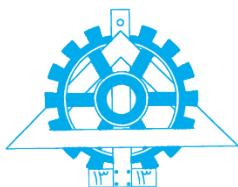


به نام خدا



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره ۴

دستیار آموزشی این مجموعه: سروش میرزاسروری

sarvisoroosh@gmail.com



تاریخ تحویل: ۳۰ فروردین

1) برای هر یک از زبانهای زیر، گرامر مستقل از متن بنویسید.

a. $L = \{a^i b^j a^k \mid j > i + k\}$

پاسخ:

$$S \rightarrow P_1 b P_2$$

$$P_1 \rightarrow a P_1 b \mid P_1 b \mid \epsilon$$

$$P_2 \rightarrow b P_2 a \mid b P_2 \mid \epsilon$$

b. $L = \{a^n b^m c^k : n, m, k \geq 0; n + m \neq k\}$

پاسخ:

$$S \rightarrow AT \mid TC \mid D$$

$$T \rightarrow a T c \mid R$$

$$R \rightarrow b R c \mid \epsilon$$

$$D \rightarrow a D c \mid F$$

$$F \rightarrow b F c \mid B$$

$$A \rightarrow A a \mid a$$

$$B \rightarrow Bb \mid b$$

$$C \rightarrow Cc \mid c$$

$$c. L = \{a^n w w^R a^n : n \geq 0, w \in \{a, b\}^*\}$$

پاسخ:

$$S \rightarrow aSa \mid X$$

$$X \rightarrow aXa \mid bXb \mid \epsilon$$

$$d. L = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w| = 3k; Avg(n_a, n_b, n_c) = n_b\}$$

$$(Avg(a, b, c) = \frac{a+b+c}{3})$$

پاسخ:

$$S \rightarrow bTTS \mid TbTS \mid TTbS \mid \epsilon$$

$$T \rightarrow a \mid c$$

$$e. L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \geq 2; w[i] = w[i+2]\}$$

پاسخ:

$$S \rightarrow A \mid B \mid C \mid D$$

$$A \rightarrow 00A \mid 00 \mid 000$$

$$B \rightarrow 11B \mid 11 \mid 111$$

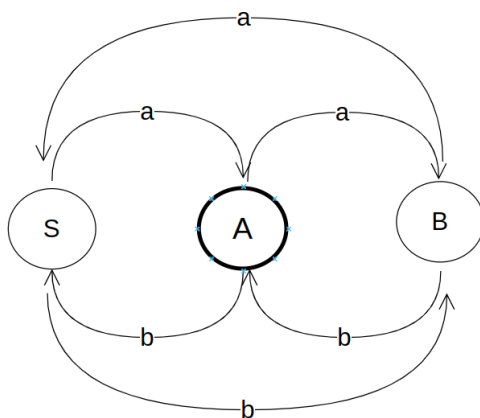
$$C \rightarrow 10C \mid 10 \mid 101$$

$$D \rightarrow 01D \mid 01 \mid 010$$

2) برای زبان‌های زیر، یک گرامر منظم بنویسید و Automata ی معادل آن را نیز رسم نمایید. در هر دو بخش، الفبای زبان $\{a, b\}$ است.

a. $L = \{(n_a(w) - n_b(w)) \bmod 3 = 1\}$

پاسخ:



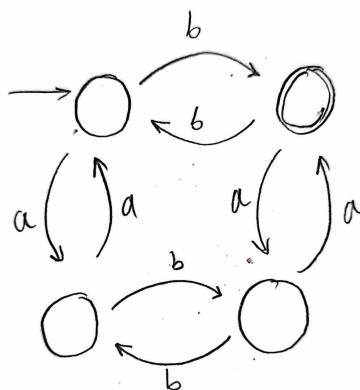
$$S \rightarrow aA \mid bB$$

$$A \rightarrow aB \mid bS \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow aS \mid bA$$

b. $L = \{w \mid w \text{ contains even number of } a\text{'s and odd number of } b\text{'s}\}$

پاسخ:



مشابه اتوماتای بالا عمل می‌کنیم:

$$S \rightarrow bS_2 \mid S_2b$$

$$S_1 \rightarrow bS_2 \mid aS_3$$

$$S_2 \rightarrow bS_1 \mid aS_4 \mid \epsilon$$

$$S_3 \rightarrow bS_4 \mid aS_1$$

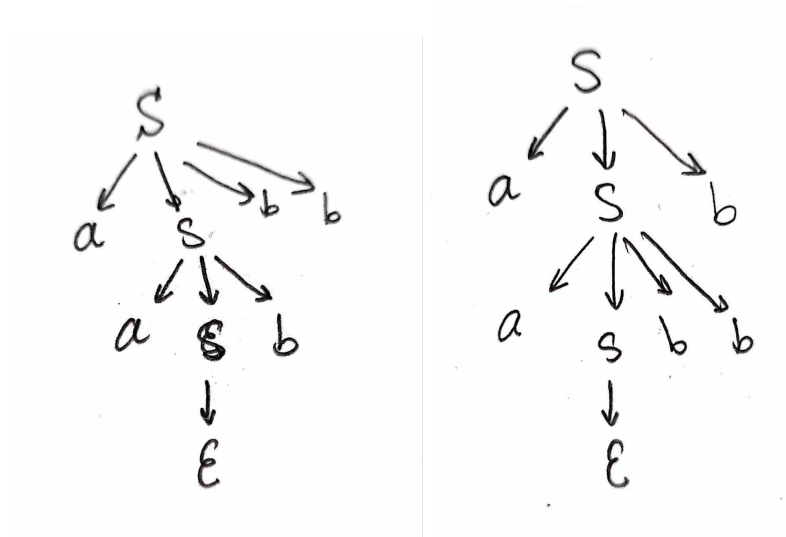
$$S_4 \rightarrow bS_3 \mid aS_2$$

3) گرامر زیر یک گرامر مبهم است. چرا؟ با ذکر مثال و کشیدن درخت اشتقاق نشان دهید. سپس برای آن یک گرامر مستقل از متن غیر مبهم بنویسید.

