где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ более просты, чем $f(x)$. Тогда искомые корни - это абсциссы точек пересечения графиков $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$.

ПРИМЕР.

Уравнение $x\lg x = 1$ представим в виде

$$\lg x = \frac{1}{x}.$$

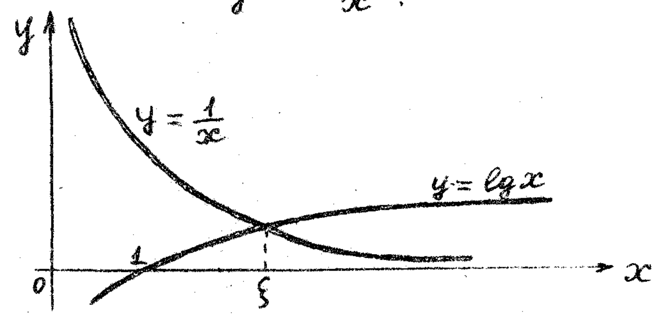


Рис. 4

Следует отметить, что графические методы решения уравнений весьма просты, но они применимы, как правило, для грубого отделения корней.

В последующих параграфах излагаются приближенные методы решения алгебраических или трансцендентных уравнений. При этом, как правило, предполагается, что корни рассматриваемого уравнения уже отделены.

§ 2. МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Пусть задано уравнение (I) и отрезок $[a, b]$, содержащий единственное решение этого уравнения.

Как уже отмечалось, одним из наиболее простых методов сужения промежутка $[a, b]$ является метод половинного деления, который состоит в следующем.

Отрезок $[a, b]$ делится пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Из полученных двух отрезков выбирается отрезок $[a_1, b_1]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a_1)f(b_1)<0$.

Отрезок $[a_1, b_1]$ снова делится пополам, и таким же способом выбирается новый отрезок $[a_2, b_2]$ и т.д. В результате получается последовательность вложенных отрезков

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots.$$

Длина n-го отрезка $[a_n, b_n]$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a). \quad (3)$$

Процесс деления отрезка продолжаем до тех пор, пока не получим отрезок требуемой длины.

Метод половинного деления может быть использован и для нахождения корня уравнения с любой наперед заданной точностью ε. Левые концы $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ полученных отрезков образуют неубывающую последовательность, правые $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ - невозрастающую. Поэтому существуют

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Из (3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

Переходя к пределу в неравенстве

$$f(a_n)f(b_n)<0,$$

получаем
$$[f(\xi)]^2 \le 0,$$
откуда следует, что $f(\xi)=0$, т.е. ξ – корень уравнения (I).

В этом случае процесс деления отрезка продолжается до тех пор, пока не выполнится условие
$$b_n - a_n < \varepsilon.$$
Тогда $\xi = \bar{\xi}$, где $\bar{\xi}$ – любая точка отрезка $[a_n, b_n]$, при этом
$$|\xi - \bar{\xi}| < \varepsilon.$$
Следует однако заметить, что этот метод очень медленно сходится, поэтому он применяется для грубого определения корня, который затем уточняется более совершенными методами.

§ 3. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Пусть дано уравнение (I), где $f(x)$ – непрерывная функция, и требуется определить его вещественные корни.

Заменим (I) эквивалентным уравнением
$$x = \varphi(x). \qquad (4)$$

Предположим, что $[a, b]$ – отрезок, на котором находится только один корень ξ уравнения (I). Выберем на $[a, b]$ начальное приближение x_0 к корню и положим
$$x_1 = \varphi(x_0).$$
Аналогично, считая начальным приближением x_1, получим второе приближение

$$x_2 = \varphi(x_1).$$
Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность приближений [2]:
$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (5)$$
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ существует, то, переходя в (5) к пределу, получим $\xi = \varphi(\xi)$, т.е. ξ – корень уравнения (4) (уравнения (I)).

Геометрическая интерпретация метода простой итерации.

Построим на плоскости XOY графики функций $y=x$ и $y=\varphi(x)$. Каждый действительный корень ξ уравнения (4) является абсциссой точки пересечения M кривой $y=\varphi(x)$ с прямой $y=x$ (см. рис. 5).

