0.1 *Análise de um sinal senoidal no tempo*

A figura 1 mostra uma onda senoidal, podemos extrair conceitos importantes deste gráfico, que deverão ser muitos utilizados durante o curso de Telecomunicações.

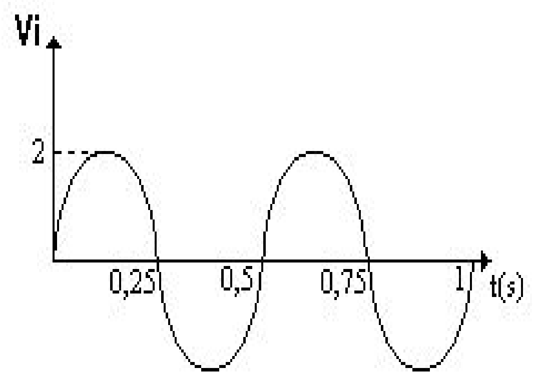


Figura 1: Sinal senoidal no tempo

- *Ciclo* - uma oscilação completa;
- *Período(segundos)* - tempo que dura um ciclo;
- *Frequência(Hertz)* - o número de ciclos em um segundo, ou seja, inverso do período(1/T);
- *Fase (radianos)* - defasagem do sinal;
- *Amplitude(Volts)* - valor máximo da forma de onda.

Para o caso da forma de onda acima temos:

```
Ciclo = 2      Per\'{\i}odo = 0,5s      Frequ\^{e}ncia= 2 Hz     Amplitude= 2 V
```

Lembrando que a expressão genêrica de um onda senoidal é:

$$V(t) = V_p \sin(2.\pi.f.t + \varphi) Volts \tag{1}$$

Onde temos:

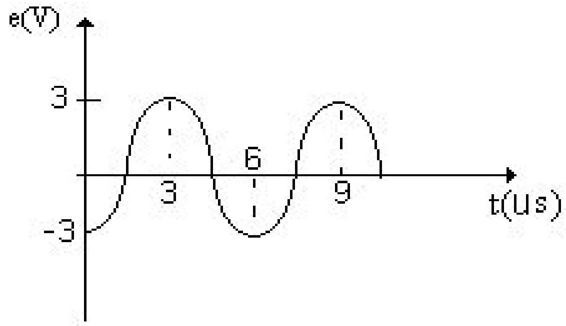
- $V_p \Longrightarrow$ Amplitude do sinal;
- $f \Longrightarrow$ Frequência do sinal;
- $\varphi \Longrightarrow$ Fase do sinal;
- $t \Longrightarrow$ Instante de tempo.

Para a forma de onda acima termos a seguinte expressão:

$$V(t) = 2\sin(4.\pi.f.t)Volts \tag{2}$$

Exercício 0.1 *:*

1. *Determine a forma de onda da expressão:* $e(t) = 9\sin(37,7.10^6.t - \pi/3)$
2. *Determine a expressão da forma de onda:*



0.2 *Análise de um sinal senoidal na frequência*

Agora suponhamos sinal da figura 1 representado no eixo da frequências, ficaríamos com a seguinte forma de onda.

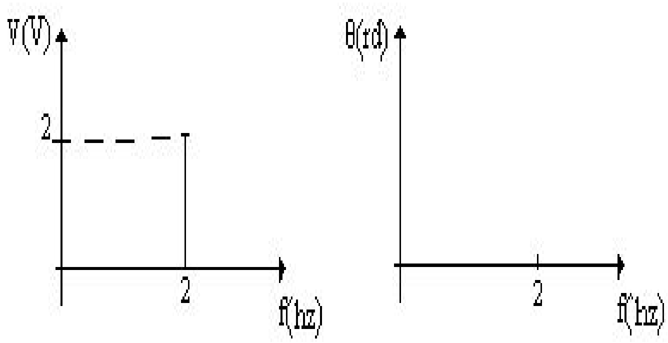


Figura 2: Espectro de amplitude e fase do sinal na frequência

Exercícios

1. Dada a expressão $e(t) = 8.\sin(6,28.104.t)(V)$
   Determinar a forma de onda e os espectros de amplitude e fase.

2. Dado o espectro de fase e amplitude na figura 3
   Determinar a forma de onda e a expressão de e(t).

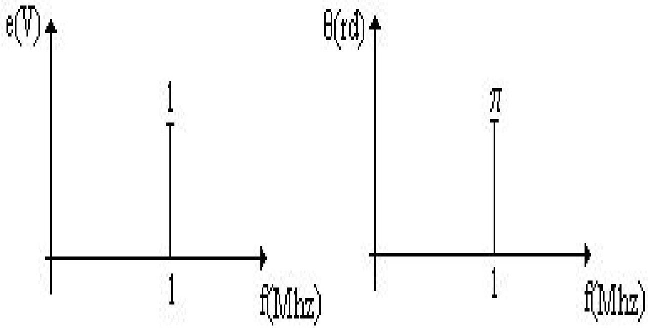


Figura 3: Espectro de amplitude e fase do sinal na frequência

3. Dado a forma de onda na figura 4
   Determinar o espectro de fase e amplitude e a expressão e(t).

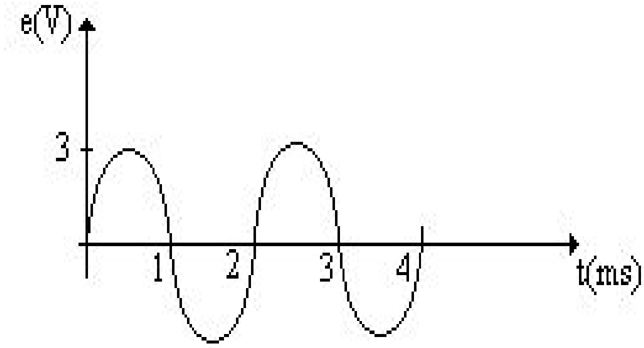


Figura 4: Forma de onda

0.2.1 Soma de senóides

Sejam dois sinais senoidais gerais

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) \text{ e } x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$$

