

به نام خدا



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- پاییز ۱۴۰۱

تمرین شماره 8

دستیار آموزشی این مجموعه: کیانوش عرشی

kianoosharshi@gmail.com



تاریخ تحویل: 15 آذر (صفحه درس)

نکته: در این تمرین منظور از طراحی ماشین تورینگ طراحی به همراه state diagram و تمامی جزئیات مربوط به جابجایی head می‌باشد (یا توصیف سطح بالایی بدهید که برای تصمیم‌گیری قانع‌کننده باشد).

۱. برای هر یک از زبان‌های زیر ماشین تورینگ متناظر را توصیف کنید.

$$L = \{w \mid N_a(w) = N_b(w) = N_c(w)\} \text{ (الف)}$$

پاسخ:

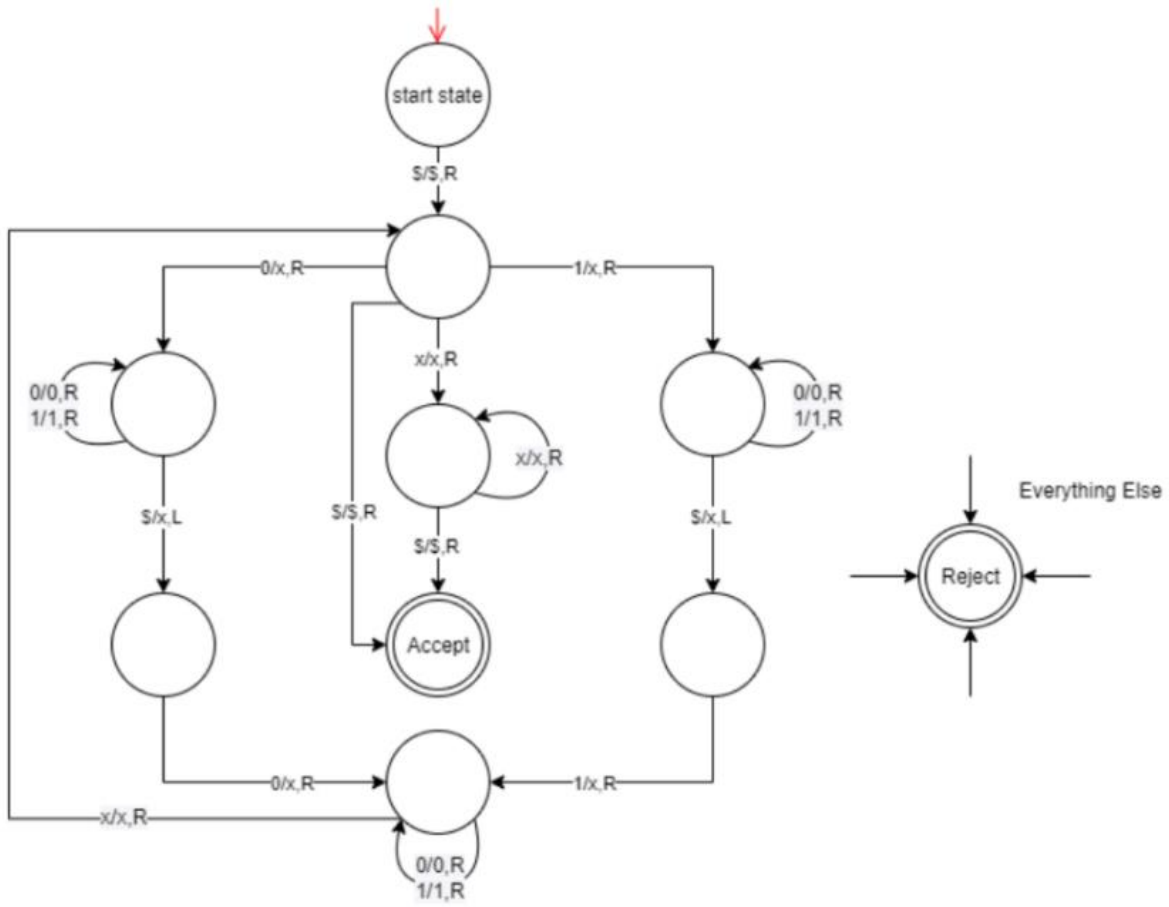
در این ماشین باید به ازای هر a یک b و به ازای هر b هم یک c داشته باشیم. بنابراین به این صورت عمل میکند که هرگاه a دید آنرا علامت می‌زند، به اولین b که علامت نخورده می‌رسد و آنرا هم علامت می‌زند و در آخر هم به اولین c علامت نخورده می‌رسد. در نهایت هم باز می‌گردد به اولین a علامت نخورده. هرگاه هم در این میان b یا c متناظری پیدا نشد، reject می‌کند. در نهایت هم اگر b یا c علامت نخورده ای مانده بود باز هم reject می‌کنیم.