Отправляясь от точки $A_0[x_0, \varphi(x_0)]$, строим ломаную $A_0B_1A_1B_2A_2\ldots$ ("лестница"), звенья которой попеременно параллельны оси OX и OY. Общие абсциссы точек A_1 и B_1, A_2 и B_2, …, очевидно, представляют собой последовательные приближения $x_1, x_2, \ldots$ корня ξ.

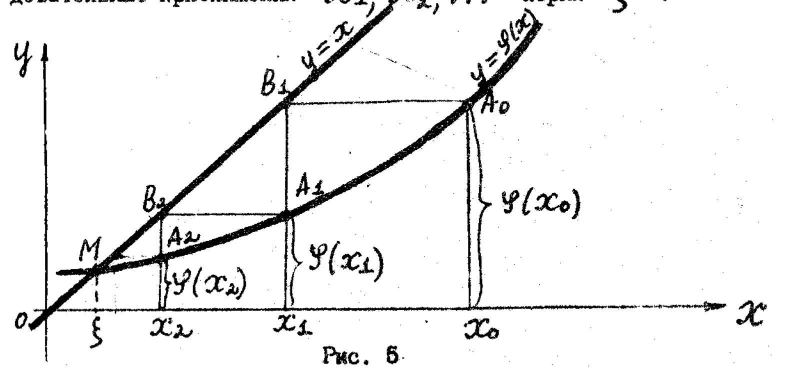


Рис. 5

Возможен также другой вид ломаной $A_0 B_1 A_1 B_2 \dots$ ("спираль"), как на рис.6. Легко сообразить, что решение в виде "лестницы" получается, если производная $\varphi'(x)$ положительна, а в виде "спирали" – если $\varphi'(x)$ отрицательна.

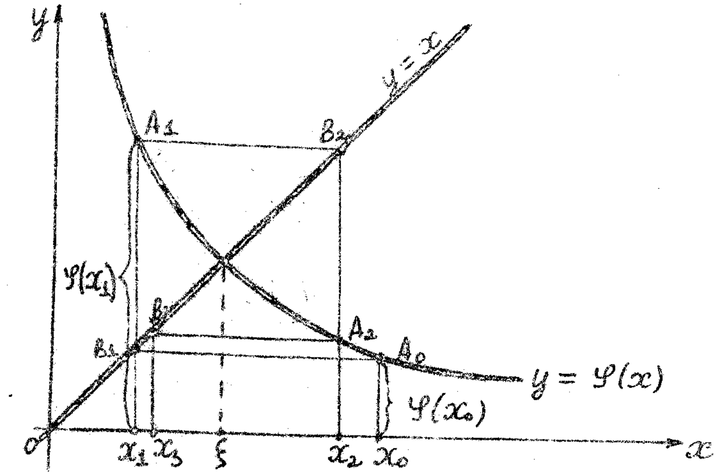


Рис. 6

На рис.5, 6 кривая $y = \varphi(x)$ в окрестности корня ξ пологая, т.е. $|\varphi'(x)| < 1$ и процесс итерации сходится. Однако, если рассмотреть случай $|\varphi'(x)| > 1$, то процесс итерации может быть расходящимся (см.рис.7).

Итак, метод простой итерации сходится не всегда, поэтому необходимо выяснить условия, при которых сходимость имеет место.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a, b]$. Тогда, если

$$|\varphi'(x)| \le q < 1, \tag{6}$$

при $a < x < b$, то:

1) процесс итерации (5) сходится независимо от

$$x_0 \in [a, b];$$

2) предельное значение

$$\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$$

является единственным корнем уравнения (4) на отрезке $[a, b]$.

