

6. Numerik Übungen 2017/18

T9

a) Prüfen Sie nach, ob die Formel (3.38) für die Lagrange-Polynome l_i wirklich die Bedingung $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ erfüllt.
S. 47

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \quad (3.37)$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots \widehat{(x - x_i)} \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots \widehat{(x_i - x_i)} \cdots (x_i - x_n)} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} i = j, \quad l_i(x_i) &= \frac{\cancel{(x_i - x_0)} \cancel{(x_i - x_1)} \cdots \cancel{(x_i - x_i)} \cdots \cancel{(x_i - x_n)}}{\cancel{(x_i - x_0)} \cancel{(x_i - x_1)} \cdots \cancel{(x_i - x_i)} \cdots \cancel{(x_i - x_n)}} = 1 \\ i \neq j, \quad l_i(x_j) &= 0 \Rightarrow (x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots \cancel{(x_j - x_i)} \cdots (x_j - x_n) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\text{Wahr, wenn } x_j \in x \end{aligned}$$

b) Interpolieren Sie $f(x) = 6 - 4x + \frac{1}{2}x^3$ an den Stützstellen $x_k = k - 3, k = 0, \dots, 5$, durch eine stückweise lineare Funktion s . Geben Sie dazu die gesuchte stückweise lineare Funktion s als Linearkombination

$$s(x) = \sum_{k=0}^5 y_k \phi_k(x)$$

von Hutfunktionen $\phi_k(x)$ an.

Sie brauchen die Hutfunktionen $\phi_k(x)$ nicht explizit anzugeben, eine Skizze mit der Funktion f , der Interpolierenden s , allen auftretenden Hutfunktionen $\phi_k(x)$ und Vielfachen $y_k \phi_k(x)$ (mit Nummerierung) ist ausreichend.

S. 59

$$x = [-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2], \quad s(x) = \sum_{i=0}^n y_i \phi_i(x)$$

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] & \text{falls } i = 1, \dots, n \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] & \text{falls } i = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \phi_0(x) &= \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-2-x}{-2+3}, & x \in [-3, -2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \phi_2(x) &= \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}, & x \in [x_2, x_3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x+2}{-1+2}, & x \in [-2, -1] \\ \frac{0-x}{0+1}, & x \in [-1, 0] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

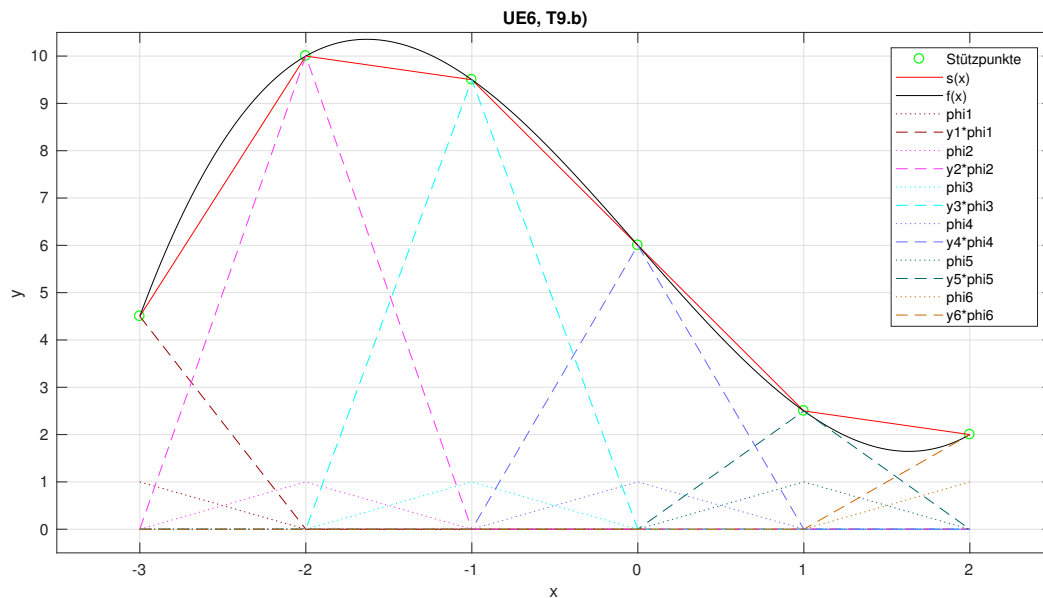


Figure 1: T9.b) Stützpunkte, Funktion f , Stückweise lineare Interpolation s , Hutfunktionen ohne und mit Skalierung.

T10

Gegeben sind die Punkte $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, $(x_1, y_1) = (0, 3)$ und $(x_2, y_2) = (1, 3)$ sowie die Ableitungen $y'_0 = 3$, $y'_1 = 2$, $y'_2 = -3$ und $y''_1 = 4$.

Bestimmen Sie ein Polynom p , sodass $p(x_i) = y_i$, $p'(x_i) = y'_i$, $i = 0, 1, 2$, und $p''(x_1) = y''_1$.

Zeichnen Sie das Polynom p und die Punkte in MATLAB.

S. 54

x_i	y_i	δy_i	x_i	y_i	δy_i
x_0	y_0	$\frac{y_0 + h y'_0 - y_0}{x_0 + h - x_0} = y'_0$	x_0	y_0	y'_0
$x_0 + h \rightarrow x_0$	$y_0 + h y'_0 \rightarrow y_0$	$\frac{y_1 - (y_0 + h y'_0)}{x_1 - (x_0 + h)} \rightarrow \delta y_0$	x_0	y_0	δy_0
x_1	y_1	$\frac{y_1 + h y'_1 - y_1}{x_1 + h - x_1} = y'_1$	x_1	y_1	y'_1
$x_1 + h \rightarrow x_1$	$y_1 + h y'_1 \rightarrow y_1$		x_1	y_1	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad y'_0 = 3, \quad y'_1 = 2, \quad y'_2 = -3, \quad y''_1 = 4$$

x_i	y_i	δy_i
-1	2	3
-1	2	$\frac{y_1 - (y_0 + h y'_0)}{x_1 - (x_0 + h)} \rightarrow \delta y_0$
0	3	2
0	3	$\frac{y_2 - (y_1 + h y'_1)}{x_2 - (x_1 + h)} \rightarrow \delta y_1$
1	3	-3
1	3	

T11

a) Schreiben Sie für natürliche Splines das zugehörige lineare Gleichungssystem für die Momente M_0, \dots, M_n in

Matrizen-Schreibweise an.

b) Stellen Sie die beiden "fehlenden" Gleichungen für die Momente M_0, \dots, M_n für periodische Splines mit $s(x_0) = s(x_n)$, $s'(x_0) = s'(x_n)$ und $s''(x_0) = s''(x_n)$ auf.

Wie sieht die Matrix des gesamten Gleichungssystems aus? Ist sie auch eine Tridiagonalmatrix?