

Группа Р3118

К работе допущен 28.02.22

Студент Шульга А.И.

Работа выполнена 02.04.2022

Преподаватель Куксова П.А

Отчет принят \_\_\_\_\_

## Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.04

### Изучение равноускоренного вращательного движения (маятник Обербека)

#### 1. Цель работы.

1. Проверка основного закона динамики вращения
2. Проверка зависимости момента инерции от положения масс относительно оси вращения.

#### 2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Ознакомиться с установкой
2. Выполнить измерения при разной массе груза и разном положении утяжелителей
3. Выполнить необходимые расчёты
4. Построить график зависимости момента инерции от радиуса вращения
5. Исследование взаимосвязи между движением груза и связанного с ним маятника.

#### 3. Объект исследования.

Маятник Обербека.

#### 4. Метод экспериментального исследования.

Многократные измерения прохождения грузом  $m$ , связанным с маятником, расстояния  $h$ .



# Результаты экспериментальных измерений

Таблица 1

Протокол измерений времени падения груза при разной массе груза и разном положении утяжелителей на крестовине

Масса груза, г	Положение утяжелителей					
	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
	4,59C					
$47,0 \pm 0,52$ $+ 220,0 \pm 0,52$ <hr/> $267 \pm 12$	<del>4,59C</del>	5,37C	6,44C	7,28C	7,94C	9,06C
	<del>4,49C</del>	5,47C	6,28C	7,16C	7,97C	8,94C
	<del>4,47C</del>	5,25C	6,12C	7,15C	8,13C	9,00C
	4,5C	5,36C				
$47,0 \pm 0,52$ $+ 440 \pm 12$ <hr/> $487 \pm 1,52$	3,38C	3,69C	4,6C	5,35C	5,63C	6,41C
	3,34C	3,9C	4,69C	5,31C	5,97C	6,66C
	3,31C	3,78C	4,56C	5,37C	5,62C	6,62C
	3,34C	3,79C				
$707 \pm 22$	3,56C	3,34C	3,82C	4,25C	4,6C	5,37C
	2,62C	3,13C	3,72C	4,28C	4,65C	5,28C
	3,69C	3,16C	3,49C	4,26C	4,69C	5,25C
	2,71C	3,21C				
$927 \pm 2,52$	2,22C	2,66C	3,25C	3,81C	3,97C	4,56C
	2,29C	2,69C	3,25C	3,71C	4,1C	4,53C
	2,28C	2,72C	3,31C	3,78C	4,12C	4,78C
	2,26C	2,69C				

2, 04, 22

## 5. Рабочие формулы и исходные данные.

Формулы для коэффициентов  $a$ ,  $b$  по МНК (1) и (2):  $b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$ ;  $a = \bar{y} - b\bar{x}$

Формула для расчёта значений  $d_i$  и  $D$  для расчёта СКО в МНК (3) и (4):

$$d_i = y_i - (a + bx_i)$$

$$D = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Формулы для СКО коэффициентов  $a, b$  по МНК (5) и (6):  $S_b^2 = \frac{1}{D} \sum d_i^2$ ;  $S_a^2 = \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D} \right) \sum d_i^2$

Формула для расчёта ускорения (7):  $a = \frac{2h}{t^2}$

Формула для расчёта углового ускорения (8):  $\varepsilon = \frac{2a}{d}$

Формула для расчёта момента силы (9):  $M = \frac{md}{2}(g - a)$

Формула для расчёта расстояния между осью вращения и центром утяжелителя (10):

$R = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{b}{2}$ , где  $l_1$  - расстояние от оси вращения до первой риски,

$l_0$  - расстояние между соседними рисками,  $b$  - размер утяжелителя вдоль спицы

Формула для СКО (11):  $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$ , где  $N$  - число измерений

Формула для измерения случайной погрешности (12):  $\Delta \bar{x} = t_{\alpha_{\text{дов.}}, n} \cdot \sigma_x$

Формула для расчёта абсолютной погрешности при косвенных измерениях величины (13):

$$\Delta z = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b \right)^2 + \dots}, \text{ где } \Delta a = \frac{2}{3} \Delta_{\text{инст } a} \text{ и т.д.}$$

