8. Numerik Übungen 2017/18

T14
Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^2 \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x}}\mathbf{dx}$$

mit der Trapezregel und schätzen Sie den Fehler mit Hilfe der Richardson-Extrapolation, d.h. bestimmen Sie für $h = 2$ die Werte $A(h), A((h/2))$ und est. Berechnen Sie auch $Q_{\text{extr.}}(f)$.
Mit einem Auszug aus der Definition der Quadraturformel

$$I(g) = \int_0^1 g(t)\mathrm{dt} \approx \sum_{\mathrm{i}=1}^{s} b_i g(c_i) =: Q(g) \tag{(4.12)}$$

folgt analog zu Bsp. 4.2 (S. 79) mit der Trapetzregel: $s = 2$, $c_i = [0 \quad 1]$, $b_i = [\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{1+x}\mathrm{dx} &\approx \sum_{\mathrm{i}=1}^{s} b_i \frac{1}{1+c_i} \\
&\approx b_1 \frac{1}{1+c_1} + b_2 \frac{1}{1+c_2} \\
&\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+1}\right) \\
&\approx \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Aus der allgemeinen Formel für die Approximation

$$A(h) := Q(f, [\alpha, \alpha+h]) = h \sum_{\mathrm{i}=1}^{s} b_i f(\alpha + c_i h) \approx \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\mathrm{dx} \tag{4.85, S. 99}$$

folgt wiederum mit der Trapetzregel

$$\begin{aligned}
A(h) &= h\Big(b_1 g(0 + c_1 h) + b_2 g(0 + c_2 h)\Big) \\
&= 2\Big(\frac{1}{2}g(0 + 0 \cdot 2) + \frac{1}{2}g(0 + 1 \cdot 2)\Big) \\
&= g(0) + g(2) \\
&= \frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+2} \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Die im Allgemeinen bessere Approximation A(h/2) mit Schrittweite h/2 lautet

$$\begin{aligned}
A(h/2) :&= Q(f,[\alpha,\alpha+h/2]) + Q(f,[\alpha+h/2,\alpha+h]) \qquad (4.86)\\
&= \frac{h}{2}\sum_{\mathrm{i=1}}^{s} b_i f\Big(\alpha + c_i\frac{h}{2}\Big) + \frac{h}{2}\sum_{\mathrm{i=1}}^{s} b_i f\Big(\alpha + \frac{h}{2} + c_i\frac{h}{2}\Big)\\
&= \frac{h}{2}\left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{s} b_i g\Big(\alpha + c_i\frac{h}{2}\Big) + \sum_{\mathrm{i=1}}^{s} b_i g\Big(\alpha + \frac{h}{2} + c_i\frac{h}{2}\Big)\right)\\
&= \frac{h}{2}\left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{s} b_i g\Big(0 + c_i\frac{h}{2}\Big) + \sum_{\mathrm{i=1}}^{s} b_i g\Big(0 + \frac{h}{2} + c_i\frac{h}{2}\Big)\right)\\
&= \frac{h}{2}\left(\left[b_1 g\Big(c_1\frac{h}{2}\Big) + b_2 g\Big(c_2\frac{h}{2}\Big)\right] + \left[b_1 g\Big(\frac{h}{2}(1+c_1)\Big) + b_2 g\Big(\frac{h}{2}(1+c_2)\Big)\right]\right)\\
&= \frac{2}{2}\left(\left[\frac{1}{2}g\Big(0\cdot\frac{2}{2}\Big) + \frac{1}{2}g\Big(1\cdot\frac{2}{2}\Big)\right] + \left[\frac{1}{2}g\Big(\frac{2}{2}(1+0)\Big) + \frac{1}{2}g\Big(\frac{2}{2}(1+1)\Big)\right]\right)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\big[g(0)+g(1)\big] + \big[g(1)+g(2)\big]\Big)\\
&= \frac{1}{2}\left(\Big[\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+1}\Big] + \Big[\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2}\Big]\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\Big[1 + \frac{1}{2}\Big] + \Big[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big]\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

Damit lässt sich die Schätzung est für den Fehler von A(h/2) ermitteln, wobei Ordnung $p = 2$ aus Bsp. 4.4, S. 85 bekannt ist.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x)\mathrm{dx} - A(h/2) \approx \frac{A(h/2) - A(h)}{2^p - 1} =: \mathrm{est} \qquad (4.92, \text{S. } 100)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{est} &= \frac{\frac{7}{6} - \frac{4}{3}}{2^2 - 1}\\
&= \frac{-\frac{1}{3}}{3}\\
&= -\frac{1}{9} = 1.\dot{1}
\end{aligned}$$

Mit der Richardson-Extrapolation erhält man einen verbesserten Wert, auch extrapolierten Wert, für das bestimmte Integral

$$\int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x)\,\mathrm{dx} \approx A(h/2) + \mathrm{est} =: Q_{\mathrm{extr.}}(f)$$

$$\begin{aligned}
Q_{\mathrm{extr.}}(f) &= \frac{7}{6} + \left(-\frac{1}{9}\right)\\
&= \frac{21-2}{18}\\
&= \frac{19}{18} = 1.0\dot{5}
\end{aligned}$$

Die exakte Lösung ist log(3) ≈ 1.0986, die verbleibende Differenz beträgt 0.043 (Δ3.9%).