A soma

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

será periódica

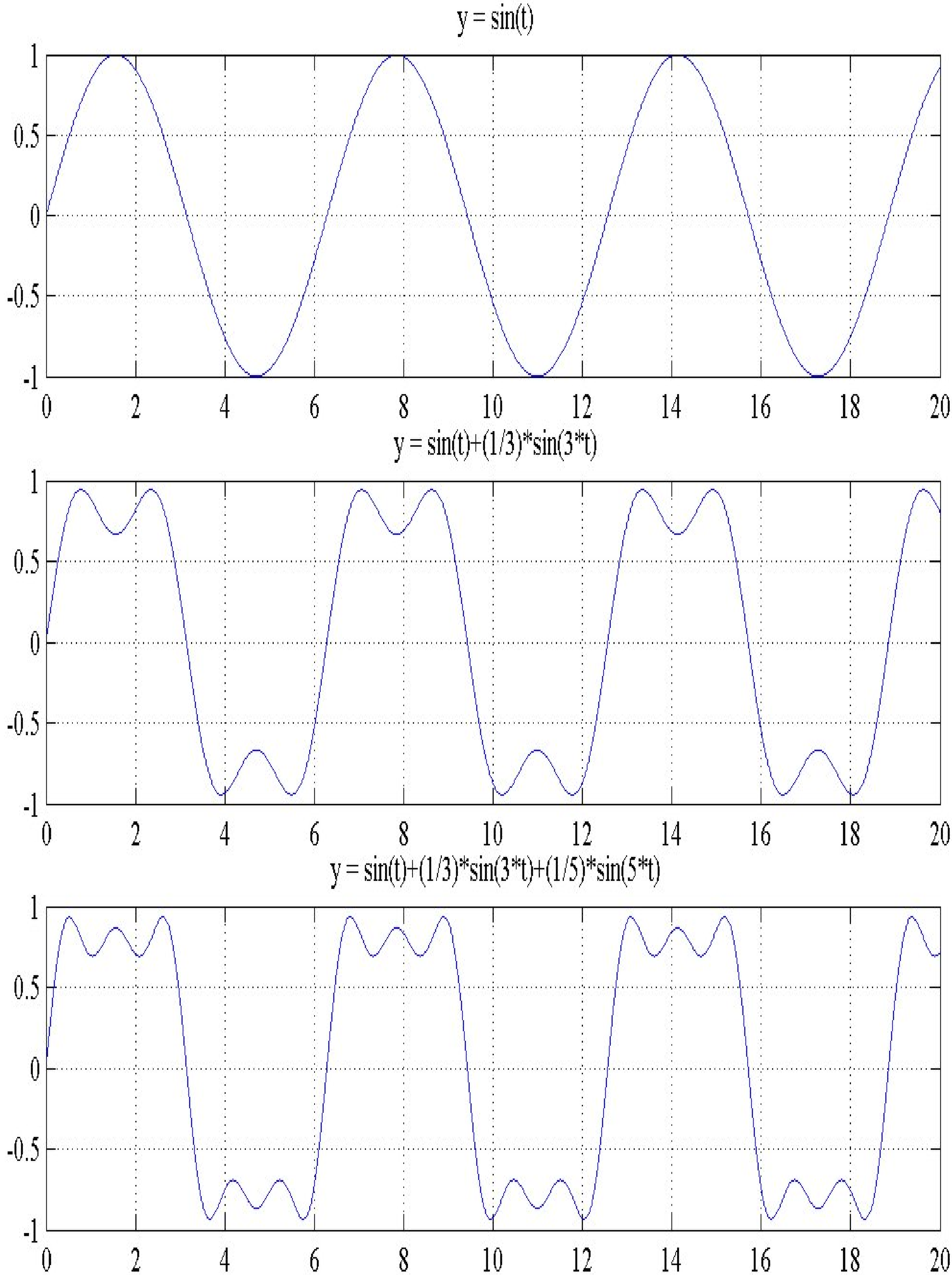
Fato 0.1 *Se somente se existir um $\omega \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned} \omega_1 &= n_1\omega_0 \\ \omega_2 &= n_2\omega_0 \\ &\vdots \\ \omega_k &= n_k\omega_0 \end{aligned}$$

onde os $n_1, n_2, \ldots, n_k$ são inteiros □

É possível, assim, ver que uma soma de senóides será um sinal periódico quando suas frequências forem múltiplas inteiras de uma frequência básica ω_0. Frequências com esta propriedade são chamadas de harmônicas, e assim pode ser dizer que a soma de senóides com frequências harmônicas é um sinal periódico.

Exemplo 0.1 *Seguem abaixo os gráfico de $x_1 = \sin t, x_2 = \sin t + (1/3)\sin(3t)$ e $x_3(t) = \sin(t) + (1/3)\sin(3t) + (1/5)\sin(5t)$*


y = sin(t)
y = sin(t)+(1/3)*sin(3*t)
y = sin(t)+(1/3)*sin(3*t)+(1/5)*sin(5*t)
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

0.3 *Teorema de Fourier*

Este teorema diz que: "Qualquer forma de onda periódica no tempo pode ser representada na forma de somas de senos e cossenos".
Um exemplo deste teorema é mostrado abaixo temos uma forma de onda aparentemente estranha, porém ela é a soma de duas senóides, onde suas frequências são duplicadas.
A equação geral da série de Fourier de sinais periódicos é dado por:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos(n.\omega_o.t) + b_n \sin(n.\omega_o.t)) \tag{3}$$

onde:

- $f(t)$ é a função a ser desenvolvida.
- a_o é o valor médio de f(t).
- a_n e b_n são os coeficientes da série de fourier.
- ω_o é a frequência angular de $f(t)$

0.3.1 *Cálculo dos coeficientes da série de Fourier*

Como visto em disciplinas anteriores do curso de Engenharia os coeficientes da série de Fourier é dada por

