Исходя из формулы (8) в общем случае итерации следует продолжать до тех пор, пока

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\,\varepsilon.$$

Метод простой итерации является м о н о т о н н ы м, так как в силу (9)

$$|\xi - x_n| \le |\xi - x_{n-1}|.$$

Укажем один достаточно общий прием приведения уравнения (1) к виду (4), для которого обеспечено выполнение неравенства (6). Пусть для всех $x \in [a, b]$

$$0 < m_1 \le f'(x) \le M_1. \qquad (10)$$

Рассмотрим уравнение

$$x = x - \lambda f(x) \qquad (\lambda > 0),$$

эквивалентное (1). Это уравнение вида (4) с

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x).$$

Параметр λ подберем так, чтобы

$$0 \le \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \le q < 1.$$

Имеем

$$1 - \lambda M_1 \le 1 - \lambda f'(x) \le 1 - \lambda m_1.$$

Возьмем $\lambda = \dfrac{1}{M_1}$. Тогда

$$0 = 1 - \lambda M_1 \le \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \le 1 - \lambda m_1 = 1 - \frac{m_1}{M_1} = q.$$

Заметим, что предположение (10) не ограничивает общности, так как, во-первых, непрерывность $f'(x)$ обеспечивает существование чисел m_1 и M_1, во-вторых, $f'(x)$ законопостоянна, так как на отрезке $[a, b]$ корень отделен, в-третьих, если окажется, что $f'(x) < 0$, то вместо уравнения (1) можно рассматривать эквивалентное ему уравнение

$$-f(x) = 0.$$

§ 4. МЕТОД НЬЮТОНА (КАСАТЕЛЬНЫХ) И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

Пусть корень уравнения (1) отделен на $[a, b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки на этом отрезке. В алгебре устанавливается, что при вычислении вещественных корней алгебраических уравнений всегда может быть создано такое положение, при котором все эти условия выполняются, так что они принципиально не ограничивают применимости метода. В случае трансцендентных уравнений это не так, но на практике поставленные ограничения мало стеснительны, так как в большинстве случаев высказанные условия выполняются.

Получим вначале формулу метода Ньютона аналитически [2]. Пусть x_n нам известно, тогда положим

$$\xi = x_n + h_n,$$