где m_1 – наименьшее значение $|f'(x)|$ на $[a,$
Отсюда

$$|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

или с учетом (I4)

$$|x_n - \xi| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Если процесс Ньютона сходится, то $(x_n - x_{n-1}) \to$

поэтому

$$|\xi - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|$$

при достаточно больших $n \ (n > N)$.

Заметим, что в общем случае совпадение с точностью двух последовательных приближений x_n, x_{n-1} вовсе гарантирует, что с той же точностью совпадут x_n и корень ξ (рис. I3).

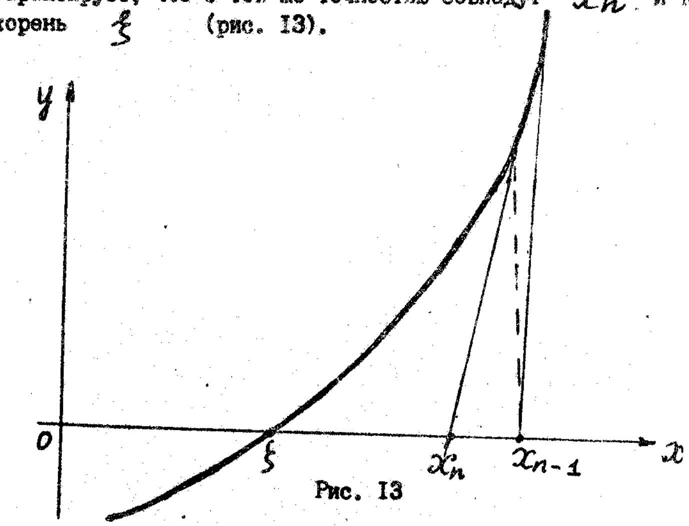

Рис. I3

...

$$|\xi - x_n| > |x_n - x_{n-1}|.$$

Установим формулу, связывающую $|\xi - x_{n+1}|$ и $|\xi - x_n|$.
... (I3) получаем [2]

$$\xi = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

где $c_n \in (x_n, \xi)$. Отсюда, учитывая (II), будем иметь

$$\xi - x_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

следовательно,

$$|\xi - x_{n+1}| \le \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2. \qquad (I5)$$

Эта оценка характеризует так называемую **квадратичную скорость сходимости** (более быструю по сравнению с линейной скоростью).

Предположим теперь, что выполнено условие

$$\frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_0| \le q < 1. \qquad (I6)$$

(т.е. начальное приближение x_0 достаточно близко к корню ξ) и на основании (I5) получим оценку погрешности метода Ньютона :