VO Numerische Mathematik
2017/18
Theoriefragen

https://github.com/Arkonos/NM_Theorie_1718

8. Februar 2018

1 Zahldarstellung, Rundung und Fehler

1.1. **Wie werden ganze Zahlen binär abgespeichert?**
S. 2

$$b_{N-1}b_{N-2}\dots b_1 b_0 \cong b = \sum_{j=0}^{N-1} b_j 2^j, \quad b_j \in \{0,1\}$$

Beispiel: 23_{10}

$$\begin{aligned} 10101_2 &= 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \\ &= 16+0+0+2+1 = 19_{10} \end{aligned}$$

$$:2 \;\; \frac{19 \quad 9 \quad 4 \quad 2 \quad 1}{1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \quad \to \quad 10011_2$$

1.2. **Wie werden Gleitpunktzahlen (doppelte Genauigkeit) binär abgespeichert?**
S. 3

$$\begin{aligned} &x = (-1)^s \cdot m \cdot 2^e \\ &x \cong s \quad e_{11}e_{10}\dots e_0 \quad (m_0).m_1 m_2 \dots m_{51} \end{aligned}$$

s	…	Vorzeichenbit	$\in \{0,1\}$
m	…	Mantisse	Normiert, $m_0 \overset{!}{=} 1$ wird weggelassen
e	…	Exponent	nach Abzug von b…Bias = 1023 (double)

	s	m	1
single 32 Bit	1	23	8
double 64 Bit	1	52	11

1.3. **Wie werden Gleitpunktzahlen gerundet?**
S. 6
Round to the nearest even.

…	m_M	m_{M+1}	m_{M+2}	m_{M+3}	…	
	x	0	x	x		abrunden
	x	1	1	0		aufrunden
	x	1	0	1		aufrunden
	1	1	0	0		aufrunden
	0	1	0	0		abrunden

1.4. **Wie ist der relative Rundungsfehler definiert?**
S. 6

$$\frac{|\mathrm{rd}(x)-x|}{|x|} \le \frac{2^{-\mathrm{M}-1}\cdot 2^e}{\mathrm{a}\cdot 2^e} \underset{\mathrm{a}\in[1,2)}{\le} 2^{-\mathrm{M}-1} =: \texttt{eps}$$

rd(a) durch rounding to the nearest even

1.5. **Wie groß ist die relative Maschinengenauigkeit eps für doppelt genaue Gleitpunktzahlen? Wie kann man eps experimentell bestimmen?**

1.6. **Was ist die relative/absolute Kondition eines Problems?**

$$\frac{|f(\tilde{x})-f(x)|}{|f(x)|} \le \kappa_{\text{rel.}}\cdot\varepsilon, \quad \kappa_{\text{rel.}} > 0$$

$$|f(\tilde{x})-f(x)| \le \kappa_{\text{abs.}}\cdot\delta, \quad \kappa_{\text{abs.}} > 0$$

Wenn $\kappa_{\text{rel.}}$ klein ist werden Inputfehler nicht übermäßig verstärkt und f gilt als gut konditioniert.

1.7. **Was bedeuten die Begriffe Konsistenz und Konsistenzordnung?**
Def 1.3 Konsistenz, Konsistenzordnung
Ein numerisches Verfahren f_h mit Diskretisierungsweite h zur Bestimmung einer Näherung von $f_h(x)$ an $f(x)$ ist konsistent, falls gilt

$$||f_h(x) - f(x)|| \leq \mathrm{C}\, h^{\mathrm{p}}$$

wobei die Konstante $\mathrm{C} > 0$ nicht von h abhängen darf und $p \geq 1$. Der Exponent p ist dann die Konsistenzordnung und es gilt $f_h \to f$ für $h \to 0$, falls f_h exakt ausgewertet wird.

