

## 6. Numerik Übungen 2017/18

T9

a) Prüfen Sie nach, ob die Formel (3.38) für die Lagrange-Polynome  $l_i$  wirklich die Bedingung  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$  erfüllt.  
S. 47

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \quad (3.37)$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\widehat{(x-x_i)}\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots\widehat{(x_i-x_i)}\cdots(x_i-x_n)} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} i = j, \quad l_i(x_i) &= \frac{\cancel{(x_i-x_0)}\cancel{(x_i-x_1)}\cdots\cancel{(x_i-x_i)}\cdots\cancel{(x_i-x_n)}}{\cancel{(x_i-x_0)}\cancel{(x_i-x_1)}\cdots\cancel{(x_i-x_i)}\cdots\cancel{(x_i-x_n)}} = 1 \\ i \neq j, \quad l_i(x_j) &= 0 \Rightarrow (x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots\cancel{(x_j-x_i)}\cdots(x_j-x_n) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\text{Wahr, wenn } x_j \in x \end{aligned}$$

b) Interpolieren Sie  $f(x) = 6 - 4x + \frac{1}{2}x^3$  an den Stützstellen  $x_k = k - 3, k = 0, \dots, 5$ , durch eine stückweise lineare Funktion  $s$ . Geben Sie dazu die gesuchte stückweise lineare Funktion  $s$  als Linearkombination

$$s(x) = \sum_{k=0}^5 y_k \phi_k(x)$$

von Hutfunktionen  $\phi_k(x)$  an.

Sie brauchen die Hutfunktionen  $\phi_k(x)$  nicht explizit anzugeben, eine Skizze mit der Funktion  $f$ , der Interpolierenden  $s$ , allen auftretenden Hutfunktionen  $\phi_k(x)$  und Vielfachen  $y_k \phi_k(x)$  (mit Nummerierung) ist ausreichend.

S. 59

$$x = [-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2], \quad s(x) = \sum_{i=0}^n y_i \phi_i(x)$$

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] & \text{falls } i = 1, \dots, n \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] & \text{falls } i = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \phi_0(x) &= \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-2-x}{-2+3}, & x \in [-3, -2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \phi_2(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{x_3-x}{x_3-x_2}, & x \in [x_2, x_3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x+2}{-1+2}, & x \in [-2, -1] \\ \frac{0-x}{0+1}, & x \in [-1, 0] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

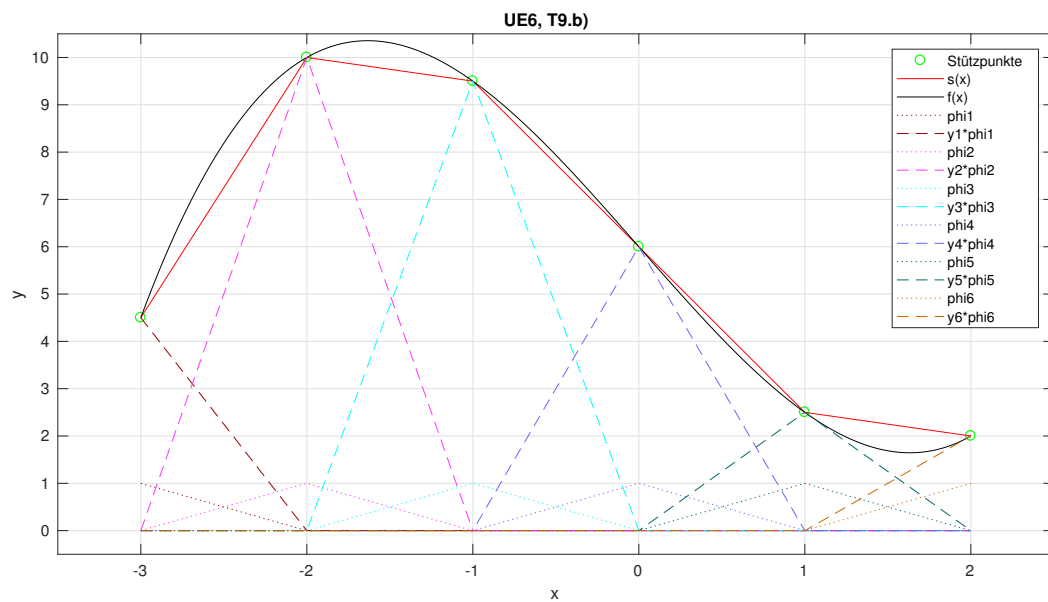


Figure 1: T9.b Stützpunkte, Funktion  $f$ , Stückweise lineare Interpolation  $s$ , Hutfunktionen ohne und mit Skalierung.

