

# Tercer ciclo, Números

### Introducción

Al ingresar al Tercer ciclo cada estudiante trae la habilidad de comparar y operar tanto números naturales como números con expansión decimal hasta la diezmilésima. La potenciación se trabaja en 6° Año pero con ejemplos muy básicos, principalmente de cuadrados y cubos perfectos. Con respecto a las fracciones, domina sus diferentes representaciones y su operatoria. Conoce algunos conceptos de la teoría de números, como por ejemplo número primo, compuesto, divisores, múltiplos, entre otros.

La conceptualización de los números enteros, racionales, irracionales y reales junto con su operatoria, son temas fundamentales en este ciclo y en toda la enseñanza Secundaria.

En este ciclo se aborda el cálculo de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potenciación y radicación para los números enteros, racionales e irracionales, dando un especial énfasis al cálculo operatorio y a las diferentes representaciones de los números reales. Se introducen los números enteros negativos en 7° Año, los racionales en 8° Año y los irracionales y reales en 9° Año.

Esta área tiene una conexión directa con las otras áreas matemáticas (*Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad*), así como con las otras materias que se imparten a este nivel, por lo que es fundamental seguir trabajando los conocimientos respectivos a través de la resolución de problemas contextualizados.

Todo esto prepara al estudiante para que pueda utilizar los números reales en sus diferentes representaciones y los aplique tanto en el cálculo operatorio como en el planteamiento y resolución de problemas en contextos variados.

# Propósito de la enseñanza

El propósito de la enseñanza de los *Números* en este ciclo es que el estudiantado adquiera la habilidad de utilizar los números reales en cualquiera de sus representaciones, que elabore estrategias para realizar cálculos con ellos y que plantee y resuelva problemas en diversos contextos en los que se involucren estos números.

# **Habilidades generales**

Las habilidades generales que deberán adquirirse en *Números* al finalizar el Tercer ciclo son:

- Realizar cálculos usando números reales en sus diferentes representaciones.
- Utilizar conocimientos de teoría de números en la resolución de problemas contextualizados o propios de esta rama.
- Utilizar diferentes representaciones para identificar y representar números racionales e irracionales.
- Identificar y utilizar la potenciación y radicación en diferentes contextos.
- Comparar números reales en sus diferentes representaciones.
- Seleccionar y aplicar métodos y herramientas para calcular y operar con números reales.
- Utilizar la estimación, el cálculo mental, el papel y lápiz o la calculadora, según sea el caso, para el cálculo de operaciones con números enteros, racionales y reales.
- Plantear y resolver problemas en diferentes contextos donde se requiera el uso de las operaciones y representaciones numéricas.



Se fortalecerán actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas, pues en esta área se puede evidenciar de manera natural la utilidad de las mismas, mediante problemas en contextos reales.

Se debe hacer énfasis en que el trabajo operatorio con los números utilizando diferentes representaciones permite desarrollar el proceso *Representar*. Además, al trabajar con nuevos números (negativos, racionales e irracionales) se amplía la cantidad de opciones para conectarlos con otras áreas de las Matemáticas u otras Ciencias. Por ejemplo, al resolver algunas ecuaciones en 8º Año sólo se puede considerar la posibilidad de soluciones racionales mientras que en 9° se pueden considerar también las posibles soluciones irracionales.

# Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales

Números Naturales  • Operaciones: - Suma - Resta - Multiplicación - División - Potencias	Abilidades específicas  1. Calcular expresiones numéricas aplicando el concepto de potencia y la notación exponencial.  2. Resolver una combinación de operaciones que involucre o no el uso de paréntesis.	▲ Se pur múltiplos d representa y viceversa Posteriorm nes; por e falsas o ver falsas o ver múmeros n de realizar abordar co debe ir di cuando la operacione una herrar procedimie ma:  Miria que llevara	nes puntuale lede introduc de 10 como p ación de prod a, para ident nente se trab ejemplo, veri erdaderas:  esario retoma naturales. No r operaciones on éxito el tra irigido a cor as y los estu es. El plantec umienta que entos. Por ej am va a la fer án como mo P sugiere, pa	cir el cotence ductos dificar los (5 + (6 - : (9 ÷ : 2 con abajo rregir udianto de pole peria coeriendo de ceria coeriendo de c	cias de con fa luego con ejo si las $7)^2 = 52)^2 = 63)^2 = 53$ algorit ebe pe estos con rerrore es restroblementato, se o pon su la dur	e base 1 actores cuadrac ercicios siguier $5^2 + 7^2$ $6^2 - 2^2$ $8^2 \cdot 3^2$ $9^2 \div 3^2$ tmos qu erder de números es típico suelven mas en e a cada consider  padre parante la	e perre vista se sera este se a est se a este se a este se a est	miten of que la á nece combi entido udiante siguier
Números Naturales  • Operaciones: - Suma - Resta - Multiplicación - División - Potencias  • Combinación de ope-	<ol> <li>Calcular expresiones numéricas aplicando el concepto de potencia y la notación exponencial.</li> <li>Resolver una combinación de operaciones que involu- cre o no el uso de parénte-</li> </ol>	▲ Se pur múltiplos de representa y viceversa Posteriormens; por estalsas o ver falsas o ver mumeros nestalsas o ver mumeros n	de entroducide 10 como pación de produción d	cir el cotence ductos dificar los (5 + (6 - : (9 ÷ : 2 con abajo rregir udianto de pole peria coeriendo de ceria coeriendo de c	cias de con fa luego con ejo si las $7)^2 = 52)^2 = 63)^2 = 53$ algorit ebe pe estos con rerrore es restroblementato, se o pon su la dur	e base 1 actores cuadrac ercicios siguier $5^2 + 7^2$ $6^2 - 2^2$ $8^2 \cdot 3^2$ $9^2 \div 3^2$ tmos qu erder de números es típico suelven mas en e a cada consider  padre parante la	e perre vista se sera este se a est se a este se a este se a est	miten of que la á nece combi entido udiante siguier
• Combina- ción de ope-	de operaciones que involu- cre o no el uso de parénte-	números n de realizar abordar co debe ir di cuando la: operacione una herral procedimie ma: Miria que llevara que el CNF	naturales. No r operaciones on éxito el tra irigido a cor us y los estues. El plantecumienta que entos. Por ej am va a la ferán como me	o se de s con rabajo rregir udianto de p le pe jemplo	ebe per estos con rerrore es restroblem ermita o, se con su la dur	erder de números es típico suelven mas en e a cada consider padre parante la	e vista s sera s enter s que una este s a estr ra el s ara co sema	que la fance de ros. Es e pue combi entido udiante siguier omprarana. E
		la digalome			nal de	Produ		n
			10 MA	RZO - :	11 MAR	RZO 2012	a Rica	
			PRODUCTO	UNIDAD MEDIDA	PRECIO COLONES	PRODUCTO	UNIDAD MEDIDA	PRECIO COLONES
			APIO VERDE	KG	600	LIMON MESIN	UND	
			AYOTE SAZON	KG	400	MANGA	KG	600
			AYOTE TIERNO	UND	400	MARACUYA	KG	850
			BANANO	UND	27	MORA	KG	1300
			BROCOLI	KG	650	MELON	KG	300
			CAMOTE	KG	1000	NARANJA	UND	45
			CEBOLLA SECA	KG	825	ÑAMPI	KG	600
			CEBOLLA TRENZA	KG	825	PAPA	KG	470
			COLIFLOR	UND	800	PAPAYA	KG	325
			coco	UND	300	PEPINO	KG	400
			CULANTRO CASTILLA	ROLLO	60	PIÑA	UND	675
			CHAYOTE SAZÓN BLAN	UND	350	PLATANO	UND	135
			CHAYOTE TIERNO CRIO		390	REMOLACHA	UND	250
			mada de: http	://web	.cnp.g			inforn nales/fe

Ellos compran 1 piña, 5 kilogramos de papaya, 8 naranjas y medio kilogramo de moras. Plantee una combinación de operaciones que permita obtener el total a pagar, si pagan según los precios que sugiere el CNP. Luego resuélvala. Se espera que cada estudiante escriba la operación

$$675 + 5 \cdot 325 + 8 \cdot 45 + 1300 \div 2 =$$

▲ Un error común es realizar la primera operación que aparece de izquierda a derecha (en este caso la suma) y a dicho resultado aplicar la operación siguiente.