1.8. **Wodurch unterscheidet sich Konsistenz von Konvergenz?**
$f_h \to f$ konvergiert für $h \to 0$ falls f_h exakt ausgewertet wird. Computer müssen jedoch runden, wodurch wir nur noch von Konsistenz reden können wenn das Verfahren nicht stabil ist.

1.9. **Was bedeutet der Begriff Stabilität?**
S. 15
Ein numerisches Verfahren f heißt stabil, falls bei der numerischen Auswertung $\tilde{f}(x)$ des Verfahrens Fehler wie Rundungsfehler, Abbruchfehler und Verfahrensfehler von Teilschritten nicht übermäßig verstärkt werden im Vergleich zu dem durch die relative Kondition κ_{rel} des Problems verursachten Fehler.
Für die Differenz zwischen numerischer Auswertung $\tilde{f}(x)$ mit obigen Fehlern und exakter Auswertung $f(x)$ gilt dann

$$||\tilde{f}(x) - f(x)|| \leq \mathrm{C} \cdot \kappa_{rel.} \cdot ||f(x)|| \cdot \mathtt{eps}, \quad \mathrm{C} > 0 \text{ klein.}$$

Ein numerisches Verfahren ist insbesondere dann stabil, wenn alle seine Teilschritte gut konditioniert sind.

2 Numerische Differentiation

2.1. **Wie wird mit Hilfe der Vorwärtsdifferenz eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x differenziert? Wie groß ist $\mathbf{h_{opt}}$?**

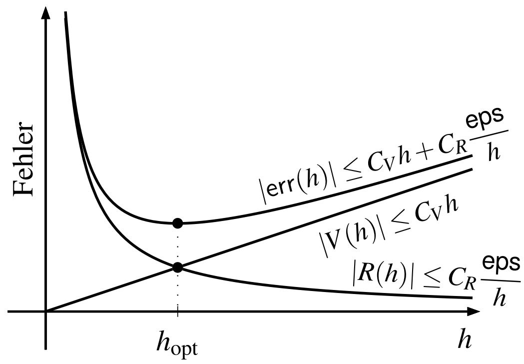
$$f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \mathrm{h_{opt}} = \sqrt{\texttt{eps}}$$

2.2. **Wie wird mit Hilfe der zentralen Differenz eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x differenziert? Wie groß ist $\mathbf{h_{opt}}$**

$$f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-x)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \mathrm{h_{opt}} = \sqrt[3]{\texttt{eps}}$$

2.3. **Wie verhalten sich Verfahrensfehler und Rundungsfehler in Abhängigkeit von der Schrittweite h? Machen Sie eine Skizze.**

$$|V(h)| \leq C_{\mathrm{V}} h$$
$$|R(h)| \leq C_{\mathrm{R}} \frac{\texttt{eps}}{h}$$
$$|\mathrm{err}(h)| \leq C_{\mathrm{V}} h + C_{\mathrm{R}} \frac{\texttt{eps}}{h}$$



2.4. **Wie lässt sich mit Hilfe eines logarithmischen Plots das Verhalten von Verfahrensfehler und Rundungsfehler ablesen? Wie kann man die optimale Schrittweite $\mathbf{h_{opt}}$ ablesen?**

$$\log|\mathrm{err}| = \log\left(C_{\mathrm{V}} h + C_{\mathrm{R}} \frac{\texttt{eps}}{h}\right) \approx \begin{cases} \log\left(C_{\mathrm{R}} \texttt{eps} h^{-q}\right) = -q \log h + \log C_{\mathrm{R}} + \log \texttt{eps}, & \text{links von } \mathrm{h_{opt}}, \\ \log\left(C_{\mathrm{V}} \texttt{eps} h^{p}\right) = p \log h + \log C_{\mathrm{V}}, & \text{rechts von } \mathrm{h_{opt}}. \end{cases}$$

Somit erhält man zwei Geraden der Form $y = kx + d$, wobei $k = -\mathrm{q}$ und $k = \mathrm{p}$ aus dem Plot abgelesen werden können.
Die optimale Schrittweite kann man im Schnittpunkt der beiden Geraden erkennen.

