

- (1) عملیات ماشین تورینگ را به صورت مقابل روی این اتوماتون پیاده سازی می‌کنیم: سر استک اول را برابر محل کنونی head ماشین تورینگ در نظر می‌گیریم. عناصر سمت راست head عناصر پایین تر استک اول و عناصر سمت چپ head عناصر استک دوم هستند. اگر head در ماشین تورینگ به سمت راست حرکت می‌کند، در این اتوماتون سر استک اول pop می‌شود و عبارت جایگزین شده روی استک دوم push می‌شود. اگر head ماشین تورینگ به سمت چپ حرکت کند ابتدا سر استک اول pop شده و مقدار نوشته شده جدید در استک اول push می‌شود، سپس سر استک دوم pop شده و محتویات آن روی استک اول push می‌شود. بدیهی است که پیاده سازی عملیات این اتوماتون روی ماشین تورینگ ممکن است.
- (2) پیاده سازی عملیات ماشین تورینگ معمولی روی این ماشین: کافی است که به ازای تمام حالت های مختلف برای حروف چپ و راست head، به یک استیت یکسان برویم که معادل استیتی است که در ماشین تورینگ معمولی به آن می‌رویم. پیاده سازی عملیات این ماشین تورینگ روی ماشین تورینگ معمولی: روی هر نقطه که قرار داریم، ابتدا head را به سمت چپ برده و سپس دو واحد به سمت راست می‌بریم و بعد به محل قبلی بر می‌گردیم، اکنون به ازای تمام ترکیب‌های ممکن از مقادیر خوانده شده استیت داریم، کافی است که از هر استیت به استیت متناظر در ماشین تورینگ تغییر یافته برویم.
- (3) خیر، کافی است به ازای هر حرف در الفبای ماشین تورینگ اصلی، دو حرف در این ماشین تورینگ تعریف کنیم (مثلا برای a دو حرف a و a' را در نظر بگیریم) و در نوشتن استیت های ماشین تورینگ جدید، این دو حرف را معادل بگیریم و هر کجا که می‌خواستیم حرف نوشته شده تغییر نکند، به جای یک حرف معادل آن را می‌نویسیم.
- (4) کافی است که یک تناظر یک به یک بین خانه جدول دو بعدی و خانه نوار یک بعدی ایجاد کنیم. با توجه به این که می‌دانیم قدرت ماشین تورینگ دو نواره با ماشین تورینگ عادی یکسان است، از ماشین تورینگ با دو نوار برای شبیه سازی ماشین تورینگ دو بعدی استفاده می‌کنیم. به این صورت که در نوار دوم مختصات کنونی (x,y) را ذخیره می‌کنیم و سپس عبارت زیر را برای متناظر کردن این خانه با خانه نوار تک بعدی برای آن محاسبه می‌کنیم:
- $$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$
- حال کافی است که به ازای هر تغییر مختصات در جدول دوبعدی، ابتدا مقادیر مختصات کنونی را در نوار دوم آپدیت کنیم، سپس عبارت را محاسبه کرده و به خانه معادل در نوار ماشین تورینگ برویم.
- (5) قدرت این اتوماتون مشابه ماشین تورینگ است. ماشین تورینگ با دو نوار به سادگی می‌تواند این اتوماتون را شبیه سازی کند، کافی است نشان بدهیم که این اتوماتون هم می‌تواند ماشین تورینگ را شبیه سازی کند. اثبات: برای معادل سازی، سر صف را محل قرار گیری head در نظر می‌گیریم. عبارات قبل از head تا پیش از رسیدن به نماد سر صف عبارات سمت چپ head و بقیه سمت راست head هستند. کافی است دو حرکت به سمت راست و چپ را برای صف شبیه سازی کنیم: حرکت به سمت چپ: اگر در ماشین تورینگ حرف a پاک می‌شود و b نوشته می‌شود، در اینجا ابتدا a را dequeue می‌کنیم و سپس b را enqueue می‌کنیم. در این حالت سر صف عبارت سمت چپ a هست و b جایگزین شده است. حرکت به سمت راست: اگر در ماشین تورینگ حرف a پاک می‌شود و b نوشته می‌شود، در اینجا ابتدا یک علامت خاص (مثلا #) را enqueue می‌کنیم، سپس a را dequeue کرده و b را enqueue می‌کنیم. حال باید صف را به شکلی تغییر بدهیم که عبارت جلوی # سر صف قرار بگیرد. برای این کار مراحل زیر را طی می‌کنیم: به ازای هر حرف یک استیت قرار می‌دهیم تا بتوانیم بر اساس حرف خوانده شده در مرحله قبل تصمیم بگیریم. در هر مرحله سر صف را dequeue می‌کنیم. اگر برابر با # نبود عبارت خوانده شده در مرحله قبل را enqueue می‌کنیم. اگر برابر با # بود، ابتدا # و سپس عبارت خوانده شده در مرحله قبل را enqueue می‌کنیم. (عملا با انجام این مراحل

جای # و عبارت قبلی عوض می‌شود) حال کافی است که هر عبارت را dequeue کرده و مجدداً همان را enqueue کنیم تا زمانی که به # برسیم. حال اگر # را dequeue بکنیم، عبارت سر صف عبارت مورد نظر ما خواهد بود.

(6)

(a) اتوماتون را به صورت مقابل توصیف می‌کنیم: به ازای هر a روی استک push می‌کنیم. سپس زمانی که به b رسیدیم از استک pop می‌کنیم. استیتی که در آن b را pop می‌کنیم استیت accept است و اگر استک خالی شد به استیت reject می‌رویم.

(b) در سوال اول تمرین نشان دادیم که قدرت یک اتوماتون با دو استک با ماشین تورینگ یکسان است. می‌خواهیم از همان الگوریتم برای حل این مسئله استفاده کنیم. اگر نشان دهیم که عملیات یک استک معمولی (push, pop) و جایگزین کردن حرف a با b با دو استک تک حرفی قابل انجام است مسئله حل می‌شود. (از استک سوم به عنوان استک کمکی استفاده می‌شود)

ابتدا نیاز است که محتویات استک ها را encode کنیم. اگر تعداد حروف الفبا k باشد، می‌توانیم عبارت داخل استک را به صورت یک عدد در مبنای k نشان دهیم. حال با این فرض سه عملیات ذکر شده برای استک را پیاده سازی می‌کنیم:

Pop: برای این کار، باید عددی که استک اکنون نشان می‌دهد (i) را با (i/k) جایگزین کنیم و باقی‌مانده که همان سر استک است را دور بریزیم. برای این کار در هر مرحله از عبارت استک مورد نظر k بار pop کرده و در استک کمکی 1 بار push می‌کنیم تا زمانی که استک اول خالی شود. حال عبارت استک کمکی را به استک اول منتقل می‌کنیم.

Push: برای این کار، باید عددی که استک اکنون نشان می‌دهد (i) را با $(i*k+a)$ جایگزین کنیم که a حرفی است که قصد داریم push بکنیم. برای این کار ابتدا در هر مرحله 1 عبارت از استک اول pop کرده k بار در استک کمکی push می‌کنیم تا زمانی که استک اول خالی بشود. حال a واحد به استک کمکی اضافه می‌کنیم و تمام محتویات آن را به استک اول منتقل می‌کنیم.

جایگزین کردن: وقتی که قرار است حرف a با b جایگزین شود، ابتدا a بار از استک pop می‌کنیم و سپس b بار push می‌کنیم.