Aquí el mismo contexto del problema debe propiciar, de forma natural, la necesidad de realizar primero los productos y cocientes correspondientes y finalmente sumar los resultados. De ese modo se propician oportunidades para adquirir confianza en la utilidad de las Matemáticas.

▲ Debe indicarse el cambio de simbología para la multiplicación, ahora se utilizará el punto.

Un problema como el anterior permite discutir las ventajas para la salud de una alimentación sana.

▲ La combinación de operaciones no debe exceder de cuatro términos, donde en cada uno de ellos sólo se haga uso de un paréntesis. En el interior de cada paréntesis incluir a lo sumo dos diferentes tipos de operaciones. Por ejemplo:

a. 
$$24 \div 8 + 5 \cdot 3 =$$

b. 
$$7 - (5 - 2 \cdot 2) =$$

c. 
$$5(2^3-5)-8\div(7-2\cdot3)=$$

b. 
$$7 - (5 - 2 \cdot 2) =$$
  
c.  $5(2^3 - 5) - 8 \div (7 - 2 \cdot 3) =$   
d.  $3^2(10 \div 2 + 9) - 3(12 \cdot 3) + 2^3(7 - 3 \cdot 2) =$ 

#### Teoría de números

- Algoritmo de la división
- Divisibilidad
- Factor
- Múltiplo
- Números primos
- Números compuestos
- Descomposición prima

Aplicar el algoritmo de la división en la resolución de problemas.

▲ Para trabajar con el algoritmo de la división, se puede plantear un problema como el siguiente:

Don Manuel va a poner losetas en el piso de una habitación que mide 4 metros por 3 metros, las losetas miden 30 cm por 15 cm. Se van a colocar de forma análoga a lo que se ve en la figura, con el lado mayor de la loseta paralelo al lado mayor de la habitación.



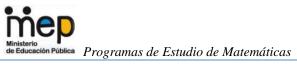
Imagen con derechos adquiridos por el MEP



de Educación Pública P	rogramas de Estudio de Matemáti	cas
Mínimo     Común     Múltiplo      Máximo     Común     Divisor		Las losetas pueden cortarse para que encajen en los extremos de cada fila de ellas. Don Manuel le dio las dimensiones a su hijo y éste compró 135 losetas. Si no se quiebra ninguna, ¿le alcanzarán estas losetas a don Manuel?, ¿le sobrarán?, si es así, ¿cuántas? ¿Cuántas filas de losetas habrá que colocar?, ¿cuántas losetas por fila?  Se pide trabajar en el problema y exponer las estrategias usadas. En todo caso, para responder a las dos últimas preguntas se deberá emplear la división y analizar lo que sucede.  El algoritmo de la división se puede utilizar para demostraciones muy sencillas, como por ejemplo probar que todo número natural es par o es impar. Esto permite fortalecer el proceso <i>Razonar y argumentar</i> .
	4. Aplicar los conceptos de divisibilidad, divisor, factor y múltiplo de un número natural en la resolución de problemas en diferentes contextos.   4. Aplicar los conceptos de división, factor y múltiplo de un número natural en la resolución de problemas en diferentes contextos.	<ul> <li>▲ La teoría de números permite retomar los conceptos y propiedades numéricas estudiadas en la educación Primaria y darles un mayor nivel de profundidad.</li> <li>▲ A través del uso de la pregunta dirigida se pueden repasar estos conceptos. Por ejemplo, el o la docente (D) escribe en la pizarra el número 120 y puede dirigir un diálogo con sus estudiantes de la siguiente forma:         <ul> <li>D: ¿Qué números dividen al 120 y por qué?</li> <li>Ester: Dos profe, ya que es un número par.</li> <li>D: Correcto. ¿Dicho número tiene más divisores?</li> <li>Allan: Sí, el tres, dado que sus cifras suman un número que es múltiplo de tres. También el cinco pues termina en cero.</li> <li>D: ¿Este número es múltiplo de 10?</li> <li>Melvin: Sí, porque 12 · 10 = 120.</li> <li>D: Muy bien. (El o la docente escribe lo siguiente:)</li></ul></li></ul>
		tales que el número de 5 cifras 1 <i>a</i> 2 <i>b</i> 1 es múltiplo de 3. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{15} \times 5^{17}$ ?



		Escriba todos los números mayores que 5000 y menores que 11 000 que tienen el producto de sus dígitos igual a 343.
5.	Identificar números primos y compuestos.	Se puede desarrollar este tema por medio del componente histórico, proponiendo investigaciones acerca del uso de la Criba de Eratóstenes, o bien los métodos utilizados por los matemáticos de la antigüedad para generar números primos. Por ejemplo: el matemático suizo Euler (1707-1783) propuso una fórmula que sirve para obtener números primos:
		$P(n) = n^2 - n + 41.$
		Sin embargo, para $n = 41$ el resultado es un número compuesto.
6.	Descomponer un número compuesto en sus factores primos.	▲ Se puede plantear el siguiente problema:  Escriba todos los números menores que 1000 en los que el producto de sus dígitos sea 30.
		▲ Es importante que cada estudiante tenga claro cómo descomponer un número en sus factores primos, pues es común observar errores. Por ejemplo:
		Forma correcta  40   2   40   4   20   2   10   2   10   2   5   5   5   5   0   1   Donde 4 no es un factor
		primo.
7.	Obtener el Mínimo Común Múltiplo de dos números aplicando el algoritmo co- rrespondiente.	▲ Se puede introducir el tema a través de problemas como los siguientes:
8.	Obtener el Máximo Común Divisor de dos números aplicando el algoritmo co- rrespondiente.	Lorena es una estudiante que utiliza una red social cada 6 días. Su amigo Luis accede cada cinco días y su hermano Alex ingresa cada 8 días. Si ellos coincidieron en su visita a esta red social el día 24 de julio, ¿en qué fecha vuelven los tres a coincidir?
		Damaris desarrolla un proyecto de bien social brindando ayuda a familias necesitadas. En su barrio, ella recogió 12 paquetes de frijoles, 18 paquetes de arroz y 30 tipos diferentes de pastas (fideos, caracolitos, lasaña, etc.). Ellos quieren hacer un pequeño diario que contenga la misma cantidad de productos con el mayor número de ellos posible sin que sobre alguno.  a. ¿Cuántos paquetes podrán hacer con estas características?  b. ¿Cuántos productos de cada tipo (arroz, frijoles y pastas) tendrá dicho diario?
		▲ Es necesario que se compartan las diferentes estrategias que usaron para resolver esta situación. Luego se establecen los conceptos y los algoritmos.
		270



