Метод простой итерации

В основе метода заложено понятие сжимающего отображения. Определим терминологию:

Говорят, что функция φ осуществляет ***сжимающее отображение*** на $[a,\ b]$, если

1. $\forall x \in [a,\ b] : \varphi(x) \in [a,\ b]$
2. $\exists \alpha < 1 : \forall x_1, x_2 \in [a,\ b] \quad ||\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|| \le \alpha ||x_1 - x_2||$

Тогда основная теорема будет выглядеть так:

Теорема Банаха (принцип сжимающих отображений).
Если φ— сжимающее отображение на $[a,\ b]$, то:

1. у $x = \varphi(x) \quad \exists! x^* \in [a,\ b]$— корень;
2. итерационная последовательность $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ сходится к этому корню;
3. для очередного члена x_n справедливо $||x_n - x^*|| \le \dfrac{\alpha^n ||x_1 - x_0||}{1-\alpha}$.

Поясним смысл параметра α. Согласно теореме Лагранжа имеем:

$$\varphi(x) \in C^1[a,\ b]. \quad \forall x_1, x_2 \in (a,\ b), \quad x_1 < x_2 \quad \exists \xi \in (x_1,\ x_2) : \quad \varphi'(\xi)(x_2$$

Отсюда следует, что $\alpha \approx |\varphi'(\xi)|$. Таким образом, для сходимости метода достаточно, чтобы $\forall x \in [a,\ b] \quad |\varphi'(x)| \le 1$.

1. $x_3 = \varphi(x_2)$

....

и так далее, пока $||x_{i+1} - x_i|| > \varepsilon$

Применительно к СЛАУ

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ & \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

Для неё итерационное вычисление будет выглядеть так: