метод простой итерации

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{i} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

Сходимость метода будет осуществлять $\left\| \begin{matrix} a_{11}+1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}+1 \end{matrix} \right\| < 1$

Следует отметить, что для оценки сходимости вычисляется не определитель матрицы, а норма матрицы. Поэтому в данном случае поставлены двойные вертикальные черты, а не одинарные.

Алгоритм

1. Условие $f(x) = 0$преобразуется к виду $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$— сжимающая
2. Задаётся начальное приближение и точность $x_0, \quad \varepsilon, \quad i = 0$
3. Вычисляется очередная итерация $x_{i+1} = \varphi(x_i)$
   - Если $||x_{i+1} - x_i|| > \varepsilon$, то $i = i + 1$и возврат к шагу 3.
   - Иначе $x = x_{i+1}+$и остановка.

[

Одномерный случай

Для того, чтобы решить уравнение $f(x) = 0$, пользуясь методом простой итерации, необходимо привести его к виду $x = \varphi(x)$, где φ— сжимающее отображение. Чтобы отображение было наиболее эффективно, необходимо, чтобы в точке очередной итерации x^* выполнялось $\varphi'(x^*) = 0$. Будем искать решение данного уравнения в виде $\varphi(x) = x + \alpha(x)f(x)$, тогда:

$$\varphi'(x^*) = 1 + \alpha'(x^*)f(x^*) + \alpha(x^*)f'(x^*) = 0$$

Воспользуемся тем, что $f(x) = 0$, и получим окончательную формулу для $\alpha(x)$:

$$\alpha(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

С учётом этого сжимающая функция примет вид:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$