	Se puede proponer problemas análogos a los que permitieron oducir los problemas de la habilidad anterior.
Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor.	
enteros  Enteros negativos en contextos reales.  Enteros negativos en contextos reales.  Concepto de número entero  Relaciones de orden  Recta numérica  Valor absoluto  Número opuesto  http:  Pos las  a u má Res	Muchas situaciones en contextos reales proporcionan inforcición que tiene que ver con los números negativos: tempera- as, ubicación sobre o bajo el nivel del mar, déficit económico, . Aunque en muchas ocasiones estas situaciones no presen- explicitamente el signo menos (–), se pueden modelar temáticamente utilizando dicho signo. Se puede proponer ormación como la siguiente para que cada estudiante de un delo:  El ascenso durante el buceo, salir del agua  Para iniciar el ascenso, se debe inspirar lentamente o dejar entrar un poco de aire en el chaleco para co- menzar a ascender. Es necesario estar de cara al compañero para comprobar el ritmo de ascenso y el estado del otro. Se debe controlar la cantidad de aire que entra en el chaleco ya que la expansión de éste hará que se acelere la ascensión. Un cálculo ade- cuado consiste en ascender 15 metros por minuto hasta 5 metros de profundidad. En este punto mu- chos buceadores realizan una parada de seguridad de 3 minutos por precaución. Los últimos 5 metros hasta la superficie deben recorrerse en 1 minuto. Si se realiza una inmersión de descompresión, debe asegurarse que se realizan todas las paradas de se- guridad establecidas.  Fuente: p://buceaconmigo.com/El-ascenso+durante+el+buceo%2C+salir +del+agua_5_42_9_98_es.html  steriormente, se implementan problemas donde se aproveche formas gráficas de representación para su solución:  El yak es un animal que habita en las montañas del Tibet unos 5000 m sobre el nivel del mar y el cachalote vive 5900 m sa abajo. Determine la altura en la que suele vivir este último. spuesta: 900 m bajo el nivel del mar.  La temperatura promedio en la ciudad de San José es de °C durante la estación lluviosa. Ciudades como Nueva York eden experimentar hasta 30 °C menos. Describa a qué reperatura puede estar dicha ciudad. Respuesta: podría perimentar temperaturas de hasta 5 °C bajo cero.



- Plantear y resolver
   operaciones y problemas
   utilizando las relaciones
   de orden en los números
   enteros.
- 10. Ubicar números enteros en la recta numérica.
- ▲ Se puede plantear problemas donde se apele intuitivamente al ordenamiento de cantidades, luego establecerá las relaciones de orden en los números enteros. Por ejemplo:

En Santiago de Chile se ha registrado el promedio mensual (redondeado al entero más cercano) de las temperaturas durante el último año, como se muestra en la siguiente tabla:

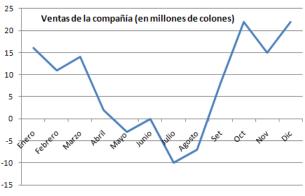
Mes	Temperatura
Enero	22°C
Febrero	30°C
Marzo	29°C
Abril	19°C
Mayo	10°C
Junio	5°C
Julio	-6°C
Agosto	-9°C
Setiembre	0°C
Octubre	-2°C
Noviembre	6°C
Diciembre	10°C

- a. ¿Cuál fue el mes donde hubo menor temperatura?
- b. ¿Cuál fue el mes donde hubo mayor temperatura?
- c. ¿Cuándo hubo mayor temperatura, en julio o en noviembre?
- d. Ordene las temperaturas de menor a mayor.
- e. Dibuje un termómetro donde se representen las temperaturas correspondientes a cada mes.

Este tipo de problemas establece conexiones con otras áreas y asignaturas. Por ejemplo, se podría elaborar una línea de tiempo con los años en que ocurrieron hechos históricos relevantes antes y después de nuestra era. También, una representación de las temperaturas promedio característica de los climas que se presentan en el mundo. Después se puede establecer la noción de recta numérica a partir de dichas representaciones.

▲ Posteriormente, se pueden plantear problemas para reforzar la comprensión de estas relaciones en la recta numérica. Por ejemplo, en la interpretación de la información que ofrecen ciertos gráficos estadísticos:

En el siguiente cuadro aparecen las ganancias o pérdidas en cada mes del año 2011 de una empresa:



-		
		<ul> <li>a. ¿En qué meses la empresa tuvo pérdidas?</li> <li>b. ¿En qué meses la empresa tuvo ganancias?</li> <li>c. ¿En qué meses no hubo ni ganancias ni pérdidas?</li> <li>d. ¿Cuál es la ganancia total en los primeros seis meses?</li> <li>e. ¿Cuál es la ganancia total en el segundo semestre?</li> <li>f. ¿Cuál fue la situación de la empresa en los meses de mayo, junio, julio y agosto?</li> </ul> Este problema permite establecer conexiones con
		Estadística y Probabilidad.
	11. Determinar el opuesto y el valor absoluto de un número entero.	▲ Se puede iniciar con un problema que permita establecer la diferencia entre el valor relativo y el valor absoluto de un número entero. Por ejemplo:
		Carolina sale de su casa y se dirige al hogar de su mamá que se ubica 2 km al Sur del suyo. Luego de saludarla y conversar con ella, le informan que su hermano Andrés (quien estudia en el extranjero y llevaba más de 5 años de no visitar a su familia) llegó a Costa Rica y que se encuentra en su casa de habitación, a 750 m Norte de la casa de su mamá por lo que ellas se dirigen para darle la bienvenida. Considerando como punto de referencia la casa de Carolina:
		<ul> <li>a. Determine su ubicación actual en metros.</li> <li>b. Determine la distancia en metros que hay entre la casa de Carolina y la de su hermano.</li> </ul>
		<ul> <li>▲ Se definirá el valor absoluto de un número entero como la distancia que existe entre el número y el cero en la recta numérica.</li> <li>▲ Es necesario utilizar el símbolo "–" (símbolo de resta) para denotar el cálculo del opuesto de un número dado. Así el opuesto de -31 se denotaría simbólicamente</li></ul>
		-(24) = -24 o bien $-24 = -24$
		▲ Es conveniente verificar las propiedades con ejemplos numéricos, tal como: un número entero y su opuesto tienen el mismo valor absoluto.
		-6  =  6
		Después de asimilar las operaciones con números enteros se puede proponer la verificación de las siguientes propiedades:
		$ a \cdot b  =  a  \cdot  b $ $ a + b  \le  a  +  b $
Operaciones, cálculos y estimaciones	12. Resolver problemas aplicando sumas, restas, multiplicaciones y divisio-	▲ Para el caso de la suma y la resta, se puede esclarecer el concepto mediante el planteo de problemas. Por ejemplo:
• Suma	nes de números enteros.	Buceando, Edwin se encontraba a 9 m bajo el nivel del mar. Si Edwin descendió 8 m más, ¿a qué profundidad estaba?
Resta     Multiplica- ción		Pedro debe a Juan \$\mathcal{C}\$250 000 y le cancela \$\mathcal{C}\$110 000. ¿Cuánto le queda debiendo Pedro a Juan?

