

VO Numerische Mathematik
2017/18
Theoriefragen

February 1, 2018

1 Zahldarstellung, Rundung und Fehler

1.1. Wie werden ganze Zahlen binär abgespeichert?

S. 2

$$b_{N-1}b_{N-2}\dots b_1b_0 \cong b = \sum_{j=0}^{N-1} b_j 2^j, \quad b_j \in \{0, 1\}$$

Beispiel: 23_{10}

$$\begin{aligned} 10101_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 19_{10} \end{aligned}$$

$$:2 \quad \begin{array}{ccccc} 19 & 9 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow 10011_2$$

1.2. Wie werden Gleitpunktzahlen (doppelte Genauigkeit) binär abgespeichert?

S. 3

$$\begin{aligned} x &= (-1)^s \cdot m \cdot 2^e \\ x &\cong s \quad e_{11}e_{10}\dots e_0 \quad (m_0).m_1m_2\dots m_{51} \end{aligned}$$

s ... Vorzeichenbit $\in \{0, 1\}$
m ... Mantisse Normiert, $m_0 \stackrel{!}{=} 1$ wird weggelassen
e ... Exponent nach Abzug von b... Bias = 1023 (double)

	s	m	l
single 32 Bit	1	23	8
double 64 Bit	1	52	11

1.3. Wie werden Gleitpunktzahlen gerundet?

S. 6

Round to the nearest even.

...	m_M	m_{M+1}	m_{M+2}	m_{M+3}	...
	x	0	x	x	abrunden
	x	1	1	0	aufunden
	x	1	0	1	aufunden
	1	1	0	0	aufunden
	0	1	0	0	abrunden

1.4. Wie ist der relative Rundungsfehler definiert?

S. 6

$$\frac{|\text{rd}(x) - x|}{|x|} \leq \frac{2^{-M-1} \cdot 2^e}{a \cdot 2^e} \stackrel{a \in [1,2)}{\leq} 2^{-M-1} =: \text{eps}$$

1.5. Wie groß ist die relative Maschinengenauigkeit eps für doppelt genaue Gleitpunktzahlen? Wie kann man eps experimentell bestimmen?

1.6. Was ist die relative/absolute Kondition eines Problems?

$$\begin{aligned} \frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} &\leq \kappa_{\text{rel.}} \cdot \varepsilon, \quad \kappa_{\text{rel.}} > 0 \\ |f(\tilde{x}) - f(x)| &\leq \kappa_{\text{abs.}} \cdot \delta, \quad \kappa_{\text{abs.}} > 0 \end{aligned}$$

Wenn $\kappa_{\text{rel.}}$ klein ist werden Inputfehler nicht übermäßig verstärkt und f gilt als gut konditioniert.

1.7. Was bedeuten die Begriffe Konsistenz und Konsistenzordnung?

Def 1.3 Konsistenz, Konsistenzordnung

Ein numerisches Verfahren f_h mit Diskretisierungsweite h zur Bestimmung einer Näherung von $f_h(x)$ an $f(x)$ ist konsistent, falls gilt

$$\|f_h(x) - f(x)\| \leq C h^p$$

wobei die Konstante $C > 0$ nicht von h abhängen darf und $p \geq 1$. Der Exponent p ist dann die Konsistenzordnung und es gilt $f_h \rightarrow f$ für $h \rightarrow 0$, falls f_h exakt ausgewertet wird.

1.8. Wodurch unterscheidet sich Konsistenz von Konvergenz?

$f_h \rightarrow f$ konvergiert für $h \rightarrow 0$ falls f_h exakt ausgewertet wird. Computer müssen jedoch runden, wodurch wir nur noch von Konsistenz reden können wenn das Verfahren nicht stabil ist.

1.9. Was bedeutet der Begriff Stabilität?

S. 15

Ein numerisches Verfahren f heißt stabil, falls bei der numerischen Auswertung $\tilde{f}(x)$ des Verfahrens Fehler wie Rundungsfehler, Abbruchfehler und Verfahrensfehler von Teilschritten nicht übermäßig verstärkt werden im Vergleich zu dem durch die relative Kondition κ_{rel} des Problems verursachten Fehler.

Für die Differenz zwischen numerischer Auswertung $\tilde{f}(x)$ mit obigen Fehlern und exakter Auswertung $f(x)$ gilt dann

$$\|\tilde{f}(x) - f(x)\| \leq C \cdot \kappa_{rel} \cdot \|f(x)\| \cdot \text{eps}, \quad C > 0 \text{ klein.}$$

Ein numerisches Verfahren ist insbesondere dann stabil, wenn alle seine Teilschritte gut konditioniert sind.

