где $\bar{x}_n \in (x_{n-1}, x_n)$. Следовательно, на основани[и] условия (6)

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q\,|x_n - x_{n-1}| \leq$$

$$\leq q^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \ldots \leq q^n |x_1 - x_0|. \quad (7)$$

Рассмотрим ряд

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots,$$

для которого наши последовательные приближения x_n я[вля]ются частичными суммами:

$$x_n = S_{n+1}.$$

В силу (7) члены ряда по абсолютной величине меньше членов соответствующей геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$. Следовательно, ряд сходится, т.е. существует

$$\lim_{n \to \infty} S_{n+1} = \lim_{n \to \infty} x_n = \xi,$$

причем, очевидно,

$$\xi \in [a, b].$$

Переходя в (5) к пределу, получаем в силу непрерывности [φ]

$$\xi = \varphi(\xi),$$

т.е. ξ – решение уравнений (4) и (I). Другого корня на $[a, b]$ нет, так как если бы $\bar{\xi} = \varphi(\bar{\xi})$, то

$$\bar{\xi} - \xi = \varphi(\bar{\xi}) - \varphi(\xi) = \varphi'(c)\,(\bar{\xi} - \xi),$$

т.е.

$$(\bar{\xi} - \xi)\,[\varphi'(c) - 1] = 0.$$

Так как $\varphi'(c) - 1 \neq 0$, то $\xi = \bar{\xi}$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Теорема справедлива и в случае

$$a = -\infty, \quad b = +\infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как метод простой итерации сходится при любом выборе начального приближения x_0 , то он является самоисправляющимся, т.е. отдельная ошибка в вычислениях, не выводящая за пределы $[a, b]$, не повлияет на конечный результат, так как ошибочное значение можно рассматривать как новое начальное приближение x_0 . Возрастет лишь объем работы. Разумеется, что систематические ошибки при применении этого метода могут сделать его практически расходящимся.

Оценка погрешности: Из формулы (7) имеем

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| +$$

$$+ \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq q^{n+p-1} |x_1 - x_0| + q^{n+p-2} |x_1 - x_0| + \cdots +$$

$$+ q^n |x_1 - x_0| = q^n |x_1 - x_0| (q^{p-1} + q^{p-2} + \cdots + 1) \leq$$