## 6. Измерительные приборы.

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Линейка на установке	Аналоговый	0-700 мм	$\pm 0,5$ мм
2	Секундомер	Цифровой	0-10 с	$\pm 0,05$ с

## 7. Схема установки (перечень схем, которые составляют Приложение 1).

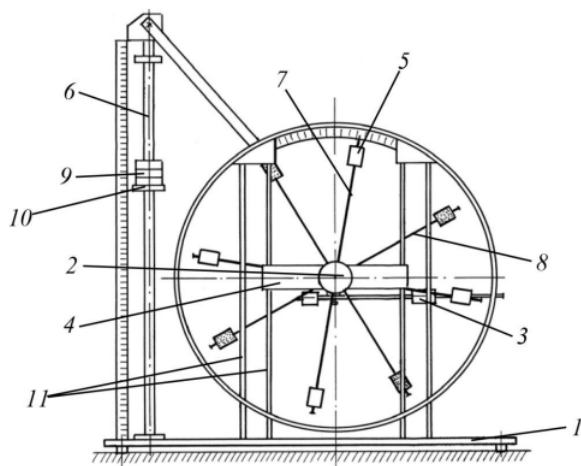


Рис. 2. Стенд лаборатории механики (общий вид):

1 – основание; 2 – рукоятка сцепления крестовин; 3 – устройство принудительного трения; 4 – поперечина; 5 – груз крестовины; 6 – трубчатая направляющая; 7 – передняя крестовина; 8 – задняя крестовина; 9 – шайбы каретки; 10 – каретка; 11 – система передних стоек.

**Данные об установке**

Параметр	Значение
Масса каретки	$47,0 \pm 0,5$ г
Масса шайбы	$220,0 \pm 0,5$ г
Масса грузов на крестовине	$408,0 \pm 0,5$ г
Расстояние первой риски от оси	$57,0 \pm 0,5$ мм
Расстояние между рисками	$25,0 \pm 0,2$ мм
Диаметр ступицы	$46,0 \pm 0,5$ мм
Диаметр груза на крестовине	$40,0 \pm 0,5$ мм
Высота груза на крестовине	$40,0 \pm 0,5$ мм

8. Результаты прямых измерений и их обработки (таблицы, примеры расчетов).

Результаты прямых измерений представлены на последнем листе «Результаты экспериментального исследования».

