7. Numerik Übungen 2017/18

T12

a) Stellen Sie die Bedingungsgleichung für die Simpsonregel auf und bestimmen Sie damit aus den Knoten $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, und $c_3 = 1$ die Gewichte.

Welche Ordnung besitzt die Simpsonregel? Untersuchen Sie dazu, ob eventuell noch weitere Bedingungsgleichungen erfüllt sind.

Bedingungsgleichung allgemein (S. 84)

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^k = \frac{1}{k+1}, k = 0, \ldots, p-1 \tag{4.31}$$

Die Simpsonregel hat 3 Knoten c_i, und somit mindestens Ordnung $p = 3$.

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad & b_1 \cdot 0^0 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + b_3 \cdot 1^0 = \frac{1}{0+1} \\
k = 1 \quad & b_1 \cdot 0^1 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_3 \cdot 1^1 = \frac{1}{1+1} \\
k = 2 \quad & b_1 \cdot 0^2 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b_3 \cdot 1^2 = \frac{1}{2+1}
\end{aligned}$$

Mit $k = 0$ und $i = 0$ bekommen wir 0^0, was normalerweise nicht definiert ist. Das können wir in diesem Fall durch Wahl von Grenzwerten 1 setzen, vergleichbar mit $\frac{x}{0} = \infty$. (Quelle: Mathematik Masterstudent)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k = 3 \quad b_1 \cdot 0^3 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + b_3 \cdot 1^3 &= \frac{1}{3+1} \\
\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot 1 &= \frac{1}{4} \\
\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot 1 &= \frac{1}{4} \\
\frac{1}{12} + \frac{2}{12} &= \frac{1}{4} \\
\frac{3}{12} &= \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} &= \frac{1}{4} \\
k = 4 \quad b_1 \cdot 0^4 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + b_3 \cdot 1^4 &= \frac{1}{4+1} \\
\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{6} \cdot 1 &= \frac{1}{5} \\
\frac{2}{48} + \frac{1}{6} &= \frac{1}{5} \\
\frac{1}{24} + \frac{4}{24} &= \frac{1}{5} \\
\frac{5}{24} &= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Wie man sieht Integriert die Simpsonregel bis zum Grad 4 genau.

b) Gegeben seien die Knoten $c_1 = \frac{1}{6}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, und $c_3 = \frac{5}{6}$. Stellen Sie die ersten s Bedingungsgleichungen auf und setzten Sie die Knoten c_1, c_2, c_3 ein. Berechnen Sie daraus die Gewichte. Wie groß ist die Ordnung dieser Quadraturformel?

Analog zu a), aber diesmal direkt mit der Matrixschreibweise aus (4.34).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_s \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_1^{p-1} & c_2 p - 1 & \dots & c_s p - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{p} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{25}{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k = 3 \quad b_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + b_3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 &= \frac{1}{3+1} \\ \vdots &= \frac{1}{4} \\ \frac{9}{40} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch eine $k + 1$te Zeile auf lineare Abhängigkeit in der Matrizen-Schreibweise überprüfen.
Die gegebene Quadraturformel ist bis zum Grad 3 genau.

c) Bestimmen Sie alternativ die Gewichte b_1, b_2, b_3 durch Integration der zu den Knoten c_1, c_2, c_3 gehörigen Lagrange-Polynome l_1, l_2, l_3.

$$b_i = \int_0^1 l_i(t)dt, \quad l_i(t) = \prod_{j=1, j\neq i}^{s} \frac{t-c_j}{c_i-c_j} \tag{4.26}$$

$$l_1(t) = \cancel{\frac{t-c_1}{c_1-c_1}} \cdot \frac{t-c_2}{c_1-c_2} \cdot \frac{t-c_3}{c_1-c_3}$$
$$l_2(t) = \frac{t-c_1}{c_2-c_1} \cdot \cancel{\frac{t-c_2}{c_2-c_2}} \cdot \frac{t-c_3}{c_2-c_3}$$
$$l_3(t) = \frac{t-c_1}{c_3-c_2} \cdot \frac{t-c_2}{c_3-c_2} \cdot \cancel{\frac{t-c_3}{c_3-c_3}}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \int_0^1 \frac{t-c_2}{c_1-c_2} \cdot \frac{t-c_3}{c_1-c_3} dt = \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}} \cdot \frac{t-\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}-\frac{5}{6}} dt = \int_0^1 \frac{9}{2}\left(t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{5}{12}\right) dt \\
&= \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{5}{12}t\right)\Big|_0^1 = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{5}{12}\right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{-4+5}{12} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\frac{3}{8}} \\
b_2 &= \int_0^1 \frac{t-c_1}{c_2-c_1} \cdot \frac{t-c_3}{c_2-c_3} dt = \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} \cdot \frac{t-\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{5}{6}} = \underline{\frac{1}{4}} \\
b_3 &= \int_0^1 \frac{t-c_1}{c_3-c_2} \cdot \frac{t-c_2}{c_3-c_2} dt = \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}} \cdot \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}} = \underline{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

d) Welche Ordnung hat eine Quadraturformel mit Knoten wie in (T12b) und Gewichten $b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{3}$?

$$c = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad & & 1 &= 1 \\
k = 1 \quad & b_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 &= \frac{1}{1+1} \\
& \frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{5}{6} &= \frac{1}{2} \\
& \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\
k = 2 \quad & \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{1}{2+1} \\
& \frac{1}{3}\frac{1}{36} + \frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{25}{36} &= \frac{1}{3} \\
& \frac{35}{18} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Die gegebene Quadraturformel die Ordnung 3.

