

6. Numerik Übungen 2017/18

T9

a) Prüfen Sie nach, ob die Formel (3.38) für die Lagrange-Polynome l_i wirklich die Bedingung $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ erfüllt.
S. 47

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \quad (3.37)$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots \widehat{(x - x_i)} \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots \widehat{(x_i - x_i)} \cdots (x_i - x_n)} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} i = j, \quad l_i(x_i) &= \frac{\cancel{(x_i - x_0)} \cancel{(x_i - x_1)} \cdots \cancel{(x_i - x_i)} \cdots \cancel{(x_i - x_n)}}{\cancel{(x_i - x_0)} \cancel{(x_i - x_1)} \cdots \cancel{(x_i - x_i)} \cdots \cancel{(x_i - x_n)}} = 1 \\ i \neq j, \quad l_i(x_j) &= 0 \Rightarrow (x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots \cancel{(x_j - x_i)} \cdots (x_j - x_n) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\text{Wahr, wenn } x_j \in x \end{aligned}$$

b) Interpolieren Sie $f(x) = 6 - 4x + \frac{1}{2}x^3$ an den Stützstellen $x_k = k - 3, k = 0, \dots, 5$, durch eine stückweise lineare Funktion s . Geben Sie dazu die gesuchte stückweise lineare Funktion s als Linearkombination

$$s(x) = \sum_{k=0}^5 y_k \phi_k(x)$$

von Hutfunktionen $\phi_k(x)$ an.

Sie brauchen die Hutfunktionen $\phi_k(x)$ nicht explizit anzugeben, eine Skizze mit der Funktion f , der Interpolierenden s , allen auftretenden Hutfunktionen $\phi_k(x)$ und Vielfachen $y_k \phi_k(x)$ (mit Nummerierung) ist ausreichend.

S. 59

$$x = [-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2], \quad s(x) = \sum_{i=0}^n y_i \phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] & \text{falls } i = 1, \dots, n \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] & \text{falls } i = 0, \dots, n-1 \\ 0, & & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-2-x}{-2+3}, & x \in [-3, -2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}, & x \in [x_2, x_3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x+2}{-1+2}, & x \in [-2, -1] \\ \frac{0-x}{0+1}, & x \in [-1, 0] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

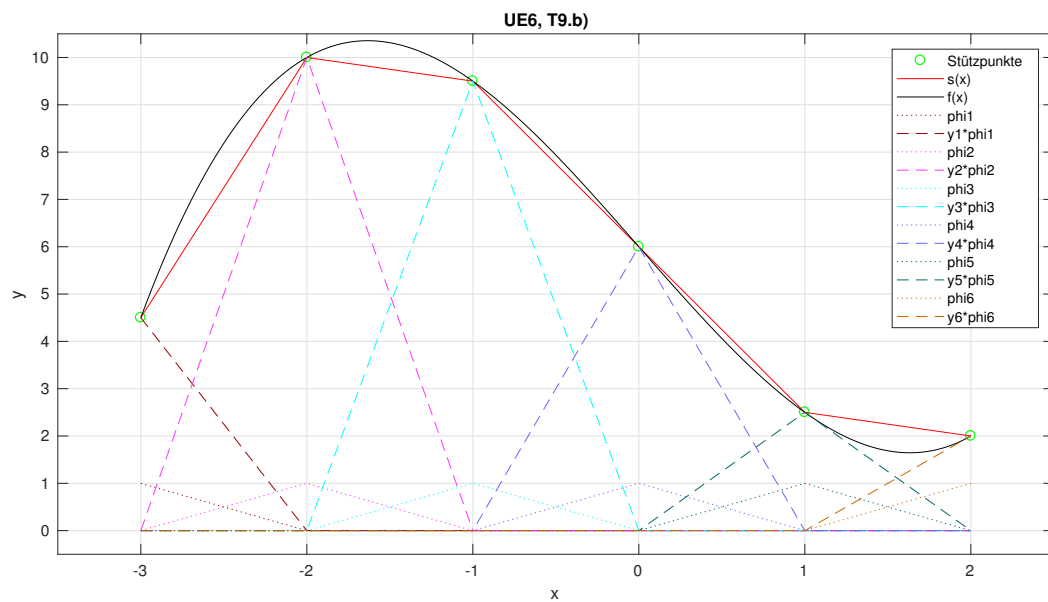


Figure 1: T9.b Stützpunkte, Funktion f , Stückweise lineare Interpolation s , Hutfunktionen ohne und mit Skalierung.

