4. Numerik Übungen 2017/18

T5

Führen Sie eine Rundungsfehleranalyse für die zentrale Differenz $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ durch.

Analog zu *2.2 Rundungsfehler* S20.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_h'(x) &= rd(\frac{rd(rd(f(rd(x+h))) - rd(f(rd(x-h))))}{2h}) \\
&= rd(\frac{rd(rd(f((x+h)(1+\varepsilon_1))) - rd(f((x-h)(1+\varepsilon_2))))}{2h}) \\
&= rd(\frac{rd(f((x+h)(1+\varepsilon_1))(x+\varepsilon_3) - f((x-h)(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_4))}{2h}) \\
&= rd(\frac{(f((x+h)(1+\varepsilon_1))(x+\varepsilon_3) - f((x-h)(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_4))(1+\varepsilon_5)}{2h}) \\
&= \frac{(f((x+h)(1+\varepsilon_1))(x+\varepsilon_3) - f((x-h)(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_4))(1+\varepsilon_5)}{2h}(1+\varepsilon_6)
\end{aligned}$$

Durch

$$\begin{gathered}
(1+\varepsilon_6)(1+\varepsilon_5)(1+\varepsilon_\mathrm{i}) \\
(1+\varepsilon_6)(1+\varepsilon_5+\varepsilon_\mathrm{i}+\varepsilon_5\varepsilon_\mathrm{i}) \\
1+\varepsilon_5+\varepsilon_\mathrm{i}+\varepsilon_5\varepsilon_\mathrm{i}+\varepsilon_6+\varepsilon_6\varepsilon_5+\varepsilon_\mathrm{i}\varepsilon_6+\varepsilon_\mathrm{i}\varepsilon_5\varepsilon_6
\end{gathered}$$

folgt mit der Vereinfachung

$$\begin{gathered}
\tilde{\varepsilon}_\mathrm{i} = \varepsilon_\mathrm{i}+\varepsilon_5+\varepsilon_6, i = 3,4 \\
1+\tilde{\varepsilon}_\mathrm{i}+\underbrace{\varepsilon_5\varepsilon_\mathrm{i}+\varepsilon_6\varepsilon_5+\varepsilon_\mathrm{i}\varepsilon_6+\varepsilon_\mathrm{i}\varepsilon_5\varepsilon_6}_{O(eps^2)} \\
(1+\varepsilon_6)(1+\varepsilon_5)(1+\varepsilon_\mathrm{i}) = 1+\tilde{\varepsilon}_\mathrm{i}+O(eps^2)
\end{gathered}$$

und damit

$$\tilde{f}_h'(x) = \frac{f((x+h)(1+\varepsilon_1))(1+\tilde{\varepsilon}_3+O(eps^2)) - f((x-h)(1+\varepsilon_2))(1+\tilde{\varepsilon}_4+O(eps^2))}{2h}.$$

Mit der Taylor Annäherung $f(x+h) = f(x)+hf'(x)+O(2h)$ und der Umformung

$$\begin{aligned}
f((x+h)(1+\varepsilon_3)) &= f(x+h+\varepsilon_3(x+h)) \\
f((x-h)(1+\varepsilon_4)) &= f(\underbrace{x-h}_{x}+\underbrace{\varepsilon_4(x-h)}_{h})
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
f((x+h)(1+\varepsilon_3)) &= f(x+h)+\varepsilon_3(x+h)f'(x+h)+O(\varepsilon_3^2) \\
f((x-h)(1-\varepsilon_4)) &= f(x-h)+\varepsilon_4(x-h)f'(x-h)+O(\varepsilon_4^2)
\end{aligned}$$

