$$\le \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $p \to \infty$, получаем

$$|x_n - \xi^*| \le \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|.$$

Отсюда видно, что сходимость процесса итерации тем быстр… чем меньше q.

Легко видеть, что выполняется неравенство

$$|x_n - \xi| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)| \le q\,|x_{n-1} - \xi|, \quad (9$$

означающее сходимость метода простой итерации со ск… ростью геометрической прогрес… сии со знаменателем q (или та… называемую линейную скорость схо… димости).

Рассмотрим другую оценку. Пусть $f(x) = x - \varphi(x…$ Тогда

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(\xi)| =$$

$$= |f'(\bar{x}_n)|\,|x_n - \xi| \geqslant (1-q)\,|x_n - \xi|,$$

отсюда

$$|x_n - \xi| \le \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1-q}$$

или

$$|x_n - \xi| \le \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1-q}$$

и

$$|x_n - \xi| \le \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}|. \qquad (8)$$

Если $q \le \frac{1}{2}$, то

$$|\xi - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|,$$

т.е. из неравенства

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

следует

$$|\xi - x_n| < \varepsilon.$$

В общем случае это не так. Более того, если $\varphi'(x)$ близко к I, то величина $|\xi - x_n|$ может оказаться большой, хотя величина $|x_n - x_{n-1}|$ весьма мала (см.рис.8).

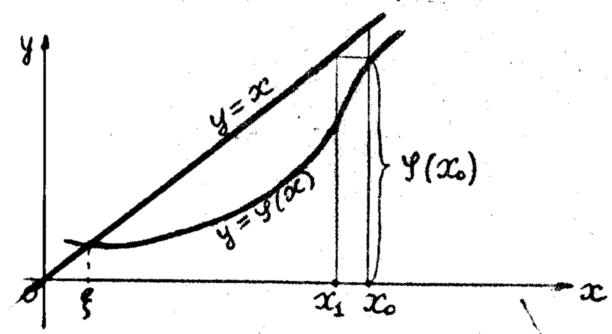

Рис. 8