অধ্যায় ২

গণিতের মৌলিক ধারণা

শুরুতেই বলে রাখি, গণিত আমাদের অতি চেনা একটি বিষয় এবং ছোট বেলা থেকেই “অ আ ক খ” এর সাথে আমরা “১ ২ ৩” ও শিখি। এখানে আমি গণিতের মৌলিক ধারণা বলতে প্রোগ্রামিং এর জন্য গণিতের যে বিশেষ “নিঞ্জা টেকনিক” জানতে হয় সেটাই আমরা শিখব। এই “নিঞ্জা টেকনিক” গুলো প্রবলেম সলভিং এর ক্ষেত্রেও অনেক প্রয়োজনীয়। চলো তাহলে আমরা এই “নিঞ্জা টেকনিক” গুলো শিখে ফেলি!

২.১সংখ্যাতত্ত্ব

সংখ্যাতত্ত্ব, কথাটি বেশ ভারী এবং জটিল মনে হলেও এটা আসলে গণনা করারই বিশেষ পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করে। সহজ ভাষায় বলতে হলে, আমরা সবাই জোড় এবং বিজোড় সংখ্যা চিনি। যেমন: $1, 3, 5, 7$ সংখ্যাগুলো বিজোড় এবং 2, 4, 6, ৪ সংখ্যাগুলো জোড় এটা আমরা সবাই জানি কিন্তু আরেকটু গভীরভাবে চিন্তা করলে দেখবে জোড় এবং বিজোড় অন্যভাবেও সংজ্ঞায়িত করা যায়, 2 এর বিভাজ্যতা দিয়ে। অর্থাৎ, যে সকল সংখ্যাকে 2 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হয় তারা জোড় এবং বাকিরা বিজোড়। সংখ্যাতত্ত্বের এসব পদ্ধতি নিয়ে আমরা এই অধ্যায়ে আলোচনা করবো।

বিভাজ্যতা দিয়ে শুরু

আমরা পূর্ণসংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করতে পারি। তাহলে আমরা জানি যে, পূর্ণসংখ্যার যোগ, বিয়োগ বা গুণ করলে আরেকটি পূর্ণসংখ্যা পাওয়া যায়। কিন্তু ভাগের ক্ষেত্রে কি হবে? ভাগের ক্ষেত্রে সবসময় পূর্ণসংখ্যা পাওয়া যায় না। চলো একটা উদাহরণ দেওয়া যাক, ধর তোমার বাসার পাশের রাজু কাকার দোকানে একটা বিশেষ অফার চলছে! অফারটা হলো বিনামূল্যে 43 টা চকলেট খাওয়ার অফার! কিন্তু একটা শর্ত আছে, শর্তটা হলো, তোমাকে প্রতিদিন সমান সংখ্যক চকলেট খেয়ে চকলেট গুলো শেষ করতে হবে এবং 1 দিনে সমস্ত চকলেট খেয়ে শেষ করা যাবে না। অর্থাৎ, তুমি যদি প্রথমদিন 5 টা করে চকলেট খাও, তবে প্রতিদিন 5 টা করেই চকলেট খেতে হবে

এবং চকলেট শেষ করতে হবে। যদি না পার, তবে চকলেট এর সব দাম তোমাকে দিতে হবে। চিন্তা কর, তোমার কি চকলেট চ্যালেঞ্জ টা অ্যাকসেপ্ট করা উচিৎ? চিন্তা কর.....

তো এরকম সমস্যা সমাধানের জন্য আমাদের বিভাজ্যতার জ্ঞান থাকা জরুরি। তাহলে আমাদের প্রথমে জানা প্রয়োজন বিভাজ্যতা কি? আসলে বিভাজ্যতা হলো ছোটবেলাই শেখা প্রথম ভাগগুলো, অর্থাৎ একটা সংখ্যাকে আরেকটি সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যদি ভাগশেষ 0 হয় তবে প্রথম সংখ্যাটি দ্বিতীয় সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য হয়। আরেকটু গাণিতিকভাবে বলতে গেলে, *"a ও b দুইটি পূর্ণসংখ্যা হলে b যদি a দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হয়, তবে a, b দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য"*। একে $a \mid b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখন আমরা মূল চ্যালেঞ্জ এ ফিরে আসি, ওপরে আমরা যা দেখলাম তা থেকে বলতে পারি আমাদের এমন একটা সংখ্যা খুজে বের করতে হবে যা 1 থেকে বড় এবং 43 কে নিঃশেষে ভাগ করে। এখন চিন্তা কর, এমন কোন সংখ্যা আছে কি না? এখন আমরা বিভাজ্যতার কিছু মৌলিক নিয়ম শিখে নেব।