$$L = \{w \mid N_a(w) = 3N_b(w)\} \text{ (ب)}$$

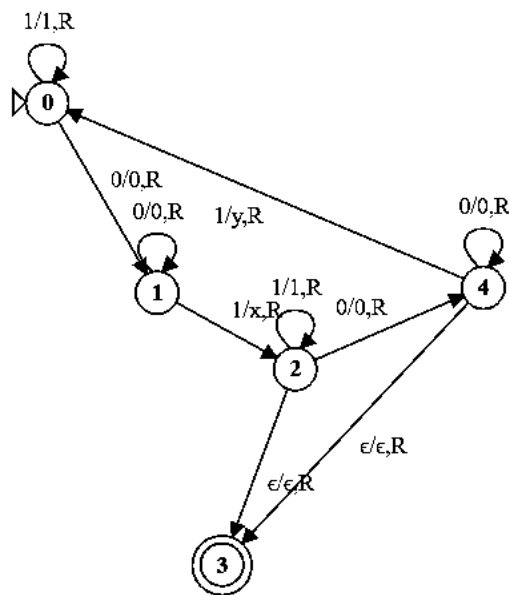
پاسخ:

در این ماشین باید به ازای هر b علامت خورده 3 تا a هم علامت بخورد. ایده مثل بخش قبل است و با دیدن یک b ، به دنبال 3 a می‌رویم و علامت می‌زنیم. هرگاه هم این تعداد a پیدا نشد reject می‌کنیم. دقت کنید که اگر a های اضافه ای در آخر ماندند هم باید reject بکنیم.

ج) $L = \{ww^R \mid w \in (a + b)^*\}$
 پاسخ:

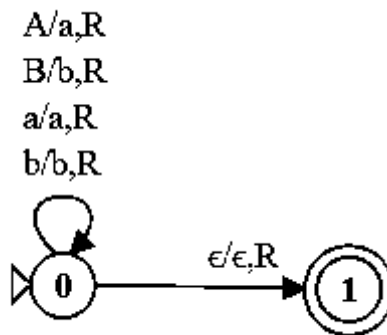


۲. توضیح دهید هر کدام از ماشین تورینگ‌های زیر چه زبانی را قبول می‌کنند.
(الف)

