6. Numerik Übungen 2017/18

T9
a) Prüfen Sie nach, ob die Formel (3.38) für die Lagrange-Polynome l_1 wirklich die Bedingung $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ erfüllt.
S. 47

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \tag{3.37}$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots\widehat{(x - x_i)}\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots\widehat{(x_i - x_i)}\cdots(x_i - x_n)} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} i = j, \quad & l_i(x_i) = \frac{\cancel{(x_i - x_0)}\,\cancel{(x_i - x_1)}\cdots\widehat{\cancel{(x_i - x_i)}}\cdots\cancel{(x_i - x_n)}}{\cancel{(x_i - x_0)}\,\cancel{(x_i - x_1)}\cdots\widehat{\cancel{(x_i - x_i)}}\cdots\cancel{(x_i - x_n)}} = 1 \\ i \neq j, \quad & l_i(x_j) = 0 \Rightarrow (x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots\widehat{\cancel{(x_j - x_i)}}\cdots(x_j - x_n) \overset{!}{=} 0 \\ & \text{Wahr, wenn } x_j \in x \end{aligned}$$

b) Interpolieren Sie $f(x) = 6 - 4x + \frac{1}{2}x^3$ an den Stützstellen $x_k = k - 3, k = 0, \ldots, 5$, durch eine stückweise lineare Funktion s. Geben Sie dazu die gesuchte stückweise lineare Funktion s als Linearkombination

$$s(x) = \sum_{k=0}^{5} y_k \phi_k(x)$$

von Hutfunktionen $\phi_k(x)$ an.
Sie brauchen die Hutfunktionen $\phi_k(x)$ nicht explizit anzugeben, eine Skizze mit der Funktion f, der Interpolierenden s, allen auftretenden Hutfunktionen $\phi_k(x)$ und Vielfachen $y_k\phi_k(x)$ (mit Nummerierung) ist ausreichend.
S. 59

$$x = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad s(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{falls } i = 1, \ldots, n \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \quad \text{falls } i = 0, \ldots, n-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-2 - x}{-2 + 3}, & x \in [-3, -2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}, & x \in [x_2, x_3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x + 2}{-1 + 2}, & x \in [-2, -1] \\ \frac{0 - x}{0 + 1}, & x \in [-1, \ \ 0] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

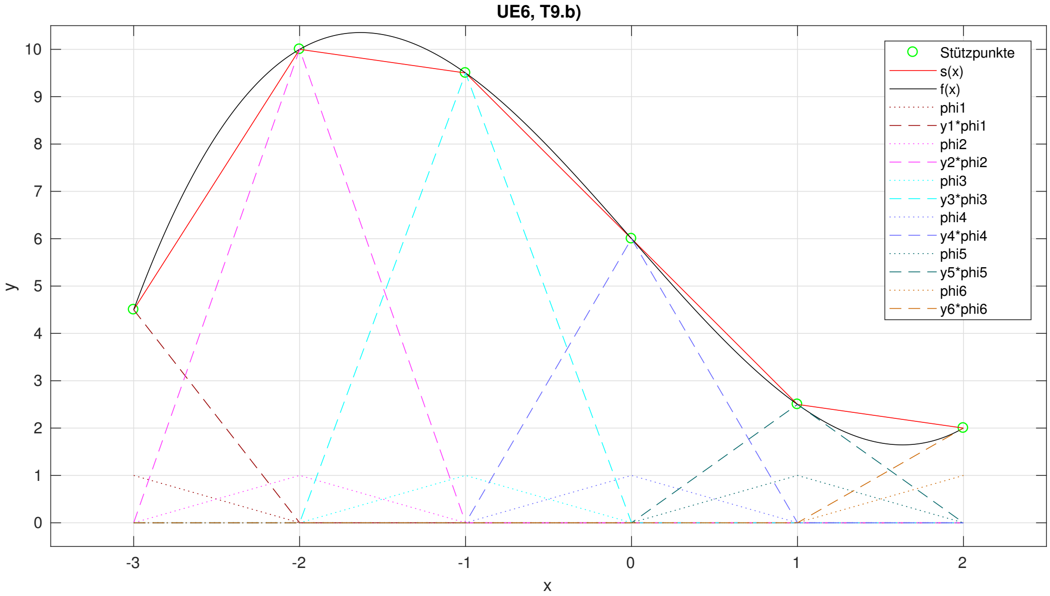

Figure 1: T9.b Stützpunkte, Funktion f, Stückweise lineare Interpolation s, Hutfunktionen ohne und mit Skalierung.