2 Numerische Differentiation

- 2.1. Wie wird mit Hilfe der Vorwärtsdifferenz eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x differenziert? Wie groß ist h_{opt} ?
- 2.2. Wie wird mit Hilfe der zentralen Differenz eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x differenziert? Wie groß ist h_{opt} ?
- 2.3. Wie verhalten sich Verfahrensfehler und Rundungsfehler in Abhängigkeit von der Schrittweite h ? Machen Sie eine Skizze.
- 2.4. Wie lässt sich mit Hilfe eines logarithmischen Plots das Verhalten von Verfahrensfehler und Rundungsfehler ablesen? Wie kann man die optimale Schrittweite h_{opt} ablesen?
- 2.5. Wieso gilt bei der zentralen Differenz für den Verfahrensfehler $V(h) = O(h^2)$ statt $O(h)$?
- 2.6. Wie wird die zweite Ableitung einer zweimal differenzierbaren Funktion an der Stelle x berechnet? Wie groß ist h_{opt} ?
- 2.7. Wie lässt sich die optimale Schrittweite h_{opt} aus dem Verfahrensfehler $V(h)$ und dem Rundungsfehler $R(h)$ bestimmen?
- 2.8. Wie berechnet man die Jacobimatrix einer vektorwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch numerisches Differenzieren?
- 2.9. Wie berechnet man den Gradient einer skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch numerisches Differenzieren?

3 Interpolation

- 3.1. Wie werden die dividierten Differenzen berechnet?
- 3.2. Wie ist das Newtonsche Interpolationspolynom definiert?
- 3.3. Wie wird mit dem Horner Schema ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ausgewertet?
- 3.4. Wie wird mit dem Horner Schema ein Newtonsches Interpolationspolynom ausgewertet?
- 3.5. Wie sind die Lagrange-Polynome definiert? Welche Eigenschaften haben sie?
- 3.6. Wie wird mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Lagrangesche Interpolationspolynom berechnet?
- 3.7. Erklären Sie die Begriffe Datenfehler, Verstärkungsfaktor, Lebesgue-Funktion und Lebesgue-Konstante in Zusammenhang mit der Polynominterpolation. Was ist die Kondition der Polynominterpolation?
- 3.8. Was besagt der Satz über den Fehler des Interpolationspolynoms? Wie ist der Verfahrensfehler definiert?
- 3.9. Wie sind die Tschebyscheff-Polynome definiert? Welche Eigenschaften haben sie?
- 3.10. Wie berechnet man die Knoten für die Tschebyscheff-Interpolationspolynome im Intervall $[-1, 1]$ bzw. $[a, b]$? Welche Vorteile hat die Verwendung von Tschebyscheff-Knoten im Vergleich zu äquidistanten Stützstellen.
- 3.11. Wie lässt sich das dividierte Differenzenschema und das Newtonsche Interpolationspolynom verallgemeinern, falls in den Stützstellen auch noch Ableitungen vorgegeben sind?
- 3.12. Wie wird mit stückweise konstanten Funktionen interpoliert?
- 3.13. Wie wird mit stetigen, stückweise linearen Funktionen interpoliert?
- 3.14. Was sind Hutfunktionen und welche Eigenschaften haben sie?
- 3.15. Was für Eigenschaften besitzen kubische Splines? Was für Typen von kubischen Splines gibt es?
- 3.16. Wieso ist es besser durch viele Punkte einen kubischen Spline zu legen, statt ein Interpolationspolynom zu verwenden?
- 3.17. Wie wird auf einem rechteckigen Gitter zweidimensional interpoliert?
- 3.18. Wie wird die zweidimensionale, stetige, stückweise lineare Interpolierende auf einem rechteckigen Gitter bestimmt?

4 Numerische Integration

- 4.1. Was bedeutet *Linearität* und *Positivität* des Integrals?
- 4.2. Erklären Sie den Begriff *Quadraturformel*.
- 4.3. Nennen Sie einige einfache Quadraturformeln inklusive Knoten und Gewichte.
- 4.4. Erklären Sie den Begriff *zusammengesetzte Quadraturformel*.
- 4.5. Wie erhält man Quadraturformeln mit Hilfe von Polynominterpolation?
- 4.6. Erklären Sie den Begriff *Ordnung* einer Quadraturformel. Wie bestimmt man die Ordnung?
- 4.7. Was sind *Bedingungsgleichungen*?
- 4.8. Erklären Sie die Begriffe *Fehler einer Quadraturformel* und *Fehlerkonstante*.
- 4.9. Was für Abschätzungen gelten für den Fehler einer Quadraturformel bzw. einer zusammengesetzten Quadraturformel? Was muss der Integrand f dabei erfüllen?
- 4.10. Was sind *symmetrische Quadraturformeln* und welche Eigenschaft besitzen sie?
- 4.11. Was ist eine Gaußsche Quadraturformel? Welche Ordnung besitzen sie?
- 4.12. Wie groß kann die Ordnung einer Quadraturformel maximal sein?
- 4.13. Was gilt für die Gewichte einer Gaußschen Quadraturformel?
- 4.14. Wie funktioniert eine Schrittweitensteuerung? Erklären Sie die Begriffe *Fehlerkriterium* und *Fehlerschätzer*.
- 4.15. Erklären Sie den Begriff *Richardson-Extrapolation*. Wie berechnet man est und Q_{extr} .
- 4.16. Was passiert bei Integranden mit Singularitäten oder Singularitäten in den Ableitungen?
- 4.17. Wie werden Doppelintegrale auf Rechtecken numerisch berechnet?
- 4.18. Wie werden Doppelintegrale auf Dreiecken numerisch berechnet? Wie überprüft man die Ordnung einer Quadraturformel für Dreiecke?
- 4.19. Was sind *baryzentrische Koordinaten*?