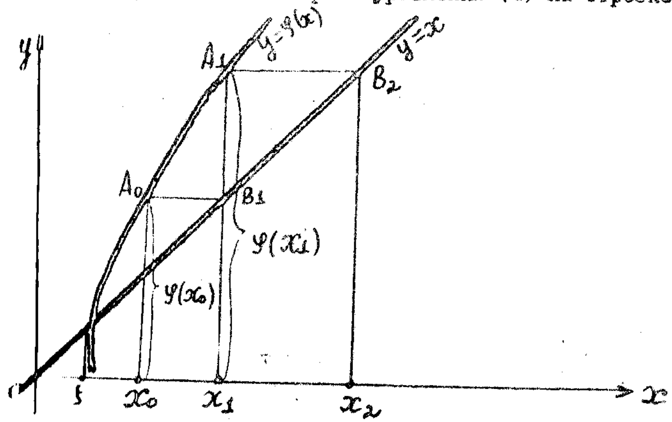


Рис. 7

Доказательство. Рассмотрим два последовательных приближения

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Применяя теорему Лагранжа, будем иметь

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(\bar{x}_n)(x_n - x_{n-1}),$$

где $\bar{x}_n \in (x_{n-1}, x_n)$. Следовательно, на основании условия (6)

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q\,|x_n - x_{n-1}| \leq$$

$$\leq q^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \ldots \leq q^n |x_1 - x_0|. \quad (7)$$

Рассмотрим ряд

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots,$$

для которого наши последовательные приближения x_n являются частичными суммами:

$$x_n = S_{n+1}.$$

В силу (7) члены ряда по абсолютной величине меньше членов соответствующей геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$. Следовательно, ряд сходится, т.е. существует

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \xi,$$

причем, очевидно,

$$\xi \in [a, b].$$

Переходя в (5) к пределу, получаем в силу непрерывности φ

$$\xi = \varphi(\xi),$$

т.е. ξ – решение уравнений (4) и (I). Другого корня на $[a, b]$ нет, так как если бы $\bar{\xi} = \varphi(\bar{\xi})$, то

$$\bar{\xi} - \xi = \varphi(\bar{\xi}) - \varphi(\xi) = \varphi'(c)(\bar{\xi} - \xi),$$

т.е.

$$(\bar{\xi} - \xi)[\varphi'(c) - 1] = 0.$$

Так как $\varphi'(c) - 1 \neq 0$, то $\xi = \bar{\xi}$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Теорема справедлива и в случае

$$a = -\infty, \quad b = +\infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как метод простой итерации сходится при любом выборе начального приближения x_0, то он является самоисправляющимся, т.е. отдельная ошибка в вычислениях, не выводящая за пределы $[a, b]$, не повлияет на конечный результат, так как ошибочное значение можно рассматривать как новое начальное приближение x_0. Возрастет лишь объем работы. Разумеется, что систематические ошибки при применении этого метода могут сделать его практически расходящимся.

Оценка погрешности. Из формулы (7) имеем

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| +$$

$$+ \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq q^{n+p-1}|x_1 - x_0| + q^{n+p-2}|x_1 - x_0| + \cdots +$$

$$+ q^n |x_1 - x_0| = q^n |x_1 - x_0| (q^{p-1} + q^{p-2} + \cdots + 1) \leq$$

$$\leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $p \to \infty$, получаем

$$|x_n - \xi^*| \leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|.$$

Отсюда видно, что сходимость процесса итерации тем быстр чем меньше q.

Легко видеть, что выполняется неравенство

$$|x_n - \xi| = |\varphi(x_n-1) - \varphi(\xi)| \leq q\,|x_{n-1} - \xi|, \quad (9$$

означающее сходимость метода простой итерации со ск ростью геометрической прогрес сии со знаменателем q (или та называемую линейную скорость схо димости).

Рассмотрим другую оценку. Пусть $f(x) = x - \varphi(x$ Тогда

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(\xi)| =$$

$$= |f'(\bar{x}_n)|\,|x_n - \xi| \geq (1-q)\,|x_n - \xi|,$$

отсюда

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1-q}$$

или

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1-q}$$

и

$$|x_n - \xi| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}|. \quad (8)$$

Если $q \leq \frac{1}{2}$, то

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|,$$

т.е. из неравенства

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

следует

$$|\xi - x_n| < \varepsilon.$$

В общем случае это не так. Более того, если $\varphi'(x)$ близко к I, то величина $|\xi - x_n|$ может оказаться большой, хотя величина $|x_n - x_{n-1}|$ весьма мала (см.рис.8).