T10
Gegeben sind die Punkte $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, $(x_1, y_1) = (0, 3)$ und $(x_2, y_2) = (1, 3)$ sowie die Ableitungen $y'_0 = 3$, $y'_1 = 2$, $y'_2 = -3$ und $y''_1 = 4$.
Bestimmen Sie ein Polynom p, sodass $p(x_i) = y_i$, $p'(x_i) = y'_i$, $i = 0, 1, 2$, und $p''(x_1) = y''_1$.
Zeichnen Sie das Polynom p und die Punkte in MATLAB.
S. 54
Allgemeines Differenzenschema für Hermite-Interpolation mit gegebenen Ableitungen vom Grad 2

$$
\begin{array}{ll|l}
x_i & y_i & \delta y_i \\
\hline
x_0 & y_0 & \\
 & & \frac{y_0+hy'_0-y_0}{x_0+h-x_0} = y'_0 \\
x_0 + h \to x_0 & y_0 + hy'_0 \to y_0 & \\
 & & \frac{y_1-(y_0+hy'_0)}{x_1-(x_0+h)} \to \delta y_0 \\
x_1 & y_1 & \\
 & & \frac{y_1+hy'_1-y_1}{x_1+h-x_1} = y'_1 \\
x_1 + h \to x_1 & y_1 + hy'_1 \to y_1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\quad \to \quad
\begin{array}{ll|l}
x_i & y_i & \delta y_i \\
\hline
x_0 & y_0 & \\
 & & y'_0 \\
x_0 & y_0 & \\
 & & \delta y_0 \\
x_1 & y_1 & \\
 & & y'_1 \\
x_1 & y_1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad y'_0 = 3, \quad y'_1 = 2, \quad y'_2 = -3, \quad y''_1 = 4$$

Ausgehend vom Differenzenschema für das Newtonsche Interpolationspolynom
Schritt 1: Vermehrung der Stützstellen, einmal je gegebenen Ableitungsgrad je Stützstelle, hier +1 für x_0, x_2 und +2 für x_1.

$$
\begin{array}{ll|l}
x_i & y_i & \\
\hline
x_0 & y_0 & \\
x_0 & y_0 & \\
x_1 & y_1 & \\
x_1 & y_1 & \\
x_1 & y_1 & \\
x_2 & y_2 & \\
x_2 & y_2 &
\end{array}
\quad \to \quad
\begin{array}{ll|l}
x_i & y_i & \\
\hline
-1 & 2 & \\
-1 & 2 & \\
0 & 3 & \\
0 & 3 & \\
0 & 3 & \\
1 & 3 & \\
1 & 3 &
\end{array}
$$

Schritt 2: Berechnung des Differenzenschema

Wie gewohnt mit der Merkregel des Newtonschen Interpolationspolynom (S. 38)

Bleibt nach dem Grenzübergang $h \to 0$ nur $\frac{0}{0}$ muss der Wert mit einer bekannten Ableitung in der Form $\frac{f^{(g)}(x)}{g!}$ ersetzt werden.

x_i	y_i	δy_i
x_0	y_0	
		$\frac{y_0-y_0}{x_0-x_0} = \frac{0}{0} \to y_0'$
x_0	y_0	
		$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \delta y_0$
x_1	y_1	
		$\frac{y_1-y_1}{x_1-x_1} = \frac{0}{0} \to y_1'$
x_1	y_1	
		$\frac{y_1-y_1}{x_1-x_1} = \frac{0}{0} \to y_1'$
x_1	y_1	
		$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \delta y_1$
x_2	y_2	
		$\frac{y_2-y_2}{x_2-x_2} = \frac{0}{0} \to y_2'$
x_2	y_2	

$\to$

x_i	y_i	
-1	2	
		3
-1	2	
		$\frac{3-2}{0+1} = 1$
0	3	
		2
0	3	
		2
0	3	
		$\frac{3-3}{1-0} = 0$
1	3	
		-3
1	3	

