به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره ۴

دستیار آموزشی این مجموعه: علیرضا آقایی

alirezaaghaei090@gmail.com

تاریخ تحویل : ۱۸ آبان

---

1) گرامر $G = (V, \Sigma, R, S)$ را در نظر بگیرید که در آن V، Σ و R به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$V = \{S, A\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$$\begin{aligned} R = \{\ & S \to AA, \\ & A \to AAA, \\ & A \to a, \\ & A \to bA, \\ & A \to Ab\ \} \end{aligned}$$

a) چه رشته‌هایی در $L(G)$ را می‌توان با حداکثر ۴ بار استفاده از قوانین گرامر تولید کرد؟

S → AA → aA → aa
S → AA → aA → abA → aba
S → AA → aA → aAb → aab
S → AA → bAA → baA → baa
S → AA → bAA → bAa → baa
S → AA → AbA → abA → aba
S →AA → AbA → Aba → aba
S → AA → Aa → aa
S → AA → Aa → bAa → baa
S → AA → Aa → Aba → aba
S → AA → AbA → abA → aba
S → AA → AbA → Aba → aba
S → AA → AAb → aAb → aab
S → AA → AAb → Aab → aab

با توجه به موارد بالا، رشته‌های aa، aab، aba و baa را می‌توان با حداکثر ۴ بار استفاده از قوانین گرامر تولید کرد.

b) ۴ اشتقاق متفاوت برای رشته‌ی babbab ارائه دهید.

S → AA → AbA → AbAb → Abab → babbab
S → AA → AAb → AbAb → Abab → babbab
S → AA → bAA → bAbA → babA → babbab
S → AA → AbA → bAbA → babA → babbab

c) روشی ارائه دهید تا با استفاده از گرامر G بتوان رشته‌ی $b^m ab^n ab^p$ را به ازای هر $m, n, p > 0$ را تولید کرد.

1 - با استفاده از قانون $S \rightarrow AA$ شروع می‌کنیم.
2 - سپس m بار قانون $A \rightarrow bA$ را روی چپ‌ترین A اعمال می‌کنیم و به $b^m AA$ می‌رسیم.
3 - سپس قانون $A \rightarrow a$ را روی چپ‌ترین A اعمال می‌کنیم و به $b^m aA$ می‌رسیم.
4 - سپس n بار قانون $A \rightarrow bA$ را روی چپ‌ترین A اعمال می‌کنیم و به $b^m ab^n A$ می‌رسیم.
5 - سپس p بار قانون $A \rightarrow Ab$ را روی چپ‌ترین A اعمال می‌کنیم و به $b^m ab^n Ab^p$ می‌رسیم.
6 - سپس قانون $A \rightarrow a$ را روی چپ‌ترین A اعمال می‌کنیم و به $b^m ab^n ab^p$ می‌رسیم.

2) توضیح دهید که هر کدام از گرامرهای زیر چه رشته‌هایی را تولید می‌کنند. همچنین زبان تولید شده توسط هر گرامر را با نمایش ریاضی ارائه دهید.

a)

$$S \rightarrow AB$$
$$A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$$
$$B \rightarrow bBc \mid \varepsilon$$

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i + k = j\}$$

b)

$$S \rightarrow aY \mid bY$$
$$Y \rightarrow aYa \mid bYb \mid aYb \mid bYa \mid \varepsilon$$

$L = \{ \mathrm{w} \mid w \in \{a, b\}^*,$ طول w فرد باشد $\}$

c)

$$S \rightarrow bSa \mid bY$$
$$Y \rightarrow bY \mid aY \mid \varepsilon$$

$L = \{ \mathrm{w} \mid w \in \{a, b\}^*,$ w با b شروع شود $\}$

3) برای هر یک از زبان‌های زیر، یک گرامر مستقل از متن بنویسید.

a) $L = \{w \in \{1,2,*\}$ | w شامل همه‌ی رشته‌هایی به شکل ضرب تعدادی عدد باشد به طوری که حاصل ضرب اعداد، عددی زوج باشد$\}$

$$
\begin{aligned}
&S \to 2 \mid N2 \mid S * T \mid T * S \mid S * S \\
&T \to 1 \mid N1 \mid T * T \\
&N \to 1 \mid 2 \mid N1 \mid N2
\end{aligned}
$$

b) $L = \{a^n b^m c^k \mid n \neq m \text{ or } m \neq k\}$

$$
\begin{aligned}
&S \to S_1S_3 \mid S_2S_3 \mid S_4S_5 \mid S_4S_6 \\
&S_1 \to aS_1b \mid aS_1 \mid a \\
&S_2 \to aS_2b \mid S_2b \mid b \\
&S_3 \to S_3c \mid \varepsilon \\
&S_4 \to aS_4 \mid \varepsilon \\
&S_5 \to bS_5c \mid bS_6 \mid b \\
&S_6 \to bS_6c \mid S_6c \mid c
\end{aligned}
$$

c) $L = \{a^m b^{2n} c^{3n} d^p \mid p > m, \text{and } m, n \geq 1\}$

$$
\begin{aligned}
&S \to aXdd \\
&X \to Xd \mid aXd \mid bbYccc \\
&Y \to bbYccc \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

