Cálculo, Economía y Dinero

Arland Barrera

Septiembre 7, 2025

Contenido

Lista de tablas

Lista de Gráficas

Lista de Ecuaciones

Porcentaje

En ocaciones es conveniente trabajar con una parte de un valor, no con todo el valor. Una forma de expresar esto es el porcentaje. Esto es, una **porción** de un valor dividido en **cien**. Es una razón expresada como una fracción de 100. La palabra porcentaje deriva de la frase en latín *per centum*, que significa "por ciento". Es denotado con el símbolo %.

En la antigua roma en ocaciones los cálculos se hacían en fracciones en los múltiplos de $\frac{1}{100}$. Por ejemplo, el emperador Augusto estableció un impuesto conocido como *centesima rerum venalium* que dictaba que había que pagar el $\frac{1}{100}$, esto es el 1%, sobre los bienes vendidos en subastas. Para facilitar los cálculos utilizaban fracciones simplificadas a las centenas.

1.1 Regla de 3

Se requieren 3 valores conocidos para aplicar una regla de 3, con el objetivo de encontrar un cuarto valor.

Valores:

- **a:** valor total
- **b:** valor parcial
- **x:** porcentaje total (%)
- **y:** porcentaje parcial (%)

Los valores valores porcentuales para poder ser utilizados en cálculos tienen que ser convertidos a su forma decial, esto se consigue dividiendo un valor porcentual entre 100.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}} \tag{1.1}$$

Ecuación 1.1: Razón Regla de 3

El valor que se busca se despeja a conveniencia, por ejemplo si se busca b:

$$b = \frac{ay}{x}$$

Ejemplo:

Se desea conocer el precio de una prenda que originalmente costaba $125 y ahora su precio es el 35% del valor orignal.

Reemplazar:

$$b = \frac{\$125 * 35\%}{100\%}$$

Convertir valores porcentuales en decimales:

$$b = \$125 * 0.35$$

Resultado:

$$b = \$43.75$$

El 35% de $125 es $43.75.

1.2 Cálculo Mental

En ocaciones es necesario hacer un cálculo rápido de un porcentaje. Una forma rápida de hacerlo es tomando como referencia ciertos patrones que se repiten en todos los valores que involucran porcentajes.

El porcentaje se puede dividir en dos partes: una decena (**d**) y una fracción (**f**). La **decena** hace referencia al **10%** del valor. La **fracción** corresponde con una parte del valor de la decena. Un valor porcentual se divide entonces en:

- **d:** corresponde a la cantidad de veces que se repite la decena, d*10%.
- **f:** refiere a una fraccion del valor del 10%.

Por tanto un valor porcentual se puede ver de esta forma **df%**. El cual se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
df\% &= df\% \\
df\% &= (d+f)\% \\
df\% &= \frac{d*10+f}{100} \\
df\% &= \frac{d*10}{100} + \frac{f}{100} \\
df\% &= \frac{d*10}{10*10} + \frac{f}{10*10} \\
df\% &= \frac{d}{10} + \frac{f}{10*10} \\
df\% &= \left(d + \frac{f}{10}\right)\frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Considerando un valor **x**, del cual quiere se desea obtener un porcentaje de su valor **%**, se tiene lo siguiente expresión para el tanto porciento ($df\%$) de **x**:

$$\boxed{\% = \left(d + \frac{f}{10}\right)\frac{x}{10}} \tag{1.2}$$

Ecuación 1.2: Cálculo mental rápido de porcentaje

Ejemplos:

1) 36% de 56

$$b = \left(3 + \frac{6}{10}\right)\frac{56}{10}$$
$$b = \left(3 + \frac{6}{10}\right)5.6$$
$$b = 3 * 5.6 + \frac{6 * 5.6}{10}$$
$$b = 16.8 + 3.36$$
$$b = 20.16$$

2) 73% de 8

$$b = \left(7 + \frac{3}{10}\right)\frac{8}{10}$$
$$b = \left(7 + \frac{3}{10}\right)0.8$$
$$b = 7 * 0.8 + \frac{3 * 0.8}{10}$$
$$b = 5.6 + 0.24$$
$$b = 5.84$$

Intereses

El precio del dinero en el tiempo.

Se parte del hecho de que, considerando **ceteris paribus**, las personas prefieren consumir en el presente que consumir en el futuro si la cantidad y calidad a consumir es la misma.

Esto cambia considerando cantidades distintas en el futuro. En este caso se toma en cuenta la **preferencia temporal**. Se puede preferir consumir en el presente o futuro. Si se consume en el presente la preferencia temporal es alta, por el contrario si se posterga el consumo a futuro la preferencia temporal es baja.

Las sociedades puden ser consumidoras o ahorradoras. Si las personas prefieren consumir el ahorro será bajo, por el contrario, si prefieren ahorrar el ahorro será alto. La oferta de dinero en el tiempo determina la tasa de interés. Si se prefiere el consumo, si la preferencia temporal es alta, la tasa de interés es alta. Si se prefiere el ahorro, si la preferencia temporal es baja, la tasa de interés es baja.

Si la oferta de ahorro es alta la tasa de interés baja, porque hay suficiente oferta de ahorro para cubrir la demanda de ahorro, por tanto el precio del ahorro baja.

Si la oferta de ahorro es baja la tasa de interés sube, porque no hay suficiente oferta de ahorro para para satisfacer la demanda de ahorro, por tanto el precio del ahorro sube.

Cuando la tasa de interés es baja se fomenta el financiemento o las inversiones a largo plazo, lo cual hace que la economía florezca.

Cuando la tasa de interés es alta hay menos ahorro que se pueda destinar a financiemento o inversiones, además es posible que la tasa de interés supere las beneficios esperados, al menos durante un tiempo, de la inversión lo cual hace la inversión menos atractiva. Esto fomenta las inversiones a corto plazo, compra y venta rápidda en breves periodos de tiempo.

La tasa de interés se refiere al porcentaje (%), un valor porcentual, y el interés, como tal, se refiere a un valor numérico.

En cálculos o ecuaciones se utiliza el valor decimal, el valor del interés. Este valor se obtiene dividiendo el valor porcentual entre 100. Se efectua la siguiente operación:

$$\boxed{\text{valor decimal} = \frac{\text{valor porcentual}}{100}}$$

La tasa de interés r se expresa en porcentaje. Para ello se multiplica el valor decimal por 100. Se realiza la siguiente operación:

$$\boxed{\text{valor porcentual} = \text{valor decimal} * 100}$$

Por ejemplo, se tiene 7.5% y se quiere su valor decimal:

$$7.5\% = \frac{7.5}{100} = 0.075$$

Otro ejemplo, se desea expresar en porcentaje el valor 0.639:

$$0.639 * 100 = 63.9\%$$

2.1 Tipos de Intereses

2.1.1 Interés Simple

Es una forma sencilla de calcular un interés. Suele aplicarse a préstamos para automóviles o préstamos a corto plazo, aunque algunas hipotecas utilizan este método de cálculo. También es el tipo de interés que los bancos pagan a los clientes por sus cuentas de ahorro.

Variables

- **P**: *Principal.* Monto inicial.
- **r**: *Interest rate.* Tasa de interés.
- **n**: *Number of periods.* Número de periodos (diario, semanal, mensual, trimestral, etc) transcurridos respecto al inicio de la entrada en vigor de los intereses.
- **A**: *Amount.* Monto final total.

Lo primero es definir un cálculo para obtener el interés. La cual se muestra abajo.

$$rP$$

A esto hay que sumar el monto inicial. Se obtiene lo siguiente:

$$A = P + rP$$

Esto funciona para un periodo, ejemplo un año. Sin embargo, si se quiere obtener el valor para varios periodos, ejemplo dos años, hay que sumar el interés extra.

$$A = P + rP + rP$$

Si se quiere un tercer periodo:

$$A = P + rP + rP + rP$$

De esto se deduce que el interés se calcula con el mismo procedimiento durante múltiples periodos. De lo anterior, se puede reducir la fórmula de la siguiente manera:

$$A = P + nrP$$

$$\boxed{A = P(1 + nr)} \tag{2.1}$$

Ecuación 2.1: Interés simple

Donde n es el numero de periodos. Factorizando P en la expresión se obtiene la siguiente ecuación:

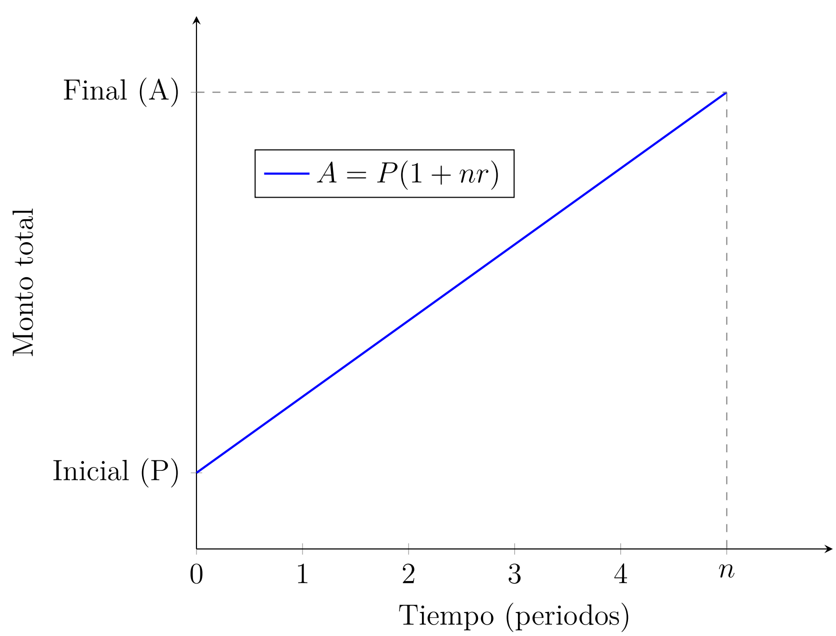
Para ilustrar la forma en que crece el interés simple se utilizará el siguiente ejemplo: se efectua un préstamo de \$100 a una tasa de interés del 10% durante un periodo de 5 años.

Tabla 2.1: Evolución interés simple

n	**Monto total**
0	100
1	110
2	120
3	130
4	140
5	150

Se puede observar en la tabla 2.1 que el monto total aumenta de forma constante conforme pasa el tiempo y transcurren los periodos. Esto se debe a que solo se toma en cuenta para los intereses el monto incial, lo que resulta en un crecimiento lineal.

La siguiente gráfica ilustra el aumento del monto total conforme pasa el tiempo.



Gráfica 2.1: Crecimiento interés simple

2.1.2 Interés Compuesto

El interés compuesto es un interés que se aplica no solo al capital inicial de una inversión o un préstamo, sino también a los intereses acumulados de periodos anteriores. En otras palabras, el interés compuesto implica ganar, o adeudar, intereses sobre los intereses.

El poder de la capitalización ayuda a que una suma de dinero crezca más rápido que si se calculara solo el interés simple sobre el capital. Y cuantos más periodos de capitalización, mayor será el crecimiento del interés compuesto. Para ahorros e inversiones, el interés compuesto es un aliado, ya que multiplica el dinero a un ritmo acelerado. Pero si se tienen deudas, la capitalización de los intereses que se deben puede dificultar cada vez más su pago.

El interés compuesto es conocido como "Interés sobre interés" (*Interest on interest*).

El efecto de acumulación se vuelve especialmente poderoso sobre largos periodos de tiempo, a medida que la cantidad de intereses ganados se hace cada vez mayor.

El interés compuesto es la octava maravilla del mundo. Quien lo entiende, lo gana; quien no, lo paga. - Albert Einstein.

Variables

- **P**: *Principal.* Monto inicial.
- **r**: *Interest rate.* Tasa de interés.
- **n**: *Number of periods.* Número o frecuencia de periodos de acumulación en un año.
- **t**: *Time.* Tiempo transcurrido contabilisado en años.
- **A**: *Amount.* Monto final total.