		Programas de Estudio de Matemáticas  Ministerio de Educación Pública
<ul> <li>División</li> <li>Potencias</li> <li>Raíces</li> <li>Combinación de operaciones</li> </ul>		<ul> <li>▲ Aunque para resolver los problemas anteriores no se requiere estrictamente el uso de números negativos, se deberá utilizar como una forma de modelizar que será útil en diversas circunstancias. Así, en la etapa de discusión se representarán los datos con números enteros positivos o negativos, de manera que se puedan enunciar estrategias que permitan establecer los algoritmos correspondientes.</li> <li>▲ En el caso del producto, se debe enfatizar la razón de la ley de signos. Para ello, el docente puede plantear problemas como el siguiente:</li> <li>Determine el resultado de la operación 5 · -4.</li> <li>Se espera que cada estudiante utilice la noción de producto como suma sucesiva y que verifique, con operaciones similares, que se sigue cumpliendo la tendencia en el signo del resultado.</li> <li>5 · -4 = -4 + -4 + -4 + -4 + -4 = -20</li> <li>Sería interesante introducir la historia de los números negativos al comenzar su estudio.</li> <li>▲ Cuando se trata el producto de dos números enteros negativos, se puede utilizar la noción de número opuesto para justificar el signo que posee el resultado. Observe:         <ul> <li>-3 · -2 = - (3) · -2 = - (-2 + -2 + -2) = - (-6) = 6</li> </ul> </li> <li>▲ La división es con cociente entero y residuo cero.</li> </ul>
	13. Simplificar cálculos mediante el uso de las propiedades de conmutatividad y asociatividad de la adición y multiplicación.	▲ Por ejemplo si se desea resolver la operación  5 + -7 + 5 + -10  un estudiante puede resolver primero  5 + 5  luego  -7 + -10  y finalmente se suman los resultados. Esto se justifica por la conmutatividad y la asociatividad de la suma y permite simplificar los cálculos.
	<ul> <li>14. Calcular potencias cuya base sea un número entero y el exponente sea un número natural.</li> <li>15. Utilizar las propiedades de potencias para representar el resultado de operaciones con potencias de igual base.</li> </ul>	▲ Es importante la deducción de las propiedades de potencias a partir de su definición. Esto se puede lograr por medio del planteo de problemas análogos al siguiente:  Represente el resultado de la operación 3 <sup>25</sup> · 3 <sup>31</sup> .  Aquí se pretende que ante la imposibilidad de brindar un resultado, se busque una representación alternativa del resultado: 3 <sup>56</sup> . Además es importante que se comuniquen las estrategias utilizadas con el fin de lograr un aprendizaje más activo y colaborativo.  Las propiedades a deducir son:



	T.	
	16. Identificar la relación entre potencias y raíces como operaciones inversas.	<ul> <li>a. a<sup>m</sup> ⋅ a<sup>n</sup> = a<sup>m+n</sup></li> <li>b. a<sup>m</sup> ± a<sup>n</sup> = a<sup>m-n</sup></li> <li>c. (a<sup>m</sup>)<sup>n</sup> = a<sup>m.n</sup></li> <li>d. a<sup>0</sup> = 1, a ≠ 0</li> <li>A Hacer hincapié en la diferencia entre las expresiones del tipo</li> <li>-5² y (-5)²</li> <li>ya que la primera representa el opuesto de 5² (resultado negativo) y la segunda que -5 se eleva a la dos (resultado positivo).</li> <li>A Se pueden proponer problemas tipo reto matemático. Por ejemplo:</li> <li>¿Qué número multiplicado por sí mismo 5 veces da como resultado 32?</li> <li>¿Qué número multiplicado por sí mismo 3 veces da como resultado 64?</li> <li>A Luego se establece la relación existente entre la potenciación y la radicación así como la simbología utilizada:</li> <li>(-7)³ = -343 ↔ <sup>3</sup>√-343 = -7.</li> <li>A También se debe reforzar el concepto con ejemplos del tipo:</li> <li>(-5)² = 25 ↔ √25 =  -5  = 5</li> <li>A Es importante proponer a cada estudiante ejemplos que generen discusión acerca de la veracidad de ciertas proposiciones. Por ejemplo:</li> <li>¿ Son correctas las siguientes igualdades?</li> </ul>
		▲ Es importante proponer a cada estudiante ejemplos que generen discusión acerca de la veracidad de ciertas proposicio-
	17. Calcular la raíz de un número entero cuyo resul- tado sea entero.	▲ En esta habilidad, es fundamental el proceso de obtener la raíz sin el uso de la calculadora mediante la descomposición en factores primos y el uso de las siguientes propiedades de radicales: $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases}  x  & \text{para } n \text{ par} \\ x & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$
284	18. Calcular resultados de operaciones con números enteros en expresiones que incorporen la combinación de operaciones con paréntesis o sin ellos.	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$ • Las operaciones combinadas no deben exceder de dos términos, en cada uno de ellos sólo se hará uso de a lo sumo un paréntesis. En el interior de cada paréntesis sólo incluir a lo sumo dos diferentes tipos de operaciones. En algunos ejemplos, incluir potencias y raíces exactas. A continuación algunos ejemplos:



		a. $32(-\sqrt{49}+5^3)=$
		b. $3(-4+5\cdot-3)+5(-27\div-9-\sqrt{25})=$
		c. $((-2)^3 + 11) - 3(16 - 9 \cdot -2) =$
19	9. Resolver problemas en los que se apliquen las operaciones con números enteros.	Por ejemplo:  Hernán recibió hoy de su madre ¢5000, además ayer había prestado a tres compañeros ¢500 a cada uno para que compraran un refresco; los tres le pagaron hoy lo que le debían.
		Con el dinero que ahora tiene pretende comprar tres naranjas que le cuestan \$\mathcal{C}\$200 cada una y quiere también comprar un CD que cuesta \$\mathcal{C}\$5700. Modele mediante una combinación de operaciones con números enteros la situación propuesta. Obtenga el resultado de efectuar las operaciones. ¿Le alcanza a Hernán el dinero que tiene para comprar las naranjas y el CD?

8° Año Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
	Identificar números racionales en diversos contextos.	A Se pueden proponer problemas como el siguiente.  Aquí aparecen los precios de los combustibles.  Precios NACIONALES (*) LOCAL PRICES (*)
		Precios en colones al consumidor en estaciones de servicio   Rigen a partir del 02 de Febrero del 2012     PRECIO / litro   Imp. único   Promedio de   Estaciones de   Servicio   Cost / litre   without   tax   Servicio   Local Services   Stations   Average Margin   Gasolina Super   351,7460   213,0000   50,5548   615,0000   Super Gasoline   Gasolina Plus 91   346,3730   203,5000   50,5548   600,0000   Plus 91   Gasoline   Diesel 50   403,7050   120,2500   50,5548   575,0000   Diesel 50   Dies
		Imagen tomada de: http://www.recope.go.cr/info_clientes/precios_productos/  Si en la gasolinera pido que me vendan ₡10 000 en gasoliner Plus 91, ¿cuántos litros me dan?  ▲ Problemas como éste permiten introducir la necesidad o utilizar otros números diferentes a los enteros.  ▲ Cada estudiante debe tener claro que los números entero también son números racionales.