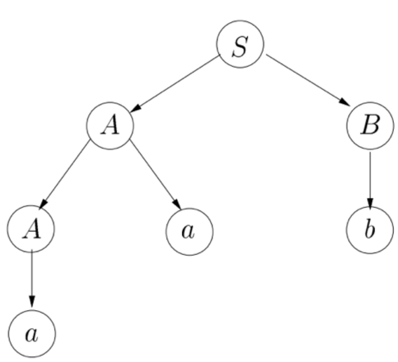
d) $L = \{uawb \mid u, w \in \{a,b\}^*, |u| = |w|\}$

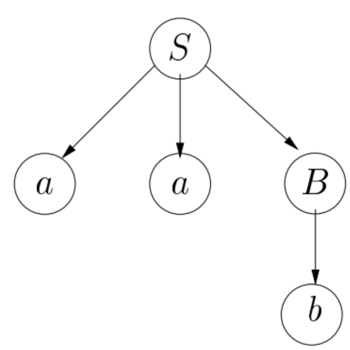
$$
\begin{aligned}
&S \to Tb \\
&T \to aTa \mid aTb \mid bTa \mid bTb \mid a
\end{aligned}
$$

4) گرامر مبهم G را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&S \to AB \mid aaB \\
&A \to a \mid Aa \\
&B \to b
\end{aligned}
$$

a) رشته‌ای عضو گرامر پیدا کنید که برای آن حداقل دو درخت اشتقاق متفاوت وجود داشته باشد. آن دو درخت را ترسیم کنید.





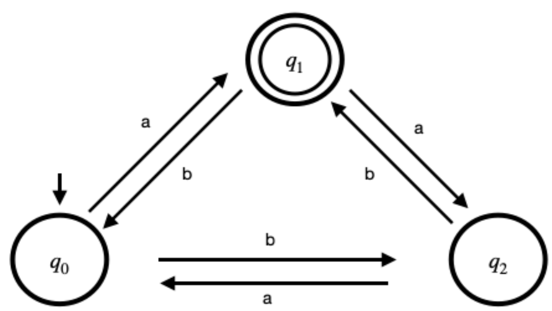
۲ درخت بالا، ۲ درخت اشتقاق متفاوت برای رشته‌ی aab هستند.

b) گرامری غیر مبهم و معادل با گرامر G ارائه دهید.

$$S \rightarrow Ab$$
$$A \rightarrow a \mid Aa$$

5) برای زبان‌های زیر یک Automata رسم کرده و سپس با استفاده از آن یک گرامر منظم برای آن‌ها بنویسید.

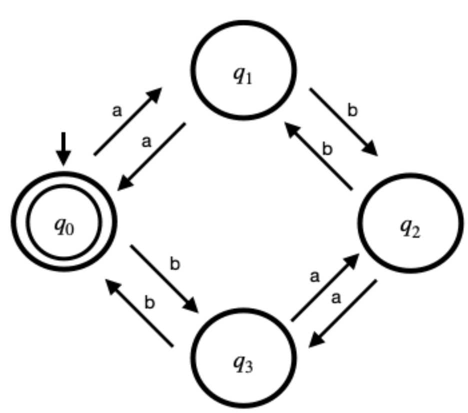
a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ \big(n_a(w) - n_b(w)\big)\ mod\ 3 = 1\}$



گرامر مربوط به این زبان به شکل زیر است:

$$q_0 \rightarrow aq_1 \mid bq_2$$
$$q_1 \rightarrow aq_2 \mid bq_0 \mid \varepsilon$$
$$q_2 \rightarrow aq_0 \mid bq_1$$

b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, n_a(w)\ mod\ 2 = 0, n_b(w)\ mod\ 2 = 0\}$



گرامر مربوط این زبان به شکل زیر است:

$$
\begin{aligned}
q_0 &\rightarrow aq_1 \mid bq_3 \mid \varepsilon \\
q_1 &\rightarrow aq_0 \mid bq_2 \\
q_2 &\rightarrow bq_1 \mid aq_3 \\
q_3 &\rightarrow aq_2 \mid bq_1
\end{aligned}
$$

6) با فرض این که اگر دو زبان L_1 و L_2 گرامر مستقل از متن داشته باشند آنگاه زبان $L_1 \cup L_2$ نیز گرامر مستقل از متن دارد، اثبات کنید که برای زبان B گرامری مستقل از متن وجود دارد. (امتیازی)

$$
\begin{aligned}
A &= \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \\
B &= \bar{A}
\end{aligned}
$$

زبان‌های L_1، L_2 و L_3 را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{\,\overline{a^* b^*}\,\} \\
L_2 &= \{a^n b^m \mid n > m\} \\
L_3 &= \{a^n b^m \mid n < m\}
\end{aligned}
$$

با توجه به تعریف زبان B خواهیم داشته که $B = L_1 \cup L_2 \cup L_3$. حال برای اثبات وجود گرامری مستقل از متن برای B، کافی است برای زبان‌های L_1، L_2 و L_3 گرامری مستقل از متن بنویسیم:

L_1:

$$
\begin{aligned}
S_1 &\rightarrow T_1 ba T_1 \\
T_1 &\rightarrow aT_1 \mid bT_1 \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

L_2:

$$S_2 \rightarrow aS_2b \mid aS_2 \mid a$$

L_3:

$$S_3 \rightarrow aS_3b \mid S_3b \mid b$$

بنابراین خواسته‌ی مساله اثبات شد.