6. Numerik Übungen 2017/18

T9
a) Prüfen Sie nach, ob die Formel (3.38) für die Lagrange-Polynome l_1 wirklich die Bedingung $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ erfüllt.
S. 47

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \tag{3.37}$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\widehat{(x-x_i)}\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots\widehat{(x_i-x_i)}\cdots(x_i-x_n)} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} i = j, &\quad l_i(x_i) = \frac{\cancel{(x_i-x_0)}\,\cancel{(x_i-x_1)}\cdots\cancel{\widehat{(x_i-x_i)}}\cdots\cancel{(x_i-x_n)}}{\cancel{(x_i-x_0)}\,\cancel{(x_i-x_1)}\cdots\cancel{\widehat{(x_i-x_i)}}\cdots\cancel{(x_i-x_n)}} = 1 \\ i \neq j, &\quad l_i(x_j) = 0 \Rightarrow (x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots\cancel{\widehat{(x_j-x_i)}}\cdots(x_j-x_n) \overset{!}{=} 0 \\ &\quad \text{Wahr, wenn } x_j \in x \end{aligned}$$

b) Interpolieren Sie $f(x) = 6 - 4x + \frac{1}{2}x^3$ an den Stützstellen $x_k = k - 3, k = 0, \ldots, 5$, durch eine stückweise lineare Funktion s. Geben Sie dazu die gesuchte stückweise lineare Funktion s als Linearkombination

$$s(x) = \sum_{k=0}^{5} y_k \phi_k(x)$$

von Hutfunktionen $\phi_k(x)$ an.
Sie brauchen die Hutfunktionen $\phi_k(x)$ nicht explizit anzugeben, eine Skizze mit der Funktion f, der Interpolierenden s, allen auftretenden Hutfunktionen $\phi_k(x)$ und Vielfachen $y_k\phi_k(x)$ (mit Nummerierung) ist ausreichend.
S. 59

$$x = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad s(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{falls } i = 1, \ldots, n \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \quad \text{falls } i = 0, \ldots, n-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-2-x}{-2+3}, & x \in [-3, -2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{x_3-x}{x_3-x_2}, & x \in [x_2, x_3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x+2}{-1+2}, & x \in [-2, -1] \\ \frac{0-x}{0+1}, & x \in [-1, \ 0] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

