

به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- پاییز ۱۴۰۱

پاسخ تمرین شماره 3

دستیار آموزشی این مجموعه: سپهر آزرदार

sepehr81sepehr@gmail.com

تاریخ تحویل: ۱۴۰۱/۸/۸ (۸ آبان)



1) ثابت کنید زبان های زیر نامنظم اند.

- a) $w = \{0^{2n}1^n \mid n \geq 0\}$
- b) $w = \{a^i b^j c^k \mid i + j = k\}$
- c) $w = \{s s s \mid s \in \{a, b\}^*\}$

پاسخ

(a)

a) $w = \{0^{2n}1^n \mid n \geq 0\}$

1. devil: picks p

2. you: $0^{2p}1^p$

3. devil: $0^{2p}1^p = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \neq 0 \Rightarrow x = 0^i, y = 0^j$

4. you: $i = 0 \Rightarrow xy^iz = xz \Rightarrow$

از انجایی که y اندازه اش 0 نیست. پس قطعا از مقدار 0 ها کم میشود و فقط از 0 ها کم میشود. پس دیگر تعداد 0 ها 2 برابر 1 ها نیست و رشته عضو L نیست. پس نامنظم است.

(b)

b) $w = \{a^i b^j c^k \mid i + j = k\}$

1. devil: picks p

2. you: $w = a^p b^p c^{2p}$, $|w| \geq p$

3. devil: $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \neq 0 \Rightarrow x = a^i, y = a^u$

4. you: $i = 0 \Rightarrow xy^iz = xz \Rightarrow$

در نتیجه مانند بالا، با حذف y ، قطعا و فقط تعدادی a ، حذف میشوند و رابطه بین a, b, c بهم میخورد بنابراین نامنظم است.

(c)

c) $w = \{s s s \mid s \in \{a, b\}^*\}$

1. devil: picks p

2. you: $w = a^p b^p a^p b^p a^p b^p$, $|w| \geq p$

3. devil: $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \neq 0 \Rightarrow x = a^i, y = a^u$

4. you: $l = 0 \Rightarrow xy^l z = xz \Rightarrow$

در نتیجه مانند بالا، با حذف y ، قطعا و فقط تعدادی a ، حذف میشوند و رشته جدید عضو زبان نیست، بنابراین نامنظم است.

(2) منظم بودن یا نبودن زبانهای زیر را مشخص کنید. (پاسخ خود را اثبات کنید)

$$L = \{a^k \mid \exists i \geq 0, k = 2^i\}$$

$$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, n_a(w) - n_b(w) = 1\}$$

$$L = \{a^m b^n \mid n \equiv m \pmod{5} \text{ and } n, m \geq 0\}$$

پاسخ:

$$L = \{a^k \mid \exists i \geq 0, k = 2^i\}$$

1. devil: picks p

2. you: $w = a^{2^p}$, $|w| \geq p$

3. devil: $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \neq 0 \Rightarrow x = a^l, y = a^u$

4. you: $l = 2 \Rightarrow xy^2z = a^{2^{p+u}}$

از آنجایی که اندازه رشته جدید از قبلی بزرگتر است پس، رشته جدید باید حداقل سازی برابر با، اولین رشته بزرگتر از W داشته باشد که در واقع چون همه رشته ها عضو زبان توانی از 2 هستند پس رشته بعدی (از لحاظ سائز) دوبرابر رشته قبلی است. از طرفی u ، که در واقع اندازه y میباشد بین 1 تا p هست و ما میدانیم که همواره $(به ازای) 2^p > p (p \geq 0)$ پس همواره 2^{p+u} از $2^{(p+1)}$ پس رشته جدید عضو زبان نمیشود و در نتیجه زبان نامنظم است.

