9. Numerik Übungen 2017/18

T15

Es sei R = [2, 6] × [1, 3] ein Rechteck. Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\mathrm{dF}$, indem Sie in x- bzw. y- Richtung die Simpsonregel verwenden. Machen Sie auch eine Skizze (Rechteck, Knoten, Gewichte).

Simpsonregel: $s = 3, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

Quadraturformel für Rechtecke (4.103, S. 103): $\iint\limits_{\mathrm{R}} \frac{x}{y}\mathrm{dF} \approx h\hat{h} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{\hat{s}} b_i \hat{b}_j f(a + c_i h,\ \hat{a} + \hat{c}_j \hat{h})$

Mit $h = b - a = 6 - 2 = 4$ und $\hat{h} = \hat{b} - \hat{a} = 3 - 1 = 2$

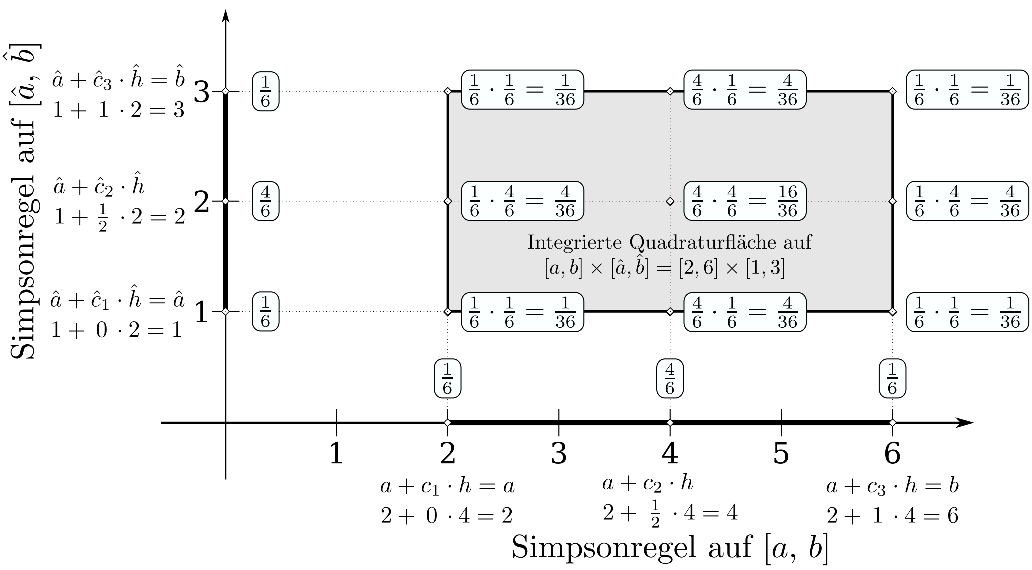
$$h\hat{h} = 4 \cdot 2 = 8$$

$$b_i\hat{b}_j = \begin{bmatrix} b_1\hat{b}_1 & b_1\hat{b}_2 & b_1\hat{b}_3 \\ b_2\hat{b}_1 & b_2\hat{b}_2 & b_2\hat{b}_3 \\ b_3\hat{b}_1 & b_3\hat{b}_2 & b_3\hat{b}_3 \end{bmatrix} \overset{b_i=\hat{b}_j}{=} \begin{bmatrix} b_1b_1 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_2b_1 & b_2b_2 & b_2b_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6} & \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} \\ \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6} & \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} & \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6} & \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} a + c_1 h,\ \hat{a} + \hat{c}_1\hat{h} & a + c_1 h,\ \hat{a} + \hat{c}_2\hat{h} & a + c_1 h,\ \hat{a} + \hat{c}_3\hat{h} \\ a + c_2 h,\ \hat{a} + \hat{c}_1\hat{h} & a + c_2 h,\ \hat{a} + \hat{c}_2\hat{h} & a + c_2 h,\ \hat{a} + \hat{c}_3\hat{h} \\ a + c_3 h,\ \hat{a} + \hat{c}_1\hat{h} & a + c_3 h,\ \hat{a} + \hat{c}_2\hat{h} & a + c_3 h,\ \hat{a} + \hat{c}_3\hat{h} \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 2+0\cdot4,\ 1+0\cdot2 & 2+0\cdot4,\ 1+\frac{1}{2}\cdot2 & 2+0\cdot4,\ 1+1\cdot2 \\ 2+\frac{1}{2}\cdot4,\ 1+0\cdot2 & 2+\frac{1}{2}\cdot4,\ 1+\frac{1}{2}\cdot2 & 2+\frac{1}{2}\cdot4,\ 1+1\cdot2 \\ 2+1\cdot4,\ 1+0\cdot2 & 2+1\cdot4,\ 1+\frac{1}{2}\cdot2 & 2+1\cdot4,\ 1+1\cdot2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 2,\ 1 & 2,\ 2 & 2,\ 3 \\ 4,\ 1 & 4,\ 2 & 4,\ 3 \\ 6,\ 1 & 6,\ 2 & 6,\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{6}{1} & \frac{6}{2} & \frac{6}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\iint\limits_{\mathrm{R}} \frac{x}{y}\mathrm{dF} \approx 8 \sum_i \sum_j \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{8}{36}\sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 2 & 4 & \frac{2}{3} \\ 16 & 32 & \frac{16}{3} \\ 6 & 12 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\sum_j \sum_i 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 8 & 16 & \frac{8}{3} \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{4}{9}\sum_j \begin{bmatrix} 12 & 24 & 4 \end{bmatrix} = \frac{4}{9}40 = \frac{160}{9}$$



