VO Numerische Mathematik
2017/18
Theoriefragen

February 7, 2018

1 Zahldarstellung, Rundung und Fehler

1.1. **Wie werden ganze Zahlen binär abgespeichert?**
S. 2

$$b_{N-1}b_{N-2}\dots b_1 b_0 \cong b = \sum_{j=0}^{N-1} b_j 2^j, \quad b_j \in \{0,1\}$$

Beispiel: 23_{10}

$$\begin{aligned} 10101_2 &= 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \\ &= 16+0+0+2+1 = 19_{10} \end{aligned}$$

$$:2 \; \frac{19 \quad 9 \quad 4 \quad 2 \quad 1}{1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \quad \to \quad 10011_2$$

1.2. **Wie werden Gleitpunktzahlen (doppelte Genauigkeit) binär abgespeichert?**
S. 3

$$\begin{aligned} &x = (-1)^s \cdot m \cdot 2^e \\ &x \cong s \quad e_{11}e_{10}\dots e_0 \quad (m_0).m_1 m_2 \dots m_{51} \end{aligned}$$

s	…	Vorzeichenbit	$\in \{0,1\}$
m	…	Mantisse	Normiert, $m_0 \stackrel{!}{=} 1$ wird weggelassen
e	…	Exponent	nach Abzug von b. . .Bias = 1023 (double)

	s	m	l
single 32 Bit	1	23	8
double 64 Bit	1	52	11

1.3. **Wie werden Gleitpunktzahlen gerundet?**
S. 6
Round to the nearest even.

…	m_M	m_{M+1}	m_{M+2}	m_{M+3}	…	
	x	0	x	x		abrunden
	x	1	1	0		aufrunden
	x	1	0	1		aufrunden
	1	1	0	0		aufrunden
	0	1	0	0		abrunden

1.4. **Wie ist der relative Rundungsfehler definiert?**
S. 6

$$\frac{|\mathrm{rd}(x)-x|}{|x|} \le \frac{2^{-\mathrm{M}-1}\cdot 2^e}{\mathrm{a}\cdot 2^e} \underset{\mathrm{a}\in[1,2)}{\le} 2^{-\mathrm{M}-1} =: \texttt{eps}$$

rd(a) durch rounding to the nearest even

1.5. **Wie groß ist die relative Maschinengenauigkeit eps für doppelt genaue Gleitpunktzahlen? Wie kann man eps experimentell bestimmen?**

1.6. **Was ist die relative/absolute Kondition eines Problems?**

$$\begin{aligned} &\frac{|f(\tilde{x})-f(x)|}{|f(x)|} \le \kappa_{\mathrm{rel.}}\cdot\varepsilon, \quad \kappa_{\mathrm{rel.}} > 0 \\ &|f(\tilde{x})-f(x)| \le \kappa_{\mathrm{abs.}}\cdot\delta, \quad \kappa_{\mathrm{abs.}} > 0 \end{aligned}$$

Wenn $\kappa_{\mathrm{rel.}}$ klein ist werden Inputfehler nicht übermäßig verstärkt und f gilt als gut konditioniert.

1.7. **Was bedeuten die Begriffe Konsistenz und Konsistenzordnung?**
Def 1.3 Konsistenz, Konsistenzordnung
Ein numerisches Verfahren f_h mit Diskretisierungsweite h zur Bestimmung einer Näherung von $f_h(x)$ an $f(x)$ ist konsistent, falls gilt

$$||f_h(x) - f(x)|| \leq \mathrm{C}\, h^{\mathrm{p}}$$

wobei die Konstante $\mathrm{C} > 0$ nicht von h abhängen darf und $p \geq 1$. Der Exponent p ist dann die Konsistenzordnung und es gilt $f_h \to f$ für $h \to 0$, falls f_h exakt ausgewertet wird.

1.8. **Wodurch unterscheidet sich Konsistenz von Konvergenz?**
$f_h \to f$ konvergiert für $h \to 0$ falls f_h exakt ausgewertet wird. Computer müssen jedoch runden, wodurch wir nur noch von Konsistenz reden können wenn das Verfahren nicht stabil ist.

