

VO Numerische Mathematik
2017/18
Theoriefragen

November 12, 2017

1 Zahldarstellung, Rundung und Fehler

1.1. Wie werden ganze Zahlen binär abgespeichert?

S. 2

$$b_{N-1}b_{N-2}\dots b_1b_0 \cong b = \sum_{j=0}^{N-1} b_j 2^j, \quad b_j \in \{0, 1\}$$

Beispiel: 23_{10}

$$\begin{aligned} 10101_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 19_{10} \end{aligned}$$

$$:2 \quad \begin{array}{r} 19 \quad 9 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \rightarrow 10011_2$$

1.2. Wie werden Gleitpunktzahlen (doppelte Genauigkeit) binär abgespeichert?

S. 3

$$x = (-1)^s \cdot m \cdot 2^e$$

$$x \cong s \quad e_{11}e_{10}\dots e_0 \quad (m_0).m_1m_2\dots m_{51}$$

s ... Vorzeichenbit $\in \{0, 1\}$

m ... Mantisse Normiert, $m_0 \stackrel{!}{=} 1$ wird weggelassen

e ... Exponent nach Abzug von b... Bias

1.3. Wie werden Gleitpunktzahlen gerundet?

S. 6

Round to the nearest even.

1.4. Wie ist der relative Rundungsfehler definiert?

S. 6

$$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leq \frac{2^{-M-1} \cdot 2^e}{a \cdot 2^e} \underset{a \in [1,2)}{\leq} 2^{-M-1} =: \text{eps}$$

1.5. Wie groß ist die relative Maschinengenauigkeit eps für doppelt genaue Gleitpunktzahlen? Wie kann man eps experimentell bestimmen?

1.6. Was ist die relative/absolute Kondition eines Problems?

1.7. Was bedeuten die Begriffe Konsistenz und Konsistenzordnung?

1.8. Wodurch unterscheidet sich Konsistenz von Konvergenz?

1.9. Was bedeutet der Begriff Stabilität?

S. 15

Ein numerisches Verfahren f heißt stabil, falls bei der numerischen Auswertung $f''(x)$ des Verfahrens Fehler wie Rundungsfehler, Abbruchfehler und Verfahrensfehler von Teilschritten nicht übermäßig verstärkt werden im Vergleich zu dem durch die relative Kondition κ_{rel} des Problems verursachten Fehler.

2 Numerische Differentiation

- 2.1. Wie wird mit Hilfe der Vorwärtsdifferenz eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x differenziert? Wie groß ist h_{opt} ?
- 2.2. Wie wird mit Hilfe der zentralen Differenz eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x differenziert? Wie groß ist h_{opt} ?
- 2.3. Wie verhalten sich Verfahrensfehler und Rundungsfehler in Abhängigkeit von der Schrittweite h ? Machen Sie eine Skizze.
- 2.4. Wie lässt sich mit Hilfe eines logarithmischen Plots das Verhalten von Verfahrensfehler und Rundungsfehler ablesen? Wie kann man die optimale Schrittweite h_{opt} ablesen?
- 2.5. Wieso gilt bei der zentralen Differenz für den Verfahrensfehler $V(h) = O(h^2)$ statt $O(h)$?
- 2.6. Wie wird die zweite Ableitung einer zweimal differenzierbaren Funktion an der Stelle x berechnet? Wie groß ist h_{opt} ?
- 2.7. Wie lässt sich die optimale Schrittweite h_{opt} aus dem Verfahrensfehler $V(h)$ und dem Rundungsfehler $R(h)$ bestimmen?
- 2.8. Wie berechnet man die Jacobimatrix einer vektorwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch numerisches Differenzieren?
- 2.9. Wie berechnet man den Gradient einer skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch numerisches Differenzieren?

