Возможен также другой вид ломаной $A_0 B_1 A_1 B_2 \ldots$ ("спираль"), как на рис.6. Легко сообразить, что решение в виде "лестницы" получается, если производная $\varphi'(x)$ положительна, а в виде "спирали" — если $\varphi'(x)$ отрицательна.

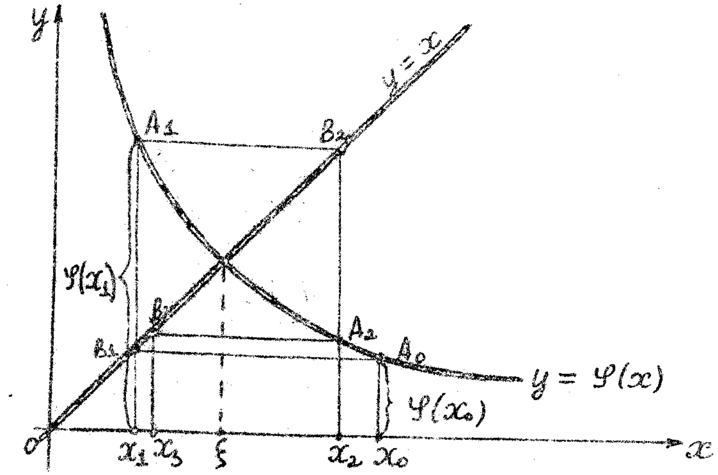

Рис. 6

На рис.5, 6 кривая $y = \varphi(x)$ в окрестности корня ξ пологая, т.е. $|\varphi'(x)| < 1$ и процесс итерации сходится. Однако, если рассмотреть случай $|\varphi'(x)| > 1$, то процесс итерации может быть расходящимся (см.рис.7).

Итак, метод простой итерации сходится не всегда, поэтому необходимо выяснить условия, при которых сходимость имеет место.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a, b]$. Тогда, если

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \qquad (6)$$

при $a < x < b$, то:

1) процесс итерации (5) сходится независимо от

$$x_0 \in [a, b];$$

2) предельное значение

$$\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$$

является единственным корнем уравнения (4) на отрезке $[a, b]$.

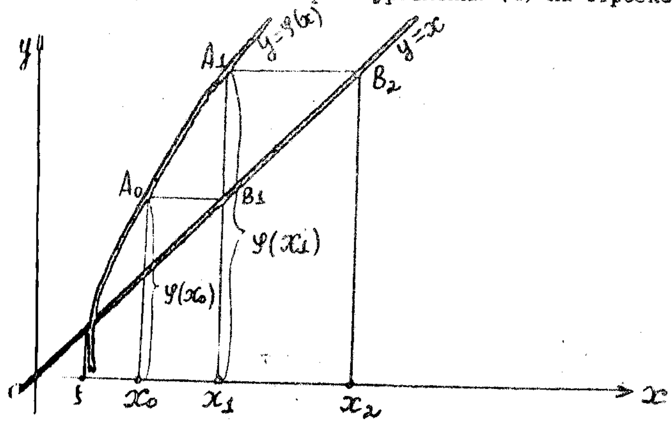

Рис. 7

Доказательство. Рассмотрим два последовательных приближения

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \qquad x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Применяя теорему Лагранжа, будем иметь

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(\bar{x}_n)(x_n - x_{n-1}),$$