

4. Numerik Übungen 2017/18

T5

Führen Sie eine Rundungsfehleranalyse für die zentrale Differenz $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ durch.
Analog zu 2.2 Rundungsfehler S20.

$$\begin{aligned}\tilde{f}'_h(x) &= rd\left(\frac{rd(rd(f(rd(x+h))) - rd(f(rd(x-h))))}{2h}\right) \\ &= rd\left(\frac{rd(rd(f((x+h)(1+\varepsilon_1))) - rd(f((x-h)(1+\varepsilon_2))))}{2h}\right) \\ &= rd\left(\frac{rd(f((x+h)(1+\varepsilon_1))(x+\varepsilon_3) - f((x-h)(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_4))}{2h}\right) \\ &= rd\left(\frac{(f((x+h)(1+\varepsilon_1))(x+\varepsilon_3) - f((x-h)(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_4))(1+\varepsilon_5)}{2h}\right) \\ &= \frac{(f((x+h)(1+\varepsilon_1))(x+\varepsilon_3) - f((x-h)(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_4))(1+\varepsilon_5)}{2h}(1+\varepsilon_6)\end{aligned}$$

Durch

$$\begin{aligned}&(1+\varepsilon_6)(1+\varepsilon_5)(1+\varepsilon_1) \\ &(1+\varepsilon_6)(1+\varepsilon_5+\varepsilon_1+\varepsilon_5\varepsilon_1) \\ &1+\varepsilon_5+\varepsilon_1+\varepsilon_5\varepsilon_1+\varepsilon_6+\varepsilon_6\varepsilon_5+\varepsilon_1\varepsilon_6+\varepsilon_1\varepsilon_5\varepsilon_6\end{aligned}$$

folgt mit der Vereinfachung

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_i &= \varepsilon_i + \varepsilon_5 + \varepsilon_6, i = 3, 4 \\ 1 + \tilde{\varepsilon}_i + \underbrace{\varepsilon_5\varepsilon_1 + \varepsilon_6\varepsilon_5 + \varepsilon_1\varepsilon_6 + \varepsilon_1\varepsilon_5\varepsilon_6}_{O(\varepsilon s^2)} \\ (1+\varepsilon_6)(1+\varepsilon_5)(1+\varepsilon_1) &= 1 + \tilde{\varepsilon}_i + O(\varepsilon s^2)\end{aligned}$$

und damit

$$\tilde{f}'_h(x) = \frac{f((x+h)(1+\varepsilon_1))(1+\tilde{\varepsilon}_3+O(\varepsilon s^2)) - f((x-h)(1+\varepsilon_2))(1+\tilde{\varepsilon}_4+O(\varepsilon s^2))}{2h}.$$

Mit der Taylor Annäherung $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + O(2h)$ und der Umformung

$$\begin{aligned}f((x+h)(1+\varepsilon_3)) &= f(x+h+\varepsilon_3(x+h)) \\ f((x-h)(1+\varepsilon_4)) &= f(\underbrace{x-h}_x + \underbrace{\varepsilon_4(x-h)}_h)\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}f((x+h)(1+\varepsilon_3)) &= f(x+h) + \varepsilon_3(x+h)f'(x+h) + O(\varepsilon_3^2) \\ f((x-h)(1+\varepsilon_4)) &= f(x-h) + \varepsilon_4(x-h)f'(x-h) + O(\varepsilon_4^2)\end{aligned}$$