Таблица 1

Масса груза, г	Положение утяжелителей					
	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$267 \pm 1$	$4,59 \pm 0,05$ с	$5,37 \pm 0,05$ с	$6,44 \pm 0,05$ с	$7,28 \pm 0,05$ с	$7,94 \pm 0,05$ с	$9,06 \pm 0,05$ с
	$4,44 \pm 0,05$ с	$5,47 \pm 0,05$ с	$6,28 \pm 0,05$ с	$7,16 \pm 0,05$ с	$7,97 \pm 0,05$ с	$8,94 \pm 0,05$ с
	$4,47 \pm 0,05$ с	$5,25 \pm 0,05$ с	$6,12 \pm 0,05$ с	$7,15 \pm 0,05$ с	$8,13 \pm 0,05$ с	$9,00 \pm 0,05$ с
	4,5	5,36	6,28	7,2	8,01	9
$487 \pm 1,5$	$3,38 \pm 0,05$ с	$3,69 \pm 0,05$ с	$4,60 \pm 0,05$ с	$5,35 \pm 0,05$ с	$5,63 \pm 0,05$ с	$6,41 \pm 0,05$ с
	$3,34 \pm 0,05$ с	$3,90 \pm 0,05$ с	$4,69 \pm 0,05$ с	$5,31 \pm 0,05$ с	$5,97 \pm 0,05$ с	$6,66 \pm 0,05$ с
	$3,31 \pm 0,05$ с	$3,78 \pm 0,05$ с	$4,56 \pm 0,05$ с	$5,37 \pm 0,05$ с	$5,62 \pm 0,05$ с	$6,62 \pm 0,05$ с
	3,34	3,79	4,62	5,34	5,74	6,56
$707 \pm 2$	$2,56 \pm 0,05$ с	$3,34 \pm 0,05$ с	$3,82 \pm 0,05$ с	$4,25 \pm 0,05$ с	$4,60 \pm 0,05$ с	$5,37 \pm 0,05$ с
	$2,62 \pm 0,05$ с	$3,13 \pm 0,05$ с	$3,72 \pm 0,05$ с	$4,28 \pm 0,05$ с	$4,65 \pm 0,05$ с	$5,28 \pm 0,05$ с
	$2,69 \pm 0,05$ с	$3,16 \pm 0,05$ с	$3,49 \pm 0,05$ с	$4,26 \pm 0,05$ с	$4,69 \pm 0,05$ с	$5,25 \pm 0,05$ с
	2,62	3,21	3,68	4,26	4,65	5,3
$927 \pm 2,5$	$2,22 \pm 0,05$ с	$2,66 \pm 0,05$ с	$3,25 \pm 0,05$ с	$3,81 \pm 0,05$ с	$3,97 \pm 0,05$ с	$4,56 \pm 0,05$ с
	$2,29 \pm 0,05$ с	$2,69 \pm 0,05$ с	$3,25 \pm 0,05$ с	$3,71 \pm 0,05$ с	$4,1 \pm 0,05$ с	$4,53 \pm 0,05$ с
	$2,28 \pm 0,05$ с	$2,72 \pm 0,05$ с	$3,31 \pm 0,05$ с	$3,78 \pm 0,05$ с	$4,12 \pm 0,05$ с	$4,78 \pm 0,05$ с
	2,26	2,69	3,27	3,77	4,06	4,62

9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).

Рассчитаем ускорение ( $a$ ) груза, угловое ускорение ( $\varepsilon$ ) и момент силы натяжения нити ( $M$ ) для каждого положения нитей, заполнив таблицы 2, 3, 4.

В качестве примера приведём расчёты для положения с массой груза  $267 \pm 1$  г с утяжелителями на 1 риске.

По формуле (7) рассчитаем ускорение по среднему времени и высоте  $h = 0,7$  м (было установлено во время лабораторной работы):

$$a = \frac{2 \cdot 0,7}{(4,5)^2} = 0,069 \text{ м/с}^2$$

По формуле (8) рассчитаем угловое ускорение (диаметр ступицы равен 46 мм):

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 0,069}{0,046} = 3 \text{ рад/с}^2$$

По формуле (9) рассчитаем момент силы натяжения нити:

$$M = \frac{0,267 \cdot 0,046}{2} (9,8 - 0,069) \approx 0,06 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Проведём аналогичные вычисления для остальных положений и масс груза. Притом округлим значения ускорения до 3 цифр после запятой, угловое ускорение до 1 цифры после запятой, момент силы натяжения нити до 3 цифр после запятой.

Таблица 2. Ускорение груза

Масса, г	Положение утяжелителей					
	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$267 \pm 1$	0,069 м/с <sup>2</sup>	0,049 м/с <sup>2</sup>	0,035 м/с <sup>2</sup>	0,027 м/с <sup>2</sup>	0,022 м/с <sup>2</sup>	0,017 м/с <sup>2</sup>
$487 \pm 1,5$	0,125 м/с <sup>2</sup>	0,097 м/с <sup>2</sup>	0,066 м/с <sup>2</sup>	0,049 м/с <sup>2</sup>	0,042 м/с <sup>2</sup>	0,033 м/с <sup>2</sup>
$707 \pm 2$	0,204 м/с <sup>2</sup>	0,136 м/с <sup>2</sup>	0,103 м/с <sup>2</sup>	0,077 м/с <sup>2</sup>	0,065 м/с <sup>2</sup>	0,05 м/с <sup>2</sup>
$927 \pm 2,5$	0,274 м/с <sup>2</sup>	0,193 м/с <sup>2</sup>	0,131 м/с <sup>2</sup>	0,099 м/с <sup>2</sup>	0,085 м/с <sup>2</sup>	0,066 м/с <sup>2</sup>