3 Interpolation

- 3.1. Wie werden die dividierten Differenzen berechnet?
- 3.2. Wie ist das Newtonsche Interpolationspolynom definiert?
- 3.3. Wie wird mit dem Horner Schema ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ausgewertet?
- 3.4. Wie wird mit dem Horner Schema ein Newtonsches Interpolationspolynom ausgewertet?
- 3.5. Wie sind die Lagrange-Polynome definiert? Welche Eigenschaften haben sie?
- 3.6. Wie wird mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Lagrangesche Interpolationspolynom berechnet?
- 3.7. Erklären Sie die Begriffe Datenfehler, Verstärkungsfaktor, Lebesgue-Funktion und Lebesgue-Konstante in Zusammenhang mit der Polynominterpolation. Was ist die Kondition der Polynominterpolation?
- 3.8. Was besagt der Satz über den Fehler des Interpolationspolynoms? Wie ist der Verfahrensfehler definiert?
- 3.9. Wie sind die Tschebyscheff-Polynome definiert? Welche Eigenschaften haben sie?
- 3.10. Wie berechnet man die Knoten für die Tschebyscheff-Interpolationspolynome im Intervall $[-1, 1]$ bzw. $[a, b]$? Welche Vorteile hat die Verwendung von Tschebyscheff-Knoten im Vergleich zu äquidistanten Stützstellen.
- 3.11. Wie lässt sich das dividierte Differenzschema und das Newtonsche Interpolationspolynom verallgemeinern, falls in den Stützstellen auch noch Ableitungen vorgegeben sind?
- 3.12. Wie wird mit stückweise konstanten Funktionen interpoliert?
- 3.13. Wie wird mit stetigen, stückweise linearen Funktionen interpoliert?
- 3.14. Was sind Hutfunktionen und welche Eigenschaften haben sie?
- 3.15. Was für Eigenschaften besitzen kubische Splines? Was für Typen von kubischen Splines gibt es?
- 3.16. Wieso ist es besser durch viele Punkte einen kubischen Spline zu legen, statt ein Interpolationspolynom zu verwenden?
- 3.17. Wie wird auf einem rechteckigen Gitter zweidimensional interpoliert?
- 3.18. Wie wird die zweidimensionale, stetige, stückweise lineare Interpolierende auf einem rechteckigen Gitter bestimmt?

4 Numerische Integration

- 4.1. Was bedeutet *Linearität* und *Positivität* des Integrals?
- 4.2. Erklären Sie den Begriff *Quadraturformel*.
- 4.3. Nennen Sie einige einfache Quadraturformeln inklusive Knoten und Gewichte.
- 4.4. Erklären Sie den Begriff *zusammengesetzte Quadraturformel*.
- 4.5. Wie erhält man Quadraturformeln mit Hilfe von Polynominterpolation?
- 4.6. Erklären Sie den Begriff *Ordnung* einer Quadraturformel. Wie bestimmt man die Ordnung?
- 4.7. Was sind *Bedingungsgleichungen*?
- 4.8. Erklären Sie die Begriffe *Fehler einer Quadraturformel* und *Fehlerkonstante*.
- 4.9. Was für Abschätzungen gelten für den Fehler einer Quadraturformel bzw. einer zusammengesetzten Quadraturformel? Was muss der Integrand f dabei erfüllen?
- 4.10. Was sind *symmetrische Quadraturformeln* und welche Eigenschaft besitzen sie?
- 4.11. Was ist eine Gaußsche Quadraturformel? Welche Ordnung besitzen sie?
- 4.12. Wie groß kann die Ordnung einer Quadraturformel maximal sein?
- 4.13. Was gilt für die Gewichte einer Gaußschen Quadraturformel?
- 4.14. Wie funktioniert eine Schrittweitensteuerung? Erklären Sie die Begriffe *Fehlerkriterium* und *Fehlerschätzer*.
- 4.15. Erklären Sie den Begriff *Richardson-Extrapolation*. Wie berechnet man est und Q_{extr} .
- 4.16. Was passiert bei Integranden mit Singularitäten oder Singularitäten in den Ableitungen?
- 4.17. Wie werden Doppelintegrale auf Rechtecken numerisch berechnet?
- 4.18. Wie werden Doppelintegrale auf Dreiecken numerisch berechnet? Wie überprüft man die Ordnung einer Quadraturformel für Dreiecke?
- 4.19. Was sind *baryzentrische Koordinaten*?