মনে রেখো

১. যদি $a \mid b$ হয়, তবে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা c এর জন্যে $a \mid bc$। যেহেতু, $a \mid b$, তাহলে বলা যায় যে এমন একটি পূর্ণসংখ্যা k আছে, যেন $b = ak$ হয়। সুতরাং, $bc = (ak)c = a(kc)$। অর্থাৎ, $a \mid bc$.

২. যদি $a \mid b$ এবং $b \mid c$ হয় তবে, $a \mid c$ যেহেতু, $a \mid b$ এবং $b \mid c$, তাহলে বলা যায় যে এমন পূর্ণসংখ্যা x,y আছে যেন $b = ax$ এবং $c = by$। সুতরাং, $c = by = (ax)y = a(xy)$, যার অর্থ $a \mid c$

৩. যদি $a \mid b$ হয়, তাহলে সাধারণত $a \leq b$। তা না হলে $b = 0$ হবে, কেননা a-এর সব মানের জন্যই $a \mid 0$.

৪. যদি $a \mid b$ এবং $a \mid c$ হয়, তবে $a \mid b \pm c$ হবে। যেহেতু, $a \mid b$ এবং $a \mid c$, তাহলে বলা যায় এমন দুটি x,y আছে যেন $b = ax$ এবং $c = ay$ হয়। এখন দেখো, $b \pm c = ax \pm ay = a(x \pm y)$, যার অর্থ $a \mid b \pm c$

তাহলে এমন কি কোন সংখ্যা আছে 43 কে নিঃশেষে ভাগ করে? না। কারন 43 একটি মৌলিক সংখ্যা এবং আমরা জানি মৌলিক সংখ্যার 1 এবং ঐ সংখ্যা ছাড়া আর কোন গুণনীয়ক থাকে না। তাহলে এ ধরনের অফার নেওয়ার আগে আমাদের সবসময় চিন্তা করে দেখা উচিৎ।

চলো এখন একটা উদাহরণ দেখা যাক,

উদাহরণ ২.১

সকল $n \in \mathbb{N}$ নির্ণয় কর যেন $n + 2 \mid 5n + 6$

সমাধান: চলো আগে দেখি প্রশ্নে কি দেওয়া আছে,

$$n + 2 \mid 5n + 6$$

এখন আমাদের সর্বপ্রথম কাজ হলো, লবকে($5n + 6$) এমন আকৃতি দেওয়া যেন একে $a + b$ আকারে লিখলে a, $n + 2$ দ্বারা বিভাজ্য হয় এবং b একটি সাংখ্যিক মান হয়। দেখ লবে $5n$ আছে এবং হরে($n + 2$) আছে n। তাহলে আমরা হরকে 5 দ্বারা গুন করতে পারি, হরকে 5 দ্বারা গুন করলে হয় $5n + 10$। এখন আমরা লিখতে পারি,

$$5n + 6 = 5n + 10 - 4$$

এখন দেখ, n এর যেকোনো মানের জন্য $n + 2$, $5n + 10$ কে ভাগ করে। সুতরাং, আমাদের এমন n খুজে বের করতে হবে যেন $n + 2 \mid 4$ হয়। এখন আমাদের 4 এর গুণনীয়ক বের করতে হবে। 4 এর গুণনীয়ক হলো 1,2,4। চলো এখন আমরা এই মানগুলো থেকে n এর মান বের করার চেষ্টা করি। $n + 2 = 1, 2$ হলে n এর মান ≤ 0 হয়। সুতরাং n এর একমাত্র মান আসবে যখন $n + 2 = 4$ হয়। অতএব, $n = 2$।