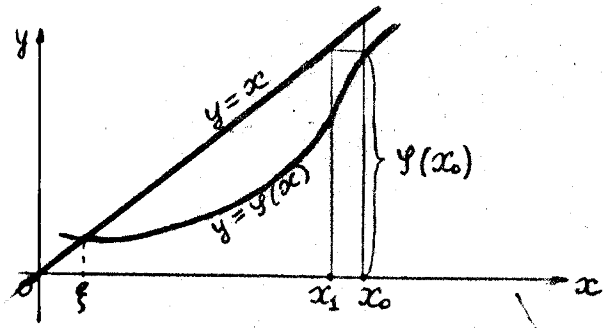


Рис. 8

Исходя из формулы (8) в общем случае итерации следует продолжать до тех пор, пока

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon.$$

Метод простой итерации является монотонным, так как в силу (9)

$$|\xi - x_n| \le |\xi - x_{n-1}|.$$

Укажем один достаточно общий прием приведения уравнения (I) к виду (4), для которого обеспечено выполнение неравенства (6). Пусть для всех $x \in [a, b]$

$$0 < m_1 \le f'(x) \le M_1. \qquad (10)$$

Рассмотрим уравнение

$$x = x - \lambda f(x) \qquad (\lambda > 0),$$

эквивалентное (I). Это уравнение вида (4) с

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x).$$

Параметр λ подберем так, чтобы

$$0 \le \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \le q < 1.$$

Имеем

$$1 - \lambda M_1 \le 1 - \lambda f'(x) \le 1 - \lambda m_1.$$

Возьмем $\lambda = \frac{1}{M_1}$. Тогда

$$0 = 1 - \lambda M_1 \le \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \le 1 - \lambda m_1 = 1 - \frac{m_1}{M_1} = q.$$

Заметим, что предположение (10) не ограничивает общности, так как, во-первых, непрерывность $f'(x)$ обеспечивает существование чисел m_1 и M_1, во-вторых, $f'(x)$ законопостоянна, так как на отрезке $[a, b]$ корень отделен, в-третьих, если окажется, что $f'(x) < 0$, то вместо уравнения (I) можно рассматривать эквивалентное ему уравнение

$$-f(x) = 0.$$

§ 4. МЕТОД НЬЮТОНА (КАСАТЕЛЬНЫХ) И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

Пусть корень уравнения (I) отделен на $[a, b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки на этом отрезке. В алгебре устанавливается, что при вычислении вещественных корней алгебраических уравнений всегда может быть создано такое положение, при котором все эти условия выполняются, так что они принципиально не ограничивают применимости метода. В случае трансцендентных уравнений это не так, но на практике поставленные ограничения мало стеснительны, так как в большинстве случаев высказанные условия выполняются.

Получим вначале формулу метода Ньютона аналитически [2]. Пусть x_n нам известно, тогда положим

$$\xi = x_n + h_n,$$

где h_n – малая величина. Отсюда, применяя формулу Тей
получим

$$0 = f(\xi) = f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + h_n f'(x_n)$$

Следовательно,

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

и следующее приближение x_{n+1} к корню можно находить п
формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) . \; ($$

Эту же формулу можно получить и исходя из геометричес
соображений. Положим для определенности

$$f''(x) > 0, \quad f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$$

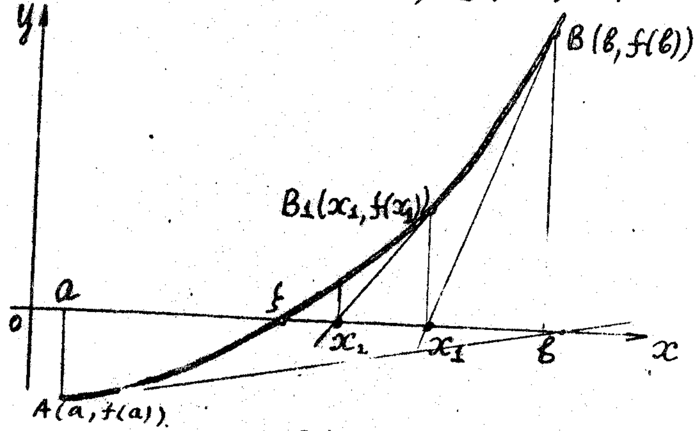


Рис.9

Проводим касательную к кривой в точке B. Уравнение касательной имеет вид

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Находим точку x_1 пересечения касательной с осью Ox, для этого в уравнении касательной полагаем $x = x_1$, $y = 0$, откуда