Hier also $\frac{f^{(2)}(x_1)}{2!}$

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$
x_0	y_0		
		y_0'	
x_0	y_0		$\frac{\delta y_0 - y_0'}{x_1-x_0}$
		δy_0	
x_1	y_1		$\frac{y_1' - \delta y_0}{x_1-x_0}$
		y_1'	
x_1	y_1		$\frac{y_1'-y_1'}{x_1-x_1} = \frac{0}{0} \to \frac{y_1''}{2!}$
		y_1'	
x_1	y_1		$\frac{\delta y_1 - y_1'}{x_2-x_1}$
		δy_1	
x_2	y_2		$\frac{y_2' - \delta y_1}{x_2-x_1}$
		y_2'	
x_2	y_2		

$\to$

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$
-1	2		
		3	
-1	2		$\frac{1-3}{0+1} = -2$
		1	
0	3		$\frac{2-1}{0+1} = 1$
		2	
0	3		$\frac{4}{2} = 2$
		2	
0	3		$\frac{0-2}{1-0} = -2$
		0	
1	3		$\frac{-3-0}{1-0} = -3$
		-3	
1	3		

Rest wie bekannt aus UE5 T7

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_i$	$\delta^6 y_i$
-1	2						
		3					
-1	2		-2				
		1		3			
0	3		1		-2		
		2		1		$-\frac{1}{4}$	
0	3		2		-2.5		$\frac{3}{2}$
		2		-4		2.75	
0	3		-2		3		
		0		-1			
1	3		-3				
		-3					
1	3						

Hinzufügen der benötigten Stützstellen

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_i$	$\delta^6 y_i$
-1	$2,\ [x_0]$						
		$3,\ [x_0, x_0]$					
-1	$2,\ [x_0]$		$-2,\ [x_0, x_0, x_1]$				
		$1,\ [x_0, x_1]$		$3,\ [x_0, x_0, x_1, x_1]$			
0	$3,\ [x_1]$		$1,\ [x_0, x_1, x_1]$		$-2,\ [x_0, x_0, x_1, x_1, x_1]$		
		$2,\ [x_1, x_1]$		$1,\ [x_0, x_1, x_1, x_1]$		$-\frac{1}{4},\ [x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_2]$	
0	$3,\ [x_1]$		$2,\ [x_1, x_1, x_1]$		$-2.5,\ [x_0, x_1, x_1, x_1, x_2]$		$\frac{3}{2},\ [x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$
		$2,\ [x_1, x_1]$		$-4,\ [x_1, x_1, x_1, x_2]$		$2.75,\ [x_0, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$	
0	$3,\ [x_1]$		$-2,\ [x_1, x_1, x_2]$		$3,\ [x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$		
		$0,\ [x_1, x_2]$		$-1,\ [x_1, x_1, x_2, x_2]$			
1	$3,\ [x_2]$		$-3,\ [x_1, x_2, x_2]$				
		$-3,\ [x_2, x_2]$					
1	$3,\ [x_2]$						

Daraus ergibt sich analog zu S. 55 das Polynom

$$\begin{aligned} p(x) &= (((((\frac{3}{2}(x - x_2) - \frac{1}{4})(x - x_1) - 2)(x - x_1) + 3)(x - x_1) - 2)(x - x_0) + 3)(x - x_0) + 2 \\ &= (((((\frac{3}{2}(x - 1) - \frac{1}{4})(x - 0) - 2)(x - 0) + 3)(x - 0) - 2)(x + 1) + 3)(x + 1) + 2 \end{aligned}$$