T13
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2+x}}\mathbf{dx}.$$

a) Exakt.
Substitution mit $\xi = 2 + x$ und $du = d\xi$.

$$\int_{u}^{o} \frac{1}{\xi}d\xi = \log(\xi)|_u^o = \log(x+2)|_{-1}^2 = \log(4) - \log(1) = \log\left(\frac{4}{1}\right) = \log(4) \approx 1.3863$$

b) Mit der Quadraturformel aus Aufgabe (T12b) und Schrittweite h = 3.
Auszug Definition 4.2 (S. 80):

> Für eine äquidistante Unterteilung von [a, b] in n Teilintervalle, also
>
> $$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \dots, n \tag{4.22}$$
>
> haben wir folgende Näherungsformel:
>
> $$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_{k-1} + c_i h) \tag{4.23}$$

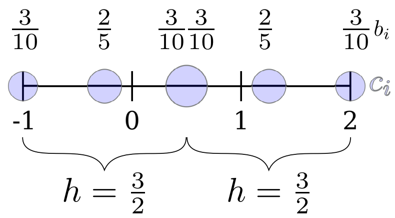
$$h = 3 = \frac{2+1}{n} \Rightarrow n = 1, \quad x_0 = a = -1, \quad s = 3, \quad c = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \frac{1}{2+x}dx &\approx 3 \sum_{k=1}^{1} \sum_{i=1}^{3} b_i f(x_{1-1} + c_i \cdot 3) \\
&\approx 3 \sum_{i=1}^{3} b_i f(x_0 + 3c_i) \\
&\approx 3 \left[b_1 f(x_0 + 3c_1) + b_2 f(x_0 + 3c_2) + b_3 f(x_0 + 3c_3)\right] \\
&\approx 3 \left[b_1 f(-1 + 3\frac{1}{6}) + b_2 f(-1 + 3\frac{1}{2}) + b_3 f(-1 + 3\frac{5}{6})\right] \\
&\approx 3 \left[\frac{3}{10} f(-\frac{1}{2}) + \frac{2}{5} f(\frac{1}{2}) + \frac{3}{10} f(\frac{3}{2})\right] \\
&\approx 3 \left[\frac{3}{10}\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\frac{2}{7}\right] \\
&\approx 1.337142857142857 \quad (96.45\%)
\end{aligned}$$

T13 c) Mit der Quadraturformel aus Aufgabe (T12b) und Schrittweite h = $\frac{3}{2}$.
Machen Sie eine Skizze mit den Knoten und Gewichten.

$$h = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{n} \Rightarrow n = 2, \quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad s = 3, \quad c = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \frac{1}{2+x} dx &\approx \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} b_i f(x_{k-1} + c_i \cdot \frac{3}{2}) \\
&\approx \frac{3}{2} \left[\left(b_1 f(x_0 + \frac{3}{2} c_1) + b_2 f(x_0 + \frac{3}{2} c_2) + b_3 f(x_0 + \frac{3}{2} c_3) \right) + \left(b_1 f(x_1 + \frac{3}{2} c_1) + b_2 f(x_1 + \frac{3}{2} c_2) + b_3 f(x_1 + \frac{3}{2} c_3) \right) \right] \\
&\approx \frac{3}{2} \left[\left(\frac{3}{10} f(-1 + \frac{3}{2}\frac{1}{6}) + \frac{2}{5} f(-1 + \frac{3}{2}\frac{1}{2}) + \frac{3}{10} f(-1 + \frac{3}{2}\frac{5}{6}) \right) + \left(\frac{3}{10} f(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{6}) + \frac{2}{5} f(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{2}) + \frac{3}{10} f(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{5}{6}) \right) \right] \\
&\approx \frac{3}{2}\frac{1}{5} \left[\left(\frac{3}{2} f(-\frac{3}{4}) + 2 f(-\frac{1}{4}) + \frac{3}{2} f(\frac{1}{4}) \right) + \left(\frac{3}{2} f(\frac{3}{4}) + 2 f(\frac{5}{4}) + \frac{3}{2} f(\frac{7}{4}) \right) \right] \\
&\approx \frac{3}{10} \left[\left(\frac{3}{2}\frac{4}{5} + 2\frac{4}{7} + \frac{3}{2}\frac{4}{9} \right) + \left(\frac{3}{2}\frac{4}{11} + 2\frac{4}{13} + \frac{3}{2}\frac{4}{15} \right) \right] \\
&\approx \frac{3}{10} \left[\left(\frac{12}{10} + \frac{8}{7} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{6}{11} + \frac{8}{13} + \frac{6}{15} \right) \right] \\
&\approx 1.3711088911088911 \quad (98.90\%)
\end{aligned}$$



Python 3.5

```python
def x(k):
    return a+h*k


def f(x):
    return 1/(2+x)


a = -1
b = 2
h = 4
n = round((b-a)/h)
c = [1/6, 1/2, 5/6]
b = [3/10, 2/5, 3/10]
s = len(c)

total = 0

for k in range(0,n):
    for i in range(0,s):
        total += b[i]*f(x(k)+c[i]*h)

total *= h
print(total)
```