آغازین را به استیت نهایی تبدیل کرد. بدین ترتیب به یک DFA می‌رسیم که زبان L_1^R را می‌پذیرد و می‌توان نتیجه گرفت که L_1^R نیز زبانی منظم است. حال طبق مسائل مطرح شده در درس، می‌توان نتیجه گرفت که L_b نیز منظم است. چون در اصل حاصل concat شدن دو زبان L_1 و L_1^R است و می‌دانیم که زبان‌های منظم تحت عمل concatenation بسته هستند.

ج) $L_1L_2/L_2 = L_1$

$L_1/L_2 = \{ x \in \Sigma* \mid \exists\, y \in L_2 , xy \in L_1\}$

پاسخ:

غلط. مثال تقض:

$L_1 = \{ab\} / L_2 = \{c, cc\}$

$L_1L_2 = \{abc, abcc\} \Rightarrow L_1L_2/L_2 = \{ab, abc\} \neq L_1$

د) L_d زبانی منظم است، اگر شامل تمامی رشته‌هایی باشد که دقیقا در یکی از زبان‌های L_1 و L_2 حضور دارند.

پاسخ:

صحیح. مجموعه چنین رشته‌هایی از رابطه‌های پایین به دست می‌آید:

$$= (L1 \cup L2) \cap \overline{(L1 \cap L2)}$$

می‌دانیم که زبان‌های منظم نسبت به عملگرهای اجتماع، اشتراک و مکمل‌گیری بسته هستند پس این زبان جدید نیز یک زبان منظم خواهدبود.

۵) عملگر pref به این صورت تعریف می‌شود که pref(L)، مجموعه تمام رشته‌هایی است که پیشوند یک رشته در زبان L هستند. ثابت کنید مجموعه‌ی زبان‌های منظم نسبت به این عملیات بسته است. (۱۰ نمره)

پاسخ:

برای اثبات این مسئله، تلاش می‌کنیم که استیت ماشین مربوط به L را به گونه‌ای تغییر دهیم که به استیت ماشین مربوط به pref(L) برسیم. بدین منظور، به این شکل عمل می‌کنیم که برای تمام استیت‌هایی که از استیت آغازین به آن‌ها، و از آن‌ها به یکی از استیت‌های نهایی مسیری وجود دارد را به استیت نهایی تبدیل می‌کنیم. بدین صورت، تمامی رشته‌هایی که پیشوند یک رشته از زبان L هستند را می‌پذیرد. از آنجایی که توانستیم برای pref(L) نیز یک استیت ماشین (NFA/DFA) تعریف کنیم، این زبان نیز منظم خواهد بود و زبان‌های منظم نیز نسبت به عملگر pref بسته خواهندبود.