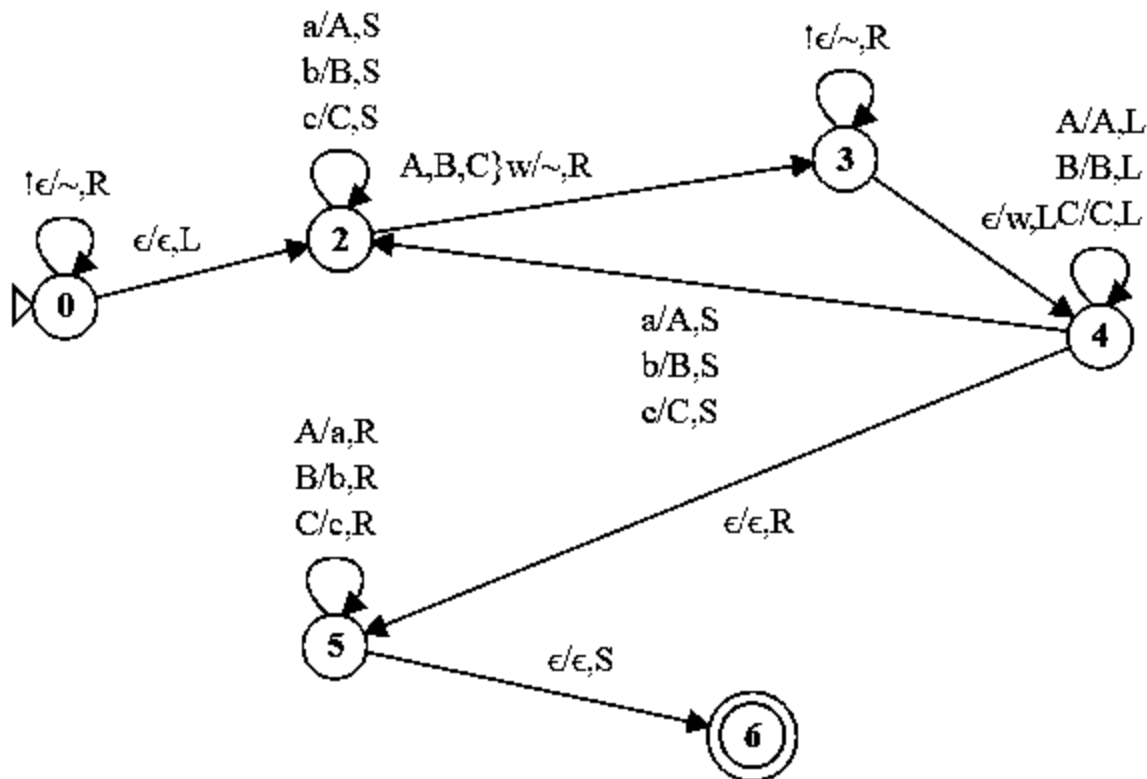


پاسخ: تمامی رشته‌هایی که در آن زوج‌های 01 تعداد فرد دارند.

(ب)



پاسخ: این ماشین معادل lowercase یک رشته شکل گرفته از الفبای $\{a,A,b,B\}$ را تولید می‌کند.
(ج)



پاسخ: این ماشین در واقع یک palindrome generator است. با وارد کردن یک رشته، معکوس آن روی انتهای رشته کپی می‌شود.

۳. ماشین تورینگی طراحی کنید که خروجی توابع زیر را روی نوار قرار دهد. دقت کنید در این سوال تمامی ورودی‌های توابع (x و y) بصورت unary هستند.

$$f(x) = x - 1 \text{ (الف)}$$

پاسخ: در این مسئله صرفاً به انتهای نوار می‌رویم و آخرین 1 را با blank عوض می‌کنیم.

$$f(x, y) = x + y \text{ (ب)}$$

پاسخ: فرض کنیم که ورودی‌ها با یک 'x' از هم جدا شده باشند. به عبارتی رشته ورودی به صورت 1.1x1.1 باشد. تنها لازم است که x را حذف کرده و باقی کاراکترها را شیفت بدهیم که فضای خالی شده پر شود.

$$f(x, y) = xy \text{ (ج)}$$

پاسخ: در این بخش باید به اندازه y بار x را تکرار کنیم. فرض کنیم دو عدد ورودی با یک کارکتر از هم جدا شده باشند. به این صورت عمل می‌کنیم: در انتهای عدد x y های جدید را اضافه می‌کنیم. هر بار یکی از 1 های y را علامت می‌زنیم و بعد به تعداد x تا 1 به انتهای ورودی اضافه می‌کنیم.

۴. ماشین تورینگ توصیف کنید که زبان زیر را قبول کند:

$$L = \{a^{2^n} | n > 0\}$$

الف) تعریف رسمی^۱ ماشین تورینگ را بنویسید.

پاسخ:

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, \text{reject}\}$

$\Sigma = \{a\}$

$\Gamma = \{a, \cdot\}$

$\text{init} = q_0$

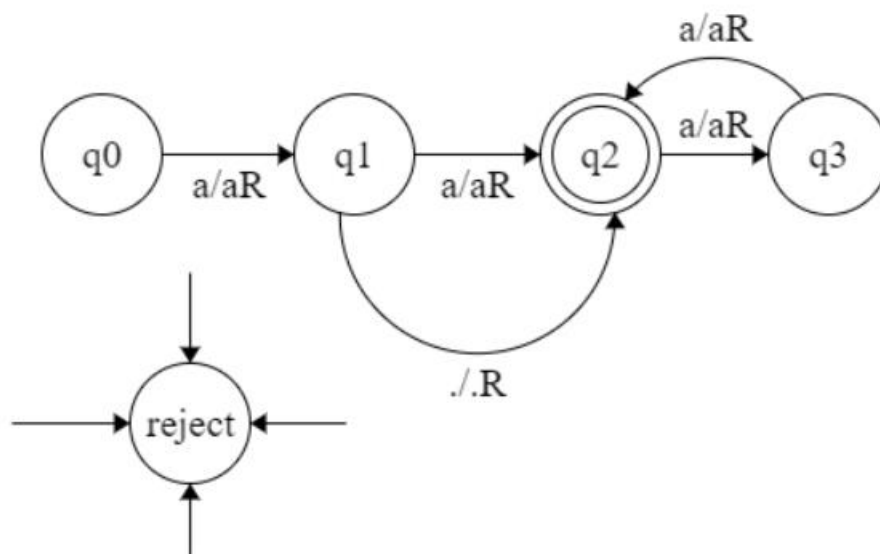
$q_{\text{acc}} = q_2$

$q_{\text{reject}} = \text{reject}$

$\delta = \{(q_0, a) \rightarrow (q_1, a, R), (q_1, a) \rightarrow (q_2, a, R), (q_2, a) \rightarrow (q_3, a, R), (q_3, a) \rightarrow (q_2, a, R), (q_1, \cdot) \rightarrow (q_2, \cdot, R)\}$

ب) state diagram ماشین را رسم کنید.

پاسخ:



ج) نوار ماشین را به ازای ورودی aaaa رسم کنید.

پاسخ:

a	a	a	a	
a	a	a	a	
a	a	a	a	
a	a	a	a	
a	a	a	a	

¹ Formal Definition

۵. ماشین تورینگی طراحی کنید که تابع زیر را پیاده سازی کند:

$$f(x) = 2^x + x^2$$

شبه کد تابع را برای مشخص کردن الگوریتم می‌نویسیم:

```
func f(x):  
    sqr <- x  
    sqr <- sqr*x  
    exp <- 1  
    i <- 1  
    while i <= x do  
        exp <- exp*2  
    endwhile  
    return exp+sqr  
endfunc
```

۶. ماشین تورینگی طراحی کنید که هر ورودی دریافت شده را دوبرابر می‌کند. برای مثال با وارد کردن عبارت aab در نهایت خروجی aaaabb می‌شود.

پاسخ: عملکرد ماشین به صورت زیر است:

نخست اولین کاراکتری که دوبرابر نشده را پیدا کن.

سپس آن کاراکتر را علامت بزن.

حال به انتهای ورودی برس.

همه چیز را از انتهای ورودی به آخرین کاراکتر علامت‌گذاری شده به چپ شیفت بده تا جا برای کپی کاراکتر باز شود.

سپس با ثبت یک کاراکتر، نوشتن یک جای خالی روی آن، حرکت به سمت راست، نوشتن کاراکتر ثبت شده کاراکتر را کپی کن و بعد به کاراکتر بعدی که باید جابجا شود برو.

این کارها را تکرار کن تا در نهایت تمامی کاراکترها را علامت گذاری کرده باشی.

۷. (امتیازی) ماشین تورینگی طراحی کنید که به ازای دو رشته ورودی (که از a و b تشکیل شدند)، تنها در صورت بلندتر بودن طول رشته دوم از رشته اول متوقف شود. برای مثال ماشین به ازای ورودی های aab و bbbb متوقف می‌شود اما با وارد کردن bbbb و aab ماشین متوقف نمی‌شود.

پاسخ: ماشین به این صورت عمل می‌کند:

نخست یک کاراکتری که در رشته اول علامت گذاری نشده را پیدا کن. آن را علامت بزن و برو در رشته دوم هم همینکار را بکن. اگر که در رشته دوم آن کاراکتر پیدا نشد وارد یک لوپ بی‌نهایت شو.

اگر در رشته اول کاراکتر علامت گذاری شده ای پیدا نکردی، در رشته دوم بگرد. اگر در رشته دوم هم چیزی پیدا نکردی، دو رشته یکسانند و دوباره وارد یک لوپ بی‌نهایت شو.
اما اگر در رشته دوم کاراکتری پیدا شد به این معناست که رشته دوم بلندتر است پس متوقف شو.