1.9. **Was bedeutet der Begriff Stabilität?**
S. 15
Ein numerisches Verfahren f heißt stabil, falls bei der numerischen Auswertung $\tilde{f}(x)$ des Verfahrens Fehler wie Rundungsfehler, Abbruchfehler und Verfahrensfehler von Teilschritten nicht übermäßig verstärkt werden im Vergleich zu dem durch die relative Kondition κ_{rel} des Problems verursachten Fehler.
Für die Differenz zwischen numerischer Auswertung $\tilde{f}(x)$ mit obigen Fehlern und exakter Auswertung $f(x)$ gilt dann

$$||\tilde{f}(x) - f(x)|| \leq \mathrm{C} \cdot \kappa_{rel.} \cdot ||f(x)|| \cdot \mathtt{eps}, \quad \mathrm{C} > 0 \text{ klein.}$$

Ein numerisches Verfahren ist insbesondere dann stabil, wenn alle seine Teilschritte gut konditioniert sind.

2 Numerische Differentiation

2.1. **Wie wird mit Hilfe der Vorwärtsdifferenz eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x differenziert? Wie groß ist $\mathbf{h_{opt}}$?**

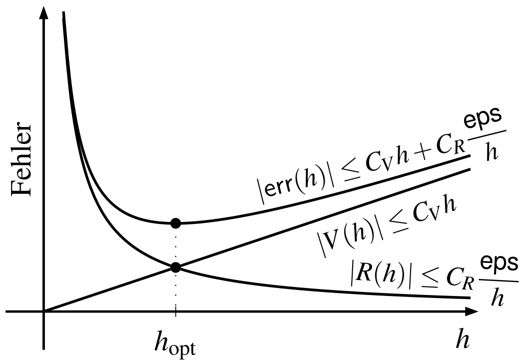
$$f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \mathrm{h_{opt}} = \sqrt{\mathtt{eps}}$$

2.2. **Wie wird mit Hilfe der zentralen Differenz eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x differenziert? Wie groß ist $\mathbf{h_{opt}}$**

$$f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-x)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \mathrm{h_{opt}} = \sqrt[3]{\mathtt{eps}}$$

2.3. **Wie verhalten sich Verfahrensfehler und Rundungsfehler in Abhängigkeit von der Schrittweite h? Machen Sie eine Skizze.**

$$|V(h)| \le C_{\mathrm{V}} h$$
$$|R(h)| \le C_{\mathrm{R}} \frac{\mathtt{eps}}{h}$$
$$|\mathrm{err}(h)| \le C_{\mathrm{V}} h + C_{\mathrm{R}} \frac{\mathtt{eps}}{h}$$



2.4. **Wie lässt sich mit Hilfe eines logarithmischen Plots das Verhalten von Verfahrensfehler und Rundungsfehler ablesen? Wie kann man die optimale Schrittweite $\mathbf{h_{opt}}$ ablesen?**

$$\log|\mathrm{err}| = \log\left(C_{\mathrm{V}} h + C_{\mathrm{R}} \frac{\mathtt{eps}}{h}\right) \approx \begin{cases} \log\left(C_{\mathrm{R}} \mathtt{eps} h^{-q}\right) = -q \log h + \log C_{\mathrm{R}} + \log \mathtt{eps}, & \text{links von } \mathrm{h_{opt}}, \\ \log\left(C_{\mathrm{V}} \mathtt{eps} h^{p}\right) = p \log h + \log C_{\mathrm{V}}, & \text{rechts von } \mathrm{h_{opt}}. \end{cases}$$

Somit erhält man zwei Geraden der Form $y = kx + d$, wobei $k = -\mathrm{q}$ und $k = \mathrm{p}$ aus dem Plot abgelesen werden können.
Die optimale Schrittweite kann man im Schnittpunkt der beiden Geraden erkennen.

2.5. **Wieso gilt bei der zentralen Differenz für den Verfahrensfehler $\mathbf{V(h)} = \mathcal{O}(\mathbf{h^2})$ statt $\mathcal{O}(\mathbf{h})$?**
Für die zentrale Differenz werden die Taylorpolynome für $f(x+h)$ und $f(x-h)$ gemittelt. Dabei heben sich die Terme zweiter Ordnung, $\frac{h^2}{2} f''(x)$, auf.