		▲ Es importante que cada estudiante pueda resolver situaciones en contexto en las que se involucre la noción de división. Esto permitirá en la etapa de clausura establecer su representación por medio de fracciones. Se deben implementar ejemplos que originen números enteros y no enteros (no se debe olvidar contemplar situaciones que involucren números negativos). Por ejemplo:
		Si camino 10 m en dirección Oeste y me devuelvo una cuarta parte de dicho recorrido, ¿cuánto me desplacé con respecto al lugar del que salí?
		Juan contrajo una deuda de <b>@</b> 17 500. Su padre, un hermano y un amigo deciden ayudarle a pagarla por lo que se reparten la deuda equitativamente entre ellos tres. ¿Cuánto debe pagar cada uno?
	<ol> <li>Realizar aproximaciones decimales de números ra- cionales.</li> </ol>	▲ Inicialmente, se debe procurar que el estudiante efectúe divisiones sin el uso de la calculadora. Esto permite enfatizar cómo es que se obtienen las representaciones decimales de los
	3. Identificar los números racionales representados con expansión decimal exacta y con expansión decimal periódica.	números racionales. De paso, se puede visualizar la infinitud de los decimales de algunos números racionales. $\frac{21}{4} = 21 \div 4 = 5,25$ $\frac{4}{3} = 4 \div 3 = 1,333333 = 1,\overline{3}$ $\frac{9}{11} = 9 \div 11 = 0,818181 = 0,\overline{81}$ $\frac{7}{6} = 7 \div 6 = 1,166666 = 1,1\overline{6}$ $\blacktriangle$ Esta noción de infinitud es fundamental en los números racionales e irracionales que se tratan en el próximo año escolar. $\blacktriangle$ Al aproximar fracciones por medio de su expansión decimal, se debe aclarar que la calculadora da una aproximación (en el caso de los decimales periódicos), por lo que la notación mediante el uso de la raya del periodo o bien la notación fraccionaria asegura la exactitud en la representación del número racional.
4	ldentificar y aportar ejemplos de representa- ciones distintas de un mismo número racional.	▲ Por ejemplo $\frac{7}{5} = 1,4 = 1\frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5}$ .  ▲ Se pueden idear problemas donde se haga uso de representaciones numéricas adecuadas para el desarrollo de actividades cotidianas. Por ejemplo:  Ana encontró en Internet una receta cuyos ingredientes
		aparecen a continuación.

# Gastronomía del Mundo ( OTRO PASTEL DE LIMÓN

# Ingredientes

- Pasta:
- 2 1/4 tazas de harina
- 1 taza colmada de margarina
- 1/8 cdta. de sal
- Relleno:
- 2 3/4 tazas de azúcar
- 1 taza de fécula de maíz
- 3 tazas de agua
- 4 yemas de huevo batidas
- 4 cdas. de margarina derretida
- 6 cdas. de jugo de limón
- Ralladura de 3 limones
- Merengue:
- 4 claras
- 6 cdas. de azúcar

#### Imagen tomada de: http://www.arecetas.com

Ana manifiesta que no comprende la forma en que aparece la información pues no está descrita en la forma tradicional. ¿De qué forma se puede ayudar a Ana para que comprenda los

- Comparar y ordenar números racionales en notación decimal, fraccionaria y mixta.
- 6. Representar números racionales en la recta numérica, en cualquiera

de sus representaciones.

- Usar la estimación mental y la calculadora para realizar tal representación.
- ▲ Para ubicar  $\frac{-7}{5}$  en la recta numérica se pueden utilizar algunas de sus representaciones:

$$\frac{-7}{5} = -1.4 = -1\frac{2}{5}$$



# Operaciones, cálculos y estimaciones

- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División
- Potencias
- Raíces

- Aplicar la suma y resta de números racionales en diversos contextos.
- Aplicar la multiplicación y división de números racionales en diversos contextos.
- Utilizar las propiedades de conmutatividad y asociatividad de la suma y multiplicación para simplificar cálculos con números racionales.

- ▲ Se puede formular problemas como el siguiente:
- Ademar compró 3 metros de plástico para forrar cuadernos. El necesitó  $1\frac{1}{5}$  m para forrar algunos, su hermano Randall utilizó 0,6 m y su hermana Hellen usó  $\frac{1}{3}$  m.
  - a) ¿Cuánto plástico utilizaron para forrar los cuadernos?
  - b) ¿Cuánto plástico sobró?
- ▲ Es importante retomar lo trabajado respecto al uso de diversas representaciones de un número, así como la amplificación y simplificación de fracciones para justificar el empleo del mínimo común múltiplo en el desarrollo de estas operaciones:

Representaciones:

datos de la receta?

$$1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$
,  $0.6 = \frac{6}{10}$ 



•	Combina-
	ción de
	operaciones

10. Calcular el resultado de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números racionales en cualquiera de sus representaciones.

Operación:

$$\frac{6}{5} + \frac{6}{10} + \frac{1}{3} =$$

Mínimo Común Múltiplo de 5, 10 y 3 es 30.

Amplificación de las fracciones por 6, por 3 y por 10 respectivamente:

$$\frac{36}{30} + \frac{18}{30} + \frac{10}{30} = \frac{64}{30}$$

Simplificación:

$$\frac{64}{30} = \frac{32}{15}$$

Así ellos gastaron  $\frac{32}{15}$  m (aproximadamente 2,13 m).

- ▲ En la etapa de clausura o cierre, se detalla el algoritmo que permite sumar y restar fracciones heterogéneas por medio del Mínimo Común Múltiplo de sus denominadores.
- ▲ Se debe trabajar con suma y resta de números racionales en cualquiera de sus notaciones.
- Efectuar operaciones con potencias de base racional y exponente entero.
- ▲ Generalización de las propiedades verificadas en 7°Año. Es necesario formalizar las siguientes propiedades:

a. 
$$a^{-n} = \frac{1}{a^{-n}}, a \neq 0$$

b. 
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

c. 
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}, a \neq 0, b \neq 0$$

- 12. Calcular raíces *n*-ésimas de un número racional.
- ▲ Las raíces calculadas deben dar como resultado un número racional.
- ▲ Si el número racional está representado en su forma fraccionaria, es fundamental el proceso de obtener la raíz sin el uso de la calculadora mediante la descomposición en factores primos del numerador y el denominador. El docente debe introducir el uso de la siguiente propiedad:

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

- Calcular resultados de operaciones con números racionales de expresiones donde haya combinación de ellas con paréntesis o sin ellos.
- ▲ En la prioridad de operaciones, plantear operaciones que no excedan los dos términos. Por ejemplo:

$$-\frac{3}{4} + 5^{-1} \div -1,3 =$$

▲ Si se contempla el uso de paréntesis, las expresiones deberán contener como máximo dos y que cada uno de ellos contenga solamente dos términos (dos factores a lo sumo cada término). A continuación algunos ejemplos:

	$-2\left(\frac{-5}{3} + 5 \cdot \frac{1}{2}\right)$ $2\frac{1}{3}\left(-1,4 - 2 \div \sqrt{\frac{1}{4}}\right) - 5\left(\frac{-2}{3} \cdot \frac{-1}{4} - 1\right)$
14. Desarrollar estrategias para el cálculo mental de resultados de operaciones con racionales.	▲ Deben usarse ejercicios apropiados, por ejemplo: $\frac{-8}{7} - \frac{5}{7}$ $\frac{-9}{4} + \frac{3}{4}$ $\frac{1}{6} - \frac{5}{6} + -3$ $\frac{-1}{5} \cdot -4$ Solicitar a cada estudiante juzgar si los resultados de las estimaciones son razonables y que argumente su posición.
15. Seleccionar métodos y herramientas adecuados para la resolución de cálculos, según el problema dado.	▲ Dependiendo del problema se pueden utilizar diferentes estrategias de cálculo, por ejemplo:    Cálculo mental   1,5 kg a ₡2000 cada kilogramo.     Papel y lápiz   1,5 kg a ₡2450 cada kilogramo.     Calculadora   1,75 kg a ₡2225 cada kilogramo.
16. Plantear y resolver pro- blemas en los que se re- quiera de la aplicación de operaciones con números racionales.	▲ Conviene proponer operaciones para que los estudiantes planteen problemas. Por ejemplo:  Se pide a las y los estudiantes que planteen un problema en el que se involucre la siguiente combinación de operaciones: $\frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{2}{3} \cdot 3$