T16

Die Knoten $(0,0), (1,0), (0,1)$ und die Gewichte $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ definieren eine Quadraturformel auf dem Einheitsdreieck $D = \left\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \le \xi \le 1,\ 0 \le \eta \le 1 - \xi\right\}$.

Wie groß ist die Ordnung dieser Quadraturformel?

Wie lauten die baryzentrischen Koordinaten der Knoten?

T17

a) Berechnen Sie die LU-Zerlegung der Matrix A mit Spaltenpivotsuche für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \\ 15 & 0 & 0 & 1 \\ -15 & -10 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analog zu *5.1.2 Beispiel für eine LU-Zerlegung* führen wir einen Vektor `IP` von Seite 119 ein in dem wir Vertauschungen festhalten. Zu beginn tragen wir $\texttt{IP}(n = 4) = (-1)^0 = 1$ ein.
Wir suchen in der ersten Spalte nach dem Betragsmäßig größten Element von A. Dies trifft auf 15 und -15 zu, wobei hier 15 als Pivotelement gewählt wurde, da die dritten Zeile mehr Nullstellen enthält und wir uns somit Rechnungen sparen.
Wir tauschen die 3. mit der 1. Zeile ($\texttt{IP}(1) = 3$) und haben somit einmal getauscht ($\texttt{IP}(4) = (-1)^1 = -1$).

IP	**A**			
*	0	2	6	10
*	3	6	9	-3
*	15	0	0	1
1	-15	-10	-3	1

→

IP	**A**			
3	15	0	0	1
*	3	6	9	-3
*	0	2	6	10
-1	-15	-10	-3	1

Die Faktoren für die Elimination sind

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \qquad l_{31} = \frac{0}{15} = 0, \qquad l_{41} = \frac{-15}{15} = -1.$$

Die Berechnung der Zeilenelemente erfolgt wie gewohnt. Die Nullstellen in der ersten Spalte werden jedoch mit den jeweiligen l_{j1} ersetzt.
Wir suchen im restlichen Bereich (schwarz) nach dem Pivotelement und finden -10. Getauscht wird die 4. mit der 2. Zeile.

IP	**A**			
3	15	0	0	1
*	$\frac{1}{5}$	6	9	$-\frac{16}{5}$
*	0	2	6	10
-1	-1	-10	-3	2

→

IP	**A**			
3	15	0	0	1
4	-1	-10	-3	2
*	0	2	6	10
1	$\frac{1}{5}$	6	9	$-\frac{16}{5}$

$$l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}, \qquad l_{42} = \frac{6}{-10} = -\frac{3}{5}$$

$$\texttt{IP}(2) = 4, \ \texttt{IP}(4) = (-1)^2 = 1$$

IP	**A**			
3	15	0	0	1
4	-1	-10	-3	2
*	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{52}{5}$
1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{36}{5}$	-2

→

IP	**A**			
3	15	0	0	1
4	-1	-10	-3	2
4	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{36}{5}$	-2
-1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{52}{5}$

$$l_{43} = \frac{a_{43}}{a_{33}} = \frac{\frac{27}{5}}{\frac{36}{5}} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

$$\texttt{IP}(3) = 4, \ \texttt{IP}(4) = (-1)^3 = -1$$

IP	**A**			
3	15	0	0	1
4	-1	-10	-3	2
4	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{36}{5}$	-2
-1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{119}{10}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{36}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{119}{10} \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie auch die Permutationsmatrix P bzw. den Vektor `IP`. `IP(4)` soll das Vorzeichen für die Berechnung der Determinante erhalten.