এখন তোমাদের জন্য একটি সমস্যা দেওয়া যাক,

সমস্যা: সকল $n \in \mathbb{N}$ নির্ণয় কর যেন $7n + 1 \mid 8n + 57$

ইউক্লিডিয়ান অ্যালগরিদম

আমরা সবাইতো ইউক্লিড কে চিনিতো? তাই না? হ্যাঁ, ইনিই সে যার জ্যামিতির উপপাদ্য আর সম্পাদ্য আমরা ক্লাস 6-10 পর্যন্ত পড়ি। মহাগুরু ইউক্লিড দুটো সংখ্যার গ.সা.গু বের করার একটি চমৎকার পদ্ধতি আবিষ্কার করছিলেন। সেটা হলো,

a ও b দুটি সংখ্যা এবং $a \geq b$ হলে,

$$a = bq + r$$

যেখানে $0 \leq r < b$। তাহলে gcd(a,b) = gcd(b,r)।[gcd = gratest common divisor; গ.সা.গু]

এখন আসি প্রমান এ, গ.সা.গু হলো সর্বোচ্চ সাধারণ গুণনীয়ক অর্থাৎ দুটি সংখ্যাকেই ভাগ করে এমন সবচেয়ে বড় সংখ্যা। অর্থাৎ, এমন একটি সংখ্যা d আছে যেন $d \mid a$ এবং $d \mid b$। যেহেতু $a = bq + r$, অতএব, $d \mid bq + r$। অতএব, $d \mid r$। এখন আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে d হলো b ও r এর গ.সা.গু। ধরি, d_1 হলো b ও r এর গ.সা.গু এবং $d_1 > d$। তাহলে $d_1 \mid bq + r = d_1 \mid a$, অতএব $\gcd(a,b) = d_1$, কিন্তু আমরা আগেই বলেছি যে d হচ্ছে সবচেয়ে বড় সংখ্যা যা a ও b উভয়কে ভাগ করে কিন্তু $\gcd(a,b) = d_1$ হলে d_1 a ও b উভয়কে ভাগ করবে, কিন্তু $d_1 > d$, অর্থাৎ, $d_1 \neq \gcd(a,b)$। অতএব $\gcd(b,r) = d$। সুতরাং, $\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$।

শেষ করার আগে আমি আরেকটা গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য নিয়ে একটু বলতে চাই, উপপাদ্যটি গ.সা.গু এবং ল.সা.গু এর মধ্যে একটা সম্পর্ক স্থাপন করে।

ধরি দুটি সংখ্যার গ.সা.গু gcd(a,b) = d এবং ল.সা.গু lcm(a,b) = l, তাহলে,

$$\gcd(a,b) * \mathrm{lcm}(a,b) = d * l = a * b$$

আমার বিশ্বাস প্রমাণটা তোমরাই করতে পারবে। তোমাদের একটা হিন্ট দেই, a এবং b মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। এখন দেখ গ.সা.গু হলো মৌলিক সংখ্যার ছোট পাওয়ার গুলোর গুণফল এবং ল.সা.গু হলো বড় পাওয়ার গুলোর গুণফল। এখন দেখ a আর b কে গুণ করলে কি হয়?

মডুলার অ্যারিথমেটিক

আচ্ছা আমরা সাধারণত যখন ভাগের কথা বলি তখন আমরা সাধারণত ভাগফলের চিন্তা করি। কিন্তু বেচারা ভাগশেষকে আমরা সাধারণত পাত্তাই দিই না। যেমন তোমাকে যদি বলি, 2020 কে 672 ভাগ করলে কত হবে? তুমি কিন্তু আমাকে ভাগফলটাই বলবে ভাগশেষ নয়। এখানে আমরা ভাগশেষ নিয়ে আলোচনা করব এবং এর গুরুত্ব কি তা নিয়েও আলোচনা করব।

