Заметим, что если в данном случае положить $x_0 = a$
то, проведя касательную к кривой в точке $A[x_0, f(a)]$,
получили бы точку x_1' , лежащую вне отрезка $[a, b]$,
метод Ньютона оказался бы непрактичным (рис. 9).

Докажем, что в любом случае начальное приближение до
удовлетворять соотношению (I2).

ТЕОРЕМА 3. Если $f(a)f(b) < 0$, причем $f'($
и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные знаки
$a \le x \le b$, то исходя из начального приближения x_0
удовлетворяющего неравенству (I2), можно вычислить методо
Ньютона (формула (I0)) единственный корень уравнения (I)
любой степенью точности.

Доказательство. Пусть $f(a)<0$, $f(b)>0$
$f'(x)>0$, $f''(x)>0$.

Пусть также $x_0 = b$ т.е. $x_0 > \xi$, $f(x_0) > 0$.

Покажем методом математической индукции, что для всех
$n = 1, 2, \dots$ $x_n > \xi$,
следовательно, $f(x_n) > 0$. Пусть $x_n > \xi$.

Положим

$$\xi = x_n + (\xi - x_n).$$

По формуле Тейлора

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c_n)(\xi - x_n)^2. \quad \text{(I3)}$$

Так как $f''(x) > 0$, то имеем

$$f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) < 0.$$

...да

$$\xi < x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

...довательно,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \xi.$$

Докажем сходимость метода Ньютона.

...формулы (II), с учетом знаков $f(x)$ и $f'(x)$,
...дует, что $x_{n+1} < x_n$, т.е. $\{x_n\}$ – ограниченная моно-
...онно убывающая последовательность, следовательно, существует

$$\bar{\xi} = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

...ределе (II) дает

$$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})}, \quad f(\bar{\xi}) = 0, \quad \bar{\xi} = \xi.$$

Теорема доказана.

Утверждение теоремы подтверждается и геометрически (см. рис. I0,
I1, I2).

$f''(x) > 0$, $x_0 = a$,
$f(a) f''(a) > 0$

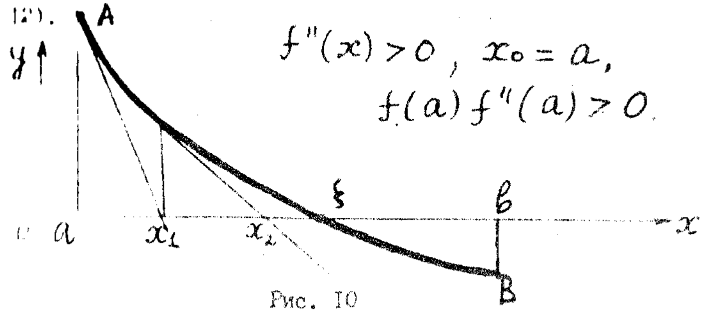

Рис. I0