La ecuación 2.1 sobre el interés simple, solo toma en cuenta el monto inicial. Sin embargo, el interés compuesto también considera el interés del periodo anterior. Por lo tanto, la parte de la ecuación que expresa el interés se repite.

$$1 + r$$

Los periodos de acumulación se repiten. Debido a ello, se obtiene la siguiente expresión:

$$A = P(1 + r)(1 + r)$$

Para múltiples periodos se obtiene lo siguiente:

$$A = P(1 + r)n$$

El hecho de que n sea un exponente, previamente en el interés simple era un factor multiplicador, hace que el interés compuesto crezca más rápido.

Para comparar los distintos intereses con las mismas métricas, se adopta una convención para que todos los intereses sean tratados, al menos en gran parte, como anuales. Y para incluir las distintas acumulaciones, estas se realizan respecto a cuantas se acumulan dentro de un año.

Suponiendo una longitud de un año de 365 días (año no bisiesto), algunos posibles valores de n se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2.2: Posibles frecuencias de acumulación

Frecuencia de acumulación	**n**
Anual, un año, 12 meses	1
Semestral, medio año, 6 meses	2
Cuatrimestral, tercio de año, 4 meses	3
Trimestral, cuarto de año, 3 meses	4
Bimestral, sexto de año, 2 meses	6
Mensual, doceavo de año, 1 meses	12
Diario	365
Cada hora	8 760
Cada minuto	525 6000
Cada segundo	31 536 000

Como se puede observar en la tabla 2.2, mientras más frecuente es la acumulación más grande es el valor de n. Lo cual resulta en un mayor valor acumulado.

Hay que considerar que el interés se toma en cuenta para cada acumulación, esto es el interés en cada periodo. lo cual se representa de la siguiente forma:

$$\boxed{\frac{r}{n}}$$

La cantidad de años transcurridos también es afectada por la cantidad acumulaciones en esos años. Dado que se considera los años y los periodos por año, multiplicándolos se obtiene la cantidad total de periodos. Esto resulta en lo siguiente:

$$\boxed{nt}$$

Teniendo en cuenta cada una de las variables y como se relacionan, se obtiene una fórmula que describe el interés compuesto.

$$\boxed{A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}} \tag{2.2}$$

Ecuación 2.2: Interés compuesto

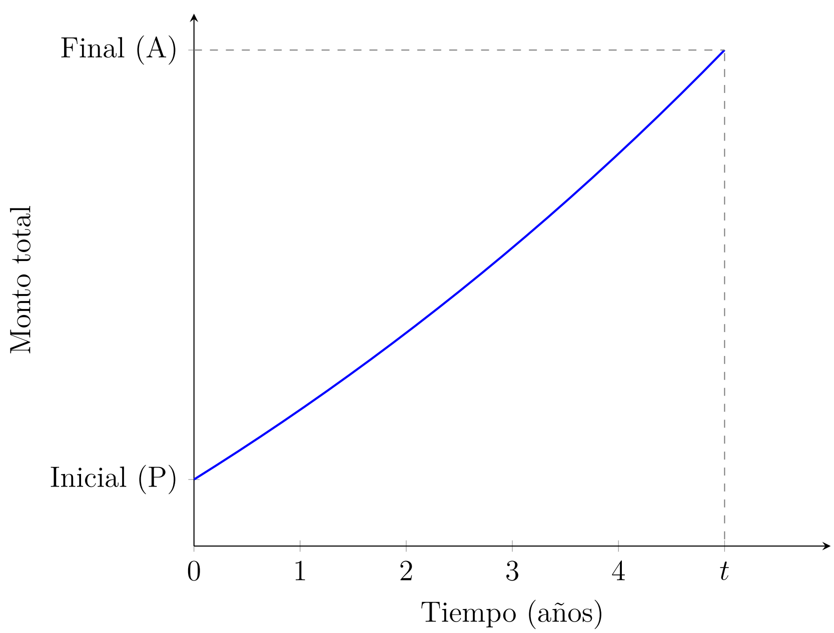
Para observar como se desarrolla el interés compuesto se utilizará el siguiente ejemplo: Se realiza una inversión inicial de \$100 con una tasa de interés del 10% con una acumulación mensual durante 5 años. El aumento del monto total se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2.3: Evolución interés compuesto