9° Año		
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Números reales	Identificar números irra- cionales en diversos con- textos.	▲ Para introducir los números racionales se puede comenzar con el siguiente problema.
Números irracionales	textos.	Suponga que en la siguiente figura el segmento BC mide 1 m, ¿cuánto mide el área del cuadrado ACDE?
<ul><li>Concepto de número real</li><li>Representa-</li></ul>		C
ciones  • Compara- ción		A B D
<ul><li>Relaciones de orden</li><li>Recta numérica</li></ul>		E
		▲ La discusión llevará de manera natural a concluir que el área es 2 $\text{m}^2$ , viendo que el cuadrado está constituido por cuatro triángulos congruentes de área 0,5 $\text{m}^2$ . Si no se conoce el teorema de Pitágoras, no se sabrá de antemano cuánto es $x$ , la medida del lado del cuadrado, pero debido a que el área es 2 y el lado es $x$ entonces $x^2 = 2$ .
		A continuación se pregunta al grupo qué tipo de número es x y éste deberá concluir que no es un número entero puesto que no hay un entero que multiplicado consigo mismo dé 2.
		¿Será un racional? Esta posibilidad puede descartarse realizando una demostración, que servirá además para repasar conceptos de teoría de números.
		Finalmente se concluye que los números como $x$ que no son racionales se llaman irracionales, que $x$ se denota por $\sqrt{2}$ . Se indica que $\pi$ es otro número irracional y que hay muchos otros.
		Se puede ilustrar, por medio de reseñas históricas, que el surgimiento de este tipo de números aparece en la solución de problemas en los que los números racionales no son suficientes.
	Identificar números con expansión decimal infinita no periódica.	▲ Lo que se desea es mostrar números decimales diferentes a los números naturales, enteros y racionales.
		Es importante considerar el reconocimiento de patrones de construcción que generen números decimales con expansión infinita no periódica, por ejemplo: "0,1010010001 (cada vez agregar un cero más antes de escribir 1)". Esto permite establecer conexiones con el área de <i>Relaciones y Álgebra</i> .

- Realizar aproximaciones decimales de números irracionales.
- Reconocer números irracionales en notación decimal, en notación radical y otras notaciones particulares.

La calculadora debe usarse para que cada estudiante pueda observar más rápidamente el desarrollo; sin embargo, se debe aclarar que la calculadora tan solo ofrece una aproximación.

- ▲ Se implementará el procedimiento de cálculo de raíces, visto en años anteriores, para identificar aquellas raíces que corresponden a números irracionales.
- lacktriangle Se puede desarrollar una actividad para obtener una aproximación de e. Se pide a cada estudiante que complete la siguiente tabla con ayuda de la calculadora. Se puede explorar con valores de n mayores a los suministrados.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	
2	
:	
100	
:	
950	
:	
5000	

Luego, se pueden realizar preguntas como por ejemplo,

- a. ¿qué sucede conforme aumenta el valor de n?
- b. ¿los resultados obtenidos son números racionales?

Finalmente, en el cierre se menciona que la actividad desarrollada es una forma de aproximar el número irracional e por medio de números racionales y el o la docente puede proponer la realización de una pequeña investigación acerca de sus orígenes.

El trabajo con números irracionales puede ofrecer oportunidades para activar el proceso *Razonar y argumentar*. Por ejemplo, al mostrar que  $\sqrt{3}$  no es un número racional.

- Comparar y ordenar números irracionales representados en notación decimal y radical.
- ▲ Plantear ejemplos del tipo:
  - a. Determine entre qué par de números enteros consecutivos se encuentra  $\sqrt{29}$ .
  - b. Determine tres números irracionales representados con radicales que se encuentran entre los números 7 y 8.
- Identificar números reales (racionales e irracionales) y no reales en cualquiera de sus representaciones y en diversos contextos.

Se puede utilizar la calculadora. Se debe hacer énfasis en las diferentes representaciones de un número real, por ejemplo:

a. 
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106 \dots$$

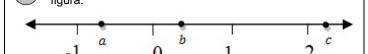
b. Verificar que  $\sqrt{5^2 - 7^2} \neq 5 - 7$ 

	Al resolver la operación $5 \div 23$ en la calculadora da como resultado 0,2173913043, el cual se puede malinterpretar como un número irracional, de ahí la importancia de las diferentes representaciones de un número real.
	én es importante comentar que hay números, como por $\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-25}$ que no son reales.

Se debe realizar un análisis de posibles errores que se pueden cometer al calcular ciertas expresiones. Por ejemplo, analizar lo incorrecto en el siguiente procedimiento:

$$\sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = -5.$$

- Representar números reales en la recta numérica, con aproximaciones apropiadas.
- ▲ Usar la estimación mental o la calculadora para realizar tal representación. Por ejemplo:



Dadas las coordenadas a, b, c, como se muestra en la

coloque un punto en un lugar aproximado a

- a. |a|
- b. b+1
- c.  $\frac{c}{3}$

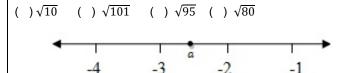
# Cálculos y estimaciones

- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División
- Potencias
- Radicales

- 8. Estimar el valor de la raíz de un número entero.
- Determinar números irracionales con representación radical entre dos números enteros consecutivos.
- ▲ Trabajar ejemplos del tipo:



Un posible valor de a es



Un posible valor de a es

( ) 
$$\sqrt[3]{-10}$$
 ( )  $\sqrt[3]{-6}$  ( )  $\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}$  ( )  $\sqrt[3]{-10}$ 

- Utilizar la calculadora para resolver operaciones con radicales.
- ▲ Este es uno de los usos adecuados para la calculadora, en un tema en que no tiene sentido la realización de cálculos sin ese tipo de soporte.

Se debe aprovechar la calculadora científica para trabajar con expresiones con radicales. La respuesta puede darse en cualquier representación. Además, se pueden resolver problemas como:





logía molecular", esto es, la construcción de nanomáquinas
hechas de átomos y que son capaces de construir ellas
mismas otros componentes moleculares.
Richard Feynman, premio Nobel de Física, es considerado
el padre de la "nanociencia". En 1959 propuso fabricar
productos con base en un reordenamiento de átomos y
moléculas. En ese año, escribió un artículo que analizaba
cómo los ordenadores trabajando con átomos individuales
podrían consumir poquísima energía y conseguir velocida-
des asombrosas.
()
Podemos decir que muchos progresos de la nanociencia es-
tarán entre los grandes avances tecnológicos que cam-
biarán el mundo.
Fuente:
http://www.euroresidentes.com/futuro/nanotecnologia/nanotecnolo
gia_que_es.htm

