

## 9. Numerik Übungen 2017/18

T15

Es sei  $R = [2, 6] \times [1, 3]$  ein Rechteck. Berechnen Sie das Integral  $\iint_R \frac{x}{y} dF$ , indem Sie in x- bzw. y- Richtung die Simpsonregel verwenden. Machen Sie auch eine Skizze (Rechteck, Knoten, Gewichte).

Simpsonregel:  $s = 3$ ,  $c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

Quadraturformel für Rechtecke (4.103, S. 103):  $\iint_R \frac{x}{y} dF \approx h\hat{h} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\hat{s}} b_i \hat{b}_j f(a + c_i h, \hat{a} + \hat{c}_j \hat{h})$

Mit  $h = b - a = 6 - 2 = 4$  und  $\hat{h} = \hat{b} - \hat{a} = 3 - 1 = 2$

$$h\hat{h} = 4 \cdot 2 = 8$$

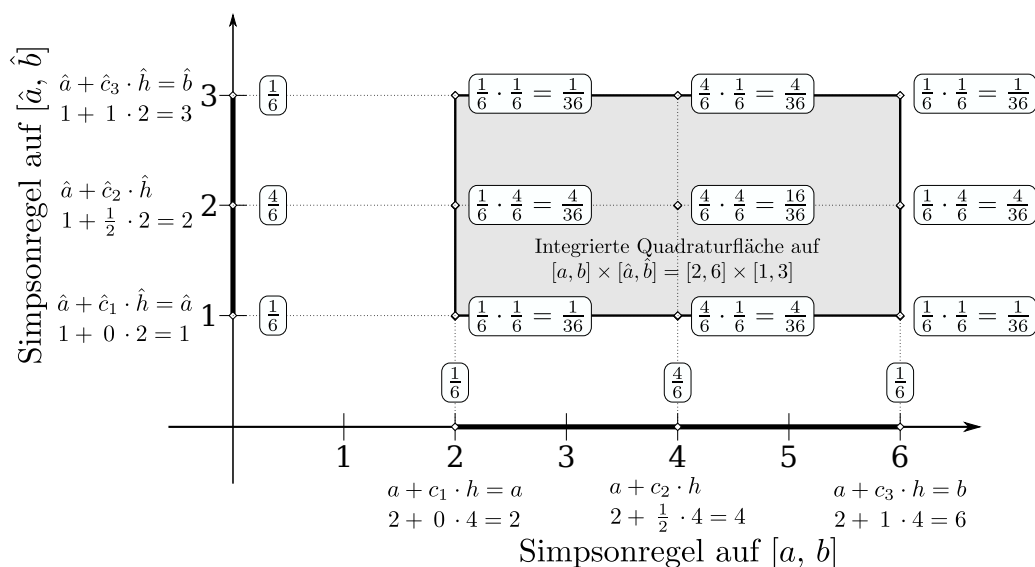
$$b_i \hat{b}_j = \begin{bmatrix} b_1 \hat{b}_1 & b_1 \hat{b}_2 & b_1 \hat{b}_3 \\ b_2 \hat{b}_1 & b_2 \hat{b}_2 & b_2 \hat{b}_3 \\ b_3 \hat{b}_1 & b_3 \hat{b}_2 & b_3 \hat{b}_3 \end{bmatrix} \stackrel{b_i = \hat{b}_j}{=} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} & \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f \left( \begin{bmatrix} a + c_1 h, \hat{a} + \hat{c}_1 \hat{h} & a + c_1 h, \hat{a} + \hat{c}_2 \hat{h} & a + c_1 h, \hat{a} + \hat{c}_3 \hat{h} \\ a + c_2 h, \hat{a} + \hat{c}_1 \hat{h} & a + c_2 h, \hat{a} + \hat{c}_2 \hat{h} & a + c_2 h, \hat{a} + \hat{c}_3 \hat{h} \\ a + c_3 h, \hat{a} + \hat{c}_1 \hat{h} & a + c_3 h, \hat{a} + \hat{c}_2 \hat{h} & a + c_3 h, \hat{a} + \hat{c}_3 \hat{h} \end{bmatrix} \right) = f \left( \begin{bmatrix} 2 + 0 \cdot 4, 1 + 0 \cdot 2 & 2 + 0 \cdot 4, 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 & 2 + 0 \cdot 4, 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 + \frac{1}{2} \cdot 4, 1 + 0 \cdot 2 & 2 + \frac{1}{2} \cdot 4, 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 & 2 + \frac{1}{2} \cdot 4, 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 + 1 \cdot 4, 1 + 0 \cdot 2 & 2 + 1 \cdot 4, 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 & 2 + 1 \cdot 4, 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$f \left( \begin{bmatrix} 2, 1 & 2, 2 & 2, 3 \\ 4, 1 & 4, 2 & 4, 3 \\ 6, 1 & 6, 2 & 6, 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{6}{1} & \frac{6}{2} & \frac{6}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\iint_R \frac{x}{y} dF \approx 8 \sum_i \sum_j \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{8}{36} \sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 2 & 4 & \frac{2}{3} \\ 16 & 32 & \frac{16}{3} \\ 6 & 12 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \sum_j \sum_i 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 8 & 16 & \frac{8}{3} \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4}{9} \sum_j \begin{bmatrix} 12 & 24 & 4 \end{bmatrix} = \frac{4}{9} 40 = \frac{160}{9}$$