2.6. **Wie wird die zweite Ableitung einer zweimal differenzierbaren Funktion an der Stelle x berechnet? Wie groß ist $\mathbf{h_{opt}}$?**

$$f''(x) = \frac{f(x+h-2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \mathrm{h_{opt}} = \sqrt[(\mathrm{q+p})]{\mathtt{eps}} = \sqrt[4]{\mathtt{eps}}$$

2.7. **Wie lässt sich die optimale Schrittweite $\mathbf{h_{opt}}$ aus dem Verfahrensfehler $\mathbf{V(h)}$ und dem Rundungsfehler $\mathbf{R(h)}$ bestimmen?**

$$|\mathrm{err}(h)| \le C_{\mathrm{V}} h + C_{\mathrm{R}} \frac{\mathtt{eps}}{h}$$

Der Fehler soll minimal sein und somit $C_{\mathrm{V}} h + C_{\mathrm{R}} \frac{\mathtt{eps}}{h} = \min$. Dies führt zu $C_{\mathrm{V}} h^2 + C_{\mathrm{R}} \mathtt{eps} = 0$ und somit

$$\mathrm{h_{opt}} = \sqrt{\mathtt{eps} \frac{C_{\mathrm{V}}}{C_{\mathrm{R}}}}.$$

Bei $f(x) \approx f'(x) \approx f''(x)$ gilt $C_{\mathrm{V}} \approx C_{\mathrm{R}}$ und somit

$$\mathrm{h_{opt}} = \sqrt{\mathtt{eps}}$$

2.8. **Wie berechnet man die Jacobimatrix einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^\mathbf{n} \to \mathbb{R}^\mathbf{m}$ durch numerisches Differenzieren?**

Jacobimatrix: $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m 1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

Approximation der i-ten Spalte

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \approx \frac{\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{h}$$

2.9. **Wie berechnet man den Gradient einer skalaren Funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^\mathbf{n} \to \mathbb{R}^\mathbf{m}$ durch numerisches Differenzieren?**

3 Interpolation

3.1. **Wie werden die dividierten Differenzen berechnet?**
Mit Hilfe eines Differenzenschema oder Differenzentableau.
Allgemeines Differenzenschema für 5 Punkte

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		$\delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$			
x_1	y_1		$\delta^2 y_0 = \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{x_2 - x_0}$		
		$\delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		$\delta^3 y_0 = \frac{\delta^2 y_1 - \delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$	
x_2	y_2		$\delta^2 y_1 = \frac{\delta y_2 - \delta y_1}{x_3 - x_1}$		$\delta^4 y_0 = \frac{\delta^3 y_1 - \delta^2 y_0}{x_4 - x_0}$
		$\delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		$\delta^3 y_1 = \frac{\delta^2 y_2 - \delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$	
x_3	y_3		$\delta^2 y_2 = \frac{\delta y_3 - \delta y_2}{x_4 - x_2}$		
		$\delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$			
x_4	y_4				

3.2. **Wie ist das Newtonsche Interpolationspolynom definiert?**

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\delta^2 y_0 + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\delta^{\mathrm{n}} y_0$$

3.3. **Wie wird mit dem Hornerschema ein Polynom $\mathbf{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}$ ausgewertet?**

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x\, a_n))\cdots))$$

3.4. **Wie wird mit dem Hornerschema ein Newtonsches Interpolationspolynom ausgewertet?**

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
x & 0 & x \cdot b_n & x \cdot b_{n-1} & \cdots & x \cdot b_2 & x \cdot b_1 \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 = p(x)
\end{array}$$

3.5. **Wie sind die Lagrange-Polynome definiert? Welche Eigenschaften haben sie?**

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots\widehat{(x - x_i)}\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots\widehat{(x_i - x_i)}\cdots(x_i - x_n)}$$

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Wobei die überdachten Terme wegzulassen sind.

3.6. **Wie wird mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Langrangesche Interpolationspolynom berechnet?**

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, \ell_i(x), \quad p(x_j) = y_j$$

3.7. **Erklären Sie die Begriffe Datenfehler, Verstärkungsfaktor, Lebesgue-Funktion und Lebesgue-Konstante in Zusammenhang mit der Polynominterpolation. Was ist die Kondition der Polynominterpolation?**
An einer Stützstelle x_j kann ein Datenfehler ε_j auftreten. Führt man diesen in ein Lagrange-Polynom ein erhält man

$$\overline{p}(x) = \sum_{i=0}^{j-1} (y_i\, \ell_i(x)) + (y_j + \varepsilon_j) + \sum_{i=j+1}^{n} (y_i\, \ell_i(x)) .$$

Der Fehler ε_i wird also um den Faktor $|\ell_i|$ verstärkt. Wenn alle Knoten mit Fehlern verseht sind ergibt sich

$$\overline{p}(x) = p(x) + \sum_{i=0}^{n} (\varepsilon_i\, \ell_i) .$$

Falls die einzelnen Fehler durch $\varepsilon_i \leq \mathrm{M}$ beschränkt sind erhält man für den absoluten Fehler die Abschätzung

$$\underbrace{|\overline{p}(x) - p(x)|}_{\text{abs. Fehler Output}} \leq \mathrm{M} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \overbrace{|\ell_i(x)|}^{\kappa_{\text{abs},i}(x)}}_{\kappa_{\text{abs}}(x)} = \mathrm{M} \cdot \kappa_{\text{abs}}(x).$$