# Indicaciones metodológicas

## Generales del ciclo

- Los cálculos operatorios permiten desarrollar habilidades o destrezas numéricas y mayores posibilidades de realizar procesos de plantear y resolver problemas en contexto. De ahí que sea valioso dar énfasis al cálculo mental y a la estimación.
- 2. En el Tercer ciclo el sentido numérico está estrechamente asociado a operaciones y cálculos; este permite decidir cuál es la estrategia más adecuada para enfrentar un problema: cálculo mental, estimación aproximada, trabajo sistemático con papel y lápiz o el uso de calculadora o incluso la computadora. También, es fundamental la representación múltiple de los números: fracciones, razones o porcentajes, etc.
- 3. El uso de los números muy grandes o muy pequeños debe analizarse desde situaciones científicas, tecnológicas o económicas. Por ejemplo, se pueden buscar noticias como la siguiente:

PROYECTO CON CAPACIDAD DE 305 MW COSTARÁ \$1,200 MILLONES

# ICE busca socio para levantar gigante energético en Reventazón

Imagen tomada de: http://www.nacion.com/2011-03-21/EIPais/NotasSecundarias/EIPais2718677.aspx

A través de esta noticia se pueden realizar preguntas generadoras como por ejemplo:

- a. ¿A cuánto equivale 305 MW?
- b. ¿A cuántas casas se le puede dar energía eléctrica con este proyecto (investigar cuanto consume una casa en promedio)?
- c. ¿Cuál es el costo del proyecto en colones?
- 4. Para introducir los diferentes números se deben proponer problemas relacionados con situaciones en contexto. En algunos casos esto puede ser difícil, entonces un problema matemático interesante o un aspecto de la historia de las Matemáticas puede ser útil.
- 5. Cuando se sugiere un problema, es importante que cada estudiante tenga el tiempo suficiente para experimentar y conjeturar, así como para poder describir los resultados obtenidos. En la etapa de clausura, debe cuidarse que los datos brindados y la respuesta tengan sentido real.



- 6. Aunque se hace un énfasis en los cálculos operatorios, no tiene sentido proponer operaciones enormes y con muchos paréntesis. Además, esto no aporta mucho al conocimiento real de las y los estudiantes y puede causar distracciones y fobia hacia las Matemáticas, pues no encuentran en estas operaciones ni practicidad, ni aplicabilidad en contextos reales ni interés matemático.
- 7. La calculadora científica se puede utilizar a partir de 7°Año. Esta es una herramienta que puede utilizarse cuando aparecen números muy grandes en los cálculos para que la o el estudiante se concentre en los aspectos clave de la resolución de problemas, como la elaboración de estrategias, la comunicación y elaboración de conjeturas. También puede ser indispensable para la comprobación de resultados en las operaciones.

## Sétimo año

 Cuando se introduce el concepto de número negativo, se debe tener en cuenta que éste entraña dificultades de tipo cognitivo. De hecho, la historia así lo refleja. La siguiente es una breve reseña histórica relacionada con estos números.

Ni los calculistas babilónicos o egipcios, ni los pensadores griegos y ni los matemáticos árabes dispusieron de la noción general de números negativos.

Los primeros en utilizar cantidades negativas fueron los matemáticos indios, quienes desde los siglos VI y VII de nuestra era los empleaban para necesidades contables. En contraposición a los bienes, representados con números positivos, las deudas se anotaban como cantidades negativas, las cuales se desvinculaban de lo "concreto" y de las circunstancias que habían ocasionado su aparición, con lo que se establecía así una utilización general de las cantidades negativas.

Cualquier anotación de deudas y de bienes sólo se puede efectuar si existe una situación de equilibrio, una situación en la que los bienes compensan las deudas. Dicho de manera más general: no puede haber números negativos sin la presencia del cero.

Un milenio después de los matemáticos indios, las cantidades negativas no habían podido forzar las puertas del imperio de los números en Occidente. Podemos preguntarnos por qué los matemáticos o los calculistas contables de Europa occidental, que disponían del cero desde el siglo XIV, no produjeron desde esta época los números negativos al igual que sus homólogos indios.

Sería necesario esperar hasta finales del siglo XV para ver aparecer en Occidente entes numéricos no positivos; entes cuyas reglas de empleo se establecen –las reglas de los signos–, pero cuya existencia como cantidades reales, es decir como números, se niega. Designados como *numeri absurdi*, durante mucho tiempo se rechazará su consagración: ser considerado como soluciones posibles de una ecuación. Para el propio Descartes, la raíz de una ecuación que no era positiva se consideraba como una "raíz falsa".

En cuanto a la representación gráfica de una función, hubo que esperar hasta mediados del siglo XVII para que el matemático inglés John Wallis osara atribuir coordenadas negativas a los puntos de una curva.

Tomado de: Guedj, D. (2011) El imperio de los números. Blume, Barcelona.

2. Proponer una actividad donde se introduzca la existencia de otros tipos de números diferentes a los conocidos. Por ejemplo, en el planteo de operaciones como 6 – 11 o 11 – 40 se puede discutir las razones para considerar que dicha operación no tiene sentido y dejar latente la inquietud de que el resultado de estas operaciones puede ser representado por un nuevo tipo de número.

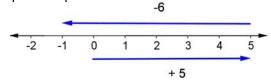


3. Algunos problemas pueden ayudar en la conceptualización de número negativo; por ejemplo:

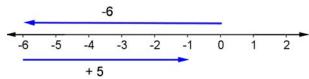
Ana compró un celular en \$\infty\$53 500 y un disco en \$\infty\$11 500. Al llegar a la caja se da cuenta que lleva \$\infty\$60 000 para pagar. ¿Es suficiente la cantidad de dinero que posee Ana para pagar? Si no es suficiente, ¿cuánto dinero le haría falta? Respuesta: no lleva dinero suficiente, pues le hacen falta \$\infty\$5000.

Luis se dirige a la pulpería que se ubica a 100 m al Este de su casa. Luego visita a una tía que se encuentra a 200 m al Sur de la pulpería. Si se toma como referencia la casa de Luis, determine la dirección de la casa de la tía. Respuesta: se ubica 100 m Oeste de la casa de Luis.

- 4. El algoritmo de la división establece que si a, b son enteros positivos entonces existen únicos q, r enteros positivos, tales que  $b = a \cdot q + r \operatorname{con} 0 \le r < a$ . A q se le llama cociente y a r se le llama residuo. Por ejemplo, en la expresión 49 = 9 · 5 + 4, los valores 5 y 4 se pueden hallar realizando el procedimiento de división habitual 49 ÷ 9.
- 5. Conviene utilizar la representación de la suma y la resta de números enteros en la recta numérica para afianzar desde otra perspectiva estos algoritmos. Por ejemplo:
  - a. La operación 5 + -6 se puede representar



b. La operación -6 – -5 se puede representar

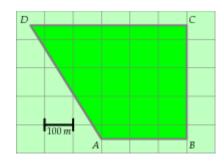


donde el símbolo de resta representa un cambio de dirección en el desplazamiento que sugiere el segundo término. En este caso se desplazó hasta -6 y luego no se siguió el desplazamiento hacia la izquierda (como lo sugeriría el número -5) sino que se movió en la dirección contraria.

# Octavo año

- 1. En general, la introducción de los números racionales en 8º Año representa menos dificultades que la de los enteros negativos en 7º Año. Esto se debe a que ya se han trabajado los números fraccionarios, aunque positivos, en la enseñanza Primaria. Introducir los racionales negativos no es más que una ampliación del tipo de números a los que se le puede asignar un valor negativo.
- 2. Es conveniente plantear problemas que permitan resolver problemas a través del uso de las operaciones con números racionales, estableciendo conexiones con otras áreas. Por ejemplo, este problema conecta con el área de *Geometría*.