T10

Gegeben sind die Punkte $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, $(x_1, y_1) = (0, 3)$ und $(x_2, y_2) = (1, 3)$ sowie die Ableitungen $y'_0 = 3$, $y'_1 = 2$, $y'_2 = -3$ und $y''_1 = 4$.

Bestimmen Sie ein Polynom p , sodass $p(x_i) = y_i$, $p'(x_i) = y'_i$, $i = 0, 1, 2$, und $p''(x_1) = y''_1$.

Zeichnen Sie das Polynom p und die Punkte in MATLAB.

S. 54

Allgemeines Differenzenschema für Hermite-Interpolation mit gegebenen Ableitungen vom Grad 2

x_i	y_i	δy_i	x_i	y_i	δy_i
x_0	y_0		x_0	y_0	
		$\frac{y_0 + hy'_0 - y_0}{x_0 + h - x_0} = y'_0$	x_0	y_0	y'_0
$x_0 + h \rightarrow x_0$	$y_0 + hy'_0 \rightarrow y_0$		x_0	y_0	
		$\frac{y_1 - (y_0 + hy'_0)}{x_1 - (x_0 + h)} \rightarrow \delta y_0$	x_1	y_1	δy_0
x_1	y_1		x_1	y_1	
		$\frac{y_1 + hy'_1 - y_1}{x_1 + h - x_1} = y'_1$	x_1	y_1	y'_1
$x_1 + h \rightarrow x_1$	$y_1 + hy'_1 \rightarrow y_1$		x_1	y_1	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad y'_0 = 3, \quad y'_1 = 2, \quad y'_2 = -3, \quad y''_1 = 4$$

Ausgehend vom Differenzenschema für das Newtonsche Interpolationspolynom

Schritt 1: Vermehrung der Stützstellen, einmal je gegebenen Ableitungsgrad je Stützstelle, hier +1 für x_0, x_2 und +2 für x_1 .

x_i	y_i		x_i	y_i	
x_0	y_0		-1	2	
x_0	y_0		-1	2	
x_1	y_1		0	3	
		\rightarrow	0	3	
x_1	y_1		0	3	
x_1	y_1		0	3	
x_2	y_2		1	3	
x_2	y_2		1	3	

Schritt 2: Berechnung des Differenzenschema

Wie gewohnt mit der Merkregel des Newtonschen Interpolationspolynom (S. 38)

Bleibt nach dem Grenzübergang $h \rightarrow 0$ nur $\frac{0}{0}$ muss der Wert mit einer bekannten Ableitung in der Form $\frac{f^{(g)}(x)}{g!}$ ersetzt werden.

x_i	y_i	δy_i		x_i	y_i	
x_0	y_0	$\frac{y_0 - y_0}{x_0 - x_0} = \frac{0}{0} \rightarrow y'_0$	\rightarrow	-1	2	3
x_0	y_0	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \delta y_0$		-1	2	$\frac{3-2}{0+1} = 1$
x_1	y_1	$\frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0} \rightarrow y'_1$		0	3	2
x_1	y_1	$\frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0} \rightarrow y'_1$		0	3	2
x_1	y_1	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \delta y_1$		0	3	$\frac{3-3}{1-0} = 0$
x_2	y_2	$\frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_2} = \frac{0}{0} \rightarrow y'_2$		1	3	-3
x_2	y_2			1	3	

