5. Numerik Übungen 2017/18

T7

Gegeben sind die Punkte (-2, 71), (-1, 63), (1, 35), (1, 39) und (4, -37).
Erstellen Sie das Differenzentableau und bestimmen Sie das Newtonsche Interpolationspolynom durch die Punkte.
Allgemeines Differenzenschema für 5 Punkte

$$
\begin{array}{cc|cccc}
x_i & y_i & \delta y_i & \delta^2 y_i & \delta^3 y_i & \delta^4 y_i \\
\hline
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & \delta y_0 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} & & & \\
x_1 & y_1 & & \delta^2 y_0 = \frac{\delta y_1-\delta y_0}{x_2-x_0} & & \\
 & & \delta y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} & & \delta^3 y_0 = \frac{\delta^2 y_1-\delta^2 y_0}{x_3-x_0} & \\
x_2 & y_2 & & \delta^2 y_1 = \frac{\delta y_2-\delta y_1}{x_3-x_1} & & \delta^4 y_0 = \frac{\delta^3 y_1-\delta^2 y_0}{x_4-x_0} \\
 & & \delta y_2 = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} & & \delta^3 y_1 = \frac{\delta^2 y_2-\delta^2 y_1}{x_4-x_1} & \\
x_3 & y_3 & & \delta^2 y_2 = \frac{\delta y_3-\delta y_2}{x_4-x_2} & & \\
 & & \delta y_3 = \frac{y_4-y_3}{x_4-x_3} & & & \\
x_4 & y_4 & & & &
\end{array}
$$

Mit den Punkten

x_i	y_i
-2	71
-1	63
1	35
2	39
4	-37

ergibt sich

$$
\begin{array}{cc|cccc}
x_i & y_i & \delta y_i & \delta^2 y_i & \delta^3 y_i & \delta^4 y_i \\
\hline
-2 & 71 & & & & \\
 & & \delta y_0 = \frac{63-71}{-1+2} = -8 & & & \\
-1 & 63 & & \delta^2 y_0 = \frac{-14+8}{1+2} = -2 & & \\
 & & \delta y_1 = \frac{35-63}{1+1} = -14 & & \delta^3 y_0 = \frac{6+2}{2+2} = 2 & \\
1 & 35 & & \delta^2 y_1 = \frac{4+14}{2+1} = 6 & & \delta^4 y_0 = \frac{-4-2}{4+2} = -1 \\
 & & \delta y_2 = \frac{39-35}{2-1} = 4 & & \delta^3 y_1 = \frac{-14-6}{4+1} = -4 & \\
2 & 39 & & \delta^2 y_2 = \frac{-38-4}{4-1} = -14 & & \\
 & & \delta y_3 = \frac{-37-39}{4-2} = -38 & & & \\
4 & -37 & & & &
\end{array}
$$

kürzer

$$
\begin{array}{cc|cccc}
x_i & y_i & \delta y_i & \delta^2 y_i & \delta^3 y_i & \delta^4 y_i \\
\hline
-2 & 71 & & & & \\
 & & \delta y_0 = -8 & & & \\
-1 & 63 & & \delta^2 y_0 = -2 & & \\
 & & \delta y_1 = -14 & & \delta^3 y_0 = 2 & \\
1 & 35 & & \delta^2 y_1 = 6 & & \delta^4 y_0 = -1 \\
 & & \delta y_2 = 4 & & \delta^3 y_1 = -4 & \\
2 & 39 & & \delta^2 y_2 = -14 & & \\
 & & \delta y_3 = -38 & & & \\
4 & -37 & & & &
\end{array}
$$

Das Interpolationspolynom lautet allgemein für n+1 Punkte nach Newton

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\delta^2 y_0 + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\delta^n y_0.$$

Mit obigen Differenzenschema ergibt sich

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 71 + (x+2)(-8) + (x+2)(x+1)(-2) + (x+2)(x+1)(x-1)2 + (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(-1) \\
&= 71 + (x+2)(-8) + (x^2+3x+2)(-2) + (x^3+2x^2-x-2)2 + (x^4-5x^2+4)(-1) \\
&= 71 - 8x - 16 - 2x^2 - 6x - 4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 - x^4 + 5x^2 - 4 \\
&= -x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 16x + 43 \\
&= (-x^3 + 2x^2 + 7x - 16)x + 43 \\
&= ((-x^2 + 2x + 7)x - 16)x + 43 \\
&= (((-x + 2)x + 7)x - 16)x + 43 \\
p(x) &= ((((-1)x + 2)x + 7)x - 16)x + 43
\end{aligned}
$$