2.5. **Wieso gilt bei der zentralen Differenz für den Verfahrensfehler $\mathbf{V(h) = \mathcal{O}(h^2)}$ statt $\mathbf{\mathcal{O}(h)}$?**
Für die zentrale Differenz werden die Taylorpolynome für $f(x+h)$ und $f(x-h)$ gemittelt. Dabei heben sich die Terme zweiter Ordnung, $\frac{h^2}{2} f''(x)$, auf.

2.6. **Wie wird die zweite Ableitung einer zweimal differenzierbaren Funktion an der Stelle x berechnet? Wie groß ist $\mathbf{h_{opt}}$?**

$$f''(x) = \frac{f(x+h-2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \mathrm{h_{opt}} = \sqrt[(q+p)]{\texttt{eps}} = \sqrt[4]{\texttt{eps}}$$

2.7. **Wie lässt sich die optimale Schrittweite $\mathbf{h_{opt}}$ aus dem Verfahrensfehler $\mathbf{V(h)}$ und dem Rundungsfehler $\mathbf{R(h)}$ bestimmen?**

$$|\mathrm{err}(h)| \leq C_{\mathrm{V}} h + C_{\mathrm{R}} \frac{\texttt{eps}}{h}$$

Der Fehler soll minimal sein und somit $C_{\mathrm{V}} h + C_{\mathrm{R}} \frac{\texttt{eps}}{h} = \min$. Dies führt zu $C_{\mathrm{V}} h^2 + C_{\mathrm{R}} \texttt{eps} = 0$ und somit

$$\mathrm{h_{opt}} = \sqrt{\texttt{eps} \frac{C_{\mathrm{V}}}{C_{\mathrm{R}}}}.$$

Bei $f(x) \approx f'(x) \approx f''(x)$ gilt $C_{\mathrm{V}} \approx C_{\mathrm{R}}$ und somit

$$\mathrm{h_{opt}} = \sqrt{\texttt{eps}}$$

2.8. **Wie berechnet man die Jacobimatrix einer vektorwertigen Funktion f** $:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **durch numerisches Differenzieren?**

Jacobimatrix: $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

Approximation der i-ten Spalte

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \approx \frac{\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{h}$$

2.9. **Wie berechnet man den Gradient einer skalaren Funktion f** $:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **durch numerisches Differenzieren?**

3 Interpolation

3.1. **Wie werden die dividierten Differenzen berechnet?**
Mit Hilfe eines Differenzenschema oder Differenzentableau.
Allgemeines Differenzenschema für 5 Punkte

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		$\delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$			
x_1	y_1		$\delta^2 y_0 = \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{x_2 - x_0}$		
		$\delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		$\delta^3 y_0 = \frac{\delta^2 y_1 - \delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$	
x_2	y_2		$\delta^2 y_1 = \frac{\delta y_2 - \delta y_1}{x_3 - x_1}$		$\delta^4 y_0 = \frac{\delta^3 y_1 - \delta^2 y_0}{x_4 - x_0}$
		$\delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		$\delta^3 y_1 = \frac{\delta^2 y_2 - \delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$	
x_3	y_3		$\delta^2 y_2 = \frac{\delta y_3 - \delta y_2}{x_4 - x_2}$		
		$\delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$			
x_4	y_4				

3.2. **Wie ist das Newtonsche Interpolationspolynom definiert?**

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\delta^2 y_0 + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\delta^{\mathrm{n}} y_0$$

3.3. **Wie wird mit dem Hornerschema ein Polynom $\mathbf{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}$ ausgewertet?**

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x\, a_n))\cdots))$$

3.4. **Wie wird mit dem Hornerschema ein Newtonsches Interpolationspolynom ausgewertet?**

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
x & 0 & x \cdot b_n & x \cdot b_{n-1} & \cdots & x \cdot b_2 & x \cdot b_1 \\
 & \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow & & \nearrow\downarrow & \nearrow\downarrow \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & \boxed{b_0 = p(x)}
\end{array}$$

3.5. **Wie sind die Lagrange-Polynome definiert? Welche Eigenschaften haben sie?**

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots\widehat{(x - x_i)}\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots\widehat{(x_i - x_i)}\cdots(x_i - x_n)}$$

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Wobei die überdachten Terme wegzulassen sind.