$$a_o = 1/T_0.\int_0^{T_0} f(t).dt \tag{4}$$

$$a_n = 2/T_0.\int_0^{T_0} f(t).\cos(n.\omega_o.t).dt \tag{5}$$

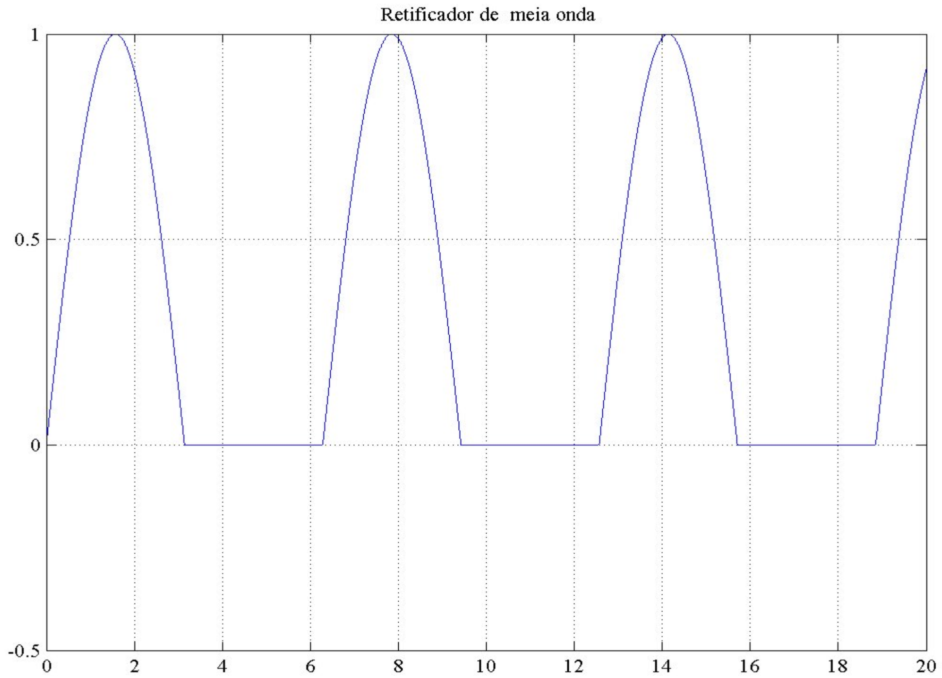
$$b_n = 2/T_0.\int_0^{T_0} f(t).\sin(n.\omega_o.t).dt \tag{6}$$

Aplicando estas expressões podemos expandir sinais periódicos dados em suas séries de Fourier. Dependendo do sinal podemos ter um número finito de termos ou infinito. Existem algumas propriedades que podem simplificar os cálculos dos coeficientes, como:

Fato 0.2 *Um sinal x será chamado de par quando $x(-t) = x(t)$ e ímpar quando $x(-t) = -x(t)$.*

Fato 0.3 *Se $x(t)$ é um sinal periódico par então $b_k = 0$ para todo o k, ou seja, a sua série de Fourier é composta apenas de cossenos.*
Se $x(t)$ é um sinal periódico ímpar então $a_k = 0$ para todo o k, ou seja, a sua série de Fourier é composta apenas por senos.

Exemplo 0.2 *Calcular a série de Fourier da forma de onda*



O termo DC será dado por

$$a_o = 1/T_0.\int_0^{T_0} f(t).dt = 1/T_0.\int_0^{T_0/2} \sin(\omega_0 t).dt = 1/\pi$$

A função não é par nem ímpar, portanto deve-se calcular os coeficientes a_n *e* b_n

$$a_n = 2/T_0.\int_0^{T_0} f(t).\cos(n.\omega_o.t).dt$$

$$= 2/T_0.\int_0^{T_0/2} \sin(\omega_0 t).\cos(n.\omega_o.t).dt$$

$$= 2/T_0\left[\frac{-\cos((n+1)\pi)}{2\omega_0(n+1)} + \frac{\cos((n-1)\pi)}{2\omega_0(n-1)} + \frac{-1}{\omega_0(n+1)(n-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2-1)}\left[-\frac{(n-1)}{2}\cos((n+1)\pi) + \frac{(n+1)}{2}\cos((n-1)\pi) - 1\right]$$

Quando $k = 1$ *deve-se integrar* $\sin(\omega_o.t)\cos(\omega_o.t) = \sin(2\omega_o.t)/2$, *onde o seu resultado será igual a zero. Excluindo este valor pode-s analisa a expressão acima de modo geral.*
Para valores ímpares de n *tem-se*
$a_n = 0$
Para valores pares de n *tem-se*

$$a_n = \frac{-2}{\pi(k^2-1)}$$

Para os coeficientes dos senos:

$$b_n = 2/T_0.\int_0^{T_0} f(t).\sin(n.\omega_o.t).dt$$

$$= 2/T_0.\int_0^{T_0/2} \sin(\omega_0 t).\sin(n.\omega_o.t).dt$$
$$= 2/T_0 \frac{(n+1)\sin((n-1)\pi) - (n-1)\sin((n+1)\pi)}{2\omega_0(n+1)(n-1)}$$
$$= \frac{1}{2\pi(n^2-1)}[(n+1)\sin((kn-1)\pi) - (n-1)\sin((n+1)\pi)]$$

Para valores pares de n os senos se anulam e $b_n = 0$. Para valores ímpares o mesmo raciocínio se aplica, desde que $k \neq 1$.Para este caso deve-se resolver

$$b_n = 2/T_0.\int_0^{T_0} f(t).\sin(n.\omega_o.t).dt$$

$$b_n = 2/T_0.\int_0^{T_0/2} \sin^2(\omega_o.t).dt = 2/T_0 \frac{\pi}{2\omega_0} = 1/2$$

Em resumo:

$$a_0 = A/\pi; a_n = \begin{cases} 0 & k\ \textit{ímpar} \\ \frac{-2}{\pi(n^2-1)} & k\ \textit{par} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 1/2 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

e a expansão é dada por:

$$x(t) = 1/\pi + 1/2\sin(\omega_o.t) - 2/3\pi\cos(2\omega_o.t) - 2/15\pi\cos(4\omega_o.t) - \ldots$$

Segue abaixo um programa para cálculo dos coeficientes no MATLAB.

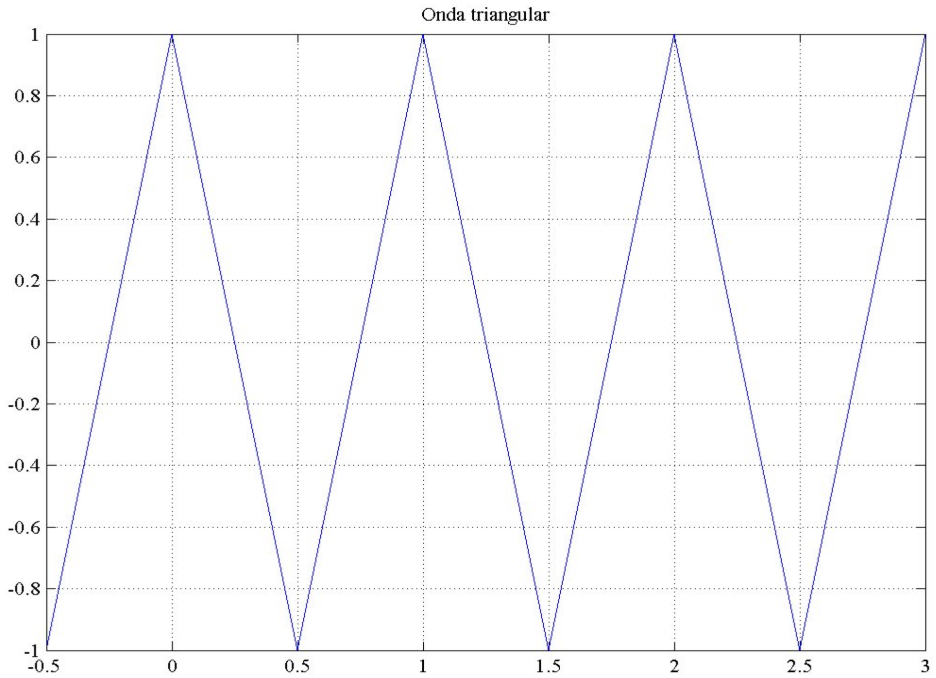
Programa Matlab 0.1

```
%Calcula os coeficientes da integral de Fourier
clc;
clear all;
syms  t;
n=0;
T0=1;
omega0=2*pi/T0;
ft=sin(omega0*t)
while n~=10000,
     n = input('Entre com o valor do numero do harmonico
     desejado ou 10000 para sair: ');
     if n==0
        a0=simple(1/T0*int(ft,0,T0/2))
     else
        an=simple(2/T0*int(ft*cos(n*omega0*t),0,T0/2))
        bn=simple(2/T0*int(ft*sin(n*omega0*t),0,T0/2))
     end
end;
```

Exemplo 0.3 *Seja a onda triangular para a qual um dos períodos é dado por*

$$x(t) = \begin{cases} 4t/T_0 + 1 & -T_0/2 \leq t \leq 0 \\ -4t/T_0 + 1 & 0 \leq t \leq T_0/2 \end{cases}$$

seu gráfico é:



calcular a sua série de Fourier: O termo DC é nulo; como o sinal é par $b_n = 0$ e haverá apenas termos cossenoidais

$$a_n = 2/T_0 \int x(t)cos(n\omega_0 t)dt$$

$$= 2/T_0 \left[\int_{-T_0/2}^{0} (4t/T_0 + 1)cos(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T_0/2} (-4t/T_0 + 1)cos(n\omega_0 t)dt \right]$$

$$= 8/T_0^2 \left[\int_{-T_0/2}^{0} tcos(n\omega_0 t)dt - \int_{0}^{T_0/2} (tcos(n\omega_0 t)dt \right]$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}[1 - cos(n\pi)] = \frac{8}{n^2\pi^2} \text{ quando } n \text{ é ímpar, e 0 quando } n \text{ é par.}$$

Logo, a expressão completa será dada por

$$x(t) = \frac{8}{\pi^2}cos(\omega_0 t) + \frac{8}{9\pi^2}cos(3\omega_0 t) + \frac{8}{25\pi^2}cos(5\omega_0 t) + \dots$$

Exercício 0.2 *Trace o gráfico da série do exemplo 0.3 no MATLAB*

Exemplo 0.4 *Seja onda quadrada descrita no tempo dada por*

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T_0/2 \\ -1 & T_0/2 < t < T_0 \end{cases}$$

Calcule a sua série de Fourier: O termo DC é nulo; como o sinal é ímpar $a_n = 0$ e haverá apenas termos senoidais.

$$b_n = 2/T_0 \int x(t)sin(n\omega_0 t)dt$$

$$= 2/T_0\left[\int_0^{T_0/2} sin(n\omega_0 t)dt - \int_{T_0/2}^{T_0}(sin(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}[1 - cos(n\pi)] = \frac{4}{n\pi} \textit{ quando n é ímpar, e 0 quando n é par.}$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi}sin(\omega_0 t) + \frac{4}{3\pi}sin(3\omega_0 t) + \frac{4}{5\pi}sin(5\omega_0 t) + \dots$$

Exercício 0.3 *Trace o gráfico da série do exemplo 0.4 no MATLAB.*

0.3.2 *Série de Fourier - Forma Cossenoidal*

Sabemos da trigonometria que

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = A\cos(\alpha + \theta) \tag{7}$$

onde

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \tan\theta = -b/a \tag{8}$$

A expansão de um sinal $x(t)$ na forma trigonométrica da série de Fourier é:

$$x(t) = a_0 + a_1\cos(\omega_o.t) + a_2\cos(2\omega_0.t) + ... + b_1\sin(\omega_o.t) + b_2\sin(2\omega_o.t) + ... \tag{9}$$

Usando as relações acima descritas podemos reescrever esta série em forma mais compacta:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(k\omega_0.t + \theta_k) \tag{10}$$

onde

$$A_0 = a_0 \ ; \ A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ e } \tan\theta_k = -b_k/a_k \tag{11}$$

A idéia básica permanece a mesma, decompomos um dado sinal em uma soma de sinais elementares. Este formato é considerado mais simples porque envolve apenas cossenos; em compensação cada um destes cossenos apresenta fase.

Exemplo 0.5 *Para a onda do exemplo 0.4, faça sua representação em cossenos:*

$$x(t) = \frac{4}{\pi}cos(\omega_0 t - \pi/2) + \frac{4}{3\pi}cos(3\omega_0 t - \pi/2) + \frac{4}{5\pi}cos(5\omega_0 t - \pi/2) + \dots$$

Exemplo 0.6 *Observe que a onda triangular do exemplo 0.3 a série já é decomposta apenas de cossenos, portanto a sua resposta em cossenos seria a mesma.*

Exemplo 0.7 *Para a onda senoidal semi-retificada do exemplo 0.2 a série era decomposta em senos e cossenos,*

$$x(t) = 1/\pi + 1/2\sin(\omega_o.t) - 2/3\pi\cos(2\omega_o.t) - 2/15\pi\cos(4\omega_o.t) - \dots$$

Passando apenas para cossenos obtém-se

$$x(t) = 1/\pi + 1/2cos(\omega_o.t) + 2/3\pi\cos(2\omega_o.t - \pi) + 2/15\pi\cos(4\omega_o.t - \pi) + \dots$$

0.3.3 *Forma espectral da série de Fourier*

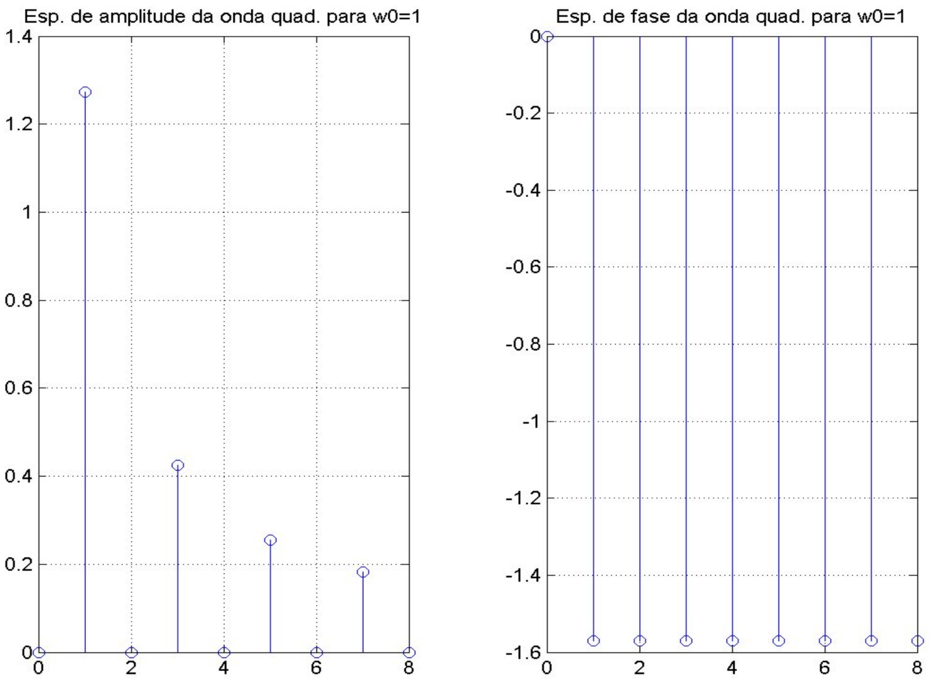
Seja a onda quadrada da exemplo 0.5, como exemplo, decomposta através de sua série de Fourier proposta anteriormente. Devemos mostrar como ficará seu espectro de frequência.

Exemplo 0.8 *Sua expressão decomposta em sua série de Fourier, ficou da seguinte forma:*

$$x(t) = \frac{4}{\pi}cos(\omega_0 t - \pi/2) + \frac{4}{3\pi}cos(3\omega_0 t - \pi/2) + \frac{4}{5\pi}cos(5\omega_0 t - \pi/2) + \ldots$$

Harmônico	*Freq.Angular*	*Amplitude*	*Fase*
$n = 0$	*0*	*0*	*0*
$n = 1$	ω_0	$\frac{4}{\pi}$	$-\pi/2$
$n = 3$	$3\omega_0$	$\frac{4}{3\pi}$	$-\pi/2$
$n = 5$	$5\omega_0$	$\frac{4}{5\pi}$	$-\pi/2$
$n = 7$	$7\omega_0$	$\frac{4}{57\pi}$	$-\pi/2$

O traçado do espectro de frequência ficará da seguinte forma:



Observação 0.1 *: a tabela acima possuirá termos que irão até o infinito, porém ele só mostra termos até o sétimo harmônico.*

Programa Matlab 0.2 *Programa feito no MATLAB para o traçado do espectro da onda quadrada.*

```
%Espectro de Fourier da onda quadrada
close all
clear all
x=[0      1      2       3         4       5          6       7          8]
```

```
y=[0      4/pi  0      4/(3*pi) 0      4/(5*pi)  0      4/(7*pi)  0]
subplot(1,2,1);stem(x,y);grid;
title('Esp. de amplitude da onda quad. para w0=1');
teta=[0  -pi/2 -pi/2  -pi/2    -pi/2  -pi/2  -pi/2  -pi/2  -pi/2]
subplot(1,2,2);stem(x,teta);grid;
title('Esp. de fase da onda quad.para w0=1');
```

Exercício 0.4 *Repita o que foi feito no exemplo 0.8 nos sinal do exemplo 0.6.*

Exercício 0.5 *Repita o que foi feito no exemplo 0.8 nos sinal do exemplo 0.7.*

0.4 Série de Fourier - Forma exponencial

Pode-se usar a conhecida expressão de Euler

$$e^{j\phi} = cos\phi + jsen\phi$$

para obter a expressão do $cos\phi$ em termos de exponenciais complexas:

$$\left.\begin{array}{r} e^{j\phi} = cos\phi + jsen\phi \\ e^{-j\phi} = cos\phi - jsen\phi \end{array}\right\} \Longrightarrow cos\phi = 1/2e^{j\phi} + 1/2e^{-j\phi}$$

Aplicando a expressão do cosseno geral:

$$A_n cos(n\omega_0 t + \phi_n) = \frac{A_n}{2} e^{j(n\omega_0 t + \phi_n)} + \frac{A_n}{2} e^{-j(n\omega_0 t + \phi_n)} = \frac{A_n}{2} e^{j\phi_n} e^{jn\omega_0 t} + \frac{A_n}{2} e^{-j\phi_n} e^{-jn\omega_0 t}$$

Então substituindo na série de Fourier de x(t) tem-se

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} + A_n cos(n\omega_0 t + \phi_n) =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_n}{2} e^{j\phi_n} e^{jn\omega_0 t} + \frac{A_n}{2} e^{-j\phi_n} e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

$$= \ldots + \frac{A_2}{2} e^{-j\phi_2} e^{-j2\omega_0 t} + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} e^{-j\omega_0 t} + A_0 + \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} e^{j\omega_0 t} + \frac{A_2}{2} e^{j\phi_2} e^{j2\omega_0 t} + \ldots$$

Temos uma série de exponenciais complexas, cada uma delas acompanha de um coeficiente complexo; as exponenciais são associadas às frequências $0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \pm 3\omega_0, \ldots$ e os coeficientes são da forma $Me^{j\phi}$ onde M está relacionado com as amplitudes e ϕ a fase, observe, com isso, que a série pode ser representada da seguinte forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (12)$$

onde

$$\begin{array}{rcrcrl} |X_k| = & \frac{A_k}{2} & \angle X_k = & \theta_k & k > 0 \\ |X_0| = & A_0 & \angle X_0 = & 0 & k = 0 \\ |X_k| = & \frac{A_{-k}}{2} & \angle X_k = & -\theta_{-k} & k < 0 \end{array}$$

Observe que o preço a se pagar por se utilizar a série de fourier na forma exponencial é o surgimento de frequências negativas o que se confunde com o mundo real onde não existe este tipos de frequências.