Wobei $\kappa_{\text{abs},i} = |\ell_i(x)|$ der Verstärkungsfaktor für den Datenfehler in der Stützstelle i und die Lebesgue-Funktion $\kappa_{\text{abs}} = \lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)|$ die absolute Kondition für die Polynominterpolation ist. Die schlechteste Konditionszahl $\lambda_n(x)$ im Intervall $[\min_i x_i, \max_i x_i]$ nennen wir Lebesgue-Konstante und erhalten sie durch

$$\max_{x \in [\min_i x_i, \max_i x_i]} \lambda_n(x) := \Lambda_n.$$

3.8. **Was besagt der Satz über den Fehler des Interpolationspolynoms? Wie ist der Verfahrensfehler definiert?**

3.9. **Wie sind die Tschebyscheff-Polynome definiert? Welche Eigenschaften haben sie?**

3.10. **Wie berechnet man die Knoten für die Tschebyscheff-Interpolationspolynome im Intervall $[-1, 1]$ bzw. [a, b]? Welche Vorteile hat die Verwendung von Tschebyscheff-Knoten im Vergleich zu äquidistanten Stützstellen.**

3.11. **Wie lässt sich das dividierte Differenzenschema und das Newtonsche Interpolationspolynom verallgemeinern, falls in den Stützstellen auch noch Ableitungen vorgegeben sind?**

3.12. **Wie wird mit stückweise konstanten Funktionen interpoliert?**

3.13. **Wie wird mit stetigen, stückweise linearen Funktionen interpoliert?**

3.14. **Was sind Hutfunktionen und welche Eigenschaften haben sie?**

3.15. **Was für Eigenschaften besitzen kubische Splines? Was für Typen von kubischen Splines gibt es?**

3.16. **Wieso ist es besser durch viele Punkte einen kubischen Spline zu legen, statt ein Interpolationspolynom zu verwenden?**

3.17. **Wie wird auf einem rechteckigen Gitter zweidimensional interpoliert?**

3.18. **Wie wird die zweidimensionale, stetige, stückweise lineare Interpolierende auf einem rechteckigen Gitter bestimmt?**

4 Numerische Integration

4.1. **Was bedeutet *Linearität* und *Positivität* des Integrals?**

4.2. **Erklären Sie den Begriff *Quadraturformel*.**

4.3. **Nennen Sie einige einfache Quadraturformeln inklusive Knoten und Gewichte.**

4.4. **Erklären Sie den Begriff *zusammengesetzte Quadraturformel*.**

4.5. **Wie erhält man Quadraturformeln mit Hilfe von Polynominterpolation?**

4.6. **Erklären Sie den Begriff *Ordnung* einer Quadraturformel. Wie bestimmt man die Ordnung?**

4.7. **Was sind *Bedingungsgleichungen*?**

4.8. **Erklären Sie die Begriffe *Fehler einer Quadraturformel* und *Fehlerkonstante*.**

4.9. **Was für Abschätzungen gelten für den Fehler einer Quadraturformel bzw. einer zusammengesetzten Quadraturformel? Was muss der Integrand f dabei erfüllen?**

4.10. **Was sind *symmetrische Quadraturformeln* und welche Eigenschaft besitzen sie?**

4.11. **Was ist eine Gaußsche Quadraturformel? Welche Ordnung besitzen sie?**

4.12. **Wie groß kann die Ordnung einer Quadraturformel maximal sein?**

4.13. **Was gilt für die Gewichte einer Gaußschen Quadraturformel?**

4.14. **Wie funktioniert eine Schrittweitensteuerung? Erklären Sie die Begriffe *Fehlerkriterium* und *Fehlerschätzer*.**

4.15. **Erklären Sie den Begriff *Richardson-Extrapolation*. Wie berechnet man est und $Q_e xtr$.**

4.16. **Was passiert bei Integranden mit Singularitäten oder Singularitäten in den Ableitungen?**

4.17. **Wie werden Doppelintegrale auf Rechtecken numerisch berechnet?**

4.18. **Wie werden Doppelintegrale auf Dreiecken numerisch berechnet? Wie überprüft man die Ordnung einer Quadraturformel für Dreiecke?**

4.19. **Was sind *baryzentrische Koordinaten*?**