Таблица 3. Угловое ускорение

Масса, г	Положение утяжелителей					
	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$267 \pm 1$	3 рад/с <sup>2</sup>	2,1 рад/с <sup>2</sup>	1,5 рад/с <sup>2</sup>	1,2 рад/с <sup>2</sup>	1 рад/с <sup>2</sup>	0,7 рад/с <sup>2</sup>
$487 \pm 1,5$	5,4 рад/с <sup>2</sup>	4,2 рад/с <sup>2</sup>	2,9 рад/с <sup>2</sup>	2,1 рад/с <sup>2</sup>	1,8 рад/с <sup>2</sup>	1,4 рад/с <sup>2</sup>
$707 \pm 2$	8,9 рад/с <sup>2</sup>	5,9 рад/с <sup>2</sup>	4,5 рад/с <sup>2</sup>	3,3 рад/с <sup>2</sup>	2,8 рад/с <sup>2</sup>	2,2 рад/с <sup>2</sup>
$927 \pm 2,5$	11,9 рад/с <sup>2</sup>	8,4 рад/с <sup>2</sup>	5,7 рад/с <sup>2</sup>	4,3 рад/с <sup>2</sup>	3,7 рад/с <sup>2</sup>	2,9 рад/с <sup>2</sup>

Таблица 4. Момент силы натяжения нити

Масса, г	Положение утяжелителей					
	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$267 \pm 1$	0,06 Н*м	0,06 Н*м	0,06 Н*м	0,06 Н*м	0,06 Н*м	0,06 Н*м
$487 \pm 1,5$	0,108 Н*м	0,109 Н*м	0,109 Н*м	0,109 Н*м	0,109 Н*м	0,109 Н*м
$707 \pm 2$	0,156 Н*м	0,157 Н*м	0,158 Н*м	0,158 Н*м	0,158 Н*м	0,159 Н*м
$927 \pm 2,5$	0,203 Н*м	0,205 Н*м	0,206 Н*м	0,207 Н*м	0,207 Н*м	0,208 Н*м

Рассчитаем для каждого положения утяжелителей по МНК  $M_{тр}$  и  $I$  по зависимости  $M(\varepsilon) = M_{тр} + I\varepsilon$ . В качестве примера возьмем положение на 1 риске с массой груза  $267 \pm 1$  г.

По формулам (2) и (1) рассчитаем  $M_{тр}$  и  $I$  соответственно.

$$I_1 = \frac{0,7202}{45,82} = 0,016 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$M_{тр1} = 0,13175 - 0,016 \cdot 7,3 = 0,015 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Проводя аналогичные вычисления получим:

Таблица 5

Величина	Положение утяжелителей					
	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$I$ , кг/м <sup>2</sup>	0,016	0,023	0,034	0,047	0,054	0,067
$M_{тр}$ , Н*м	0,015	0,014	0,009	0,005	0,008	0,013

Вычислим для каждого положения утяжелителей расстояние между осью вращения и центром утяжелителя по формуле (10). В качестве примера вычислим это расстояние для положения в 1 риску.

$$R = 57 + (1 - 1) \cdot 25 + \frac{40}{2} = 77 \text{ мм} = 0,077 \text{ м}$$

$$R^2 \approx 0,0059 \text{ м}^2$$

Проведём аналогичные вычисления и заполним таблицу.

Таблица 6

Величина	Положение утяжелителей					
	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$R$ , м	0,077	0,102	0,127	0,152	0,177	0,202
$R^2$ , м <sup>2</sup>	0,0059	0,0104	0,0161	0,0231	0,0313	0,0408

По МНК рассчитаем  $4m_{ут.}$  по формуле (1) и  $I_0$  по формуле (2)

$$4m_{ут.} = \frac{0,001265}{0,000866} = 1,46 \text{ кг}$$

$$m_{ут.} = 365 \text{ г}$$

$$I_0 = 0,04 - 0,021 \cdot 1,46 = 0,009 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

#### 10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

Вычислим погрешность среднего арифметического значения времени для груза  $267 \pm 1$  г на 1 риске. Для этого используем формулу (11):

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - 4,5)^2}{3 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{0,0126}{6}} \approx 0,05$$

Затем по формуле (12) рассчитаем случайную погрешность ( $t_{0,95} = 4,3$  при  $n = 3$ ).

$$\Delta t = 0,005 \cdot 4,3 = 0,0215 \approx 0,22 \text{ с}$$

Рассчитаем для той же массы груза и для того же положения утяжелителей погрешность для ускорения, углового ускорения и момента силы натяжения нити.