চলো একটা উদাহরণ দিয়ে এর গুরুত্বটা আমরা বুঝি। ধর তোমাকে আমি বললাম 2020 সালের ডিসেম্বর এর 30 তারিখ কি বার হবে? তুমি কি করবে? সর্বপ্রথম ভাবতে পারো ক্যালেন্ডার দেখে বলে দেবে! কিন্তু না! আমি বললাম যে শুধু খাতা আর কলম ব্যাবহার করে তোমাকে বের করতে হবে। এখন তুমি পরে গেলে বিপদে! চলো এরকম বিপদ থেকে বের হওয়ার জন্য তোমাকে ভাগশেষের একটা চমৎকার ব্যাবহার শিখিয়ে দিই। ধর তুমি জানো আজকে কি বার, এখন ডিসেম্বর 30 আর আজকের দিনের মধ্যের পার্থক্য বের কর। এখন যদি আজকের তারিখকে 0 ধর তাহলে 7 তারিখ আবার আজকের বার হবে।[কেন সেটা নিজে চিন্তা কর] তাহলে সব তারিখকে 7 দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগশেষ আসে সেটা থেকে তারিখ বের করা খুবই সহজ। যদি ভাগশেষ 0 হয় তাহলে সেই দিন আর আজকের দিনের তারিখ এক আর ভাগশেষ অন্য কিছু হলে আজকের দিনের ভাগশেষ দিন পর যে তারিখ হয় সেটাই হবে উত্তর।

গুরুত্ব তো বোঝা হল, এখন আস শিখি কিভাবে এই ভাগশেষ এর অংকগুলো লিখতে হয়। ধর 15 কে 7 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 1 হয়। তাহলে এটাকে লেখা হবে $15 \equiv 1 \pmod 7$। আরেকটু গাণিতিকভাবে বললে a ও b দুটি সংখ্যা এবং $a = bq + p$ হলে, $a \equiv p \pmod b$[a is congruent to p mod b]। চলো এখন মডুলার অ্যারিথমেটিক এর কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য দেখে নিই।

কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট

১. $a \equiv a \pmod{m}$

২. যদি $a \equiv b \pmod{m}$ এবং $b \equiv c \pmod{m}$ হয়, তবে $a \equiv c \pmod{m}$ হবে।

৩. $a \equiv c \pmod{m}$ হলে, $b \equiv a \pmod{m}$ হবে।

৪. যদি $a \equiv b \pmod{m}$ এবং $c \equiv d \pmod{m}$ হয়, তবে $a \pm b \equiv b \pm d \pmod{m}$ হবে।

৫. যদি $a \equiv b \pmod{m}$ হয়, তবে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা k-এর জন্য $ka \equiv kb \pmod{m}$

৬. যদি $a \equiv b \pmod{m}$ এবং $c \equiv d \pmod{m}$ হয়, তবে $ac \equiv bd \pmod{m}$ হবে।

৭. যদি $a \equiv b \pmod{m}$ হয়, তবে যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k-এর জন্য $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ হয়।

৮. $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1,....,k$ হবে, যদি এবং কেবল যদি $a \equiv b$ $(\text{mod}[m_1,....,m_k])$ হয়। আরো স্পষ্ট করে বললে, যদি $m_1,.....,m_k$-এর প্রতিটি পরস্পর সহমৌলিক হয় তবে $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1,2,..,k$ হবে, যদি এবং কেবল যদি $a \equiv b \pmod{m_1 m_2 .... m_k}$ হয়।

৯. ধর p একটি মৌলিক সংখ্যা। যদি x,y পূর্ণসংখ্যা হয় যেন $xy \equiv 0 \pmod{p}$, তবে হয় $x \equiv 0 \pmod{p}$ অথবা $y \equiv 0 \pmod{p}$ অথবা দুটোই সত্য।

১০. ধর m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a, b, c তিনটি পূর্ণসংখ্যা, যেখানে $c \neq 0$। যদি $ac \equiv bc \pmod{m}$ হয়, তবে $a \equiv b \left(\text{mod } \frac{m}{lcm(c,m)}\right)$