Hier also $\frac{f^{(2)}(x_1)}{2!}$

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$		x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$
x_0	y_0	y'_0		\rightarrow	-1	2	3	
x_0	y_0	$\frac{\delta y_0 - y'_0}{x_1 - x_0}$			-1	2	1	$\frac{1-3}{0+1} = -2$
x_1	y_1	y'_1			0	3	2	$\frac{2-1}{0+1} = 1$
x_1	y_1	$\frac{y'_1 - y'_0}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{y''_1}{2!}$			0	3	2	$\frac{4}{2} = 2$
x_1	y_1	$\frac{\delta y_1 - y'_1}{x_2 - x_1}$			0	3	0	$\frac{0-2}{1-0} = -2$
x_2	y_2	$\frac{y'_2 - \delta y_1}{x_2 - x_1}$			1	3	-3	$\frac{-3-0}{1-0} = -3$
x_2	y_2	y'_2			1	3		

Rest wie bekannt aus UE5 T7

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_i$	$\delta^6 y_i$
-1	2	3					
-1	2		-2				
		1		3			
0	3		1		-2		
		2		1		$-\frac{1}{4}$	
0	3		2		-2.5		$\frac{3}{2}$
		2		-4		2.75	
0	3		-2		3		
		0		-1			
1	3		-3				
		-3					
1	3						

Hinzufügen der benötigten Stützstellen

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_i$	$\delta^6 y_i$
-1	2, $[x_0]$						
		3, $[x_0, x_0]$					
-1	2, $[x_0]$	-2, $[x_0, x_0, x_1]$					
		1, $[x_0, x_1]$	3, $[x_0, x_0, x_1, x_1]$				
0	3, $[x_1]$	1, $[x_0, x_1, x_1]$	-2, $[x_0, x_0, x_1, x_1, x_1]$				
		2, $[x_1, x_1]$	1, $[x_0, x_1, x_1, x_1]$	$-\frac{1}{4}$, $[x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_2]$			
0	3, $[x_1]$	2, $[x_1, x_1, x_1]$	-2.5, $[x_0, x_1, x_1, x_1, x_2]$	$\frac{3}{2}$, $[x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$			
		2, $[x_1, x_1]$	-4, $[x_1, x_1, x_1, x_2]$	2.75, $[x_0, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$			
0	3, $[x_1]$	-2, $[x_1, x_1, x_2]$	3, $[x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$				
		0, $[x_1, x_2]$	-1, $[x_1, x_1, x_2, x_2]$				
1	3, $[x_2]$	-3, $[x_1, x_2, x_2]$					
		-3, $[x_2, x_2]$					
1	3, $[x_2]$						

Daraus ergibt sich analog zu S. 55 das Polynom

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (((((\frac{3}{2}(x - x_2) - \frac{1}{4})(x - x_1) - 2)(x - x_1) + 3)(x - x_1) - 2)(x - x_0) + 3)(x - x_0) + 2 \\
 &= (((((\frac{3}{2}(x - 1) - \frac{1}{4})(x - 0) - 2)(x - 0) + 3)(x - 0) - 2)(x + 1) + 3)(x + 1) + 2
 \end{aligned}$$

