7. Numerik Übungen 2017/18

T12

a) Stellen Sie die Bedingungsgleichung für die Simpsonregel auf und bestimmen Sie damit aus den Knoten $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, und $c_3 = 1$ die Gewichte.
Welche Ordnung besitzt die Simpsonregel? Untersuchen Sie dazu, ob eventuell noch weitere Bedingungsgleichungen erfüllt sind.

Bedingungsgleichung allgemein (S. 84)

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^k = \frac{1}{k+1}, k = 0, \ldots, p-1 \tag{4.31}$$

Die Simpsonregel hat 3 Knoten c_i, und somit mindestens Ordnung $p = 3$.

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad & b_1 \cdot 0^0 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + b_3 \cdot 1^0 = \frac{1}{0+1} \\
k = 1 \quad & b_1 \cdot 0^1 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_3 \cdot 1^1 = \frac{1}{1+1} \\
k = 2 \quad & b_1 \cdot 0^2 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b_3 \cdot 1^2 = \frac{1}{2+1}
\end{aligned}$$

Mit $k = 0$ und $i = 0$ bekommen wir 0^0, was normalerweise nicht definiert ist. Das können wir in diesem Fall durch Wahl von Grenzwerten 1 setzen, vergleichbar mit $\frac{x}{0} = \infty$. (Quelle: Mathematik Masterstudent)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k = 3 \quad b_1 \cdot 0^3 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + b_3 \cdot 1^3 &= \frac{1}{3+1} \\
\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot 1 &= \frac{1}{4} \\
\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot 1 &= \frac{1}{4} \\
\frac{1}{12} + \frac{2}{12} &= \frac{1}{4} \\
\frac{3}{12} &= \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} &= \frac{1}{4} \\
k = 4 \quad b_1 \cdot 0^4 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + b_3 \cdot 1^4 &= \frac{1}{4+1} \\
\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{6} \cdot 1 &= \frac{1}{5} \\
\frac{2}{48} + \frac{1}{6} &= \frac{1}{5} \\
\frac{1}{24} + \frac{4}{24} &= \frac{1}{5} \\
\frac{5}{24} &= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Wie man sieht Integriert die Simpsonregel bis zum Grad 4 genau.

b) Gegeben seien die Knoten $c_1 = \frac{1}{6}, c_2 = \frac{1}{2}$, und $c_3 = \frac{5}{6}$. Stellen Sie die ersten s Bedingungsgleichungen auf und setzten Sie die Knoten c_1, c_2, c_3 ein. Berechnen Sie daraus die Gewichte. Wie groß ist die Ordnung dieser Quadraturformel?

Analog zu a), aber diesmal direkt mit der Matrixschreibweise aus (4.34).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_s \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_1^{p-1} & c_2 p-1 & \dots & c_s p-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{p} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{25}{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 3 \quad b_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + b_3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 &= \frac{1}{3+1} \\ \vdots &= \frac{1}{4} \\ \frac{9}{40} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch eine $k+1$te Zeile auf lineare Abhängigkeit in der Matrizen-Schreibweise überprüfen.
Die gegebene Quadraturformel ist bis zum Grad 3 genau.

c) Bestimmen Sie alternativ die Gewichte b_1, b_2, b_3 durch Integration der zu den Knoten c_1, c_2, c_3 gehörigen Lagrange-Polynome l_1, l_2, l_3.

d) Welche Ordnung hat eine Quadraturformel mit Knoten wie in (T12b) und Gewichten $b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{3}$?

$$c = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad & & 1 &= 1 \\
k = 1 \quad & b_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 &= \frac{1}{1+1} \\
& \frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{5}{6} &= \frac{1}{2} \\
& \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\
k = 2 \quad & \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{1}{2+1} \\
& \frac{1}{3}\frac{1}{36} + \frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{25}{36} &= \frac{1}{3} \\
& \frac{35}{18} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Die gegebene Quadraturformel die Ordnung 3.

T13
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{2+x} dx.$$

a) Exakt. b) Mit der Quadraturformel aus Aufgabe (T12b) und Schrittweite $h = 3$**.**
c) Mit der Quadraturformel aus Aufgabe (T12b) und Schrittweite $h = \frac{3}{2}$**.**
Machen Sie eine Skizze mit den Knoten und Gewichten.