7. Numerik Übungen 2017/18

T12

a) Stellen Sie die Bedingungsgleichung für die Simpsonregel auf und bestimmen Sie damit aus den Knoten $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, und $c_3 = 1$ die Gewichte.
Welche Ordnung besitzt die Simpsonregel? Untersuchen Sie dazu, ob eventuell noch weitere Bedingungsgleichungen erfüllt sind.

b) Gegeben seien die Knoten $c_1 = \frac{1}{6}, c_2 = \frac{1}{2}$, und $c_3 = \frac{5}{6}$. Stellen Sie die ersten s Bedingungsgleichungen auf und setzten Sie die Knoten c_1, c_2, c_3 ein. Berechnen Sie daraus die Gewichte. Wie groß ist die Ordnung dieser Quadraturformel?

c) Bestimmen Sie alternativ die Gewichte b_1, b_2, b_3 durch Integration der zu den Knoten c_1, c_2, c_3 gehörigen Lagrange-Polynome l_1, l_2, l_3.

d) Welche Ordnung hat eine Quadraturformel mit Knoten wie in (T12b) und Gewichten $b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{3}$?

T13
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{2+x} dx.$$

a) Exakt.
Substitution mit $\xi = 2 + x$ und $du = d\xi$.

$$\int_u^o \frac{1}{\xi} d\xi = \log(\xi)|_u^o = \log(x+2)|_{-1}^2 = \log(4) - \log(1) = \log\left(\frac{4}{1}\right) = \log(4) \approx 1.3863$$

b) Mit der Quadraturformel aus Aufgabe (T12b) und Schrittweite $h = 3$.
Auszug Definition 4.2 (S. 80):

> Für eine äquidistante Unterteilung von [a, b] in n Teilintervalle, also
>
> $$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \ldots, n \tag{4.22}$$
>
> haben wir folgende Näherungsformel:
>
> $$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_{k-1} + c_i h) \tag{4.23}$$

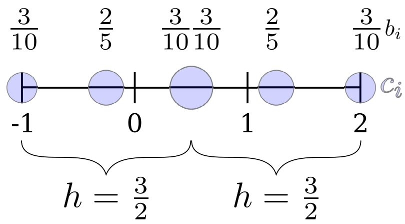
$$h = 3 = \frac{2+1}{n} \Rightarrow n = 1, \quad x_0 = a = -1, \quad s = 3, \quad c = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \frac{1}{2+x} dx &\approx 3 \sum_{k=1}^{1} \sum_{i=1}^{3} b_i f(x_{1-1} + c_i \cdot 3) \\
&\approx 3 \sum_{i=1}^{3} b_i f(x_0 + 3c_i) \\
&\approx 3 \left[b_1 f(x_0 + 3c_1) + b_2 f(x_0 + 3c_2) + b_3 f(x_0 + 3c_3)\right] \\
&\approx 3 \left[b_1 f(-1 + 3\frac{1}{6}) + b_2 f(-1 + 3\frac{1}{2}) + b_3 f(-1 + 3\frac{5}{6})\right] \\
&\approx 3 \left[\frac{3}{10} f(-\frac{1}{2}) + \frac{2}{5} f(\frac{1}{2}) + \frac{3}{10} f(\frac{3}{2})\right] \\
&\approx 3 \left[\frac{3}{10}\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\frac{2}{7}\right] \\
&\approx 1.337142857142857 \quad (96.45\%)
\end{aligned}$$

c) Mit der Quadraturformel aus Aufgabe (T12b) und Schrittweite $h = \frac{3}{2}$.
Machen Sie eine Skizze mit den Knoten und Gewichten.

$$h = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{n} \Rightarrow n = 2, \quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad s = 3, \quad c = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \frac{1}{2+x} dx &\approx \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} b_i f(x_{k-1} + c_i \cdot \frac{3}{2}) \\
&\approx \frac{3}{2} \left[\left(b_1 f(x_0 + \frac{3}{2} c_1) + b_2 f(x_0 + \frac{3}{2} c_2) + b_3 f(x_0 + \frac{3}{2} c_3) \right) + \left(b_1 f(x_1 + \frac{3}{2} c_1) + b_2 f(x_1 + \frac{3}{2} c_2) + b_3 f(x_1 + \frac{3}{2} c_3) \right) \right] \\
&\approx \frac{3}{2} \left[\left(\frac{3}{10} f(-1 + \frac{3}{2}\frac{1}{6}) + \frac{2}{5} f(-1 + \frac{3}{2}\frac{1}{2}) + \frac{3}{10} f(-1 + \frac{3}{2}\frac{5}{6}) \right) + \left(\frac{3}{10} f(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{6}) + \frac{2}{5} f(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{2}) + \frac{3}{10} f(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{5}{6}) \right) \right] \\
&\approx \frac{3}{2}\frac{1}{5} \left[\left(\frac{3}{2} f(-\frac{3}{4}) + 2 f(-\frac{1}{4}) + \frac{3}{2} f(\frac{1}{4}) \right) + \left(\frac{3}{2} f(\frac{3}{4}) + 2 f(\frac{5}{4}) + \frac{3}{2} f(\frac{7}{4}) \right) \right] \\
&\approx \frac{3}{10} \left[\left(\frac{3}{2}\frac{4}{5} + 2\frac{4}{7} + \frac{3}{2}\frac{4}{9} \right) + \left(\frac{3}{2}\frac{4}{11} + 2\frac{4}{13} + \frac{3}{2}\frac{4}{15} \right) \right] \\
&\approx \frac{3}{10} \left[\left(\frac{12}{10} + \frac{8}{7} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{6}{11} + \frac{8}{13} + \frac{6}{15} \right) \right] \\
&\approx 1.3711088911088911 \quad (98.90\%)
\end{aligned}$$



Python 3.5

```
def x(k):
    return a+h*k


def f(x):
    return 1/(2+x)


a = -1
b = 2
h = 4
n = round((b-a)/h)
c = [1/6, 1/2, 5/6]
b = [3/10, 2/5, 3/10]
s = len(c)

total = 0

for k in range(0,n):
    for i in range(0,s):
        total += b[i]*f(x(k)+c[i]*h)

total *= h
print(total)
```