$$S \rightarrow aSb \mid aSbb \mid \epsilon$$

پاسخ:

رشته از حروف aabbbb را در نظر بگیرید. برای این رشته دو درخت اشتقاق زیر را داریم:



$$S \rightarrow aSb \mid A \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow aAbb \mid abb$$

4) یک رشته از پرانتزها و براکتها را متعادل نامیم هرگاه اولاً تعداد پرانتزها و براکت‌هایی که باز می‌شود و بسته می‌شود برابر باشد و همچنین نوع باز و بسته شدن پرانتزها و براکت‌ها به صورت درستی انجام شده باشد. حال زبان L را با الفبای $\{[,], (,)\}$ در نظر بگیرید که تمام رشته‌ای از پرانتزها و براکت‌ها متعادل را قبول می‌کند. به عنوان مثلاً رشته $"[()]"$ را قبول نمی‌کند ولی رشته $"[[]()]"$ را قبول می‌کند. حال برای L یک گرامر مستقل از متن بنویسید.

پاسخ:

$$S \rightarrow B S \mid P S \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow [S]$$

$$P \rightarrow (P)$$

5)

الف) آیا ممکن است یک گرامر منظم، مبهم باشد؟ اگر پاسخ شما بله است مثال بزنید و اگر خیر است دلیل بیاورید.

پاسخ:

بله ممکن است یک گرامر منظم مبهم باشد. به عنوان مثال گرامر زیر را در نظر بگیرید. واضح است که این گرامر مبهم است و رشته aab به دو روش قابل اشتقاق است. مشخص است که زبان این گرامر a^+b می‌باشد. برای این زبان یک عبارت منظم داریم پس این زبان منظم و مبهم می‌باشد.

$$S \rightarrow Tb \mid aab$$

$$T \rightarrow aT \mid a$$

ب) ثابت کنید که برای هر زبان منظم می‌توان یک گرامر مستقل از متن غیر مبهم ارائه داد.

پاسخ:

از آنجایی که هر زبان منظم را می‌توان با یک DFA نشان داد و همچنین می‌توان هر DFA را نیز می‌توان به یک گرامر مستقل از متن غیر مبهم تبدیل کرد، هر زبان منظم یک زبان مستقل از متن است و گرامر مستقل از متن غیر مبهم دارد.

6) امتیازی:

الف) الگوریتمی برای تبدیل گرامر خطی چپ به گرامر خطی راست طراحی کنید.

پاسخ:

الگوریتم ما تصور می‌کند که گرامر خطی چپ طبق تعریف هیچ قانونی ندارد که با ترمینال در سمت راستش آغاز شود. حال بدین ترتیب عمل می‌کنیم:

اگر گرامر خطی چپ قانونی دارد که سمت راست آن با متغیر S آغاز می‌شود، این قانون را به گرامر اضافه می‌کنیم: $S \rightarrow S_0$

و از الگوریتم روی گرامر تغییر داده شده با متغیر شروع S_0 استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم A, B نشان دهنده ی متغیرها، p نشان دهنده ی ترمینال هاست (تعداد ترمینال های زبان، می‌تواند صفر یا بیشتر باشد) و ϵ هم همان نماد تهی بودن باشد. حال خواهیم داشت:

1. اگر گرامر خطی چپ قانون $S \rightarrow p$ دارد، این قانون را به گرامر خطی راست بدون هیچ تغییری اضافه می‌کنیم.

2. اگر گرامر خطی چپ، قانونی به صورت $A \rightarrow p$ دارد، قانون $S \rightarrow pA$ را به گرامر خطی راست اضافه می‌کنیم.

3. اگر گرامر خطی چپ، دستوری مانند $Ap \rightarrow B$ دارد، قانون $Bp \rightarrow A$ را به گرامر خطی راست، اضافه می‌کنیم.

4. اگر گرامر خطی چپ، دستوری مانند $S \rightarrow Ap$ دارد، قانون $p \rightarrow A$ را به گرامر خطی راست، اضافه می‌کنیم.

ب) گرامر مستقل از متنی برای اجتماع دو زبان زیر بنویسید.

$$L_1 = \{0^n 1^n 2^m 3^m \mid n, m \geq 0\}$$

$$L_2 = \{0^n 1^m 2^m 3^n \mid n, m \geq 0\}$$

پاسخ:

$$S \rightarrow A_1 A_2 \mid B$$

$$A_1 \rightarrow 0 A_1 1 \mid \epsilon$$

$$A_2 \rightarrow 2 A_2 3 \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow 0B3|C$$

$$C \rightarrow 1C2|\epsilon$$