Согласно формуле (13) для вычисления погрешности, нужно вычислить значения частных производных.

$$\frac{\partial a}{\partial h} = \frac{2}{t^2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{-4h}{t^3}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = \frac{2}{d}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial d} = \frac{-2a}{d^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial m} = \frac{d}{2}(g - a)$$

$$\frac{\partial M}{\partial d} = \frac{m}{2}(g - a)$$

$$\frac{\partial M}{\partial a} = -\frac{md}{2}$$

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{2}{(4,5)^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,0005\right)^2 + \left(\frac{-4 \cdot 0,7}{(4,5)^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,05\right)^2} = 0,001 \text{ м/с}^2$$

$$\Delta \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{2}{0,046} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,001\right)^2 + \left(\frac{-2 \cdot 0,069}{(0,046)^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,0005\right)^2} = 0,036 \text{ рад/с}^2$$

$$\Delta M = \sqrt{\left(\frac{0,046}{2}(9,8 - 0,069) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,001\right)^2 + \left(\frac{0,267}{2}(9,8 - 0,069) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,0005\right)^2 + \left(\frac{-0,267 \cdot 0,046}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,001\right)^2} =$$

$$= 0,0005 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Относительные погрешности:

$$\varepsilon_a = 1,4\%$$

$$\varepsilon_\varepsilon = 1,2\%$$

$$\varepsilon_M = 0,8\%$$

Рассчитаем случайные погрешности  $I_0$  и  $m_{\text{ут}}$  по формулам (5) и (6), но прежде рассчитаем значения  $\sum d_i^2$  и  $D$  по формулам (3) и (4):

$$\sum d_i^2 = 2,74 \cdot 10^{-5}$$

$$D = 0,0009$$

$$S_m^2 = \frac{1}{0,0009} \frac{2,74 \cdot 10^{-5}}{4} = 7,6 \cdot 10^{-3}$$

$$S_I^2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{(0,0213)^2}{0,0009}\right) \frac{2,74 \cdot 10^{-5}}{4} = 4,59 \cdot 10^{-6}$$

$$t_{0,95} = 2,57 \text{ при } n = 6$$

$$\Delta 4m = 2,57 \cdot 0,089 \approx 0,22 \text{ кг}$$

$$\Delta m = 55 \text{ г}$$

$$\Delta I = 2,57 \cdot 0,0021 \approx 0,0054 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

11. Графики (перечень графиков, которые составляют Приложение 2).