$$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, n_a(w) - n_b(w) = 1\}$$

1. devil: picks p

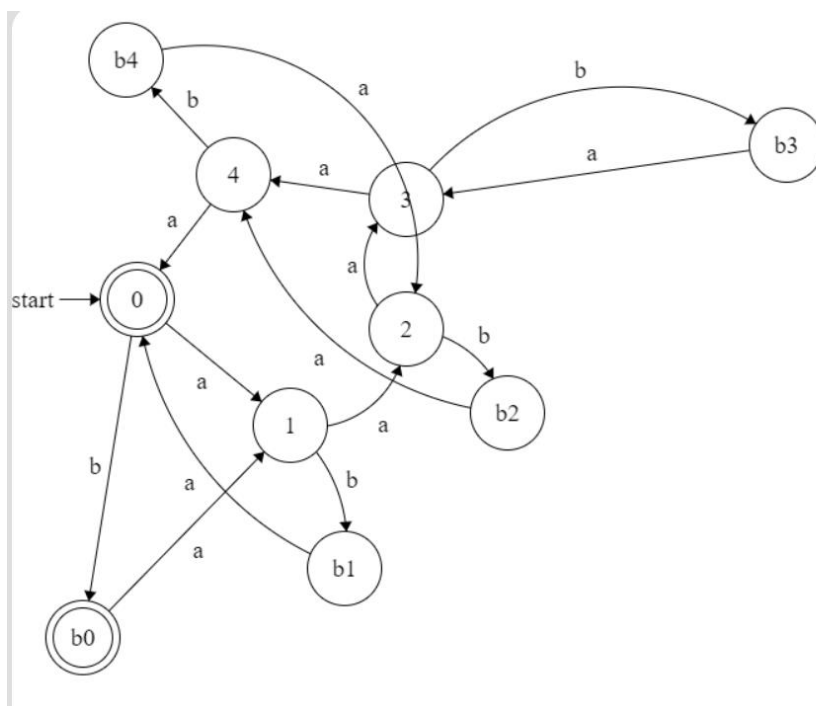
2. you: $w = a^p b^{p-1}$, $|w| \geq p$

3. devil: $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \neq 0 \Rightarrow x = a^l, y = a^u$

4. you: $i = 0 \Rightarrow xz \Rightarrow$

در نتیجه با حذف y ، قطعا و فقط تعدادی a ، حذف میشوند و اختلاف بین a, b بیشتر از 1 میشود، بنابراین نامنظم است.

$$L = \{a^m b^n \mid n \equiv m \pmod{5} \text{ and } n, m \geq 0\}$$



(3) منظم بودن یا نبودن زبان زیر را مشخص کنید. (پاسخ خود را اثبات کنید)

$$L = \{0^k 1s 0^k \mid k \geq 1 \text{ and } s \in \{0, 1\}^*\}$$

پاسخ:

$$L = \{0^k 1s 0^k \mid k \geq 1 \text{ and } s \in \{0, 1\}^*\}$$

1. devil: picks p

2. you: $w = 0^p 1 1 0^p, |w| \geq p, (s = 1)$

3. devil: $w = xyz, |xy| \leq p, |y| \neq 0 \Rightarrow x = 0^i, y = 0^u$

4. you: $i = 0 \Rightarrow w' = xz \Rightarrow$

در نتیجه با حذف y ، قطعا و فقط تعدادی 0، حذف میشوند و در نتیجه تعداد 0 ها قبل از 1، با 0 های آخر رشته برابر نیست. بنابراین رشته جدید عضو زبان نیست. پس زبان نامنظم است.

(4) ثابت کنید کنید زبان های زیر نامنظم اند.

$L = \{a^k \mid k \text{ is perfect square}\}$ (رشته هایی که طولشان برابر با یک عدد مربع کامل میباشد)

$L = \{a^p \mid p \text{ is a prime number}\}$ (رشته هایی که طولشان یک عدد اول است)

پاسخ:

$$L = \{a^k \mid k \text{ is perfect square}\}$$

1. devil: picks p

2. you: $w = a^{(p^2)}, |w| \geq p$

3. devil: $w = xyz, |xy| \leq p, |y| \neq 0 \Rightarrow x = a^i, y = a^u$

4. you: $i = 2 \Rightarrow w' = xy^2z \Rightarrow$

$$|w'| \leq p^2 + p < (p+1)^2$$

اندازه w' بزرگتر از w است ولی به اندازه اولین رشته بزرگتر از w نمیرسد چون حداکثر سایز y ، p میباشد که در اون صورت حداکثر اندازه w' برابر با $p^2 + p$ میشود که باز هم از سایز رشته بعدی عضو زبان کوچک تر است پس زبان داده شده نامنظم میباشد.