Die Permutationsmatrix P ergibt sich durch Anwendung der Zeilentäusche auf eine Einheitsmatrix. Hierbei ist `IP` hilfreich.

$$\mathtt{IP} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ (-1) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der LU-Zerlegung die Determinante von A.

Die Determinante kann mit U und $\mathtt{IP}(n)$ berechnet werden.

$$\det A = u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn} \cdot \mathtt{IP}(4) \qquad (5.38, S. 121)$$
$$\det A = 15 \cdot -10 \cdot \frac{36}{5} \cdot \frac{119}{10} \cdot -1 = 3 \cdot 36 \cdot 119$$
$$= 12852$$

d) Lösen Sie Ax = b für $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -14 \\ -8 \end{bmatrix}$ **mit Hilfe der LU-Zerlegung.**

Wiederum folgen wir dem Beispiel aus 5.1.2.

Schritt 1: Vertauschen der Elemente von b mit Hilfe von `IP`:

Wie in b) wenden wir IP auf b an.

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -14 \\ -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -14 \\ -6 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -14 \\ -8 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -14 \\ -8 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \tilde{b}$$

$\mathtt{IP}(4) = -1$ bedeutet eine ungerade Anzahl von Vertauschungen.

Schritt 2: Vorwärtssubstitution mit L und $\tilde{b}$:

$$Ly = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -8 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \tilde{b} \qquad \downarrow \begin{aligned} y_1 &= -14 \\ y_2 &= -8 - (-14) \cdot -1 = -22 \\ y_3 &= -6 - (-14) \cdot \tfrac{1}{5} - (-22) \cdot -\tfrac{3}{5} = -\tfrac{82}{5} \\ y_4 &= 4 - (-14) \cdot 0 - (-22) \cdot -\tfrac{1}{5} - (-\tfrac{82}{5}) \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{119}{10} \end{aligned}$$

Schritt 3: Rückwärtssubstitution mit U und y:

$$Ux = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{36}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{119}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -22 \\ -\frac{82}{5} \\ \frac{119}{10} \end{bmatrix} = y \qquad \uparrow \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{15}(-14 - 1) = -1 \\ x_2 &= \tfrac{1}{-10}(-22 - (-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 2) = 3 \\ x_3 &= \tfrac{5}{36}\left(\tfrac{82}{5} - (1) \cdot (-2)\right) = -2 \\ x_4 &= \tfrac{10}{119} \tfrac{119}{10} = 1 \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matlab

```
clc
clear

A=[0 2 6 10; 3 6 9 -3; 15 0 0 1; -15 -10 -3 1];
b=[4 -6 -14 -8]';
[L,U,P,IP]=LU_pivot(A)

b_til = P*b;
y=L\b_til
x=U\y


function [L,U,P,IP]=LU_pivot(U)


[~,n]=size(U);
L=eye(n); P=L;
IP(n)=-1;
swaps=0;

for k=1:n
    [~, pivot_index]=max(abs(U(k:n, k)));
    pivot_index=pivot_index+k-1;
    if pivot_index~=k
        IP(k)=pivot_index;
        swaps=swaps + 1;
        IP(n)=(-1)^swaps;

        % swap rows pivot_index and k in U
        U([k pivot_index],:)=U([pivot_index k],:);

        % swap rows pivot_index and k in P
        P([k pivot_index],:)=P([pivot_index k],:);

        if k >= 2
            L([k pivot_index],1:k-1)=L([pivot_index k],1:k-1);
        end
    end
    for j=k+1:n
        L(j,k)=U(j,k)/U(k,k);
        U(j,:)=U(j,:)-L(j,k)*U(k,:);
    end
end

end
```