O cálculo da série, teoricamente, necessitariam dos parâmetros A_k e θ_k da forma cossenoidal. Para evitar o cálculo do parâmetros da série cossenoidal é utilizado o seguinte artifício

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \int_0^{T_0} (\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t})e^{-jk\omega_0 t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_0^{T_0} e^{j(n-k)\omega_0 t}dt$$

Observe que

$$\int_0^{T_0} e^{j(n-k)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T, & k = m \\ \left[\frac{1}{j(n-k)\omega_0} e^{j(n-k)\omega_0}\right]_0^T, & k \neq m \end{cases}$$

Usando o fato de que

$$e^{j(n-k)\omega_0 T} = e^{j(n-k)2\pi} = 1$$

e dando continuidade a equação anterior

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = X_k \int_0^{T_0} dt$$

logo, finalmente,

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}$$

Exercício 0.6 *Onda triangular definida, em um de seus períodos, por:*

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4A}{T_0}t & para\ 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ \frac{-4A}{T_0}t + 2A & para\ \frac{T_0}{2} \leq t \leq T_0 \end{cases}$$

Calcule a série de fourier na forma exponencial

Exercício 0.7 $x(t) = |\sin(200.\pi.t)|$ *Calcule a série de fourier na forma exponencial*

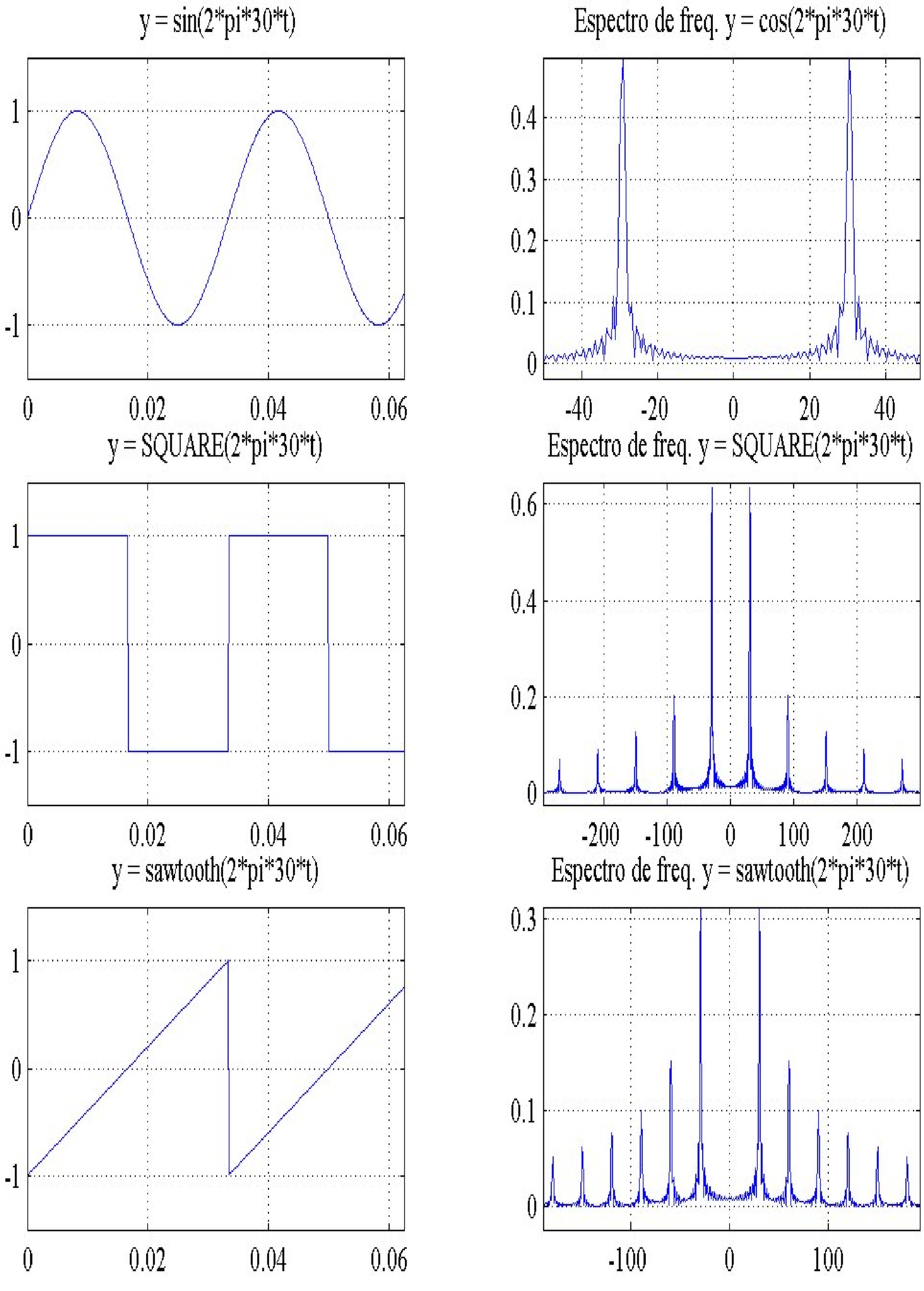
O Matlab possui uma função que traça o espectro exponencial calculando o seu FFT(Fast Fourier Transform - Transformada Rápida de Fourier)[1]. Abaixo segue um programa feito para o Matlab que traça o seu gráfico no tempo, como também o seu respectivo FFT:

Programa Matlab 0.3
```
%Programa para plotar graficos no MATLAB
%Elaborado por: Arlei 15/02/05
close all
clear all
clc
%######################
t = 0:.0001:.625;
y = sin(2*pi*30*t);
SUBPLOT(3,2,1),plot(t,y,'-');
TITLE(' y = sin(2*pi*30*t)');
axis([0 .0625 -1.5 1.5]);grid
%######################
Y=fft(y,16384);
py=abs(Y)/6250;
```

[1] Existe vários programas no meio acadêmico que calculam o FFT, alguns deles: MATLAB e FAWAV(este pode ser obtido em minha homepage: www.professores.aedb.br\ arlei)

```
f=10000*(-8191:8192)/16384
SUBPLOT(3,2,2),plot(f,fftshift(py(1:16384)));
axis([-100 100 -0.2 0.6]);
TITLE('Espectro de freq. y = sin(2*pi*30*t)');grid
%######################
t = 0:.0001:.625;
y = SQUARE(2*pi*30*t);
SUBPLOT(3,2,3),plot(t,y,'-');
TITLE('y = SQUARE(2*pi*30*t)');
axis([0 .0625 -1.5 1.5]);grid
%######################
Y=fft(y,16384);
py=abs(Y)/6250;
f=10000*(-8191:8192)/16384
SUBPLOT(3,2,4),plot(f,fftshift(py(1:16384)));
axis([-100 100 -0.2 0.6]);
TITLE('Espectro de freq. y = SQUARE(2*pi*30*t)');grid
%######################
t = 0:.0001:.625;
y =  sawtooth(2*pi*30*t);
SUBPLOT(3,2,5),plot(t,y);
TITLE('y = sawtooth(2*pi*30*t)');
axis([0 .0625 -1.5 1.5]);grid
%######################
Y=fft(y,16384);
py=abs(Y)/6250;
f=10000*(-8191:8192)/16384
SUBPLOT(3,2,6),plot(f,fftshift(py(1:16384)));
axis([-100 100 -0.2 0.6]);
TITLE('Espectro de freq. y = sawtooth(2*pi*30*t)');grid
```

