

5. Numerik Übungen 2017/18

T7

Gegeben sind die Punkte $(-2, 71)$, $(-1, 63)$, $(1, 35)$, $(1, 39)$ und $(4, -37)$.

Erstellen Sie das Differenzentableau und bestimmen Sie das Newtonsche Interpolationspolynom durch die Punkte.

Allgemeines Differenzenschema für 5 Punkte

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$
x_0	y_0				
x_1	y_1	$\delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$	$\delta^2 y_0 = \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{x_2 - x_0}$	$\delta^3 y_0 = \frac{\delta^2 y_1 - \delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$	$\delta^4 y_0 = \frac{\delta^3 y_1 - \delta^3 y_0}{x_4 - x_0}$
x_2	y_2	$\delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\delta^2 y_1 = \frac{\delta y_2 - \delta y_1}{x_3 - x_1}$	$\delta^3 y_1 = \frac{\delta^2 y_2 - \delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$	
x_3	y_3	$\delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$\delta^2 y_2 = \frac{\delta y_3 - \delta y_2}{x_4 - x_2}$		
x_4	y_4	$\delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$			

Mit den Punkten

x_i	y_i
-2	71
-1	63
1	35
2	39
4	-37

ergibt sich

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$
-2	71				
-1	63	$\delta y_0 = \frac{63-71}{-1+2} = -8$	$\delta^2 y_0 = \frac{-14+8}{1+2} = -2$	$\delta^3 y_0 = \frac{6+2}{2+2} = 2$	$\delta^4 y_0 = \frac{-4-2}{4+2} = -1$
1	35	$\delta y_1 = \frac{35-63}{1+1} = -14$	$\delta^2 y_1 = \frac{4+14}{2+1} = 6$	$\delta^3 y_1 = \frac{-14-6}{4+1} = -4$	
2	39	$\delta y_2 = \frac{39-35}{2-1} = 4$	$\delta^2 y_2 = \frac{-38-4}{4-1} = -14$		
4	-37	$\delta y_3 = \frac{-37-39}{4-2} = -38$			

kürzer

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$
-2	71				
-1	63	$\delta y_0 = -8$	$\delta^2 y_0 = -2$	$\delta^3 y_0 = 2$	$\delta^4 y_0 = -1$
1	35	$\delta y_1 = -14$	$\delta^2 y_1 = 6$	$\delta^3 y_1 = -4$	
2	39	$\delta y_2 = 4$	$\delta^2 y_2 = -14$		
4	-37	$\delta y_3 = -38$			

Das Interpolationspolynom lautet allgemein für $n+1$ Punkte nach Newton

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\delta^2 y_0 + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})\delta^n y_0.$$

Mit obigen Differenzenschema ergibt sich

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 71 + (x+2)(-8) + (x+2)(x+1)(-2) + (x+2)(x+1)(x-1)2 + (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(-1) \\
 &= 71 + (x+2)(-8) + (x^2+3x+2)(-2) + (x^3+2x^2-x-2)2 + (x^4-5x^2+4)(-1) \\
 &= 71 - 8x - 16 - 2x^2 - 6x - 4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 - x^4 + 5x^2 - 4 \\
 &= -x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 16x + 43 \\
 &= (-x^3 + 2x^2 + 7x - 16)x + 43 \\
 &= ((-x^2 + 2x + 7)x - 16)x + 43 \\
 &= (((-x + 2)x + 7)x - 16)x + 43 \\
 p(x) &= ((((-1)x + 2)x + 7)x - 16)x + 43
 \end{aligned}$$