Hiermit kann man $\tilde{f}'_h(x)$ umformen zu

$$\begin{aligned}\tilde{f}'_h(x) &= \frac{1}{2h} \left[(f(x+h) + \varepsilon_1(x+h)f'(x+h) + O(\varepsilon_1^2))(1+\tilde{\varepsilon}_3+O(\varepsilon s^2)) \right. \\ &\quad \left. - (f(x-h) + \varepsilon_2(x-h)f'(x-h) + O(\varepsilon_2^2))(1+\tilde{\varepsilon}_4+O(\varepsilon s^2)) \right] \\ &= \frac{1}{2h} \left[(f(x+h) + \varepsilon_1(x+h)f'(x+h) + O(\varepsilon_1^2)) \right. \\ &\quad + \tilde{\varepsilon}_3 f(x+h) + \tilde{\varepsilon}_3 \varepsilon_1(x+h)f'(x+h) \\ &\quad + \tilde{\varepsilon}_3 O(\varepsilon_1^2) + O(\varepsilon s^2)(\dots) \\ &\quad \left. - (f(x-h) + \varepsilon_2(x-h)f'(x-h) + O(\varepsilon_2^2))(1+\tilde{\varepsilon}_4+O(\varepsilon s^2)) \right].\end{aligned}$$

Wegen $|\varepsilon_i| \leq \text{eps}$ können alle Terme höherer Ordnung in ε und eps zu $O(\text{eps}^2)$ zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned}\tilde{f}'_h(x) &= \frac{1}{2h} \left[f(x+h) + \varepsilon_1(x+h)f'(x+h) + \tilde{\varepsilon}_3 f(x+h) + O(\text{eps}^2) \right. \\ &\quad \left. - \left(f(x-h) + \varepsilon_2(x-h)f'(x-h) + \tilde{\varepsilon}_4 f(x-h) + O(\text{eps}^2) \right) \right] \\ &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{1}{2h} O(\varepsilon) + \frac{1}{2h} O(\text{eps}^2) \\ &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{1}{2h} O(\text{eps}^2)\end{aligned}$$

Der Gesamtfehler $\text{err}(h)$

$$\begin{aligned}\text{err}(h) &= \tilde{f}'_h(x) - f'(x) \\ &= \left[\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{1}{2h} O(\text{eps}^2) \right] - \left[\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \right]\end{aligned}$$

eribt sich aus Verfahrensfeler $V(h)$ und Rundungsfehler $R(h)$

$$= \underbrace{\frac{h^2}{6} f'''(\xi)}_{V(h)} + \underbrace{\frac{1}{2h} O(\text{eps}^2)}_{R(h)}$$

T6

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2)$. Wie lassen sich die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

numerisch berechnen?

Ausgehend vom eindimensionalen Verfahren der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

lautet das Verfahren der zweiten Ableitung $f''(x)$ für mehrere Variablen bei gleicher Schrittweite h in alle Richtungen allgemein

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - h, x_{i+1}, \dots, x_n)}{h^2}.$$

Mit $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{f}(x_1 + h, x_2) - \mathbf{f}(x_1, x_2) + \mathbf{f}(x_1 - h, x_2)}{h^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{f}(x_1, x_2 + h) - \mathbf{f}(x_1, x_2) + \mathbf{f}(x_1, x_2 - h)}{h^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{f}(x_1 + h, x_2 + h) - \mathbf{f}(x_1 + h, x_2 - h) - \mathbf{f}(x_1 - h, x_2 + h) + \mathbf{f}(x_1 - h, x_2 - h)}{4h^2}. \end{aligned}$$

Herleitung für Letzteres

Einfachste gemischte Ableitung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$$

Wenn wir

$$g(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad (1)$$

setzen, können wir die Annäherung

$$g'(a) \approx \frac{g(a+h) - g(a-h)}{2h}$$

benützen. Durch einsetzen in (1) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a-h, b)}{2h}. \quad (2)$$

Gleiche Abschätzungen können wir nun für partiellen Ableitungen ersten Grades aus (2) treffen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b) &\approx \frac{f(a+h, b+h) - f(a+h, b-h)}{2h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a-h, b) &\approx \frac{f(a-h, b+h) - f(a-h, b-h)}{2h} \end{aligned}$$

Eingesetzt in (2) ergibt sich die gewünschte Annäherung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \approx \frac{f(a+h, b+h) - f(a+h, b-h) - f(a-h, b+h) + f(a-h, b-h)}{4h^2}$$