3.6. **Wie wird mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Langrangesche Interpolationspolynom berechnet?**

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, \ell_i(x), \quad p(x_j) = y_j$$

3.7. **Erklären Sie die Begriffe Datenfehler, Verstärkungsfaktor, Lebesgue-Funktion und Lebesgue-Konstante in Zusammenhang mit der Polynominterpolation. Was ist die Kondition der Polynominterpolation?**
An einer Stützstelle x_j kann ein Datenfehler ε_j auftreten. Führt man diesen in ein Lagrange-Polynom ein erhält man

$$\overline{p}(x) = \sum_{i=0}^{j-1} (y_i\, \ell_i(x)) + (y_j + \varepsilon_j) + \sum_{i=j+1}^{n} (y_i\, \ell_i(x))\,.$$

Der Fehler ε_i wird also um den Faktor $|\ell_i|$ verstärkt. Wenn alle Knoten mit Fehlern verseht sind ergibt sich

$$\overline{p}(x) = p(x) + \sum_{i=0}^{n} (\varepsilon_i\, \ell_i)\,.$$

Falls die einzelnen Fehler durch $\varepsilon_i \leq \mathrm{M}$ beschränkt sind erhält man für den absoluten Fehler die Abschätzung

$$\underbrace{|\overline{p}(x) - p(x)|}_{\text{abs. Fehler Output}} \leq \mathrm{M} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \overbrace{|\ell_i(x)|}^{\kappa_{\text{abs},i}(x)}}_{\kappa_{\text{abs}}(x)} = \mathrm{M} \cdot \kappa_{\text{abs}}(x).$$

Wobei $\kappa_{\text{abs},i} = |\ell_i(x)|$ der Verstärkungsfaktor für den Datenfehler in der Stützstelle i und die Lebesgue-Funktion $\kappa_{\text{abs}} = \lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)|$ die absolute Kondition für die Polynominterpolation ist. Die schlechteste Konditionszahl $\lambda_n(x)$ im Intervall $[\min_i x_i, \max_i x_i]$ nennen wir Lebesgue-Konstante und erhalten sie durch

$$\max_{x \in [\min_i x_i, \max_i x_i]} \lambda_n(x) := \Lambda_n.$$

3.8. **Was besagt der Satz über den Fehler des Interpolationspolynoms? Wie ist der Verfahrensfehler definiert?**
Gegeben seien $n+1$ verschiedene Stützstellen $x_i, i = 0, \ldots, n$, in einem Intervall $[a, b]$ und eine $n+1$-mal stetig differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$. Dann gilt für den Fehler $f(x) - p(x)$ des Interpolationspolynoms folgende Aussage:
Für alle $x \in [a, b]$ gibt es ein $\xi = \xi(x)$, das also von x abhängen kann, mit

$$\xi \in (\min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \max\{x_0, \ldots, x_n, x\})$$

sodass gilt:

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Somit ergibt sich für den Verfahrensfehler

$$\prod(x) := |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|.$$

3.9. **Wie sind die Tschebyscheff-Polynome definiert? Welche Eigenschaften haben sie?**
Die durch Abbildung $T_n : [-1, 1] \to [-1, 1]$ mit

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

definierten Polynome heißen Tschebyscheff-Polynome. Für sie gilt:

(1) T_n ist ein Polynom n-ten Grades in $x = \cos \phi$.
(2) Rekursionsformel für Tschebyscheff-Polynome:
$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ und $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \ n = 1, 2, \ldots$
(3) $T_n(x) \leq 1$ für $x \in [-1, 1]$.
(4) T_n ist eine gerade oder ungerade Funktion, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.
(5) T_n besitzt ganzzahlige Koeffizienten. Der führende Koeffizient ist 2^{n-1} für $n \geq 1$.
(6) T_n nimmt für $n \geq 1$ im Intervall $[-1, 1]$ (n+1)-mal die Werte ± 1 an, nämlich für $x = \cos \frac{k\pi}{n}, k = 0, 1, \ldots, n$.
Insbesondere gilt $T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n$.
(7) T_n hat n reelle Nullstellen in $[-1, 1]$, nämlich die Tschebyscheff-Knoten

$$t_k^{(n)} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \ k = 1, \ldots, n.$$

3.10. **Wie berechnet man die Knoten für die Tschebyscheff-Interpolationspolynome im Intervall $[-1, 1]$ bzw. [a, b]? Welche Vorteile hat die Verwendung von Tschebyscheff-Knoten im Vergleich zu äquidistanten Stützstellen.**
T_n hat n reelle Nullstellen in $[-1, 1]$, nämlich die Tschebyscheff-Knoten

$$t_k^{(n)} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \ k = 1, \ldots, n.$$

Für $[a, b]$ wird die Transformation

$$[-1, 1] \to [a, b], t \to x(t) = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a)t$$

ausgeführt und man erhält die Tschebyscheff-Knoten in $[a, b]$

$$x_k^{(n)} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k^{(n)}. \quad t_k^{(n)} \text{ ist } k\text{-ter Tschebyscheff-Knoten in } [-1, 1]$$

Die Tschebyscheff-Interpolation ist wesentlich besser konditioniert.

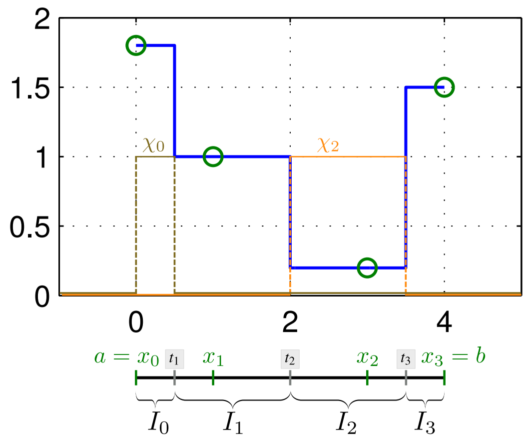
3.11. **Wie lässt sich das dividierte Differenzenschema und das Newtonsche Interpolationspolynom verallgemeinern, falls in den Stützstellen auch noch Ableitungen vorgegeben sind?**
Durch Hermite-Interpolation. Idee: Interpolation durch die Punkte (x_i, y_i), (x_i+h, y_i+hy_i'), $i = 0, \ldots, n$, und Grenzübergang $h \to 0$. Führt zu Differenzenschema in dem Punkte doppelt angeschrieben und Werte für die man mit 0 dividieren müsste durch die gegebenen Ableitungen ersetzt werden.

3.12. **Wie wird mit stückweise konstanten Funktionen interpoliert?**
Das Intervall $[a, b]$ wird in n Intervalle unterteilt, wobei die Intervallsgrenzen genau zwischen den Knoten liegen. Die Treppenfunktion definiert sich aus den Intervallen I_i und den Stützstellen x_i zu

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \chi_i(x)$$

mit

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in I_i, \\ 0, & sonst. \end{cases}$$



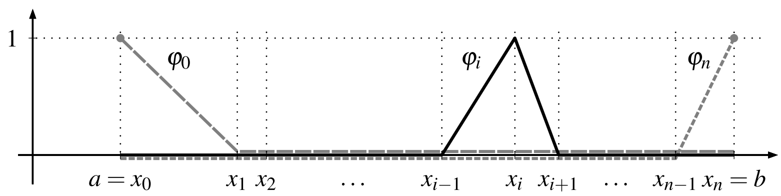
3.13. **Wie wird mit stetigen, stückweise linearen Funktionen interpoliert?**
Wie oben, nur wird χ_i ersetzt durch die Hutfunktion