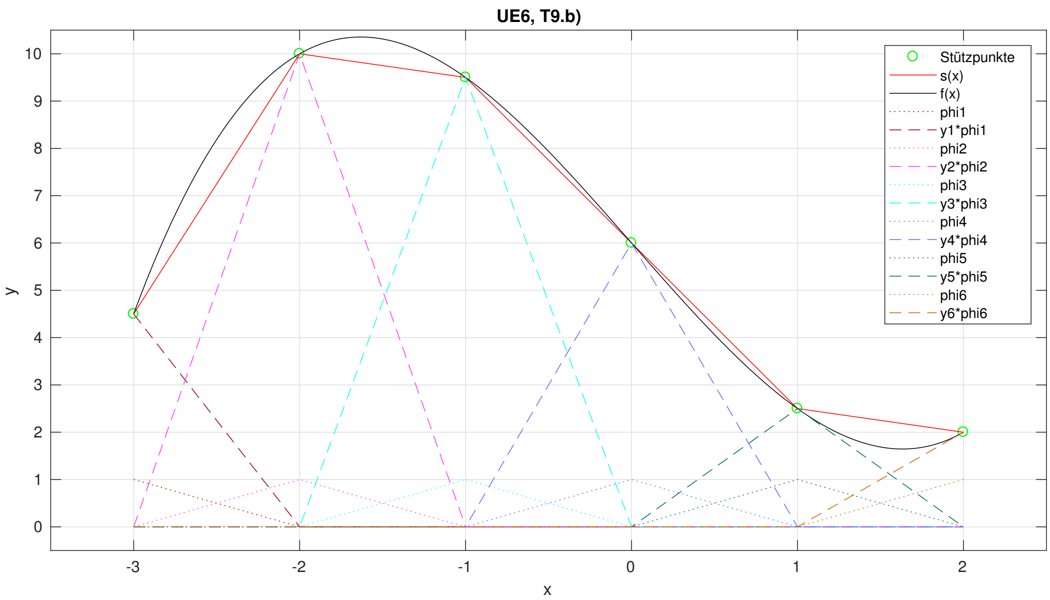

Figure 1: T9.b Stützpunkte, Funktion f, Stückweise lineare Interpolation s, Hutfunktionen ohne und mit Skalierung.

T10
Gegeben sind die Punkte $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, $(x_1, y_1) = (0, 3)$ und $(x_2, y_2) = (1, 3)$ sowie die Ableitungen $y_0' = 3$, $y_1' = 2$, $y_2' = -3$ und $y_1'' = 4$.
Bestimmen Sie ein Polynom p, sodass $p(x_i) = y_i$, $p'(x_i) = y_i'$, $i = 0, 1, 2$, und $p''(x_1) = y_1''$.
Zeichnen Sie das Polynom p und die Punkte in MATLAB.
S. 54
Allgemeines Differenzenschema für Hermite-Interpolation mit gegebenen Ableitungen vom Grad 2

x_i	y_i	δy_i
x_0	y_0	
		$\frac{y_0+hy_0'-y_0}{x_0+h-x_0} = y_0'$
$x_0 + h \to x_0$	$y_0 + hy_0' \to y_0$	
		$\frac{y_1-(y_0+hy_0')}{x_1-(x_0+h)} \to \delta y_0$
x_1	y_1	
		$\frac{y_1+hy_1'-y_1}{x_1+h-x_1} = y_1'$
$x_1 + h \to x_1$	$y_1 + hy_1' \to y_1$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\to$

x_i	y_i	δy_i
x_0	y_0	
		y_0'
x_0	y_0	
		δy_0
x_1	y_1	
		y_1'
x_1	y_1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$x = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix}2 & 3 & 3\end{bmatrix}, \quad y_0' = 3, \quad y_1' = 2, \quad y_2' = -3, \quad y_1'' = 4$$

Ausgehend vom Differenzenschema für das Newtonsche Interpolationspolynom
Schritt 1: Vermehrung der Stützstellen, einmal je gegebenen Ableitungsgrad je Stützstelle, hier +1 für x_0, x_2 und +2 für x_1.

x_i	y_i	
x_0	y_0	
x_0	y_0	
x_1	y_1	
x_1	y_1	
x_1	y_1	
x_2	y_2	
x_2	y_2	

$\to$

x_i	y_i	
-1	2	
-1	2	
0	3	
0	3	
0	3	
1	3	
1	3	

Schritt 2: Berechnung des Differenzenschema

Wie gewohnt mit der Merkregel des Newtonschen Interpolationspolynom (S. 38)

Bleibt nach dem Grenzübergang $h \rightarrow 0$ nur $\frac{0}{0}$ muss der Wert mit einer bekannten Ableitung in der Form $\frac{f^{(g)}(x)}{g!}$ ersetzt werden.

x_i	y_i	δy_i
x_0	y_0	
		$\frac{y_0-y_0}{x_0-x_0} = \frac{0}{0} \rightarrow y_0'$
x_0	y_0	
		$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \delta y_0$
x_1	y_1	
		$\frac{y_1-y_1}{x_1-x_1} = \frac{0}{0} \rightarrow y_1'$
x_1	y_1	
		$\frac{y_1-y_1}{x_1-x_1} = \frac{0}{0} \rightarrow y_1'$
x_1	y_1	
		$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \delta y_1$
x_2	y_2	
		$\frac{y_2-y_2}{x_2-x_2} = \frac{0}{0} \rightarrow y_2'$
x_2	y_2	