O traçado do espectro do FFT ficará da seguinte forma:


y = sin(2*pi*30*t)
Espectro de freq. y = cos(2*pi*30*t)
y = SQUARE(2*pi*30*t)
Espectro de freq. y = SQUARE(2*pi*30*t)
y = sawtooth(2*pi*30*t)
Espectro de freq. y = sawtooth(2*pi*30*t)
1
0
-1
0 0.02 0.04 0.06
0.4 0.3 0.2 0.1 0
-40 -20 0 20 40
0.6 0.4 0.2 0
-200 -100 0 100 200
0.3 0.2 0.1 0
-100 0 100

0.4.1 *Potência de um sinal períodico*

A potência instantânea dissipada em um resistor através do qual flui uma corrente i é dada por $Ri^2(t)$; a energia dissipada nesse instante é $Ri^2(t)dt$.Integrando esta última expressão entre t_1 e $t_2 > t_1$ encontramos a energia dissipada no intervalo $[t_1\ t_2]$; dividindo este valor por $t_2 - t_1$ encontramos a potência média dissipada no intervalo.
A energia contida em um sinal x(t) é dada por

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2.dt \tag{13}$$

A potência média de um sinal $x(t)$ é dada por

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2.dt \tag{14}$$

Para sinais periódicos a energia é sempre infinita, e a potência pode ser calculada analisando apenas um período:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} |x(t)|^2.dt \tag{15}$$

Aplicando a um sinal senoidal, por exemplo, encontraríamos a conhecida relação $P = A^2/2$.Para encontrar a potência espectral de um sinal periódico, basta somarmos as potências de cada harmônico, com isso podemos tirar a seguinte relação de potência

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_k)^2}{2} \tag{16}$$

Este é o teorema de Parseval e ensina a calcular a potência de um sinal, a partir da distribuição frequencial de suas amplitudes.

Exemplo 0.9 *Para a onda quadrada do exemplo 0.8 calcule a sua potência total e a potência gasta para transmitir o mesmo sinal apenas até o seu 7○ harmônico:*

Exercício 0.8 *Suponha que se deseja transmitir a onda quadrada com apenas 97% da sua potência total, calcule até que harmônico seria necessário para que isto seja feito.*

0.4.2 *Resumo*

Dado um sinal periódico podemos decompô-lo em uma soma de senóides. A análise das amplitudes e fases destas senóides permite um conhecimento do sinal análogo ao conhecimento que se teria analisando a expressão analítica $x(t)$ dele.
Dizemos que é possível analisar um sinal periódico no domínio do tempo através de sua expressão analítica $x(t)$, ou no domínio das frequências, através dos coeficientes A_k ou dos espectros. São maneiras distintas porém equivalentes de se entender sinais periódicos. Para passar de um domínio ao outro usamos as fórmulas desenvolvidas anteriormente.

Exercícios

Exercício 0.9 *Determine a Série de Fourier da forma de onda mostrada na figura 5:*

Exercício 0.10 *Determine os espectros de amplitude e fase da forma de onda do exercício 0.9.*

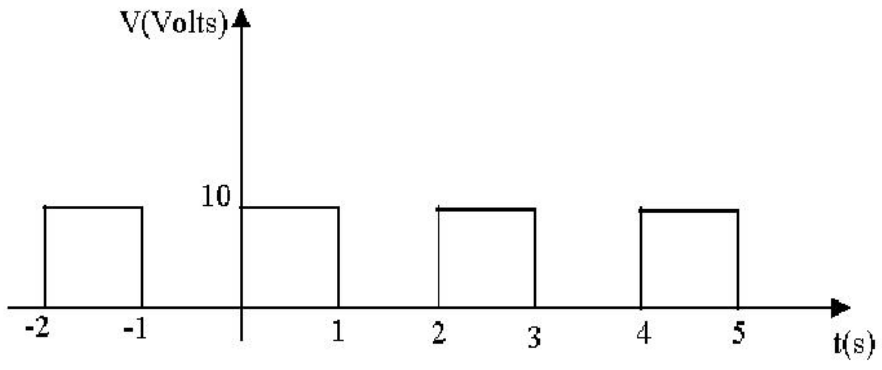


Figura 5: Onda Quadrada

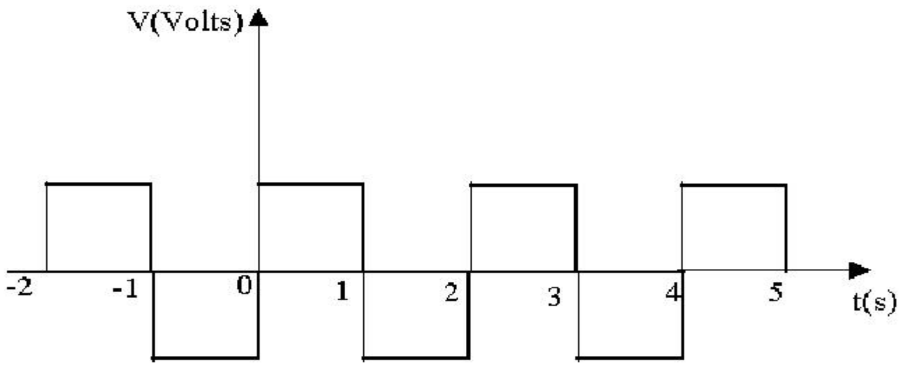


Figura 6: Onda Quadrada

Exercício 0.11 *Reconstrua a forma de onda do exercício 0.9, utilizando o MATLAB.*

Exercício 0.12 *Determine a Série de Fourier da forma de onda mostrada na figura 6:*

Exercício 0.13 *Determine os espectros de amplitude e fase da forma de onda do exercício 0.12*

Exercício 0.14 *Reconstrua a forma de onda do exercício 0.12, utilizando o MATLAB.*