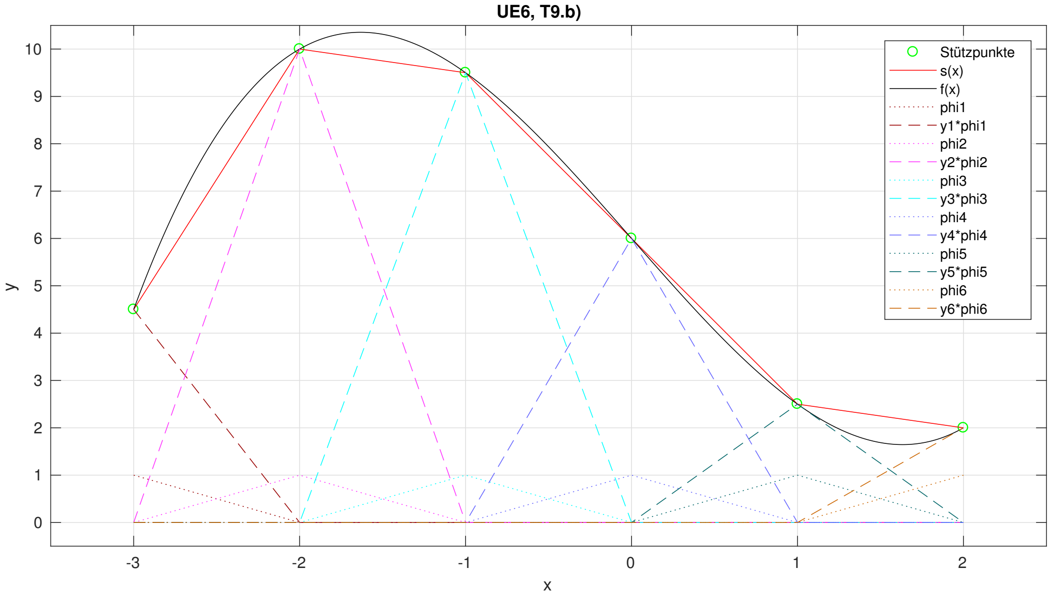
$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \; x \in [x_{i-1}, x_i], & \text{falls } i = 1, \ldots, n \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \; x \in [x_i, x_{i+1}], & \text{falls } i = 0, \ldots, n-1 \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

was analog zu konstanten Funktionen auf

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i(x)$$

führt.





3.14. **Was sind Hutfunktionen und welche Eigenschaften haben sie?**
Stückweise lineare Funktionen

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \; x \in [x_{i-1}, x_i], & \text{falls } i = 1, \dots, n \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \; x \in [x_i, x_{i+1}], & \text{falls } i = 0, \dots, n-1 \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

für die gelten

$$\phi_i(x_k) = \delta_{ij}.$$

3.15. **Was für Eigenschaften besitzen kubische Splines? Was für Typen von kubischen Splines gibt es?**
Eigenschaften:

- $s_i(x_i) = y_i,\; i = 0, \dots, n$ (Interpolationsbedingung)
- $s \in \mathcal{C}^2([a, b])$, d.h. zweimal stetig differenzierbar
- $s_i := s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3([x_i, x_{i+1}]),\; i = 0, \dots, n-1.$

Typen:

- Natürlicher Spline
  $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$
  Die Momente an beiden Enden sind 0.
- Eingespannter Spline (vollständiger Spline)
  $s'(x_0) = y_0',\; s'(x_n) = y_n'$
  Die beiden Enden sind eingespannt und die Steigungen vorgegeben.
- Periodischer Spline
  $s(x_0) = s(x_n),\; s'(x_0) = s'(x_n),\; s''(x_0) = s''(x_n).$
- Not a knot
  s''' ist stetig in x_1 und x_{n-1}
  Auf den ersten und letzten beiden Intervallen wird ein durchgehendes Polynom dritten Grades verwendet.

