حل مسائل پایان ترم نظریه - پاییز ۱۴۰۱ باسمه تعالی

سؤال یک)

رشته ab aab متعلق به زبان است.

S, B				
S	S, B			
S, A	S	S, B		
S, B	A	S	S, B	
A	B	A	A	B
a	b	a	a	b

نکته: به ازای هر اشتباه (non_terminal اشتباهی در یک خانه یا عدم وجود یک non_terminal درست در یک خانه) در این سؤال 3 نمره کسر می‌شود.

سؤال دو)

$$S \rightarrow [S] \mid SS \mid []$$

ابتدا ترمینال‌هایی را حذف می‌کنیم که در جایگاه غیرآغازین RHS هستند.

$$S \rightarrow [SR \mid SS \mid [R$$

$$R \rightarrow]$$

دقت می‌کنیم که در قانون $S \rightarrow SS$ به دو شکل می‌توان S ابتدای RHS را به صورت productive در اشتقاق چپ بازنویسی کرد:

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow [SRS \Rightarrow \cdots$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow [RS \Rightarrow \cdots$$

گرامر نهایی به صورت زیر است:

$$S \rightarrow [SR \mid [SRS \mid [RS \mid [R$$

$$R \rightarrow]$$

نکته: نحوه تبدیل گرامر جزء پاسخ سؤال نیست. روش فوق هم یک روش ابتکاری تبدیل است و الگوریتم استاندارد نیست.

نکته: گرامر یا زبانی را می‌پذیرد یا نمی‌پذیرد. یک گرامر نمی‌تواند به صورت "تقریبی" زبانی را بپذیرد در صورتی که پاسخ شما:

- به فرم گریباخ نباشد.
- رشته صحیحی را نپذیرد.
- رشته ناصحیحی را بپذیرد.

در این سؤال نمره‌ای به پاسخ شما تعلق نمی‌گیرد.

سؤال ـ) رشته های w ، x و v باید تنها در دو شرط $|vwx| \le p$ و $vx \neq \varepsilon$ صدق کنند.

حالتی را در نظر می گیریم که هر سه رشته w ، x و v در a های سمت چپ # باشند.

اگر طول x و v باهم برابر باشند (مثلاً هردو یک) نمی توان با پمپ همزمان آندو تعداد a های سمت چپ # را به $p+5$ رسانید (5 عددی فرد است)

(۱۰ نمره برای اشاره به اشکال لم تزریق)

زبان L در حقیقت اجتماع دو زبان زیر روی الفبای $\{a, b\}$ است:

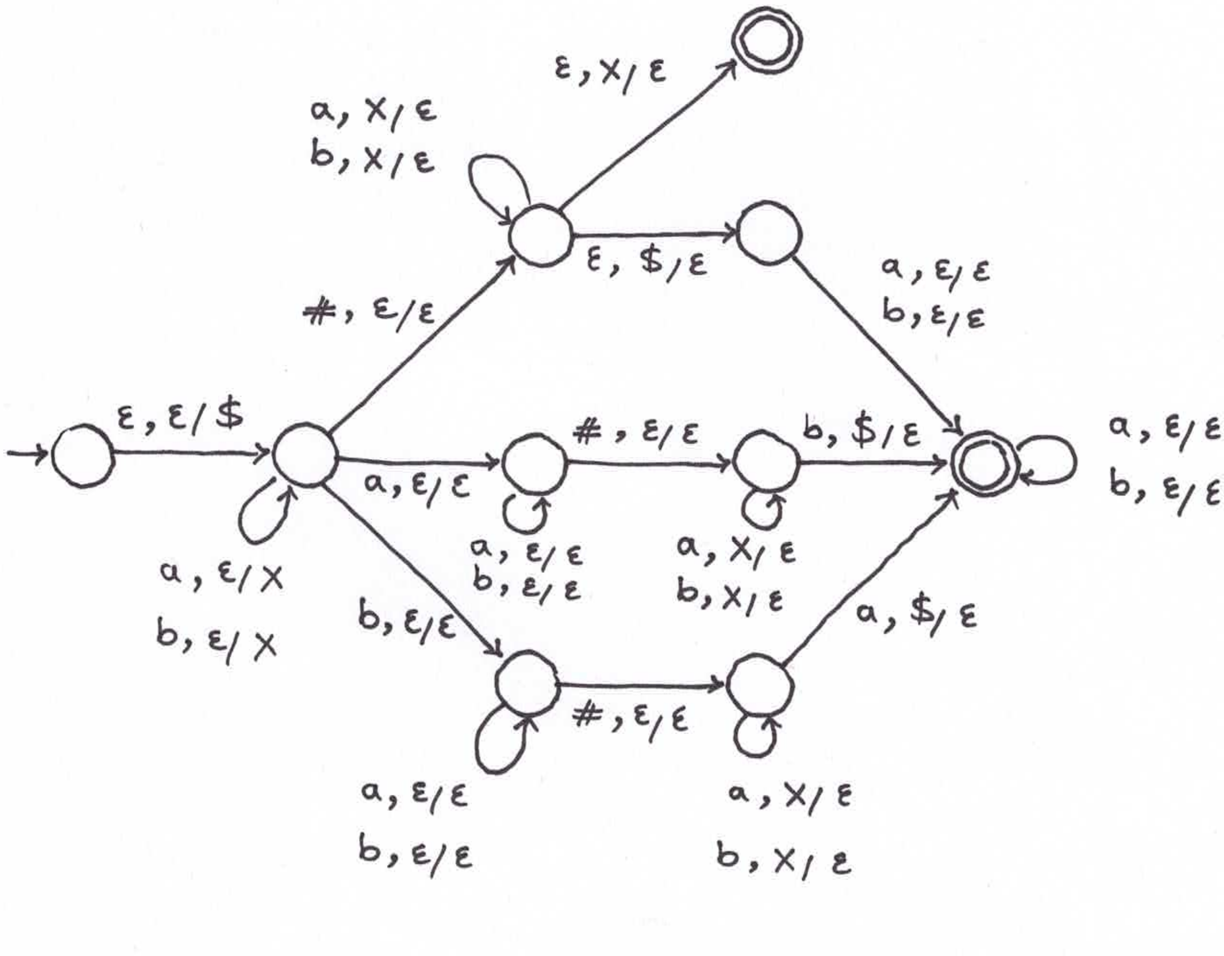
$$L_1 = \{ w_1 \# w_2 \mid |w_1| \neq |w_2| \}$$

