

برای زبان زیر یک اتوماتون پشته ای (PDA) ترسیم کنید.

$$\{w \in \{0,1\}^* \mid n_0(w) = 2n_1(w)\}$$

(تابع $n_0(w)$ تعداد صفرها را در رشته w برمی گرداند)

در این سوال تنها اتوماتون صحیح نمره می گیرد. لطفاً اتوماتون خود را دقیق تست کنید؛ گاهی با یک بی دقتی کوچک اتوماتون کاملاً غلط می شود. بی جهت نمره از دست ندهید!

(زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه)

عملگر منطقی یای انحصاری (Exclusive or یا XOR) را با نماد \oplus نمایش می دهیم. حاصل یای انحصاری دو بیت تنها هنگامی درست است که یکی از آنها درست و دیگری نادرست باشد.

برای محاسبه یای انحصاری دو رشته باینری $u, v \in \{0,1\}^*$ با طول یکسان بیت ها را یک به یک بر حسب مکانشان با هم XOR می کنیم. به عنوان مثال،

$$11010 \oplus 01001 = 10011$$

زبان زیر را بر روی الفبای $\{0,1\}$ در نظر بگیرید:

$$L = \{u\#v\#w \mid u,v,w \in \{0,1\}^* \text{ and } u \oplus v = w\}$$

یک ماشین تورینگ (با تمامی جزئیات حالات و گذارها) ترسیم کنید که این زبان را بپذیرد.

ماشین تورینگ خود را به دقت تست کنید، مثلاً رشته هایی بر روی الفبای $\{0,1\}$ به آن بدهید که فرمت آنها به صورت $u\#v\#w$ نیست و بررسی کنید که آنها را نپذیرد.

لطفاً با دقت کامل ترسیم کنید و به خاطر بی دقتی و سرسری انجام دادن نمره از دست ندهید.

(زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه)

یک جوان زرنگ برای اثبات کردن تصمیم ناپذیری مساله ی زیر، کاهشی از مساله ی توقف (Halting Problem) ارائه کرده است:

مساله:

«آیا یک ماشین تورینگ دلخواه بر روی رشته ی دلخواهی که روی نوارش قرار گرفته به موقعیت ۱۴۰۰ می رسد؟ به عبارت دیگر، آیا مکان ۱۴۰۰ نوار را می خواند؟»

کاهش:

«فرض کنیم مساله ی فوق تصمیم گیر داشته باشد (فرض خلف). تصمیم گیر فرضی مساله را H می نامیم.

نشان می دهیم که به کمک H می توان مساله توقف را تصمیم گیری کرد.

ماشین تورینگ ورودی مساله توقف را M می نامیم. تغییراتی به شرح زیر بر روی M اعمال می کنیم:

در آغاز کار، ابتدای نوار را مشخص می کنیم.

از تمامی حالت های توقف در واحد کنترلی ماشین M (حالات پذیرفتن accept و نپذیرفتن reject) پالها و حالت های جدیدی اضافه می کنیم تا ماشین

تورینگ از حالات توقف به ابتدای نوار برود.

سپس از ابتدای نوار با شمارش خانه ها به موقعیت مکانی ۱۴۰۰ می رویم.

ماشین تورینگ جدید را M' می نامیم.

به تصمیم گیر H ورودی $\langle M', w \rangle$ را می دهیم. اگر پذیرفت، اعلام می کنیم که ماشین M توقف می کند. اگر نپذیرفت، اعلام می کنیم که ماشین M توقف نمی کند.

چون مساله ی توقف تصمیم ناپذیر است به تناقض می رسیم.»

به نظر شما:

الف- آیا جوان زرنگ درست عمل کرده است؟

ب- اگر اشتباهی رخ داده است اشتباه در چیست؟ اشکال کاهش را به دقت شرح بدهید.

اگر کاهش درستی مد نظر دارید آن را ارائه کنید. در غیر این صورت یک الگوریتم تصمیم برای مساله پیشنهاد بدهید.

(زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه)

زبان زیر را در نظر بگیرید:

$$\{0^m 1^n 0^m 1^n \mid m, n \geq 1\}$$

الف) یا این زبان مستقل از متن است؟

(در قسمت الف نیازی به اثبات نیست، جواب بلی/خیر کفایت می کند)

ب) آیا متمم این زبان مستقل از متن است؟ اثبات کنید.

- اگر بلی، اتوماتون پشته ای یا گرامر مستقل از متن ارائه کنید.

- اگر خیر، با استفاده از لم تزریق نشان بدهید.

(زمان پیشنهادی: ۳۵ دقیقه)

گرامر مستقل از متن زیر را در نظر بگیرید:

$S \rightarrow aSa \mid T$

$T \rightarrow Ta \mid bT \mid b$

الف) زبان تولید شده توسط گرامر را به صورت دقیق ریاضی بنویسید.

ب) گرامر معادل در فرم نرمال چامسکی را ارائه کنید.

پ) گرامر معادل در فرم نرمال گریباخ را ارائه کنید.

در این سوال، مراحل به دست آوردن جواب جزء پاسخ نیستند.

(زمان پیشنهادی: ۲۵ دقیقه)