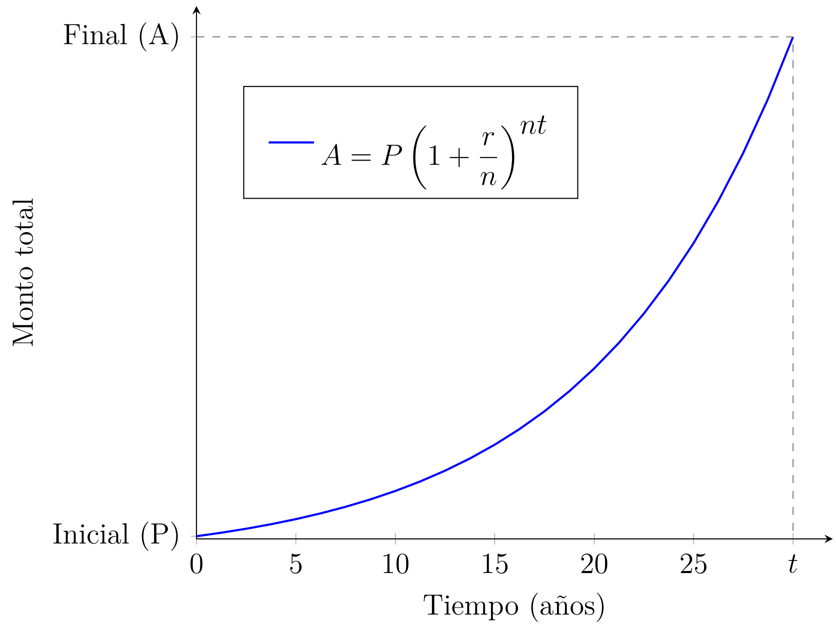
n	**Monto total**
0	100
1	110.47
2	122.04
3	134.82
4	148.94
5	164.53

Comparando las tablas 2.1 y 2.3, la diferencia entre el monto final de 150, del interés simple, y 164.53, del interés compuesto, es de 14.53. Lo cual representa, para montos más grandes, una diferencia muy significativa.

A continuación se muestra una representación gráfica del crecimiento del interés compuesto:



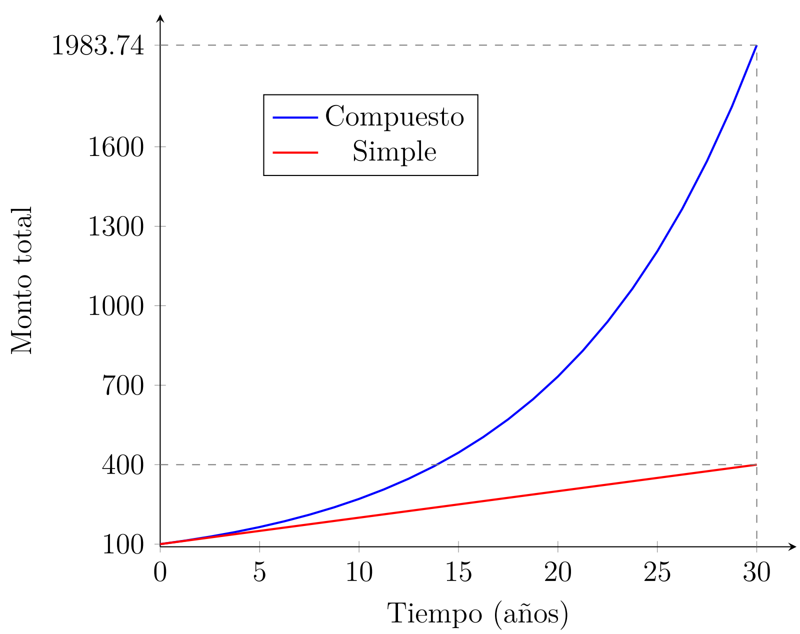
En un inicio el crecimiento es muy marcado, sin embargo, cuando t toma valores muy grandes imcrementa de manera cada vez más lenta. La curva se vuelve más empinada. Considerando un periodo de 30 años, la gráfica es la siguiente:



Gráfica 2.2: Crecimiento interés compuesto

El poder el interés compuesto radica en el tiempo, el recurso más valioso que hay. Mientras más pronto se ahorre, más se tendrá en el futuro.

