где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ более просты, чем $f(x)$. Тогда искомые корни – это абсциссы точек пересечения графиков $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$.

ПРИМЕР.

Уравнение $x \lg x = 1$ представим в виде

$$\lg x = \frac{1}{x}.$$

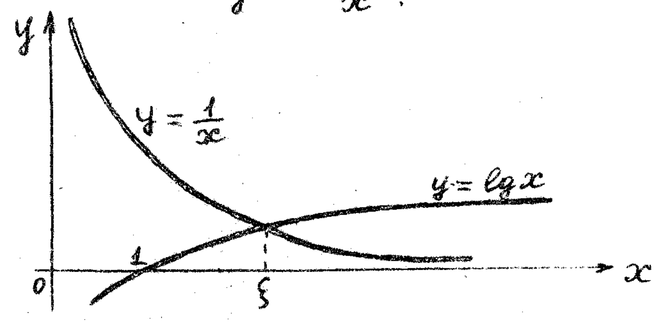

Рис. 4

Следует отметить, что графические методы решения уравнений весьма просты, но они применимы, как правило, для грубого отделения корней.

В последующих параграфах излагаются приближенные методы решения алгебраических или трансцендентных уравнений. При этом, как правило, предполагается, что корни рассматриваемого уравнения уже отделены.

§ 2. МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Пусть задано уравнение (I) и отрезок $[a, b]$, содержащий единственное решение этого уравнения.

Как уже отмечалось, одним из наиболее простых методов сужения промежутка $[a, b]$ является метод половинного деления, который состоит в следующем.

Отрезок $[a, b]$ делится пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Из полученных двух отрезков выбирается отрезок $[a_1, b_1]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a_1)f(b_1)<0$.

Отрезок $[a_1, b_1]$ снова делится пополам, и таким же способом выбирается новый отрезок $[a_2, b_2]$ и т.д. В результате получается последовательность вложенных отрезков

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots .$$

Длина n-го отрезка $[a_n, b_n]$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a). \qquad (3)$$

Процесс деления отрезка продолжаем до тех пор, пока не получим отрезок требуемой длины.

Метод половинного деления может быть использован и для нахождения корня уравнения с любой наперед заданной точностью ε. Левые концы $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ полученных отрезков образуют неубывающую последовательность, правые $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ – невозрастающую. Поэтому существуют

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Из (3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi .$$

Переходя к пределу в неравенстве

$$f(a_n)f(b_n)<0,$$