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} .$$

Затем проводим касательную в точке B_1 и аналогично находим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и т.д. Если приближение x_n уже найдено, то следующее приближение x_{n+1} определяется формулой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Точка $b = x_0$ здесь выступает в роли начального приближения, а конец a в этом случае остается неподвижным. Заметим, что

$$f(a) f''(a) < 0,$$

и

$$f(x_0) f''(x_0) > 0. \qquad (12)$$

Заметим, что если в данном случае положить $x_0 = a$
то, проведя касательную к кривой в точке $A[x_0, f(a)]$,
получили бы точку x_1', лежащую вне отрезка $[a, b]$,
метод Ньютона оказался бы непрактичным (рис. 9).

Докажем, что в любом случае начальное приближение до
удовлетворять соотношению (I2).

ТЕОРЕМА 3. Если $f(a)f(b) < 0$, причем $f'($
и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные знаки
$a \le x \le b$, то исходя из начального приближения x_0
удовлетворяющего неравенству (I2), можно вычислить методо
Ньютона (формула (I0)) единственный корень уравнения (I)
любой степенью точности.

Доказательство. Пусть $f(a)<0$, $f(b)>0$,
$f'(x)>0$, $f''(x)>0$.

Пусть также $x_0 = b$ т.е. $x_0 > \xi$, $f(x_0) > 0$.

Покажем методом математической индукции, что для всех
$n = 1, 2, \ldots$ $x_n > \xi$,
следовательно, $f(x_n) > 0$. Пусть $x_n > \xi$.

Положим

$$\xi = x_n + (\xi - x_n).$$

По формуле Тейлора

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c_n)(\xi - x_n)^2. \quad (I3)$$

Так как $f''(x) > 0$, то имеем

$$f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) < 0.$$

да

$$\xi < x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

едовательно,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \xi.$$

Докажем сходимость метода Ньютона.

формулы (II), с учетом знаков $f(x)$ и $f'(x)$,
ледует, что $x_{n+1} < x_n$, т.е. $\{x_n\}$ – ограниченная моно-
онно убывающая последовательность, следовательно, существует

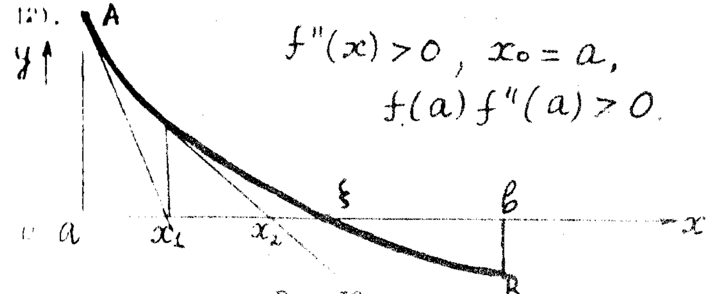
$$\bar{\xi} = \lim_{n \to \infty} x_n .$$

ределе (II) дает

$$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})}, \quad f(\bar{\xi}) = 0, \quad \bar{\xi} = \xi.$$

Теорема доказана.

Утверждение теоремы подтверждается и геометрически (см. рис. I0,
I1, I2).



