МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Санкт-Петербургский национальный исследовательнский университет ИТМО"

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Лабораторная работа №1
«Решение системы линейных алгебраических уравнений»
по дисциплине
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Вариант №37

Выполнил:
Студент группы P32111
Шульга Артём Игоревич
Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна

ITMO UNIVERSITY

Санкт-Петербург, 2022

Цель работы

Познакомиться и реализовать методы решения СЛАУ на ЭВМ, оценить точность и практичность одного из методов решения. В моём случае мне нужно реализовать метод Гаусса-Зенделя.

Описание метода

Так как этот метод является итерационным, то он должен удовлетворять условиям сходимости (как и эквивалетные к исходной СЛАУ системы). Я воспользовался условием доминирования диагонали (1) и требованием к норме матрицы $||C|| < 1$ (2):

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

$$||C|| = \max_{1 \geq i \geq n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \tag{2}$$

Это лишь достаточные условия сходимости, то есть метод может сходиться при нарушении этих условий. Затем нужно привести матрицу к векторному виду $x = Cx + D$. Формула системы в сокращенном виде (3):

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + d_i, i = 1, 2, ..., n \tag{3}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

$$\mathrm{d}_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = 1, 2, ..., n$$

Затем, если системы эквивалетны и условия сходимости выполняются (но метод может сходиться и без них!), то затем нужно выбрать начальное приближение (я задавал через правые части, но также допускается задание через нулевой вектор). Затем нужно вычислять каждое значение x по порядку строк, подставляя в другие неизвестные соответствующие элементы из начального приближения, притом в отличии от метода простых итераций, новое значение x применяется в этой же итерации. То есть имеет место быть следующая формула (4):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k i = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

Сам итерационный процесс продолжается до тех пор, пока все разности между неизвестными в предпоследней и последней итерациях не меньше требуемой точности.

Исходный код программы

Весь исходный код в репозитории на github
https://github.com/Arlet2/itmo-4sem/tree/main/comp-math/lab1

Реализация метода:
https://github.com/Arlet2/itmo-4sem/blob/main/comp-math/lab1/internal/gauss_zeidel.go

Примеры работы программы

```
Введенные данные:
Точность: 0.01
Augmented matrix 3x3:
2 2 10 14
10 1 1 12
2 10 1 13

Матрица вида x = Cx+d:
Matrix 3x3:
-0.1 -0.1 1.2000000000000002
-0.2 -0.1 1.3
-0.2 -0.2 1.4000000000000001
Вычисление нормы для матрицы:
Matrix 3x3:
0 -0.1 -0.1
-0.2 0 -0.1
-0.2 -0.2 0
Норма матрицы < 1. Условия сходимости выполняются
Итерации:
[1.2000000000000002 1.3 1.4000000000000001] diff: 1.01
[0.9300000000000002 0.974 1.0192] diff: 0.3808
[1.0006800000000002 0.9979439999999999 1.0002752] diff: 0.07068000000000008

Выполнено за 3 итерации(-й).
Вектор неизвестных: [1.0001780800000002 0.9999368639999999 0.9999770112]
Вектор погрешностей: [0.0005019200000000446 0.001992863999999983 0.0002981887999998767]
```

Решением будет $x = \{1, 1, 1\}$.

```
Введенные данные:
Точность: 0.01
Augmented matrix 2x2:
4 1 2
2 4 1

Матрица вида x = Cx+d:
Matrix 2x2:
-0.25 0.5
-0.5 0.25
Вычисление нормы для матрицы:
Matrix 2x2:
0 -0.25
-0.5 0
Норма матрицы < 1. Условия сходимости выполняются
Итерации:
[0.5 0.25] diff: 1.01
[0.4375 0.03125] diff: 0.21875
[0.4921875 0.00390625] diff: 0.0546875

Выполнено за 3 итерации(-й).
Вектор неизвестных: [0.4990234375 0.00048828125]
Вектор погрешностей: [0.0068359375 0.00341796875]
```

Решением будет $x = \{0{,}5,\ 0\}$.

```
Введенные данные:
Точность: 0.01
Augmented matrix 3x3:
2 1 2 8
3 4 -3 7
4 1 -2 6
Эта матрица не обладает диагональным преобладанием.

Матрица вида x = Cx+d:
Matrix 3x3:
-0.5 -1 4
-0.75 0.75 1.75
2 0.5 -3
Вычисление нормы для матрицы:
Matrix 3x3:
0 -0.5 -1
-0.75 0 0.75
2 0.5 0
Норма матрицы < 1. Условия сходимости выполняются

Выполнено за 49 итерации(-й).
Вектор неизвестных: [1.861193503531894 1.4232910801266576 1.4340325471271171]
Вектор погрешностей: [0.005015141398509115 0.0031586920746786706 0.00845093675967945]
```

Решением будет $x = \{\frac{13}{7} = 1.86, \frac{10}{7} = 1.43, \frac{10}{7} = 1.43\}$

```
Введенные данные:
Точность: 0.0001
Augmented matrix 3x3:
2 1 2 8
3 4 -3 7
4 1 -2 6
Эта матрица не обладает диагональным преобладанием.

Матрица вида x = Cx+d:
Matrix 3x3:
-0.5 -1 4
-0.75 0.75 1.75
2 0.5 -3
Вычисление нормы для матрицы:
Matrix 3x3:
0 -0.5 -1
-0.75 0 0.75
2 0.5 0
Норма матрицы < 1. Условия сходимости выполняются

Выполнено за 79 итерации(-й).
Вектор неизвестных: [1.857192761515324 1.4285144776235728 1.4286427618424344]
Вектор погрешностей: [5.098241090761846e-05 9.202652270001721e-06 9.736349568001401e-05]
```

Решением будет $x = \{\frac{13}{7} = 1.85714, \frac{10}{7} = 1.42857, \frac{10}{7} = 1.42857\}$

По примерам и результатам работы видно, что метод выдает весьма точный результат (для заданной точности)

Вывод по лабораторной работе

В ходе выполнения данной лабораторной работы я научился использовать методы вычислительной математики для решения СЛАУ в указанной точности.