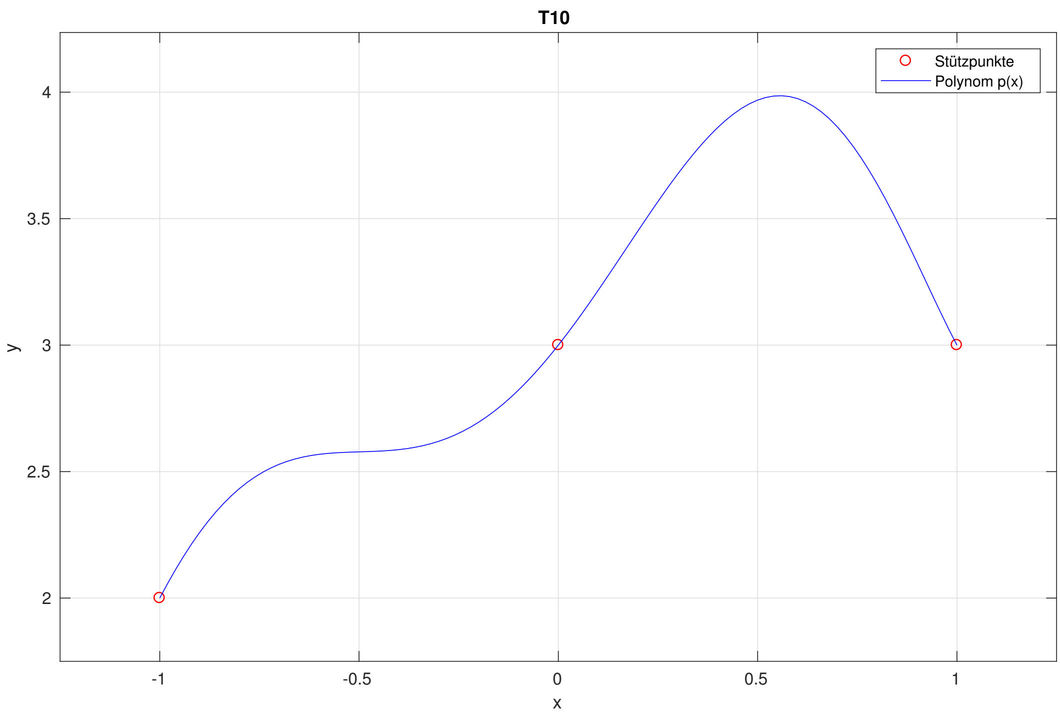

Figure 2: T10 Stützpunkte und Interpolationspolynom $p(x)$

T11

a) Schreiben Sie für natürliche Splines das zugehörige lineare Gleichungssystem für die Momente $M_0, \dots, M_n$ in Matrizen-Schreibweise an.

Nach Definition 3.9, S. 62:

Natürlicher Spline: $s''(x_0) = s(x_n) = 0$

Die Momente an beiden Enden des Balken sind 0 $\Rightarrow$ (3.90)$M_0 = 0$ und $M_n = 0$

Das hergeleitete lineare Gleichungssystem für die Momente M_i lautet

$$\frac{h_i}{6} M_i + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+2} = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \quad i = 0, \dots n-2$$

Bsp. n=7

Um die Form einer Tridiagonalmatrix zu erreichen, müssen M_0 und M_7 gestrichen werden.

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} \cancel{h_0 M_0} + 2(h_0+h_1)M_1 + h_1 M_2 \\ h_1 M_1 + 2(h_1+h_2)M_2 + h_2 M_3 \\ h_2 M_2 + 2(h_2+h_3)M_3 + h_3 M_4 \\ h_3 M_3 + 2(h_3+h_4)M_4 + h_4 M_5 \\ h_4 M_4 + 2(h_4+h_5)M_5 + h_5 M_6 \\ h_5 M_5 + 2(h_5+h_6)M_6 + \cancel{h_6 M_7} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 2(h_4+h_5) & h_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 & 2(h_5+h_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{M_0} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ \cancel{M_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ \frac{y_5-y_4}{h_4} - \frac{y_4-y_3}{h_3} \\ \frac{y_6-y_5}{h_5} - \frac{y_5-y_4}{h_4} \\ \frac{y_7-y_6}{h_6} - \frac{y_6-y_5}{h_5} \end{bmatrix}$$

Allgemein

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & & & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & & & & & \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & 0 & h_i & 2(h_i+h_{i+1}) & h_{i+1} & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & & & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2}-y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

b) Stellen Sie die beiden "fehlenden" Gleichungen für die Momente $M_0, \dots, M_n$ für periodische Splines mit $s(x_0) = s(x_n)$, $s'(x_0) = s'(x_n)$ und $s''(x_0) = s''(x_n)$ auf.

Wie sieht die Matrix des gesamten Gleichungssystems aus? Ist sie auch eine Tridiagonalmatrix?