3.16. **Wieso ist es besser durch viele Punkte einen kubischen Spline zu legen, statt ein Interpolationspolynom zu verwenden?**
Polynome schaukeln sich am Rand auf und sind daher zur Interpolation ungeeignet, wenn man ein Polynom durch viele Punkte mit beliebigen, paarweise verschiedenen Abszissen legen will.

3.17. **Wie wird auf einem rechteckigen Gitter zweidimensional interpoliert?**
Analog zum eindimensionalen Fall benützen wir zwei Lagrange-Polynome

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\widehat{(x-x_i)}\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots\widehat{(x_i-x_i)}\cdots(x_i-x_n)}$$
$$L_j(y) = \frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots\widehat{(y-y_j)}\cdots(y-y_m)}{(y_j-y_0)(y_j-y_1)\cdots\widehat{(y_j-y_j)}\cdots(y_j-y_m)}$$

um auf das Interpolationspolynom

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} z_{ij}\ell_i(x)L_j(y)$$

zu kommen, wobei $\ell_i(x)L_j(y)$ das zur Stützstelle (x_i, y_j) gehörige Lagrange-Polynom ist. Wiederum gilt $l_i(x_i)L_j(y_j) = 1$ und $l_i(x_r)L_j(y_s) = 0$ für alle anderen Punkte $(x_r, y_s) \neq (x_i, y_j)$ des Gitters.
Nun kann man entweder primär von links nach rechts und dann von oben nach unten rechnen, oder umgekehrt, hier nur eine Art.
$p(x, y)$ wird umgeformt zu

$$p(x,y) = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} z_{ij}l_i(x)\right)L_j(y) = \sum_{j=0}^{m} r_j(x)L_j(y).$$

$r_j(x)$ ist das eindeutige Interpolationspolynom vom Grad n durch die Punkte $(x_0, y_i, z_{0j}), \ldots, (x_n, y_j, z_{nj})$.

3.18. **Wie wird die zweidimensionale, stetige, stückweise lineare Interpolierende auf einem rechteckigen Gitter bestimmt?**
Wir betrachten nur ein Rechteck $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ in dem der Punkt (x, y) liegt.

$$s(x,y) = z_{ij}\varphi_i(x)\Phi_j(y) + z_{i+1,i}\varphi_{i+1}(x)\Phi_j(x) + z_{i,j+1}\varphi_i(x)\Phi_{j+1}(y) + z_{i+1,j+1}\varphi_{i+1}(x)\Phi_{j+1}(y)$$

Wobei φ_i und Φ_j die Hutfunktionen in x- und y-Richtung sind.

4 Numerische Integration

4.1. **Was bedeutet *Linearität* und *Positivität* des Integrals?**
Eigenschaften des Integrals und der numerischen Approximation.

- Linearität: $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- Positivität: $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$

4.2. **Erklären Sie den Begriff *Quadraturformel*.**
Eine Quadraturformel $Q = (b_i, c_i)_{i=1}^s$ ist eine Näherungsformel

$$I(g) = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=1}^s b_i g(c_i) =: Q(g)$$

zur numerischen Berechnung eines Integrals auf dem Intervall $[0, 1]$. Die Zahlen $b_1, \ldots, b_s$ heißen Gewichte und $c_1, \ldots, c_s$ Knoten der Quadraturformel, s ist die Anzahl der Stufen. Für die Knoten wird