Exercício 0.15 *Através da expressão abaixo, determine os espectros de amplitude e fase da função* $f(t)$

$$f(t) = 5 + 3\cos(10\pi.t) - 2\cos(20.\pi.t) - 0.5\sin(30.\pi.t) \tag{17}$$

Exercício 0.16 *Trace o gráfico de $f(t)$ do exercício 0.15 no MATLAB.*

Exercício 0.17 *Determine a expressão da tensão elétrica mostrada no gráfico da figura 7*

Exercício 0.18 *Trace a forma de onda da tensão elétrica do exercício 0.17 no MATLAB.*

Exercício 0.19 *Determine a Série de Fourier da forma de onda mostrada na figura 8*

Exercício 0.20 *Determine os espectros de amplitude e fase da forma de onda do exercício 0.19.*

Exercício 0.21 *Reconstrua a forma de onda do exercício 0.19, utilizando o MATLAB.*

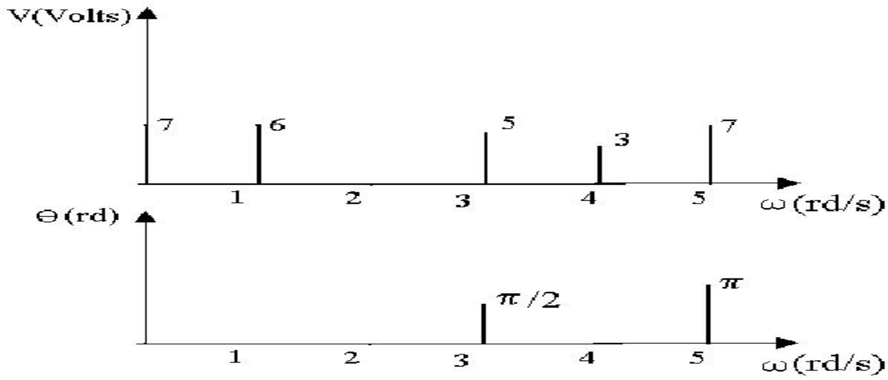


Figura 7: Espectro de frequência

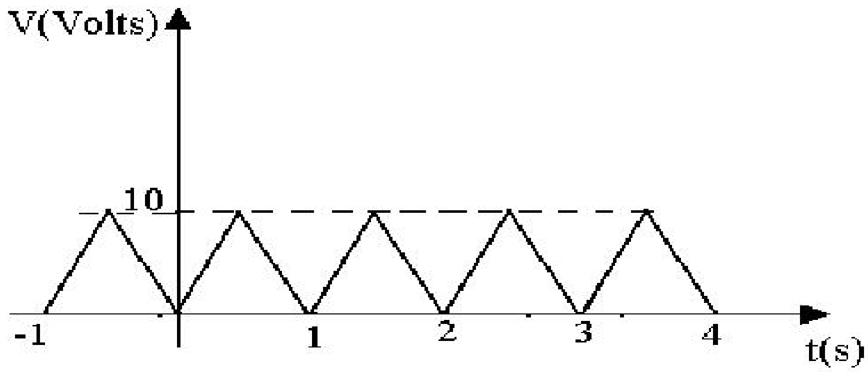


Figura 8: Onda triangular

Exercício 0.22 *Faça alguma comparação entre as Séries de Fourier dadas no exercícios 0.9 e 0.19.*

Exercício 0.23 *Determine os períodos fundamentais para os seguintes sinais:*

1. $\sin(150\pi.t)$
2. $\cos(40.\pi.t+\pi/3)+\sin(35.\pi.t)$
3. $\cos(40.\pi.t+\pi/3).\sin(35\pi.t)$
4. $cos(40.\pi.t+\pi/3).\sin(200.\pi.t)$
5. $|\sin(200.\pi.t)|$
6. $|\cos(40.\pi.t+\pi/3).\sin(200.\pi.t)|$

Exercício 0.24 *Obtenha a série de Fourier trigonométrica para os sinais a seguir:*

1. *Seno retificado:* $x(t)=|A\sin(\omega_o.t)$
2. *Seno parabólica:É uma função com período* T_0 *definida, em um de seus períodos por*

$$x(t)=\begin{cases}\frac{-16A}{{T_0}^2}t^2+\frac{8A}{T_0}t & para\ 0\le t\le\frac{T_0}{2}\\ \\ \frac{16A}{T_0^2}t^2-\frac{24A}{T_0}t+8A & para\ \frac{T_0}{2}\le t\le T_0\end{cases}$$

3. *Onda quadrada definida, em um de seus períodos, por:*

$$x(t) = \begin{cases} A & para\ \frac{-T_0}{4} \leq t \leq \frac{T_0}{4} \\ \\ -A & para\ \frac{-T_0}{2} \leq t \leq \frac{-T_0}{4}\ e\ \frac{T_0}{4} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

4. *Onda triangular definida, em um de seus períodos, por:*

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4A}{T_0}t & para\ 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ \\ \frac{-4A}{T_0}t + 2A & para\ \frac{T_0}{2} \leq t \leq T_0 \end{cases}$$

5. *Onda escada definida, em um de seus períodos, por:*

$$x(t) = \begin{cases} A & para\ 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ \\ 2A & para\ \frac{T_0}{2} \leq t \leq T_0 \end{cases}$$

6. *Onda dente de serra definida, em um de seus períodos, por :*

$$x(t) = \left\{ \frac{A}{T_0}t \quad para\ 0 \leq t \leq T_0 \right.$$

7. $x(t) = \sin(10\pi.t) + \sin(12\pi.t)$
8. $x(t) = \cos(10\pi.t) + \sin(12\pi.t)$
9. $x(t) = \sin(\pi.t)\cos(\pi.t)$
10. $x(t) = \sin(\pi.t)\cos(2.\pi.t)$
11. $x(t) = \sin(\pi.t)\cos(5.\pi.t)$
12. $x(t) = \sin(\pi.t)\cos(100\pi.t)$

Exercício 0.25 *Plote o gráfico dos primeiros harmônicos para cada um dos sinais do exercício anterior.*

Exercício 0.26 *Para os sinais do exercício anterior obtenha a série de Fourier na sua forma cossenoidal.Apresente os espectros de A_k e θ_k.*

Exercício 0.27 *Para os sinais do exercício anterior obtenha a série de Fourier na sua forma exponencial.Apresente os espectros de X_k e θ_k.*

Exercício 0.28 *Encontre a série de Fourier para um trem de pulsos quadrados com amplitude A, período T_0 e largura $\Delta = T_0/2$ e compare com o caso de uma onda quadrada.*