$$L = \{a^p \mid p \text{ is a prime number}\}$$

1. devil: picks p

2. you: $w = a^p, |w| \geq p$

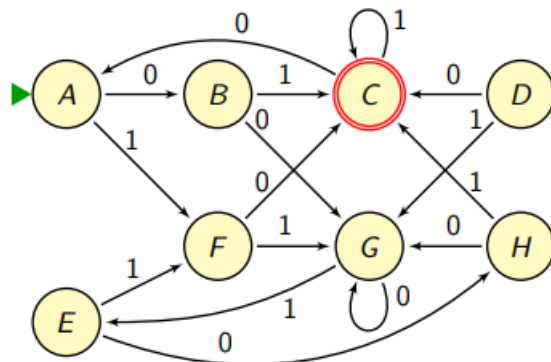
3. devil: $w = xyz, |xy| \leq p, |y| \neq 0 \Rightarrow x = a^i, y = a^u \Rightarrow |y| = u;$

4. you: $i = p+1 \Rightarrow w' = xy^{p+1}z \Rightarrow |w'| = |xyz| + |y^p| = p + u \cdot p = p(u+1);$

در نتیجه رشته جدید حاصل ضرب دو عدد بزرگتر از 1 است پس عدد اول نیست و عضو زبان نیستو پس زبان نامنظم است.

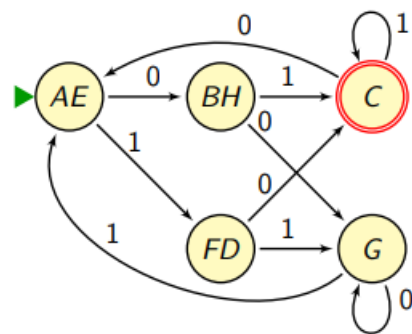
(5) DFA های داده شده را کمینه کنید.

(الف)

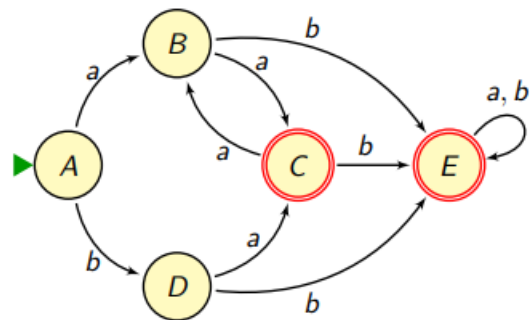


پاسخ:

A							
*	B						
*	*	C					
*	*	*	D				
A0	*	*	*	E			
*	*	*	A2	*	F		
*	*	*	*	*	*	G	
*	A1	*	*	*	*	*	H

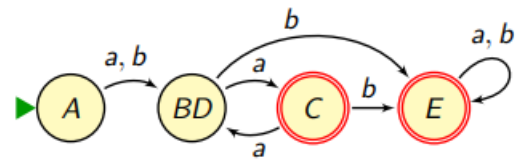


(ب)

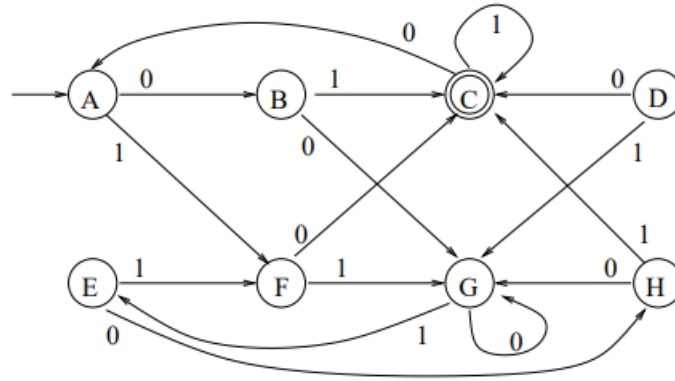


پاسخ:

A				
*	B			
*	*	C		
*	A0	*	D	
*		*	*	E

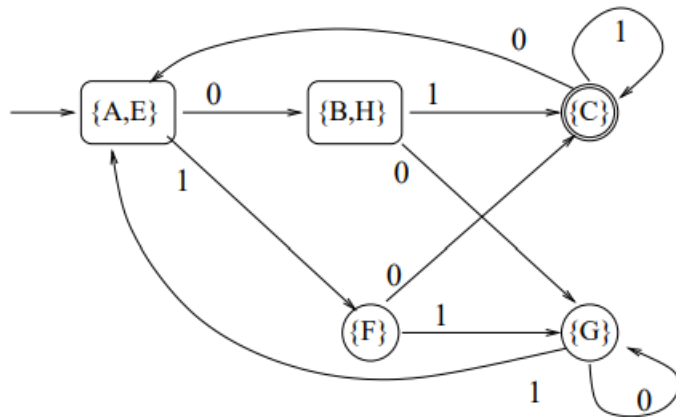


(ب)



پاسخ:

A								
*	B							
*	*	C						
*	*	*	D					
A0	*	*	*	E				
*	*	*	*	*	F			
*	*	*	*	*	*	G		
*	A1	*	*	*	*	*	H	



6*) (امتیازی) زبان نامتناهی و منظم L داده شده است. L را با عدد طبیعی k جور میگوییم اگر بتوان k زبان منظم نامتناهی پیدا کرد که دویبدو جدا از هم باشند (اشتراکی نداشته باشند) و اجتماعشان L را بدهد. ثابت کنید L با بی نهایت عدد طبیعی جور است

(پاسخ)

لم:

اگر L زبانی منظم باشد. K عددی طبیعی و L_i مجموعه رشته های موجود در L باشد که طولشان به پیمانه i برابر k باشد، L منظم است. اثبات: اگر D یک DFA برای L باشد، k کپی از آن ایجاد میکنیم و در k دسته قرار میدهم دسته های $(0, 1, \dots, k-1)$ حال ارتباط بین استتیت هارا به این شکل تنظیم میکنیم که مثال اگر در دسته i ام بودیم و در استتیت qj ، با دیدن کاراکتر a به استتیت $qj+1$ در دسته $i+1$ ام میرویم. $i+1$ را به پیمانه k بگیرد (توجه کنید که $qj+1$ همان استتیت متناظر در D است که اگر در qj بودیم با دیدن a به آن میرفتیم.) حال استتیت های پایانی را در DFA جدید استتیت های پایانی متناظر D در دسته i ام در نظر میگیریم و به این ترتیب تنها رشته هایی که طولشان به پیمانه k برابر i است توسط این زبان پذیرفته میشوند و از طرفی تمامی این رشته ها در این زبان وجود دارند. بنابراین لم اثبات شد. در ادامه از ایده ی اصلی موجود برای lemma pumping استفاده میکنیم. فرض کنید xyz یک رشته در زبان است که در آن y تشکیل یک لوپ میدهد. (با توجه به این که زبان نامتناهی است قطعاً چنین لویی وجود دارد.) بنابراین تمام رشته های به فرم xy^iz هم در این زبان خواهند بود که طولشان به فرم $|xz| + i|y|$ است که i عددی بزرگتر مساوی 0 است. $(|xz| = a, |y| = b)$ حال سعی میکنیم یک عدد مناسب مثل q پیدا کنیم که دنباله ی فوق از همه ی باقی مانده های ممکن برای q به تعداد نامتناهی تولید کند و به این ترتیب با توجه به لم ابتدای سوال هر کدام از زبان های تولید شده متناظر با هر باقی مانده هم نامتناهی شود و هم منظم. (توجه کنید که k باید بزرگ تر از a, b باشد و همین طور نسبت به b اول باشد.) برای این امر کافی است که k را عددی اول و بزرگ تر از a, b بدهیم. بدین ترتیب a, b نسبت به k اول میشوند و دنباله ی حسابی فوق همه ی باقی مانده های ممکن برای k را به تعداد نامتناهی تولید میکند