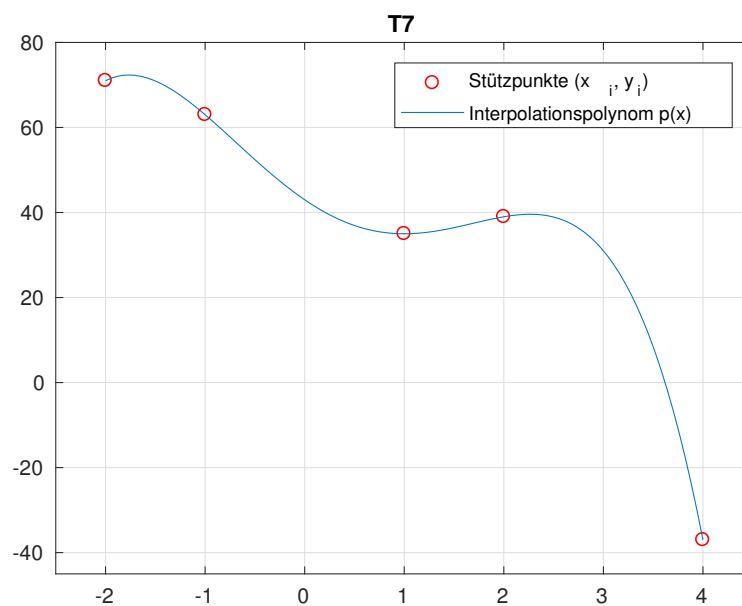


Figure 1: Punkte (x_i, y_i) und Interpolationspolynom $p(x)$

T8

Werten Sie das Newtonsche Interpolationspolynom aus Aufgabe (T7) mit Hilfe des Horner-Schemas für Newtonsche Interpolationspolynome an den Stellen $x = 2$ und $x = 3$ aus.

Allgemein nach Herausheben der Faktoren $(x - x_i)$ beim Newtonschen Interpolationspolynom

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)(\delta y_0 + (x - x_1)(\delta^2 y_0 + \dots + (x - x_{n-2})(\delta^{n-1} y_0 + (x - x_{n-1})\delta^n y_0) \dots)).$$

Für unser Beispiel gilt somit

$$\begin{aligned} p(x) &= 71 + (x+2)(-8) + (x+2)(x+1)(-2) + (x+2)(x+1)(x-1) \cdot 2 + (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(-1) \\ &= 71 + (x+2)(-8 + (x+1)(-2 + (x-1)(2 + (x-2)(-1)))) \end{aligned}$$

Das Schema für die Rechnung per Hand lautet allgemein

$$p(x) = \delta^0 y_0 + (x - x_0)\delta^1 y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\delta^2 y_0 + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})\delta^n y_0.$$

x	$\delta^n y_0$	$\delta^{n-1} y_0$	$\delta^{n-2} y_0$	\dots	$\delta^1 y_0$	$\delta^0 y_0$
	0	$(x - x_{n-1}) \cdot b_n$	$(x - x_{n-2}) \cdot b_{n-1}$	\dots	$(x - x_1) \cdot b_2$	$(x - x_0) \cdot b_1$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	\dots	b_1	$b_0 = p(x)$

Angewendet für $x = 2$ und

$$p(x) = 71 + (x+2)(-8) + (x+2)(x+1)(-2) + (x+2)(x+1)(x-1) \cdot 2 + (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(-1)$$

(vgl. Bsp.3.4 S.45)

$x = 2$	-1	2	-2	-8	71
	\downarrow	$-1 \cdot (2 - 2) = 0$	$2 \cdot (2 - 1) = 2$	$0 \cdot (2 + 1) = 0$	$-8 \cdot (2 + 2) = -32$
	-1	$2 + 0 = 2$	$-2 + 2 = 0$	$-8 + 0 = -8$	$71 - 32 = 39 = p(2)$
$x = 2$	-1	2	-2	-8	71
	\downarrow	0	2	0	-32
	-1	2	0	-8	$39 = p(2)$

Alternativ für $x = 2$ und $p(x) = -x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 16x + 43$ geschrieben (vgl. Bsp.3.3 S.45)

$x = 2$	-1	2	7	-16	43
	\downarrow	$-1 * 2 = -2$	$0 * 2 = 0$	$7 * 2 = 14$	$-2 * 2 = -4$
	-1	$2 + (-2) = 0$	$0 * 7 = 7$	$-16 + 14 = -2$	$43 + (-4) = 39 = p(2)$
$x = 2$	-1	2	7	-16	43
	\downarrow	-2	0	14	-4
	-1	0	7	-2	$39 = p(2)$

mit $x = 3$

$x = 3$	-1	2	7	-16	43
	\downarrow	$-1 * 3 = -3$	$-1 * 3 = -3$	$4 * 3 = 12$	$-4 * 3 = -12$
	-1	$-3 + 2 = -1$	$-3 + 7 = 4$	$12 - 16 = -4$	$-12 + 43 = 31 = p(3)$
$x = 2$	-1	2	7	-16	43
	\downarrow	-3	-3	12	-12
	-1	-1	4	-4	$31 = p(3)$