KULIAH 3

Pokok Bahasan : DERET TAK BERHINGGA (*INFINITE SERIES*)

Sub Bahasan :
- Deret Bolak-Balik (*Alternating Series*)
- Uji Konvergensi Deret Bolak-Balik
- Deret Pangkat
  - Pengertian Deret Pangkat
- Uji Konvergensi Deret Pangkat

PUSTAKA RUJUKAN

1. Mary L. Boas, 1983. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. 2^{nd} Edition. John Wiley & Sons
2. Hans J. Wospakrik, 1993. Dasar-Dasar Matematika Untuk Fisika. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta
3. Roswati Mudjiarto dan Frans J. Krips, 1995, Matematika Fisika 1, Penerbit ITB, Bandung

Tujuan Pembelajaran, mahasiswa dapat

- mengetahui deret tak berhingga bolak-balik (*Alternating Series*).
- mengetahui Deret Pangkat tak berhingga (*Power Series*)
- melakukan Uji Konvergensi deret bolak-balik
- melakukan Uji Konvergensi deret pangkat

1.7 Deret Bolak-Balik

Deret Bolak-Balik

Deret bolak-balik adalah deret yang tandanya selang-seling antara negatif dan positif.

Misal :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

$$-\frac{1}{6}+\frac{2}{7}-\frac{3}{8}+\frac{4}{9}\cdots\frac{(-1)^{n}n}{n+5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{n+5}$$

Untuk menguji apakah deret bolak-balik konvergen atau divergen, maka dapat dijelaskan bahwa jika nilai absolut dari deret berkurang menuju nol, maka deret bolak-balik tersebut adalah deret konvergen. Jadi sebuah deret bolak-balik Σa_n akan konvergen bila :

$$|a_{n+1}|\le|a_n| \tag{1.6a}$$

dan

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \tag{1.6b}$$

Pada contoh di atas, deret $\sum a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

terlihat bahwa :

$|a_{n+1}|<|a_n|$, yaitu $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ dan $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Maka deret $\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ adalah deret bolak-balik yang bersifat konvergen.

Deret Pangkat

1.8 Deret Pangkat (*Power Series*)

Deret pangkat adalah suatu deret yang memiliki variabel. Bentuk deret pangkat dapat dituliskan sebagai:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{1.7}$$

atau

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots \tag{1.8}$$

dimana *a* adalah suatu konstanta dan *x* adalah variabel. Untuk melihat apakah suatu deret pangkat konvergen atau divergen, dapat diperiksa nilai *x*. Nilai *x* memiliki interval sedemikian sehingga deret konvergen atau sebaliknya. Sebagai sebuah contoh dapat diperiksa nilai *x* pada deret di bawah ini :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{2^n} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots$$

Konvergensi Deret Pangkat

untuk menguji daerah *x* agar deret konvergen, dapat dilakukan uji ratio.

$$a_n = \frac{(-x)^n}{2^n}$$

$$\rho_n = \left| \frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}} : \frac{(-x)^n}{2^n} \right|$$

$$= \left| \frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(-x)^n} \right|$$

$$= \left| \frac{x}{2} \right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{2} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|$$

Agar deret konvergen maka :

$$\rho < 1 \rightarrow \left| \frac{x}{2} \right| < 1$$

$$-1 < \frac{x}{2} < 1 \rightarrow -2 < x < 2$$

Dalam hal ini harus diperiksa nilai *x* untuk -2 dan 2. Untuk *x* = 2, maka deret menjadi:

$$\sum \frac{(-2)^n}{2^n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$$

Deret menjadi divergen karena jumlahnya tidak terdefinisi.

Untuk *x* = -2, maka deret menjadi :

$$\sum \frac{(2)^n}{2^n} = 1 + 1 + 1 + 1 \cdots$$

Deret menjadi divergen karena jumlahnya ∞.

Kesimpulannya adalah deret $\sum \frac{(-2)^n}{2_n}$ konvergen jika $-2 < x < 2$.

Sebagai contoh selanjutnya, periksalah nilai *x* agar deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}$ bersifat konvergen. Dalam hal ini $a_n = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}$.

Dengan uji ratio

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+2}}{n+2} : \frac{x^{n+1}}{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{x^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{x^{n+1}}\right|$$

$$= \left|\frac{(n+1)x}{n+2}\right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x}{n+2}\right|$$

$$= |x|$$

Agar deret konvergen, maka $|x| < 1$. Jadi $-1 < x < 1$.

Untuk melihat x pada batas -1 dan 1, maka :

Jika x = -1, deret menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

Dari uji sebelumnya (uji integral) dapat ditunjukkan bahwa deret $\sum \frac{1}{n+1}$ adalah divergen, maka deret $-\sum \frac{1}{n+1}$ juga adalah deret divergen, sehingga untuk x = -1 tidak masuk dalam daerah konvergen. Jika x = 1, maka deret menjadi :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$$

Deret ini adalah deret bolak-balik dan dapat ditunjukkan bahwa :

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ sehingga $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ dan juga $\lim_{x\to\infty} a_n = 0$.

Jadi nilai x = 1 masih dalam daerah konvergen.

Kesimpulannya adalah deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}$ bersifat konvergen jika -1 < $x \leq 1$.