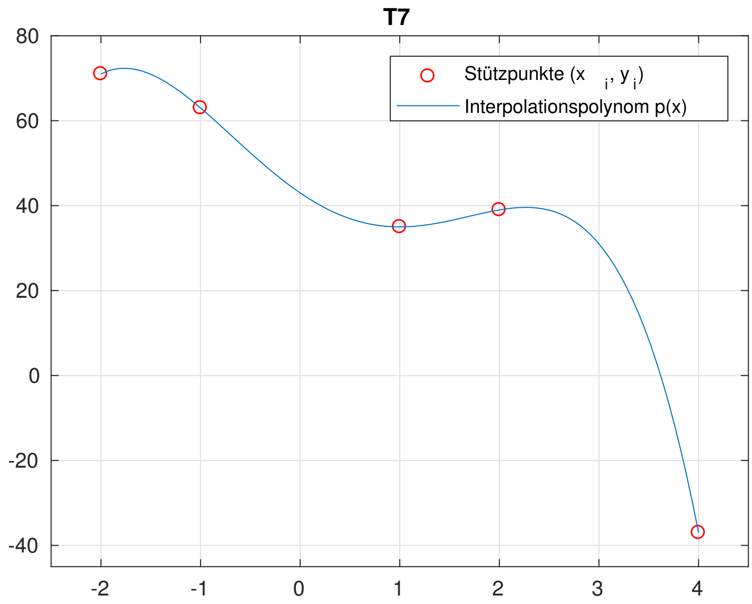

Figure 1: Punkte (x_1, y_i) und Interpolationspolynom $p(x)$

T8
Werten Sie das Newtonsche Interpolationspolynom aus Aufgabe (T7) mit Hilfe des Horner-Schemas für Newtonsche Interpolationspolynome an den Stellen x = 2 und x = 3 aus.
Allgemein nach Herausheben der Faktoren $(x - x_i)$ beim Newtonschen Interpolationspolynom

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)(\delta y_0 + (x - x_1)(\delta^2 y_0 + \cdots + (x - x_{n-2})(\delta^{n-1} y_0 + (x - x_{n-1})\delta^n y_0)\ldots)).$$

Für unser Beispiel gilt somit

$$\begin{aligned} p(x) &= 71 + (x+2)(-8) + (x+2)(x+1)(-2) + (x+2)(x+1)(x-1)\cdot 2 + (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(-1) \\ &= 71 + (x+2)(-8 + (x+1)(-2 + (x-1)(2 + (x-2)(-1)))) \end{aligned}$$

Das Schema für die Rechnung per Hand lautet allgemein

$$p(x) = \delta^0 y_0 + (x - x_0)\delta^1 y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\delta^2 y_0 + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\delta^n y_0.$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & \delta^n y_0 & \delta^{n-1} y_0 & \delta^{n-2} y_0 & \cdots & \delta^1 y_0 & \delta^0 y_0 \\ x & 0 & (x - x_{n-1})\cdot b_n & (x - x_{n-2})\cdot b_{n-1} & \cdots & (x - x_1)\cdot b_2 & (x - x_0)\cdot b_1 \\ \hline & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 = p(x) \end{array}$$

Angewendet für $x = 2$ und

$$p(x) = 71 + (x+2)(-8) + (x+2)(x+1)(-2) + (x+2)(x+1)(x-1)\cdot 2 + (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(-1)$$

(vgl. Bsp.3.4 S.45)

$$\begin{array}{c|ccccc} & -1 & 2 & -2 & -8 & 71 \\ x = 2 & \downarrow & -1\cdot(2-2) = 0 & 2\cdot(2-1) = 2 & 0\cdot(2+1) = 0 & -8\cdot(2+2) = -32 \\ \hline & -1 & 2 + 0 = 2 & -2 + 2 = 0 & -8 + 0 = -8 & 71 - 32 = 39 = p(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & -1 & 2 & -2 & -8 & 71 \\ x = 2 & \downarrow & 0 & 2 & 0 & -32 \\ \hline & -1 & 2 & 0 & -8 & 39 = p(2) \end{array}$$

Alternativ für $x = 2$ und $p(x) = -x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 16x + 43$ geschrieben (vgl. Bsp.3.3 S.45)

$$\begin{array}{c|ccccc} & -1 & 2 & 7 & -16 & 43 \\ x = 2 & \downarrow & -1 * 2 = -2 & 0 * 2 = 0 & 7 * 2 = 14 & -2 * 2 = -4 \\ \hline & -1 & 2 + (-2) = 0 & 0 * 7 = 7 & -16 + 14 = -2 & 43 + (-4) = 39 = p(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & -1 & 2 & 7 & -16 & 43 \\ x = 2 & \downarrow & -2 & 0 & 14 & -4 \\ \hline & -1 & 0 & 7 & -2 & 39 = p(2) \end{array}$$

mit $x = 3$

$$\begin{array}{c|ccccc} & -1 & 2 & 7 & -16 & 43 \\ x = 3 & \downarrow & -1 * 3 = -3 & -1 * 3 = -3 & 4 * 3 = 12 & -4 * 3 = -12 \\ \hline & -1 & -3 + 2 = -1 & -3 + 7 = 4 & 12 - 16 = -4 & -12 + 43 = 31 = p(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & -1 & 2 & 7 & -16 & 43 \\ x = 2 & \downarrow & -3 & -3 & 12 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & 4 & -4 & 31 = p(3) \end{array}$$