# T10

Gegeben sind die Punkte  $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ ,  $(x_1, y_1) = (0, 3)$  und  $(x_2, y_2) = (1, 3)$  sowie die Ableitungen  $y'_0 = 3$ ,  $y'_1 = 2$ ,  $y'_2 = -3$  und  $y''_1 = 4$ .

Bestimmen Sie ein Polynom  $p$ , sodass  $p(x_i) = y_i$ ,  $p'(x_i) = y'_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , und  $p''(x_1) = y''_1$ .

Zeichnen Sie das Polynom  $p$  und die Punkte in MATLAB.

S. 54

Allgemeines Differenzenschema für Hermite-Interpolation mit gegebenen Ableitungen vom Grad 2

$x_i$	$y_i$	$\delta y_i$	$x_i$	$y_i$	$\delta y_i$
$x_0$	$y_0$		$x_0$	$y_0$	
		$\frac{y_0 + hy'_0 - y_0}{x_0 + h - x_0} = y'_0$	$x_0$	$y_0$	$y'_0$
$x_0 + h \rightarrow x_0$	$y_0 + hy'_0 \rightarrow y_0$		$x_0$	$y_0$	
		$\frac{y_1 - (y_0 + hy'_0)}{x_1 - (x_0 + h)} \rightarrow \delta y_0$	$x_1$	$y_1$	$\delta y_0$
$x_1$	$y_1$		$x_1$	$y_1$	
		$\frac{y_1 + hy'_1 - y_1}{x_1 + h - x_1} = y'_1$	$x_1$	$y_1$	$y'_1$
$x_1 + h \rightarrow x_1$	$y_1 + hy'_1 \rightarrow y_1$		$x_1$	$y_1$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad y'_0 = 3, \quad y'_1 = 2, \quad y'_2 = -3, \quad y''_1 = 4$$

Ausgehend vom Differenzenschema für das Newtonsche Interpolationspolynom

Schritt 1: Vermehrung der Stützstellen, einmal je gegebenen Ableitungsgrad je Stützstelle, hier +1 für  $x_0, x_2$  und +2 für  $x_1$ .

$x_i$	$y_i$		$x_i$	$y_i$	
$x_0$	$y_0$		$-1$	$2$	
$x_0$	$y_0$		$-1$	$2$	
$x_1$	$y_1$		$0$	$3$	
		$\rightarrow$	$0$	$3$	
$x_1$	$y_1$		$0$	$3$	
$x_1$	$y_1$		$0$	$3$	
$x_2$	$y_2$		$1$	$3$	
$x_2$	$y_2$		$1$	$3$	

## Schritt 2: Berechnung des Differenzenschema

Wie gewohnt mit der Merkregel des Newtonschen Interpolationspolynom (S. 38)

Bleibt nach dem Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  nur  $\frac{0}{0}$  muss der Wert mit einer bekannten Ableitung in der Form  $\frac{f^{(g)}(x)}{g!}$  ersetzt werden.

$x_i$	$y_i$	$\delta y_i$		$x_i$	$y_i$	
$x_0$	$y_0$	$\frac{y_0 - y_0}{x_0 - x_0} = \frac{0}{0} \rightarrow y'_0$	$\rightarrow$	-1	2	3
$x_0$	$y_0$	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \delta y_0$		-1	2	$\frac{3-2}{0+1} = 1$
$x_1$	$y_1$	$\frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0} \rightarrow y'_1$		0	3	2
$x_1$	$y_1$	$\frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0} \rightarrow y'_1$		0	3	2
$x_1$	$y_1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \delta y_1$		0	3	$\frac{3-3}{1-0} = 0$
$x_2$	$y_2$	$\frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_2} = \frac{0}{0} \rightarrow y'_2$		1	3	-3
$x_2$	$y_2$			1	3	
$x_2$	$y_2$			1	3	

