

8. Numerik Übungen 2017/18

T14

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x} dx$$

mit der Trapezregel und schätzen Sie den Fehler mit Hilfe der Richardson-Extrapolation, d.h. bestimmen Sie für $h = 2$ die Werte $A(h)$, $A(h/2)$ und est. Berechnen Sie auch $Q_{\text{extr.}}(f)$.

Mit einem Auszug aus der Definition der Quadraturformel

$$I(g) = \int_0^1 g(t) dt \approx \sum_{i=1}^s b_i g(c_i) =: Q(g) \quad ((4.12))$$

folgt analog zu Bsp. 4.2 (S. 79) mit der Trapezregel: $s = 2$, $c_i = [0 \quad 1]$, $b_i = [\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{1+x} dx &\approx \sum_{i=1}^s b_i \frac{1}{1+c_i} \\ &\approx b_1 \frac{1}{1+c_1} + b_2 \frac{1}{1+c_2} \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+1} \right) \\ &\approx \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Aus der allgemeinen Formel für die Approximation

$$A(h) := Q(f, [\alpha, \alpha + h]) = h \sum_{i=1}^s b_i f(\alpha + c_i h) \approx \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x) dx \quad (4.85, \text{S. 99})$$

folgt wiederum mit der Trapezregel

$$\begin{aligned} A(h) &= h(b_1 g(0 + c_1 h) + b_2 g(0 + c_2 h)) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} g(0 + 0 \cdot 2) + \frac{1}{2} g(0 + 1 \cdot 2) \right) \\ &= g(0) + g(2) \\ &= \frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+2} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Die im Allgemeinen bessere Approximation $A(h/2)$ mit Schrittweite $h/2$ lautet

$$\begin{aligned}
 A(h/2) &:= Q(f, [\alpha, \alpha + h/2]) + Q(f, [\alpha + h/2, \alpha + h]) \\
 &= \frac{h}{2} \sum_{i=1}^s b_i f\left(\alpha + c_i \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^s b_i f\left(\alpha + \frac{h}{2} + c_i \frac{h}{2}\right) \\
 &= \frac{h}{2} \left(\sum_{i=1}^s b_i g\left(\alpha + c_i \frac{h}{2}\right) + \sum_{i=1}^s b_i g\left(\alpha + \frac{h}{2} + c_i \frac{h}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{h}{2} \left(\sum_{i=1}^s b_i g\left(0 + c_i \frac{h}{2}\right) + \sum_{i=1}^s b_i g\left(0 + \frac{h}{2} + c_i \frac{h}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{h}{2} \left(\left[b_1 g\left(c_1 \frac{h}{2}\right) + b_2 g\left(c_2 \frac{h}{2}\right) \right] + \left[b_1 g\left(\frac{h}{2}(1 + c_1)\right) + b_2 g\left(\frac{h}{2}(1 + c_2)\right) \right] \right) \\
 &= \frac{2}{2} \left(\left[\frac{1}{2} g\left(0 \cdot \frac{2}{2}\right) + \frac{1}{2} g\left(1 \cdot \frac{2}{2}\right) \right] + \left[\frac{1}{2} g\left(\frac{2}{2}(1 + 0)\right) + \frac{1}{2} g\left(\frac{2}{2}(1 + 1)\right) \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left([g(0) + g(1)] + [g(1) + g(2)] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+1} \right] + \left[\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left[1 + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{7}{6}.
 \end{aligned}
 \tag{4.86}$$

Damit lässt sich die Schätzung est für den Fehler von $A(h/2)$ ermitteln, wobei Ordnung $p = 2$ aus Bsp. 4.4, S. 85 bekannt ist.

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x) dx - A(h/2) &\approx \frac{A(h/2) - A(h)}{2^p - 1} =: \text{est} \\
 \text{est} &= \frac{\frac{7}{6} - \frac{4}{3}}{2^2 - 1} \\
 &= \frac{-\frac{1}{3}}{3} \\
 &= -\frac{1}{9} = 1.\dot{1}
 \end{aligned}
 \tag{4.92, S. 100}$$

Mit der Richardson-Extrapolation erhält man einen verbesserten Wert, auch extrapolierten Wert, für das bestimmte Integral

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x) dx &\approx A(h/2) + \text{est} =: Q_{\text{extr.}}(f) \\
 Q_{\text{extr.}}(f) &= \frac{7}{6} + \left(-\frac{1}{9}\right) \\
 &= \frac{21 - 2}{18} \\
 &= \frac{19}{18} = 1.0\dot{5}
 \end{aligned}$$

Die exakte Lösung ist $\log(3) \approx 1.0986$, die verbleibende Differenz beträgt 0.043 ($\Delta 3.9\%$).