A continuación se muestra una comparación entre interés simple y compuesto, tomando los ejemplos presentados anteriormente.



Gráfica 2.3: Comparación interés simple y compuesto

Como se puede observar, el rendimiento del interés compuesto es muy superior al del interés simple. Principalmente al factor exponencial del interés compuesto, a diferencia de la naturaleza lineal del interés simple.

2.1.3 Interés Continuo

En la sección sobre el interés compuesto se detalló como la frecuencia de periodos n afecta el valor total. Mientras más frecunte sea la acumulación, mayor es el valor del monto acumulado exponencialmente. En este sentido, si se pudiese acumular en cada momento posible se consigue una acumulación continua obteniendo un interés continuo. Esto maximisa la ganancias.

En 1683, el matemático suizo Jacob Bernoulli estaba estudiando el interés compuesto y uno de los ejemplos que consideró es el siguiente: un monto inicial de \$1 con una tasa de interés del 100% por año. Considerando la ecuación 2.2, se obtiene la siguiente expresión:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Jacob se interesó por saber cual sería el máximo beneficio posible generado por los intereses. Esto se consigue cuando n alcanza un valor muy grande. La expresión para esto sería el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Jacob Bernoulli descubrió que el número al cual tiende este límite es 2.718281 . . . , y aunque esta constante matemática fue introducida por él, el primero en usar la letra e para referirse a ella fue el matemático suizo Leonhard Euler en su obra Mechanica (1736).

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$$

De lo anterior se puede concluir que las ganancias que resultan del interés compuesto no son infinitas, si no que al tender a valores grandes se realentizan y se obtiene el número e. Por tanto, se obtiene una expresión que maximisa el interés compuesto:

$$\boxed{A = Pe^{rt}} \tag{2.3}$$

Ecuación 2.3: Interés continuo

En la práctica el interés continuo no es utilizado, dado que acumular intereses en cada momento posible no es una operación viable.

2.2 Puntos Porcentuales y Básicos

Un **punto porcentual** se utiliza para expresar la **diferencia absoluta** entre dos valores porcentuales. Equivale directamente a la centésima parte de un valor, es decir, al 1% de dicho valor.

Se emplean fundamentalmente para cuantificar la variación o el cambio entre dos porcentajes, especialmente en análisis estadísticos y económicos.

Ejemplo: Si la tasa de aprobación en una encuesta sube del 32% al 48%, el incremento es de 16 puntos porcentuales ($48\% - 32\% = 16$).

Un **punto básico** (a menudo abreviado como **pb** o **BPS**) es una unidad de medida más fina, equivalente a la centésima parte de un punto porcentual.

Esto implica la siguiente relación: 1 punto básico = 0.01%.

Por lo tanto, 100 puntos básicos = 1 punto porcentual (1%).

Su uso es crucial en el ámbito financiero para expresar con precisión cambios muy pequeños en tasas de interés, rendimientos de bonos o tipos de cambio, evitando así cualquier ambigüedad.

Ejemplo: Si una tasa de interés asciende del 0.25% al 0.50%, el aumento es de 0.25 puntos porcentuales. Para mayor precisión, se comunica que el incremento es de 25 puntos básicos ($0.50\% - 0.25\% = 0.25\%$).

Precio

3.1 Aumento y Descuento

Considerando un monto P, este valor puede aumentar o disminuir en base a un aumento o descuento. Genenarlemte estos valores descontados o aumentados se expresan en porcentajes. Un nuevo valor P_F, es resultado de tomar un porcentaje r de P y sumar o restar depenediendo si es aumento o descuento. Esto se expresa de la siguiente forma:

$$P_F = P \pm Pr$$

Factorizar P en la expresión:

$$\boxed{P_F = P\,(1 \pm r)}$$

Sumar es para aumento y restar para descuento.