**T16**

Die Knoten  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$  und die Gewichte  $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$  definieren eine Quadraturformel auf dem Einheitsdreieck  $D = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1 - \xi\}$ .

Wie groß ist die Ordnung dieser Quadraturformel?

Wie lauten die baryzentrischen Koordinaten der Knoten?

Nach 4.109 (S. 104) gilt

$$\sum_{i=1}^s b_i g(c_i, d_i) \approx \int_0^1 \int_0^{1-\xi} g(\xi, \eta) d\eta d\xi.$$

$$s = 3, \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Prüfen der Monome mit steigendem Grad

**Grad 0:** 1

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} 1 d\eta d\xi = \int_0^1 1 - \xi d\xi$$

**T17**

a) Berechnen Sie die LU-Zerlegung der Matrix A mit Spaltenpivotsuche für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \\ 15 & 0 & 0 & 1 \\ -15 & -10 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analog zu 5.1.2 *Beispiel für eine LU-Zerlegung* führen wir einen Vektor IP von Seite 119 ein in dem wir Vertauschungen festhalten. Zu Beginn tragen wir  $IP(n=4) = (-1)^0 = 1$  ein.

Wir suchen in der ersten Spalte nach dem betragsmäßig größten Element von A. Dies trifft auf 15 und -15 zu, wobei hier 15 als Pivotelement gewählt wurde, da die dritte Zeile mehr Nullstellen enthält und wir uns somit Rechnungen sparen.

Wir tauschen die 3. mit der 1. Zeile ( $IP(1) = 3$ ) und haben somit einmal getauscht ( $IP(4) = (-1)^1 = -1$ ).

$$\begin{array}{c|cccc} IP & & A & & \\ \hline * & 0 & 2 & 6 & 10 \\ * & 3 & 6 & 9 & -3 \\ * & 15 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -15 & -10 & -3 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} IP & & A & & \\ \hline 3 & 15 & 0 & 0 & 1 \\ * & 3 & 6 & 9 & -3 \\ * & 0 & 2 & 6 & 10 \\ \hline -1 & -15 & -10 & -3 & 1 \end{array}$$

Die Faktoren für die Elimination sind

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \quad l_{31} = \frac{0}{15} = 0, \quad l_{41} = \frac{-15}{15} = -1.$$

Die Berechnung der Zeilenelemente erfolgt wie gewohnt. Die Nullstellen in der ersten Spalte werden jedoch mit den jeweiligen  $l_{j1}$  ersetzt.

Wir suchen im restlichen Bereich (schwarz) nach dem Pivotelement und finden -10. Getauscht wird die 4. mit der 2. Zeile.

$$\begin{array}{c|cccc} IP & & A & & \\ \hline 3 & 15 & 0 & 0 & 1 \\ * & \frac{1}{5} & 6 & 9 & -\frac{16}{5} \\ * & 0 & 2 & 6 & 10 \\ \hline -1 & -1 & -10 & -3 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} IP & & A & & \\ \hline 3 & 15 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -10 & -3 & 2 \\ * & 0 & 2 & 6 & 10 \\ \hline 1 & \frac{1}{5} & 6 & 9 & -\frac{16}{5} \end{array}$$

$$l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}, \quad l_{42} = \frac{6}{-10} = -\frac{3}{5}$$

$$IP(2) = 4, IP(4) = (-1)^2 = 1$$

$$\begin{array}{c|cccc} IP & & A & & \\ \hline 3 & 15 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -10 & -3 & 2 \\ * & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{27}{5} & \frac{52}{5} \\ \hline 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{36}{5} & -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} IP & & A & & \\ \hline 3 & 15 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -10 & -3 & 2 \\ 4 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{36}{5} & -2 \\ \hline -1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{27}{5} & \frac{52}{5} \end{array}$$