График 1

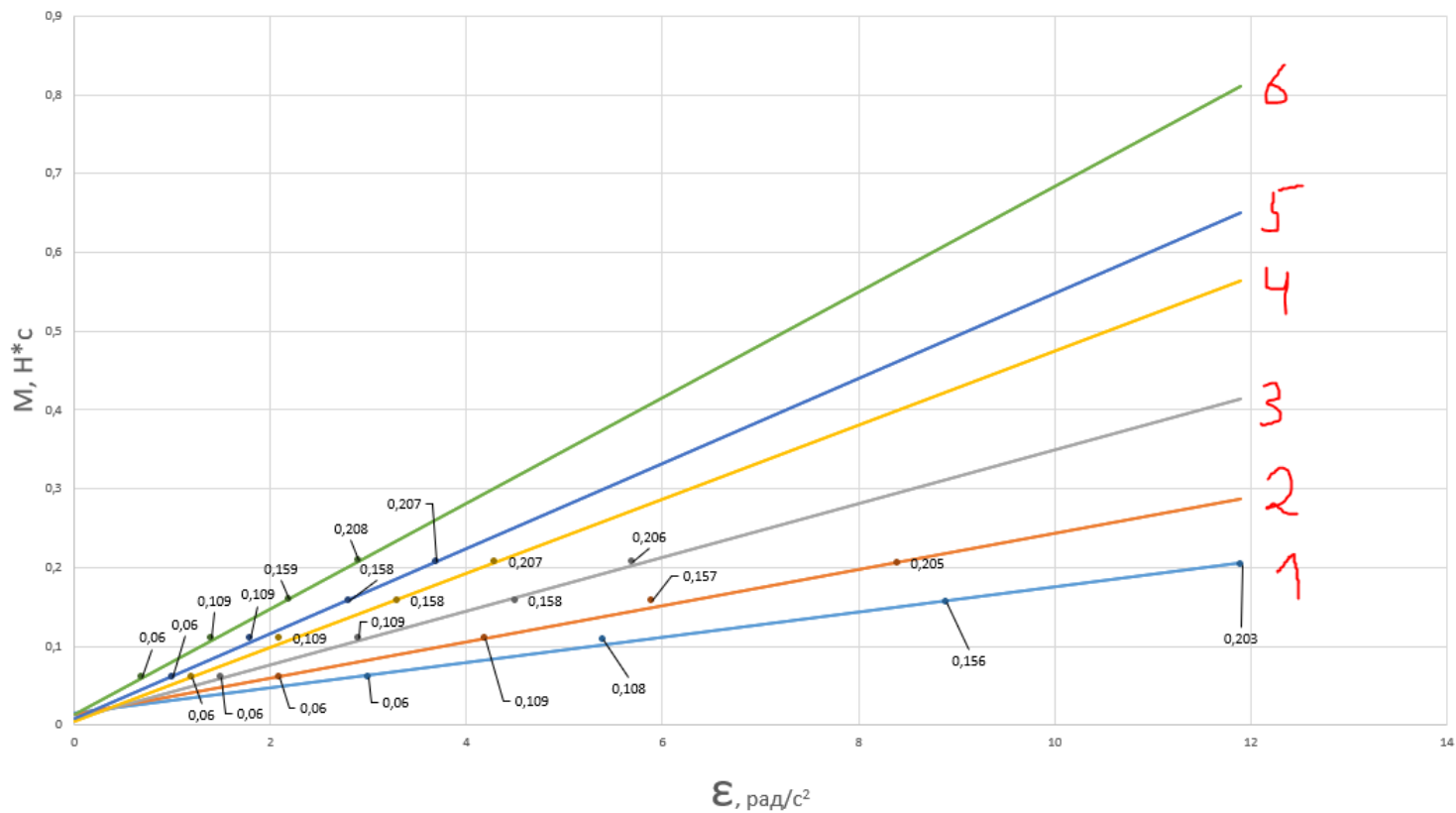
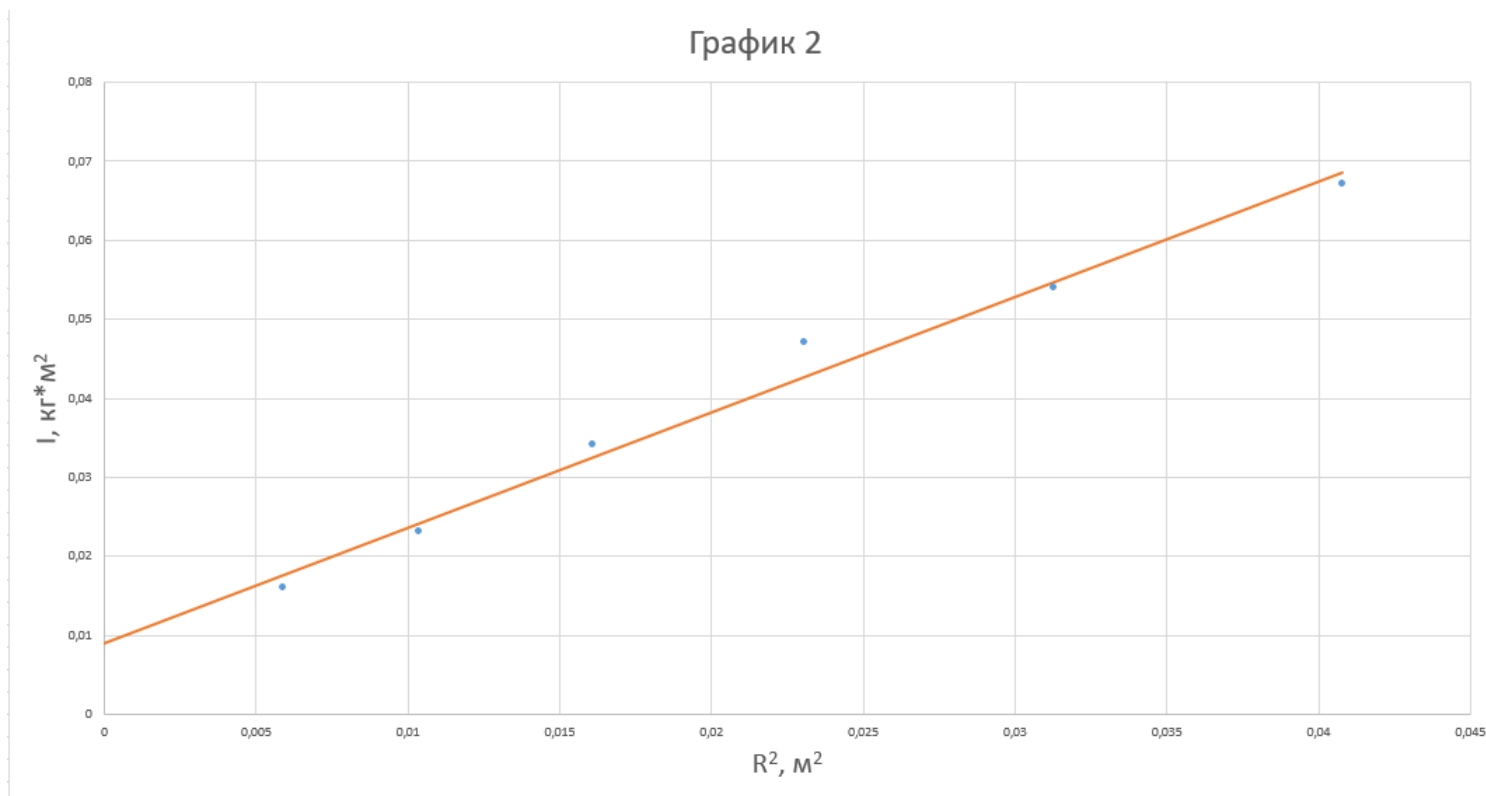