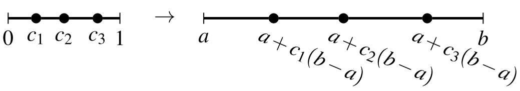
$$0 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_s \leq 1$$

verlangt und für die Gewichte

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_s = 1.$$

Für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ werden die Knoten von $[0, 1]$ nach $[a, b]$ transformiert und es gilt

$$I(g) = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \approx (b-a) \sum_{i=1}^s b_i \underbrace{f(a + c_i(b-a))}_{g(c_i)} =: Q(f, [ab]).$$



4.3. **Nennen Sie einige einfache Quadraturformeln inklusive Knoten und Gewichte.**

Regel	s	c_i		b_i
Linksregel	1	0		1
Rechtsregel	1	1		1
Mittelpunktsregel	1	$\frac{1}{2}$		1
Trapezregel	2	0 1		$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
Simpsonregel	3	0 $\frac{1}{2}$ 1		$\frac{1}{6}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{1}{6}$

4.4. **Erklären Sie den Begriff *zusammengesetzte Quadraturformel*.**
Ist der Abstand $b-a$ sehr groß oder ändert sich der Integrand im Integrationsbereich $[a,b]$ rasch, zerlegt man $[a,b]$ in n Teilintervalle $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n]$ mit $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$. Das Integral wird aufgespalten in eine Summe von n Teilintegralen über die einzelnen Teilintervalle:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Jedes dieser Teilintegrale $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ wird mit einer Quadraturformel numerisch berechnet.
Genauer Definiert mit der Definition aus 4.2:
Es sei eine Quadraturformel $Q=(b_i,c_i)_{i=1}^s$ und eine Unterteilung des Intervalls $[a,b]$ wie oben gegeben. Dann heißt eine Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} Q(f,[x_{k-1}],x_k) = \sum_{k=1}^{n} h_k \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_{k-1}+c_i h_k) =: S_Q(f,x_0,\dots,x_n)$$

mit $h_k=x_k-x_{k-1}$ zusammengesetzte Quadraturformel oder Summe von Quadraturformeln. Für eine äquidistante Unterteilung von $[a,b]$ in n Teilintervalle, also

$$x_k=a+kh,\quad h=\frac{b-a}{n},\quad k=0,\dots,n,$$

haben wir folgende Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} b_i f(x_{k-1}+c_i h) =: S_Q(f,h,[a,b]) = S_Q(f,h).$$

4.5. **Wie erhält man Quadraturformeln mit Hilfe von Polynominterpolation?**

4.6. **Erklären Sie den Begriff *Ordnung* einer Quadraturformel. Wie bestimmt man die Ordnung?**

4.7. **Was sind *Bedingungsgleichungen*?**

4.8. **Erklären Sie die Begriffe *Fehler einer Quadraturformel* und *Fehlerkonstante*.**

4.9. **Was für Abschätzungen gelten für den Fehler einer Quadraturformel bzw. einer zusammengesetzten Quadraturformel? Was muss der Integrand f dabei erfüllen?**

4.10. **Was sind *symmetrische Quadraturformeln* und welche Eigenschaft besitzen sie?**

4.11. **Was ist eine Gaußsche Quadraturformel? Welche Ordnung besitzen sie?**

4.12. **Wie groß kann die Ordnung einer Quadraturformel maximal sein?**

4.13. **Was gilt für die Gewichte einer Gaußschen Quadraturformel?**

4.14. **Wie funktioniert eine Schrittweitensteuerung? Erklären Sie die Begriffe *Fehlerkriterium* und *Fehlerschätzer*.**

4.15. **Erklären Sie den Begriff *Richardson-Extrapolation*. Wie berechnet man est und $Q_e$xtr.**

4.16. **Was passiert bei Integranden mit Singularitäten oder Singularitäten in den Ableitungen?**

4.17. **Wie werden Doppelintegrale auf Rechtecken numerisch berechnet?**

4.18. **Wie werden Doppelintegrale auf Dreiecken numerisch berechnet? Wie überprüft man die Ordnung einer Quadraturformel für Dreiecke?**

4.19. **Was sind *baryzentrische Koordinaten*?**