$f''(x) > 0$, $x_0 = a$,
$f(a) f''(a) > 0$

Рис. I0

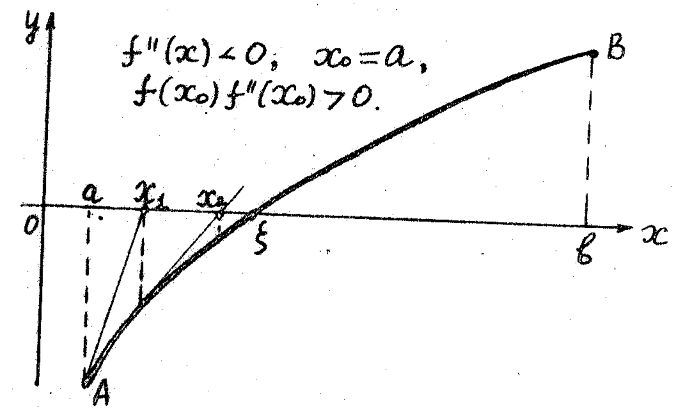


Рис. II

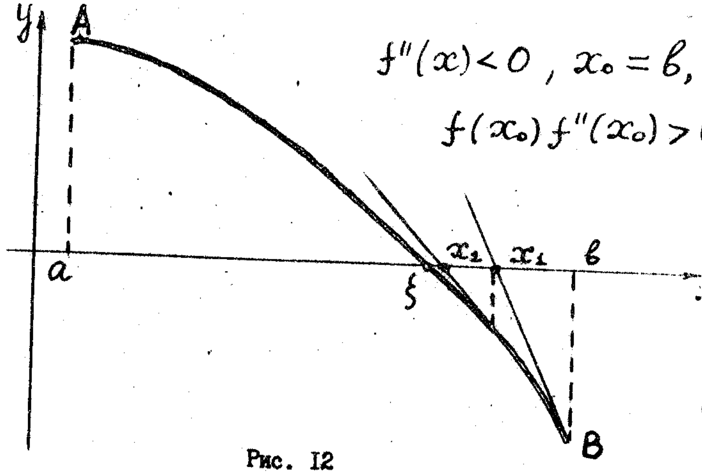


Рис. I2

Итак, применяя метод Ньютона, следует руководствоватьс следующим правилом: в качестве начального приближения x_0

...ирается тот конец промежутка $[a, b]$, в котором знак ...нкции совпадает со знаком второй производной.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы (II) видно, что чем больше числен... значение $f'(x)$ в окрестности корня, тем меньше ...правка, прибавляемая к очередному приближению. Поэтому метод ...ютона особенно удобно применять в случае, когда вблизи кор... график функции имеет большую крутизну. Но если численное ...начение $f'(x)$ близ корня мало, то поправки велики и ...исление корня по этому поводу может оказаться очень долгим, ...иногда и вовсе невозможным. Следовательно, если вблизи кор... кривая почти горизонтальна, то применять метод Ньютона не ...комендуется.

Оценка погрешности. Рассмотрим

$$f(x_n)=f(x_{n-1}+(x_n-x_{n-1}))=f(x_{n-1})+$$

$$+f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+\frac{1}{2}f''(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1})^2.$$

...кольку $f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=0,$

$$|f(x_n)|\le\frac{1}{2}M_2(x_n-x_{n-1})^2, \tag{I4}$$

...де M_2 - наибольшее значение $|f''(x)|$ на $[a, b]$.

...алее,

$$f(x_n)-f(\xi)=(x_n-\xi)f'(c),$$

$$|f(x_n)-f(\xi)|=|f(x_n)|\geqslant m_1|x_n-\xi|,$$

где m_1 — наименьшее значение $|f'(x)|$ на $[a,$

Отсюда

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

или с учетом (I4)

$$|x_n - \xi| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Если процесс Ньютона сходится, то $(x_n - x_{n-1}) \longrightarrow$

поэтому

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$$

при достаточно больших $n\ (n > N)$.

Заметим, что в общем случае совпадение с точностью двух последовательных приближений x_n, x_{n-1} вовсе гарантирует, что с той же точностью совпадут x_n и корень ξ (рис. I3).