Un terreno cuadrangular de vértices A, B, C, D se muestra a continuación:



Si la quinta parte de dicho terreno se dedicará a zonas verdes y tres octavos a una zona de parqueo. ¿qué extensión de terreno queda libre para otros usos?

Por ejemplo, si se desea resolver la operación

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3}$$

al utilizar la asociatividad y conmutatividad se puede resolver primero

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

lo que permite simplificar los cálculos.

Un énfasis especial debe dársele a las múltiples representaciones para los números racionales. En este sentido es importante proponer problemas que contengan información numérica con múltiples representaciones.

## Noveno año

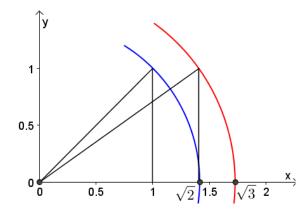
Al comenzar el estudio de los números irracionales es apropiado probar que  $\sqrt{2}$  no es un número racional. Es una demostración sencilla que puede ser seguida por las y los estudiantes y que repasa conocimientos de la teoría de números. Para la demostración de que raíz cuadrada de 2 no es racional, primero se repasa la descomposición de los números enteros en números primos. Se puede deducir que si 2 es un factor de un número entero m, entonces  $m^2$  tiene 2 como factor un número par de veces. Ahora:

2.

- Si  $\sqrt{2}$  fuera racional, entonces  $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \operatorname{con} m \operatorname{y} n$  enteros.
- Elevando al cuadrado: 2 = m²/n².
   Multiplicando por n²: 2n² = m².
- Por lo dicho arriba,  $m^2$  tiene un número par de veces a 2 como factor (o no lo tiene), mientras que  $2n^2$  tiene un número impar de veces a 2 como factor.
- Conclusión:  $\sqrt{2}$  no puede ser racional.
- El trabajo con números irracionales puede permitir algunas demostraciones para activar el proceso Razonar y argumentar. Por ejemplo, se puede replicar los argumentos de la prueba de la irracionalidad de  $\sqrt{2}$  para probar que  $\sqrt{3}$  también es irracional. La clave de la prueba está en el hecho de que la igualdad  $3n^2 = m^2$  no se puede cumplir si m y n son enteros puesto que en el lado derecho hay un número par (que puede ser cero) de factores iguales a 3, mientras que en el lado izquierdo hay un número impar de factores iguales a 3.



3. Con respecto a la representación en la recta numérica de un número irracional, se puede utilizar la calculadora para determinar una aproximación del número y luego ubicarlo en la recta numérica. Luego de estudiar el teorema de Pitágoras, se puede proponer como un problema en donde se tenga que utilizar la regla y el compás para representar  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$  en la recta numérica (esto permite conexión con *Geometría*), como se muestra en la siguiente figura (el arco azul corta al eje en  $\sqrt{2}$  y el arco rojo en  $\sqrt{3}$ ).



- 4. En la Antigüedad, los matemáticos buscaban expresar cantidades dadas como el cociente de dos números naturales (Pitagóricos), y ante inconsistencias encontradas para casos particulares hubo que desarrollar una nueva teoría que involucraba la manipulación de otros tipos de números. Se puede mencionar una breve historia de algunos números irracionales, como por ejemplo:
  - a. La leyenda sobre Hipaso de Metaponto (500 a.C.), quien se cree fue el primero en descubrir la existencia de números irracionales, al descubrir que no se podía expresar la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado (la cual corresponde al número denotado actualmente como  $\sqrt{2}$ ). Este hecho generó su expulsión de la Escuela Pitagórica y su condena a muerte.
  - b. Hubo numerosos intentos fallidos en la Antigüedad por expresar la razón entre la medida de la circunferencia y su diámetro como una medida racional, hasta que en 1767 el matemático alemán Johann H. Lambert (1728 1777) determinó la irracionalidad del número  $\pi$ .
  - c. Un número irracional que aparece en la naturaleza, en el arte y el diseño es el denominado número áureo, que se representa con la letra griega  $\phi$  (fi) en honor a Fidias (490-431 a.C.), escultor griego de la Antigüedad, quien lo usó en sus obras.

## Indicaciones de evaluación

En cuanto al *trabajo cotidiano* es importante evidenciar el progreso estudiantil al trabajar tópicos relacionados con las operaciones con números enteros, racionales e irracionales, particularmente en lo concerniente a su desenvolvimiento en la resolución de problemas del entorno. Es recomendable que las operaciones estén asociadas a problemas con un contexto cercano a la realidad estudiantil, para así evaluar diferentes niveles de complejidad (reproducción, conexión y reflexión) y no sólo operaciones representadas simbólicamente.

Para el trabajo extraclase, se pueden asignar tareas que permitan seguir activando los procesos de Razonar y argumentar y Representar en temáticas como la resolución de problemas por medio del uso de las operaciones básicas y los conceptos de teoría de números. Para algunas de las habilidades que sugieren en sus indicaciones puntuales un abordaje por medio del uso de la Historia de las Matemáticas, se puede elaborar una pequeña investigación cuyo alcance se defina previamente. Por ejemplo, al estu-



diarse la criba de Eratóstenes, se puede proponer investigar su origen y recopilar otros aportes realizados por este matemático.

Para este ciclo la evaluación en el área de Números, debe tener presentes las siguientes indicaciones.

- ✓ En el cálculo de operaciones con números enteros, racionales y radicales, las operaciones deben ser sencillas y con la cantidad de paréntesis que se establecen en las indicaciones. El nivel de las operaciones debe ser coherente con lo trabajado en el aula.
- ✓ En este ciclo se seguirá evaluando la aplicación de las operaciones en la resolución de problemas, generalizando a números enteros, racionales e irracionales en cualquiera de sus representaciones.
- ✓ La calculadora es útil en la simplificación de cálculos complejos o extensos y no se debe usar para resolver ejercicios básicos de operaciones. Para evaluar el uso correcto de la calculadora se puede realizar una sección en el examen (un problema o varios) donde el uso de este instrumento facilite su resolución.
- En las pruebas escritas es muy importante implementar ítems que integren varias habilidades. La mayoría de conocimientos se pueden evaluar a un nivel de reproducción. Sin embargo, conocimientos alusivos a resolución de problemas donde se apliquen las operaciones con números enteros y racionales, Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo, así como la combinación de operaciones con números enteros y racionales deben ser evaluados en la parte de desarrollo, utilizando ítems con un nivel de dificultad de conexión y reflexión. A continuación algunos ejemplos:

Sin utilizar la calculadora, ordene de mayor a menor los siguientes números:

$$-2, -2+5, \sqrt{15}, \sqrt{15}-2, \sqrt{15}+2$$

En seguida se ofrece un cuadro que muestra la extensión en km² que tiene cada una de las provincias de Costa Rica.

Con base en esa información, responda lo siguiente:

a. ¿Cuál es la razón entre la superficie de las provincias que tienen costas con respecto a las que no las tienen?

b. ¿Cuál es la razón entre la superficie de las provincias que limitan con Nicaragua con respecto a las que limitan con el Océano Pacífico?

Provincia	Extensión (km²)
San José	4965,9
Alajuela	9757,5
Heredia	2657,9
Cartago	3124,6
Limón	9188,2
Guanacaste	10 140,7
Puntarenas	11 265,6