Aumento

$$\boxed{P_F = P(1 + r)} \tag{3.1}$$

Ecuación 3.1: Aumento

Descuento

$$\boxed{P_F = P(1 - r)} \tag{3.2}$$

Ecuación 3.2: Descuento

Ejemplos:

1) 30% de descuento de \$4.99

$$\begin{aligned} P_F &= 4.99\,(1 - 0.3) \\ P_F &= 4.99\,(0.7) \\ P_F &= 3.493 \end{aligned}$$

Redondear el precio: \$3.50

2) 70% de descuento de \$12.75

$$
\begin{aligned}
P_F &= 12.75\,(100\% - 70\%) \\
P_F &= 12.75\,(30\%) \\
P_F &= 3.825
\end{aligned}
$$

Redondear el precio: \$3.82

3.2 Precio Unitario

Se considera un precio total T, del cual se tienen C cantidad de unidades. El precio unitario U, el precio de cada unidad individual, es la razón entre el precio total y la cantidad de unidades. Esto se expresa de la siguiente forma:

$$\boxed{U = \frac{T}{C}}$$

Elementos:

- **T**: Precio total, el costo por toda la cantidad adquirida.
- **C**: Cantidad total de unidades a comprar.
- **U**: Precio unitario, el costo una única unidad.

Ejemplos:

1) Un paquete de 16 GB de paquetes de datos cuesta \$35. Cuál es el precio de un 1 GB?

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{\$35}{16\text{GB}} \\
U &= 2.1875(\$/\text{GB})
\end{aligned}
$$

Cada paquete de datos de 1 GB cuesta \$2.19.

2) Una bolsa de 5 kg de carne cuesta \$40. Cuánto cuesta un 1 kg?

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{\$40}{5\text{kg}} \\
U &= 8(\$/\text{kg})
\end{aligned}
$$

Cada bolsa de carne de 1 kg cuesta \$8.

Salario

4.1 Salario por Tiempo

El salario (S), expresado en una unidad monetaria (como dinero en dolares $, yuanes o euros), tiene un comportamiento lineal con respecto al tiempo (t), expresado en una unidad de tiempo (como horas h, meses o años). Esta relación, salario por hora (r), se expresa en unidades monetarias entre unidades de tiempo ($\$/h$). La expresión matemática es la siguiente:

$$r = \frac{S}{t} = \frac{\$}{h}$$

El salario en función del tiempo se puede expresar de la siguiente forma:

$$\boxed{S(t) = rt + S_0} \tag{4.1}$$

Ecuación 4.1: Salario en función del tiempo

En este caso el salario es constante en el tiempo.

Elementos:

- **S(t)**: salario acumulado en el tiempo t.
- S_0: salario inicial o base, si lo hay.
- **r**: tasa de pago por unidad de tiempo.
- **t**: tiempo trabajado, expresado en la misma unidad que r.

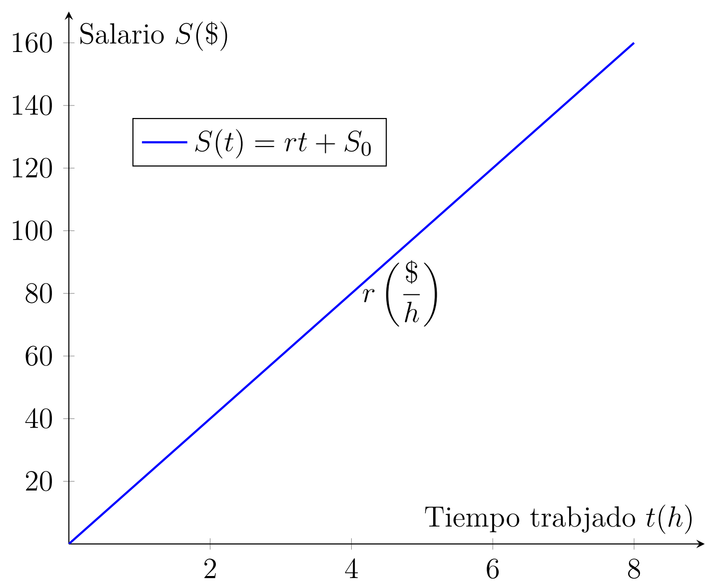
Suponiendo un r de 20, se obtiene la siguiente función:

$$S(t) = 20t$$

Tabla de valores:

S($)	20	40	60	80	100	120	140	160
t(h)	1	2	3	4	5	6	7	8

Gráfica:



Gráfica 4.1: Salario en función del tiempo