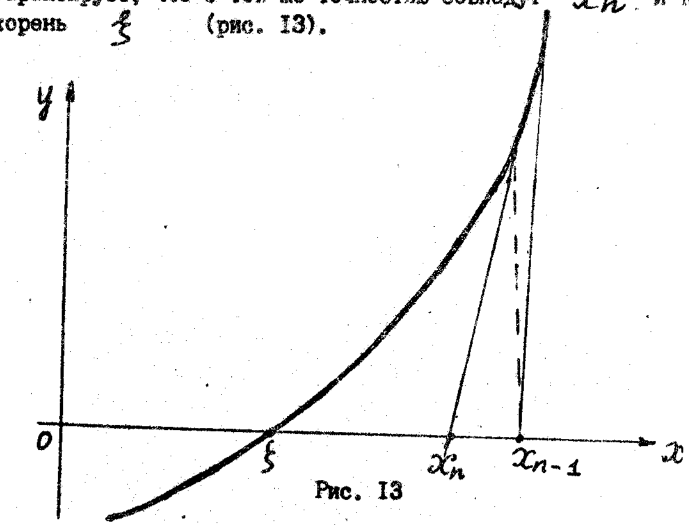


Рис. I3

$$|\xi - x_n| > |x_n - x_{n-1}|.$$

Установим формулу, связывающую $|\xi - x_{n+1}|$ и $|\xi - x_n|$.

(13) получаем [2]

$$\xi = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

где $c_n \in (x_n, \xi)$. Отсюда, учитывая (II), будем иметь

$$\xi - x_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

следовательно,

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2. \qquad (I5)$$

Эта оценка характеризует так называемую **квадратичную скорость сходимости** (более быструю по сравнению с линейной скоростью).

Предположим теперь, что выполнено условие

$$\frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_0| \leq q < 1. \qquad (I6)$$

(т.е. начальное приближение x_0 достаточно близко к корню ξ) и на основании (I5) получим оценку погрешности метода Ньютона :

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_{n-1}|^{2} \le \frac{M_2}{2m_1} \times$$

$$\times\left(\frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_{n-2}|^2\right)^2 = \frac{2m_1}{M_2}\left(\frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_{n-2}|\right)^{2^2} \le$$

$$\le \ldots \le \frac{2m_1}{M_2}\left(\frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_0|\right)^{2^n}.$$

В силу (I6) отсюда следует оценка

$$|\xi - x_n| \le \frac{2m_1}{M_2}\, q^{2^n}.$$

Модификация метода Ньютона. Если производная $f'(x)$ мало изменяется на отрезке $[a, b]$, то в формуле (II) можно положить

$$f'(x_n) \approx f'(x_0),$$

откуда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \qquad \text{(I8}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Геометрически это означает, что касательные в точке $B_n(x_n, f(x_n))$ заменяются прямыми, параллельными касательной в точке $B_0(x_0, f(x_0))$ (рис.I4).

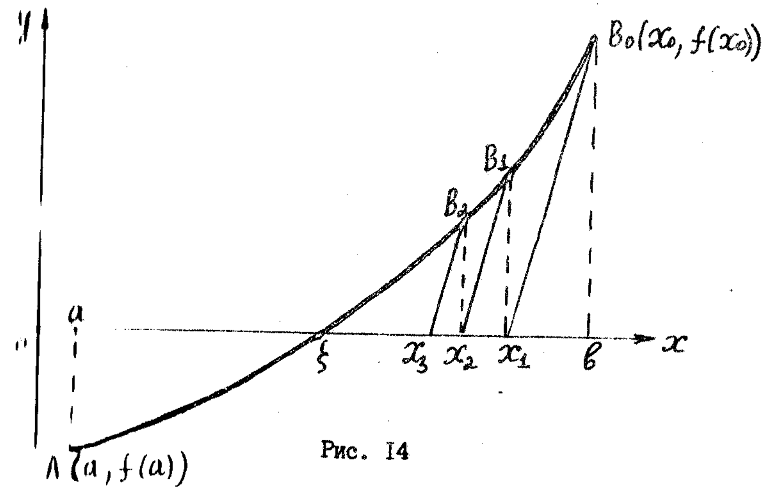


Рис. I4

Можно доказать сходимость метода со скоростью геометрической прогрессии [4].

§ 5. МЕТОД ХОРД

Пусть требуется решить уравнение (I) на отрезке $[a, b]$, при этом

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0, \quad f'(x) > 0,$$

т.е. корень уже отделен. Проведем хорду, соединяющую точки $A[a, f(a)]$ и $B[b, f(b)]$ (рис. I5).

Уравнение хорды имеет вид

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{f(x) - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$