$\rightarrow$

x_i	y_i	
-1	2	
		3
-1	2	
		$\frac{3-2}{0+1} = 1$
0	3	
		2
0	3	
		2
0	3	
		$\frac{3-3}{1-0} = 0$
1	3	
		-3
1	3	

Hier also $\frac{f^{(2)}(x_1)}{2!}$

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$
x_0	y_0		
		y_0'	
x_0	y_0		$\frac{\delta y_0 - y_0'}{x_1-x_0}$
		δy_0	
x_1	y_1		$\frac{y_1'-\delta y_0}{x_1-x_0}$
		y_1'	
x_1	y_1		$\frac{y_1'-y_1'}{x_1-x_1} = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{y_1''}{2!}$
		y_1'	
x_1	y_1		$\frac{\delta y_1 - y_1'}{x_2-x_1}$
		δy_1	
x_2	y_2		$\frac{y_2'-\delta y_1}{x_2-x_1}$
		y_2'	
x_2	y_2		

$\rightarrow$

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$
-1	2		
		3	
-1	2		$\frac{1-3}{0+1} = -2$
		1	
0	3		$\frac{2-1}{0+1} = 1$
		2	
0	3		$\frac{4}{2} = 2$
		2	
0	3		$\frac{0-2}{1-0} = -2$
		0	
1	3		$\frac{-3-0}{1-0} = -3$
		-3	
1	3		

Rest wie bekannt aus UE5 T7

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_i$	$\delta^6 y_i$
-1	2						
		3					
-1	2		-2				
		1		3			
0	3		1		-2		
		2		1		$-\frac{1}{4}$	
0	3		2		-2.5		$\frac{3}{2}$
		2		-4		2.75	
0	3		-2		3		
		0		-1			
1	3		-3				
		-3					
1	3						

Hinzufügen der benötigten Stützstellen

x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_i$	$\delta^6 y_i$
-1	$2,\ [x_0]$						
		$3,\ [x_0, x_0]$					
-1	$2,\ [x_0]$		$-2,\ [x_0, x_0, x_1]$				
		$1,\ [x_0, x_1]$		$3,\ [x_0, x_0, x_1, x_1]$			
0	$3,\ [x_1]$		$1,\ [x_0, x_1, x_1]$		$-2,\ [x_0, x_0, x_1, x_1, x_1]$		
		$2,\ [x_1, x_1]$		$1,\ [x_0, x_1, x_1, x_1]$		$-\frac{1}{4},\ [x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_2]$	
0	$3,\ [x_1]$		$2,\ [x_1, x_1, x_1]$		$-2.5,\ [x_0, x_1, x_1, x_1, x_2]$		$\frac{3}{2},\ [x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$
		$2,\ [x_1, x_1]$		$-4,\ [x_1, x_1, x_1, x_2]$		$2.75,\ [x_0, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$	
0	$3,\ [x_1]$		$-2,\ [x_1, x_1, x_2]$		$3,\ [x_1, x_1, x_1, x_2, x_2]$		
		$0,\ [x_1, x_2]$		$-1,\ [x_1, x_1, x_2, x_2]$			
1	$3,\ [x_2]$		$-3,\ [x_1, x_2, x_2]$				
		$-3,\ [x_2, x_2]$					
1	$3,\ [x_2]$						

Daraus ergibt sich analog zu S. 55 das Polynom

$$\begin{aligned} p(x) &= (((((\frac{3}{2}(x - x_2) - \frac{1}{4})(x - x_1) - 2)(x - x_1) + 3)(x - x_1) - 2)(x - x_0) + 3)(x - x_0) + 2 \\ &= (((((\frac{3}{2}(x - 1) - \frac{1}{4})(x - 0) - 2)(x - 0) + 3)(x - 0) - 2)(x + 1) + 3)(x + 1) + 2 \end{aligned}$$