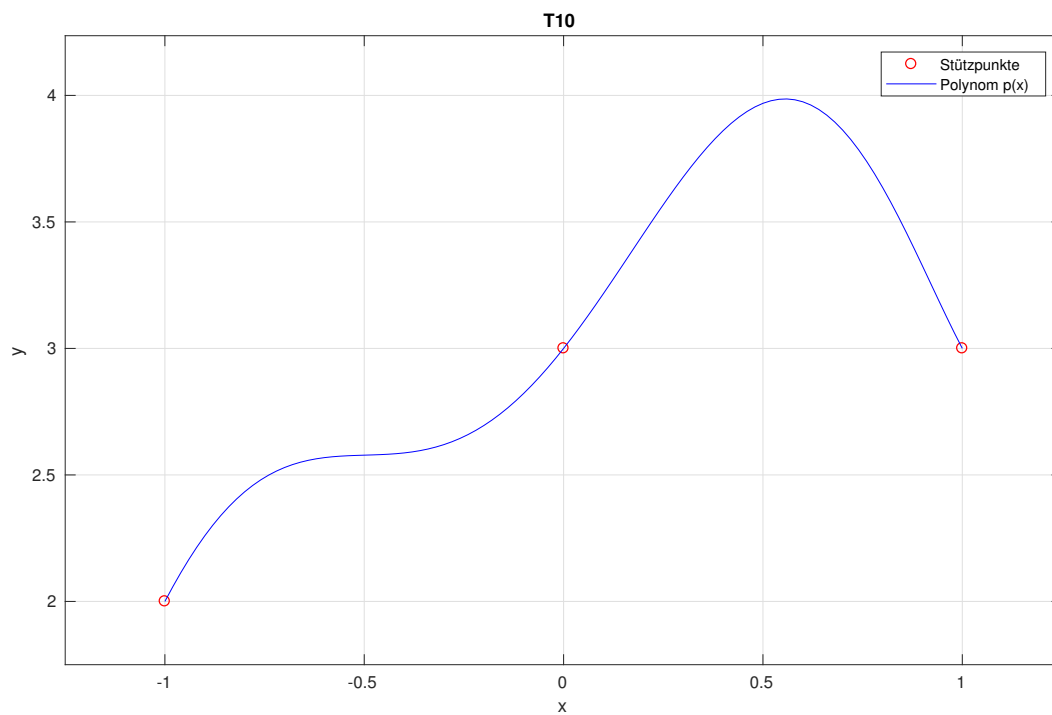


Figure 2: T10 Stützpunkte und Interpolationspolynom $p(x)$

T11

a) Schreiben Sie für natürliche Splines das zugehörige lineare Gleichungssystem für die Momente M_0, \dots, M_n in Matrizen-Schreibweise an.

Nach Definition 3.9, S. 62:

Natürlicher Spline: $s''(x_0) = s(x_n) = 0$

Die Momente an beiden Enden des Balken sind $0 \Rightarrow (3.90)M_0 = 0$ und $M_n = 0$

Das hergeleitete lineare Gleichungssystem für die Momente M_i lautet

$$\frac{h_i}{6}M_i + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+2} = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \quad i = 0, \dots, n-2$$

Bsp. $n=7$

Um die Form einer Tridiagonalmatrix zu erreichen, müssen M_0 und M_7 gestrichen werden.

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} \cancel{h_0}M_0 + 2(h_0 + h_1)M_1 + h_1M_2 \\ h_1M_1 + 2(h_1 + h_2)M_2 + h_2M_3 \\ h_2M_2 + 2(h_2 + h_3)M_3 + h_3M_4 \\ h_3M_3 + 2(h_3 + h_4)M_4 + h_4M_5 \\ h_4M_4 + 2(h_4 + h_5)M_5 + h_5M_6 \\ h_5M_5 + 2(h_5 + h_6)M_6 + \cancel{h_6}M_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 2(h_4 + h_5) & h_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 & 2(h_5 + h_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{M_0} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ \cancel{M_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_4 - y_3}{h_3} \\ \frac{y_6 - y_5}{h_5} - \frac{y_5 - y_4}{h_4} \\ \frac{y_7 - y_6}{h_6} - \frac{y_6 - y_5}{h_5} \end{bmatrix}$$

Allgemein

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & & & & \\ & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & & \\ & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & h_i & 2(h_i + h_{i+1}) & h_{i+1} & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & & & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

b) Stellen Sie die beiden "fehlenden" Gleichungen für die Momente M_0, \dots, M_n für periodische Splines mit $s(x_0) = s(x_n)$, $s'(x_0) = s'(x_n)$ und $s''(x_0) = s''(x_n)$ auf.

Wie sieht die Matrix des gesamten Gleichungssystems aus? Ist sie auch eine Tridiagonalmatrix?