Hiermit kann man $\tilde{f}_h'(x)$ umformen zu

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_h'(x) =& \frac{1}{2h}\Big[(f(x+h)+\varepsilon_1(x+h)f'(x+h)+O(\varepsilon_1^2))(1+\tilde{\varepsilon}_3+O(eps^2)) \\
&- \ (f(x-h)+\varepsilon_2(x-h)f'(x-h)+O(\varepsilon_3^2))(1+\tilde{\varepsilon}_4+O(eps^2))\Big] \\
=& \frac{1}{2h}\Big[(f(x+h)+\varepsilon_1(x+h)f'(x+h)+O(\varepsilon_1^2)) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_3 f(x+h)+\tilde{\varepsilon}_3\varepsilon_1(x+h)f'(x+h) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_3 O(\varepsilon_1^2)+O(eps^2)(\dots) \\
&- (f(x-h)+\varepsilon_2(x-h)f'(x-h)+O(\varepsilon_3^2))(1+\tilde{\varepsilon}_4+O(eps^2))\Big].
\end{aligned}$$

Wegen $|\varepsilon_i| \leqslant eps$ können alle Terme höherer Ordnung in ε und eps zu $O(eps^2)$ zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_h'(x) &= \frac{1}{2h}\Big[f(x+h) + \varepsilon_1(x+h)f'(x+h) + \tilde{\varepsilon}_3 f(x+h) + O(eps^2) \\
&\qquad - \Big(f(x-h) + \varepsilon_2(x-h)f'(x-h) + \tilde{\varepsilon}_4 f(x-h) + O(eps^2)\Big)\Big] \\
&= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{1}{2h}O(\varepsilon) + \frac{1}{2h}O(eps^2) \\
&= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{1}{2h}O(eps^2)
\end{aligned}$$

Der Gesamtfehler err(h)

$$\begin{aligned}
\mathrm{err(h)} &= \tilde{f}_h'(x) - f(x) \\
&= \Big[\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{1}{2h}O(eps^2)\Big] - \Big[\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi)\Big]
\end{aligned}$$

ergibt sich aus Verfahrensfeler V(h) und Rundungsfehler R(h)

$$= \underbrace{\frac{h^2}{6}f'''(\xi)}_{V(h)} + \underbrace{\frac{1}{2h}O(eps^2)}_{R(h)}$$

T6

Gegeben sei eine Funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) \to \mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$. Wie lassen sich die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$$

numerisch berechnen?

Ausgehend vom eindimensionalen Verfahren der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

lautet das Verfahren der zweiten Ableitung f"(x) für mehrere Variablen bei gleicher Schrittweite h in alle Richtungen allgemein

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots x_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i - h, x_{i+1}, \ldots x_n)}{h^2}.$$

Mit $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{f}(x_1 + h, x_2) - \mathbf{f}(x_1, x_2) + \mathbf{f}(x_1 - h, x_2)}{h^2} \\
\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{f}(x_1, x_2 + h) - \mathbf{f}(x_1, x_2) + \mathbf{f}(x_1, x_2 - h)}{h^2} \\
\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{f}(x_1 + h, x_2 + h) - \mathbf{f}(x_1 + h, x_2 - h) - \mathbf{f}(x_1 - h, x_2 + h) + \mathbf{f}(x_1 - h, x_2 - h)}{4h^2}.
\end{aligned}$$

Herleitung für Letzteres

Einfachste gemischte Ableitung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$$

Wenn wir

$$g(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \tag{1}$$

setzen, können wir die Annäherung

$$g'(a) \approx \frac{g(a+h) - g(a-h)}{2h}$$

benützen. Durch einsetzen in (1) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a-h, b)}{2h}. \tag{2}$$

Gleiche Abschätzungen können wir nun für partiellen Ableitungen ersten Grades aus (2) treffen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b) &\approx \frac{f(a+h, b+h) - f(a+h, b-h)}{2h} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(a-h, b) &\approx \frac{f(a-h, b+h) - f(a-h, b-h)}{2h}
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (2) ergibt sich die gewünschte Annäherung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \approx \frac{f(a+h, b+h) - f(a+h, b-h) - f(a-h, b+h) + f(a-h, b-h)}{4h^2}$$