Hier also  $\frac{f^{(2)}(x_1)}{2!}$

$x_i$	$y_i$	$\delta y_i$	$\delta^2 y_i$		$x_i$	$y_i$	$\delta y_i$	$\delta^2 y_i$
$x_0$	$y_0$	$y'_0$		$\rightarrow$	-1	2	3	
$x_0$	$y_0$	$\frac{\delta y_0 - y'_0}{x_1 - x_0}$			-1	2	1	$\frac{1-3}{0+1} = -2$
$x_1$	$y_1$	$y'_1$			0	3	2	$\frac{2-1}{0+1} = 1$
$x_1$	$y_1$	$\frac{y'_1 - y'_0}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{y''_1}{2!}$			0	3	2	$\frac{4}{2} = 2$
$x_1$	$y_1$	$\frac{\delta y_1 - y'_1}{x_2 - x_1}$			0	3	0	$\frac{0-2}{1-0} = -2$
$x_2$	$y_2$	$\frac{y'_2 - \delta y_1}{x_2 - x_1}$			1	3	-3	$\frac{-3-0}{1-0} = -3$
$x_2$	$y_2$	$y'_2$			1	3		
$x_2$	$y_2$				1	3		

Rest wie bekannt aus UE5 T7

$x_i$	$y_i$	$\delta y_i$	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_i$	$\delta^6 y_i$
-1	2	3					
-1	2		-2				
		1		3			
0	3		1		-2		
		2		1		$-\frac{1}{4}$	
0	3		2		-2.5		$\frac{3}{2}$
		2		-4		2.75	
0	3		-2		3		
		0		-1			
1	3		-3				
		-3					
1	3						

### Hinzufügen der benötigten Stützstellen

$x_i$	$y_i$	$\delta y_i$	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_i$	$\delta^6 y_i$
-1	2, $[x_0]$						
		3, $[x_0, x_0]$					
-1	2, $[x_0]$	-2, $[x_0, x_0, x_1]$					
		1, $[x_0, x_1]$	3, $[x_0, x_0, x_1, x_1]$				
0	3, $[x_1]$	1, $[x_0, x_1, x_1]$	-2, $[x_0, x_0, x_1, x_1, x_1]$				
		2, $[x_1, x_1]$	1, $[x_0, x_1, x_1, x_1]$	$-\frac{1}{4}$ , $[x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_2]$			
0	3, $[x_1]$	2, $[x_1, x_1, x_1]$	-2.5, $[x_0, x_1, x_1, x_1, x_2]$	$\frac{3}{2}$ , $[x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$			
		2, $[x_1, x_1]$	-4, $[x_1, x_1, x_1, x_2]$	2.75, $[x_0, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$			
0	3, $[x_1]$	-2, $[x_1, x_1, x_2]$	3, $[x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$				
		0, $[x_1, x_2]$	-1, $[x_1, x_1, x_2, x_2]$				
1	3, $[x_2]$	-3, $[x_1, x_2, x_2]$					
		-3, $[x_2, x_2]$					
1	3, $[x_2]$						

Daraus ergibt sich analog zu S. 55 das Polynom

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (((((\frac{3}{2}(x - x_2) - \frac{1}{4})(x - x_1) - 2)(x - x_1) + 3)(x - x_1) - 2)(x - x_0) + 3)(x - x_0) + 2 \\
 &= (((((\frac{3}{2}(x - 1) - \frac{1}{4})(x - 0) - 2)(x - 0) + 3)(x - 0) - 2)(x + 1) + 3)(x + 1) + 2
 \end{aligned}$$