$$l_{43} = \frac{a_{43}}{a_{33}} = \frac{\frac{27}{5}}{\frac{36}{5}} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

$$IP(3) = 4, IP(4) = (-1)^3 = -1$$

$$\begin{array}{c|cccc} IP & & A & & \\ \hline 3 & 15 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -10 & -3 & 2 \\ 4 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{36}{5} & -2 \\ \hline -1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{4} & \frac{119}{10} \end{array}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{36}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{119}{10} \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie auch die Permutationsmatrix **P** bzw. den Vektor **IP**. **IP(4)** soll das Vorzeichen für die Berechnung der Determinante erhalten.

Die Permutationsmatrix **P** ergibt sich durch Anwendung der Zeilentäusche auf eine Einheitsmatrix. Hierbei ist **IP** hilfreich.

$$IP = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ (-1) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der LU-Zerlegung die Determinante von **A**.

Die Determinante kann mit **U** und **IP(n)** berechnet werden.

$$\det A = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn} \cdot IP(4) \quad (5.38, S. 121)$$

$$\det A = 15 \cdot -10 \cdot \frac{36}{5} \cdot \frac{119}{10} \cdot -1 = 3 \cdot 36 \cdot 119 = 12852$$

d) Lösen Sie **Ax = b** für **b** =  $\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -14 \\ -8 \end{bmatrix}$  mit Hilfe der LU-Zerlegung.

Wiederum folgen wir dem Beispiel aus 5.1.2.

**Schritt 1: Vertauschen der Elemente von b mit Hilfe von IP:**

Wie in b) wenden wir **IP** auf **b** an.

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -14 \\ -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -14 \\ -6 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -14 \\ -8 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -14 \\ -8 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \tilde{b}$$

**IP(4) = -1** bedeutet eine ungerade Anzahl von Vertauschungen.

**Schritt 2: Vorwärtssubstitution mit L und  $\tilde{b}$ :**

$$Ly = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -8 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \tilde{b}$$

$$\begin{cases} y_1 = -14 \\ y_2 = -8 - (-14) \cdot -1 = -22 \\ y_3 = -6 - (-14) \cdot \frac{1}{5} - (-22) \cdot -\frac{3}{5} = -\frac{82}{5} \\ y_4 = 4 - (-14) \cdot 0 - (-22) \cdot -\frac{1}{5} - (-\frac{82}{5}) \cdot \frac{3}{4} = \frac{119}{10} \end{cases}$$

**Schritt 3: Rückwärtssubstitution mit U und y:**

$$Ux = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{36}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{119}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -22 \\ -\frac{82}{5} \\ \frac{119}{10} \end{bmatrix} = y$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{15}(-14 - 1) = -1 \\ x_2 = \frac{1}{-10}(-22 - (-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 2) = 3 \\ x_3 = \frac{5}{36}(\frac{82}{5} - (1) \cdot (-2)) = -2 \\ x_4 = \frac{10}{119} \cdot \frac{119}{10} = 1 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Matlab

```
1  clc
2  clear
3
4  A=[0 2 6 10; 3 6 9 -3; 15 0 0 1; -15 -10 -3 1];
5  b=[4 -6 -14 -8]';
6  [L,U,P,IP]=LU_pivot(A)
7
8  b_til = P*b;
9  y=L\b_til
10 x=U\y
11
12
13 function [L,U,P,IP]=LU_pivot(U)
14
15
16 [~,n]=size(U);
17 L=eye(n); P=L;
18 IP(n)=-1;
19 swaps=0;
20
21 for k=1:n
22     [~, pivot_index]=max(abs(U(k:n, k)));
23     pivot_index=pivot_index+k-1;
24     if pivot_index~=k
25         IP(k)=pivot_index;
26         swaps=swaps + 1;
27         IP(n)=(-1)^swaps;
28
29         % swap rows pivot_index and k in U
30         U([k pivot_index],:)=U([pivot_index k],:);
31
32         % swap rows pivot_index and k in P
33         P([k pivot_index],:)=P([pivot_index k],:);
34
35         if k >= 2
36             L([k pivot_index],1:k-1)=L([pivot_index k],1:k-1);
37         end
38     end
39     for j=k+1:n
40         L(j,k)=U(j,k)/U(k,k);
41         U(j,:)=U(j,:)-L(j,k)*U(k,:);
42     end
43 end
44
45 end
```