$$L_2 = \{ w_1 \# w_2 \mid w_1[i] \neq w_2[i] \}$$

که در آن i یک عدد مثبت کوچکتر مساوی $|w_1|$ و $|w_2|$ است.

برای زبان $L = L_1 \cup L_2$ می توان PDA ترسیم کرد.

(15 نمره - 5 نمره اگر به مستقل از متن بودن اشاره شده باشد ولی دلیل دقیقی ارائه نشده باشد)



سؤال چهار)

الف) زبان L_1 تصمیم پذیر است. (۱۵ نمره)

$$L_1 = \{ <G_1, G_2> \mid |L(G_1)| = |L(G_2)| \}$$

ابتدا تعیین می کنیم که زبان تولید شده توسط هرکدام از گرامرهای G_1 و G_2 متناهی یا نامتناهی هستند.
برای این کار ابتدا متغیرهای بی فایده را از گرامر حذف می کنیم. برای مثال، A و قوانین شامل آن
از گرامر روبه رو حذف می شوند:

$$S \to AB \mid a \qquad A \to aA \qquad B \to b$$

در گرامر حاصل اگر recursion (مستقیم یا غیرمستقیم) وجود داشته باشد زبان گرامر نامتناهی
و در غیر این صورت متناهی است.

اگر $L(G_1)$ و $L(G_2)$ هردو نامتناهی باشند ⟵ yes

اگر یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد ⟵ no

اگر هردو متناهی باشند ⟵ اگر $|L(G_1)| = |L(G_2)|$ در این صورت yes
در غیر این صورت no

ب) زبان L_2 تصمیم ناپذیر است (15 نمره)

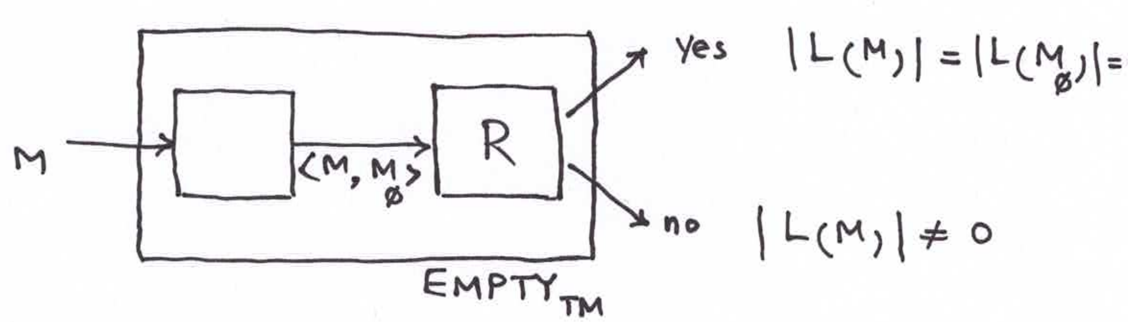
$$L_2 = \{ <M_1, M_2> \mid |L(M_1)| = |L(M_2)| \}$$

نشان می دهیم: $EMPTY_{TM} \leq L_2$

فرض کنیم $M_\emptyset$ ماشین تورینگی باشد که هیچ رشته ای را نپذیرد:

$$L(M_\emptyset) = \emptyset \iff |L(M_\emptyset)| = 0$$

فرض کنیم که ماشین تورینگ R مسأله L_2 را تصمیم بگیرد. (فرض خلف)



در هر قسمت اگر پاسخ تصمیم پذیر/ تصمیم ناپذیر صحیح باشد ولی دلیل ارائه شده دقیق نباشد
5 نمره داده می شود.

سؤال پنجم)

مساله NCP تصمیم‌ناپذیر است. برای اثبات، PCP استاندارد را به آن کاهش می‌دهیم.

یک ورودی دلخواه مساله PCP را بر روی الفبای $\Sigma = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ را در نظر می‌گیریم که در آن c_i نشان دهنده‌ی یکی از کاراکترهای الفباست.

برای تبدیل این ورودی به ورودی مساله‌ی NCP، کافیست هر کاراکتر c_i را با $0\underbrace{11\ldots11}_{i}$ جا به جا کنیم.

برای مثال، دومینوی $\left[\frac{c_2\ c_4}{c_3\ c_1\ c_2}\right]$ با $\left[\frac{01101111}{011101011}\right]$ جایگزین می‌شود.

در این تبدیل، با توجه به اینکه 0 نقش جداکننده را دارد و 1 ها به تعداد i آمده‌اند بنابراین در مساله‌ی NCP یک تطبیق (match) وجود دارد اگر و فقط اگر در مساله‌ی اصلی یک تطبیق وجود داشته باشد.