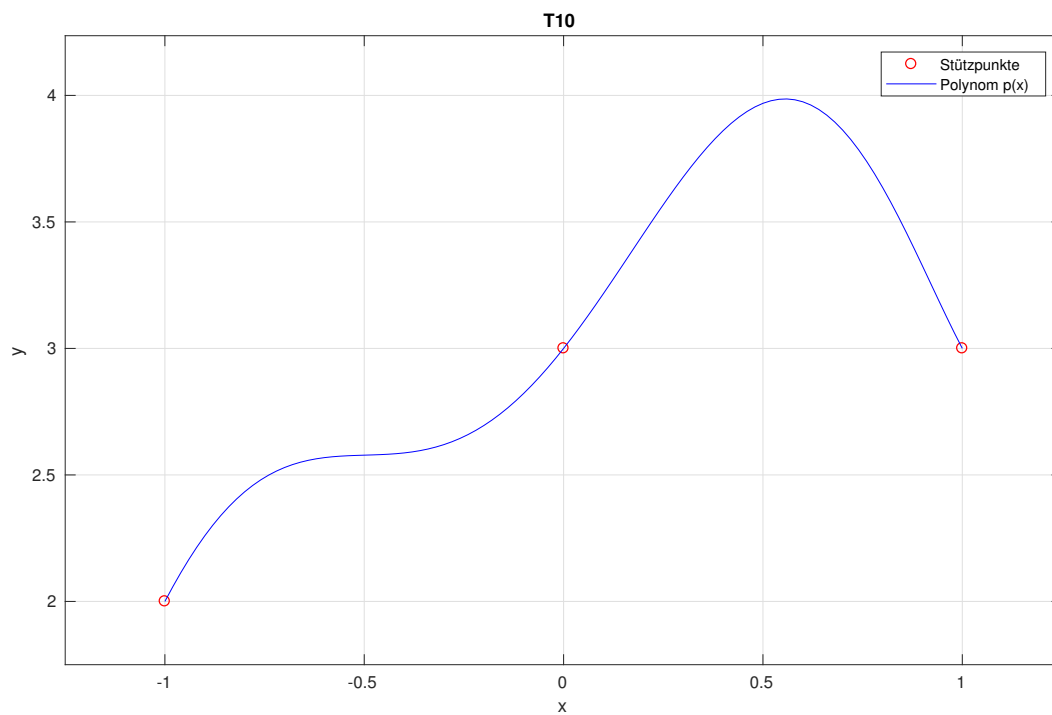


Figure 2: T10 Stützpunkte und Interpolationspolynom  $p(x)$

# T11

a) Schreiben Sie für natürliche Splines das zugehörige lineare Gleichungssystem für die Momente  $M_0, \dots, M_n$  in Matrizen-Schreibweise an.

Nach Definition 3.9, S. 62:

Natürlicher Spline:  $s''(x_0) = s(x_n) = 0$

Die Momente an beiden Enden des Balken sind  $0 \Rightarrow (3.90)M_0 = 0$  und  $M_n = 0$

Das hergeleitete lineare Gleichungssystem für die Momente  $M_i$  lautet

$$\frac{h_i}{6}M_i + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+2} = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \quad i = 0, \dots, n-2$$

Bsp. n=7

Um die Form einer Tridiagonalmatrix zu erreichen, müssen  $M_0$  und  $M_7$  gestrichen werden.

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} \cancel{h_0 M_0} + 2(h_0 + h_1)M_1 + h_1 M_2 \\ h_1 M_1 + 2(h_1 + h_2)M_2 + h_2 M_3 \\ h_2 M_2 + 2(h_2 + h_3)M_3 + h_3 M_4 \\ h_3 M_3 + 2(h_3 + h_4)M_4 + h_4 M_5 \\ h_4 M_4 + 2(h_4 + h_5)M_5 + h_5 M_6 \\ h_5 M_5 + 2(h_5 + h_6)M_6 + \cancel{h_6 M_7} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 2(h_4 + h_5) & h_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 & 2(h_5 + h_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{M_0} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ \cancel{M_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_4 - y_3}{h_3} \\ \frac{y_6 - y_5}{h_5} - \frac{y_5 - y_4}{h_4} \\ \frac{y_7 - y_6}{h_6} - \frac{y_6 - y_5}{h_5} \end{bmatrix}$$

Allgemein

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & & & & & & & \\ & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & & & & & \\ & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 0 & h_i & 2(h_i + h_{i+1}) & h_{i+1} & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & \\ & & & & & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_{i-2} \\ M_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

b) Stellen Sie die beiden "fehlenden" Gleichungen für die Momente  $M_0, \dots, M_n$  für periodische Splines mit  $s(x_0) = s(x_n)$ ,  $s'(x_0) = s'(x_n)$  und  $s''(x_0) = s''(x_n)$  auf.

Wie sieht die Matrix des gesamten Gleichungssystems aus? Ist sie auch eine Tridiagonalmatrix?