График 2



## 12. Окончательные результаты.

Величины для массы груза  $267 \pm 1$  г с положением утяжелителей на одной риске:

$$t_{\text{ср}} = 4,50 \pm 0,22 \text{ с}$$

$$a = 0,069 \pm 0,001 \text{ м/с}^2 \quad \varepsilon_a = 1,4\% \quad \alpha = 0,95$$

$$\varepsilon = 3,000 \pm 0,036 \text{ рад/с}^2 \quad \varepsilon_\varepsilon = 1,2\% \quad \alpha = 0,95$$

$$M = 0,0600 \pm 0,0005 \text{ Н·м} \quad \varepsilon_M = 0,8\% \quad \alpha = 0,95$$

Массы утяжелителей и сумма моментов инерции:

$$m_{\text{утяж}} = 365 \pm 55 \text{ г}$$

$$I_0 = 0,0090 \pm 0,0054 \text{ кг·м}^2$$

## 13. Выводы и анализы результата работы.

В ходе выполнения данной лабораторной работы я изучил работу основного закона динамики вращения, изучил зависимость момента инерции от положения масс относительно оси вращения. Результаты получились близки

к достоверным, что подтверждается графиками функций.

14. Дополнительные задания.

15. Выполнение дополнительных заданий.

16. Замечания преподавателя (*исправления, вызванные замечаниями преподавателя, также помещаются в этот пункт*).