2. Пока не выполнено условие остановки, в качестве которого можно взять $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ или $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ (то есть погрешность в нужн ых пределах), вычисляют новое приближение: $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Пример

Иллюстрация применения метода Ньютона к функции $f(x) = \cos x - x^3$ с начальным приближением в

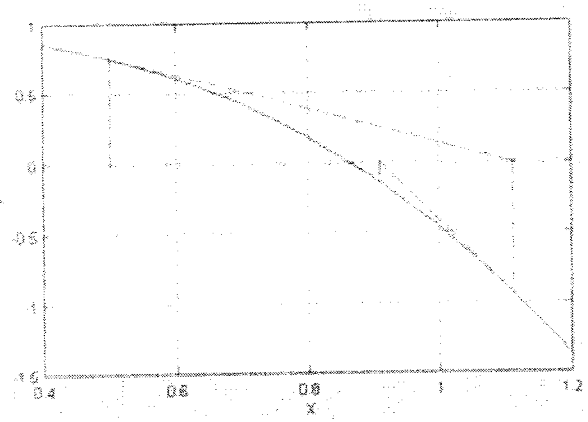

График последовательных приближений.

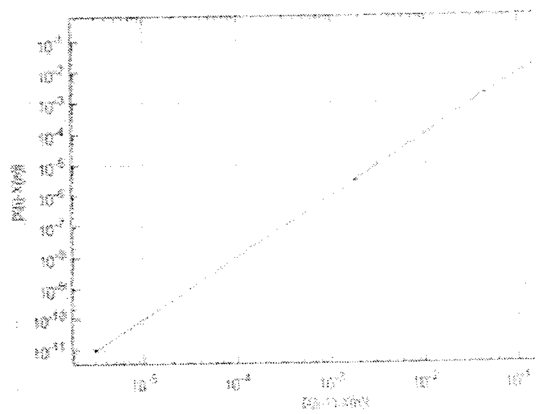

График сходимости.

Согласно способу практического определения скорость сходимости может быть оценена как тангенс угла наклона г есть в данном случае равна двум.

Рассмотрим задачу о нахождении положительных x, для которых $\cos x = x^3$. Эта задача может быть представлена как задача нахождения нуля функции $f(x) = \cos x - x^3$. Имеем выражение для производной $f'(x) = -\sin x - 3x^2$. Так как $\cos x \leqslant 1$ для всех x и $x^3 > 1$ для $x > 1$, очевидно, что решение лежит между 0 и 1. Возьмём в качестве начального приближения значение $x_0 = 0{,}5$, тогда:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= 1{,}112\,141\,637\,097. \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= \underline{0{,}9}09\,672\,693\,736. \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} &= \underline{0{,}86}7\,263\,818\,209. \\
x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} &= \underline{0{,}865\,47}7\,135\,298. \\
x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} &= \underline{0{,}865\,474\,033\,1}11. \\
x_6 &= x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} &= \underline{0{,}865\,474\,033\,102}.
\end{aligned}$$

Подчёркиванием отмечены верные значащие цифры. Видно, что их количе тво от шага к шагу растёт (приблизительно удваиваясь с каждым шагом): от 1 к 2, от 2 к 5, от 5 к 10, иллюстрируя квадратичную скорость сходимости.