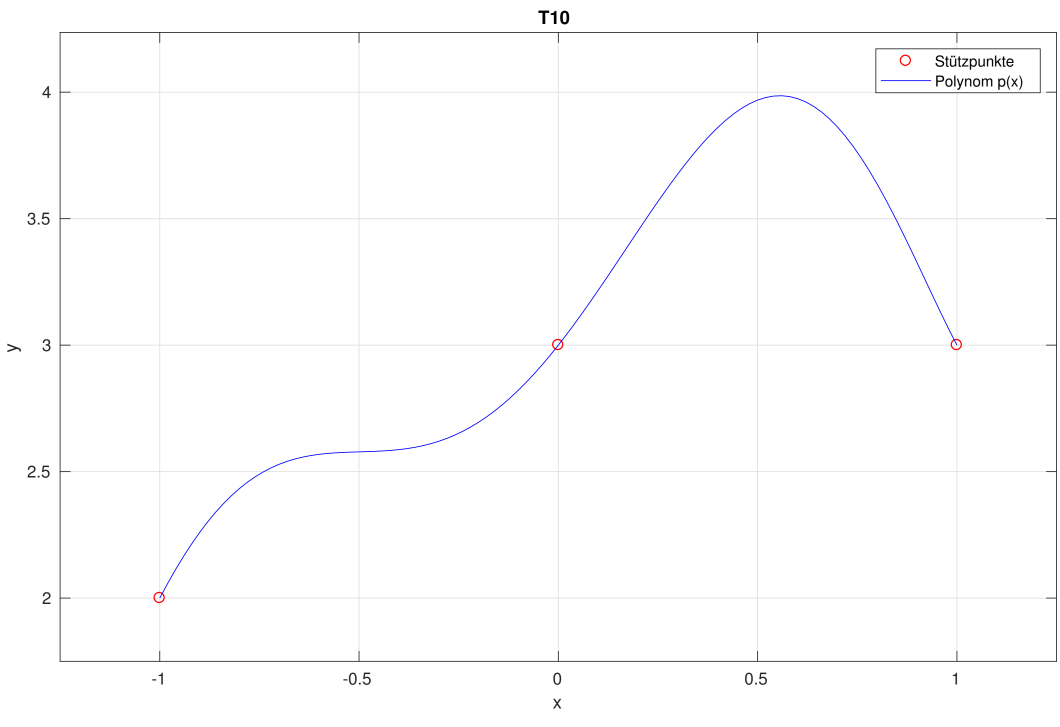

Figure 2: T10 Stützpunkte und Interpolationspolynom $p(x)$

T11

a) Schreiben Sie für natürliche Splines das zugehörige lineare Gleichungssystem für die Momente $M_0, \dots, M_n$ in Matrizen-Schreibweise an.

Nach Definition 3.9, S. 62:

Natürlicher Spline: $s''(x_0) = s(x_n) = 0$

Die Momente an beiden Enden des Balken sind $0 \Rightarrow (3.90) M_0 = 0$ und $M_n = 0$

Das hergeleitete lineare Gleichungssystem für die Momente M_i lautet

$$\frac{h_i}{6} M_i + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+2} = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \quad i = 0, \dots n-2$$

Bsp. n=7

Um die Form einer Tridiagonalmatrix zu erreichen, müssen M_0 und M_7 gestrichen werden.

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} \cancel{h_0 M_0} + 2(h_0+h_1)M_1 + h_1 M_2 \\ h_1 M_1 + 2(h_1+h_2)M_2 + h_2 M_3 \\ h_2 M_2 + 2(h_2+h_3)M_3 + h_3 M_4 \\ h_3 M_3 + 2(h_3+h_4)M_4 + h_4 M_5 \\ h_4 M_4 + 2(h_4+h_5)M_5 + h_5 M_6 \\ h_5 M_5 + 2(h_5+h_6)M_6 + \cancel{h_6 M_7} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 2(h_4+h_5) & h_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 & 2(h_5+h_6) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cancel{M_0} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ \cancel{M_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ \frac{y_5-y_4}{h_4} - \frac{y_4-y_3}{h_3} \\ \frac{y_6-y_5}{h_5} - \frac{y_5-y_4}{h_4} \\ \frac{y_7-y_6}{h_6} - \frac{y_6-y_5}{h_5} \end{bmatrix}$$

Allgemein

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & & & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & & & & & \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & 0 & h_i & 2(h_i+h_{i+1}) & h_{i+1} & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & & & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2}-y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

b) Stellen Sie die beiden "fehlenden" Gleichungen für die Momente $M_0, \dots, M_n$ für periodische Splines mit $s(x_0) = s(x_n)$, $s'(x_0) = s'(x_n)$ und $s''(x_0) = s''(x_n)$ auf.
Wie sieht die Matrix des gesamten Gleichungssystems aus? Ist sie auch eine Tridiagonalmatrix? Auf S. 65 wird darauf hingewiesen, dass $s(x_0) = s(x_n)$ keine Bedingung für das Gleichungssystem ist. Die Punkte müssen bereits so gegeben sein! D.h. $s(x_0) = \underline{y_0 = y_n} = s(x_n)$.

$$s_i''(x) = M_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}(x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1 \tag{3.38}$$

Einsetzen von $s''(x_0) = s''(x_n)$ in 3.38

$$\begin{aligned} s_0''(x_0) &= M_0 + \frac{M_1 - M_0}{h_0}(x_0 - x_0) = M_1 \\ s_{n-1}''(x_n) &= M_{n-1} + \frac{M_n - M_{n-1}}{h_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{n-1} + \frac{M_n - M_{n-1}}{h_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \\ 0 &= M_{n-1} + \frac{M_n - M_{n-1}}{h_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) - M_1 \end{aligned}$$

Für $s'(x_0) = s'(x_n)$ muss in die Integrierte Gleichung

$$s_i'(x) = M_i(x - x_i) + \frac{M_{i+1} - M_i}{2h_i}(x - x_i)^2 + C_i \tag{3.82}$$

die Konstante C_i eingesetzt werden

$$C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1}). \tag{3.84}$$

Einsetzen in $s'(x_0)$ und $s'(x_n)$

$$\begin{aligned} s_i'(x) &= M_i(x - x_i) + \frac{M_{i+1} - M_i}{2h_i}(x - x_i)^2 + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1}) \\ s_0'(x_0) &= M_0(x_0 - x_0) + \frac{M_1 - M_0}{2h_0}(x_0 - x_0)^2 + \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(2M_0 + M_1) \\ s_0'(x_0) &= \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(2M_0 + M_1) \\ s_{n-1}'(x_n) &= M_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + \frac{M_n - M_{n-1}}{2h_{n-1}}(x_n - x_{n-1})^2 + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{6}(2M_{n-1} + M_n) \\ s_{n-1}'(x_n) &= M_{n-1}h_{n-1} + \frac{M_n - M_{n-1}}{2h_{n-1}}h_{n-1}^2 + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{6}(2M_{n-1} + M_n) \\ s_{n-1}'(x_n) &= \frac{h_{n-1}}{2}(M_{n-1} + M_n) + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{6}(2M_{n-1} + M_n) \\ s_{n-1}'(x_n) &= \frac{h_{n-1}}{6}(3M_{n-1} + 3M_n - 2M_{n-1} + M_n) + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \\ s_{n-1}'(x_n) &= \frac{h_{n-1}}{6}(M_{n-1} + 4M_n) + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{aligned}$$

Gleichsetzen

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(2M_0 + M_1) &= \frac{h_{n-1}}{6}(M_{n-1} + 4M_n) + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \\ -\frac{h_0}{6}(2M_0 + M_1) - \frac{h_{n-1}}{6}(M_{n-1} + 4M_n) &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \end{aligned}$$

Nun verwenden wir $s(x_n) = s(x_0) \to y_n = y_0$ und $s''(x_n) = s''(x_0) \to M_n = M_0$.

$$-\frac{h_0}{6}(2M_0 + M_1) - \frac{h_{n-1}}{6}(M_{n-1} + 4M_0) = \frac{y_0 - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}$$