KULIAH 6

Pokok Bahasan	:	**Deret Fourier**
Sub Bahasan	:	- Definisi Deret Fourier - Bentuk Trigoniometri Deret Fourier - Koefisien-Koefisien Deret Fourier Trigoniometri

PUSTAKA RUJUKAN

1. Mary L. Boas, 1983. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. 2nd Edition. John Wiley & Sons
2. Hans J. Wospakrik, 1993. Dasar-Dasar Matematika Untuk Fisika. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta
3. Roswati Mudjiarto dan Frans J. Krips, 1995, Matematika Fisika 1, Penerbit ITB, Bandung

Tujuan Pembelajaran, mahasiswa mampu

- ✓ menjelaskan pengertian Deret Fourier
- ✓ memahami sifat-sifat khusus integral fungsi trigoinometri.
- ✓ mencari koefisien-koefisien Deret Fourier (a_0, a_1, a_2, …. b_1, b_2, b_3, ..)

DERET FOURIER

2.1 Pengantar Deret Fourier

Pengertian Deret Fourier

Jika kita mendengar bunyi, misalkan bunyi piano, maka kita sebenarnya mendengarkan campuran beberapa frekuensi, mungkin 2, 3, 4, … *n* kali dari frekuensi dasar. Masalahnya adalah bagaimana mengekspresikan fungsi tersebut. Untuk itu dibutuhkan suatu **Deret Tak Berhingga** yang mencakup banyak nilai frekuensi. Deret tersebut disebut sebagai Deret Fourier, yang dinyatakan dalam deret trigoniometri maupun dalam bentuk kompleks. Di sini sin *nx* dan cos *nx* merupakan fungsi dasar yang dimasukkan dalam suku-suku deret.

2.2 Bentuk Trigoniometri Deret Fourier

Deret Fourier Trigoniometri

Bentuk **Deret Fourier** dalam fungsi trigoniometri dapat dituliskan sebagai :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + a_n \cos nx$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx \qquad (2.1)$$

Untuk mencari konstanta-konstanta a_0, a_1, a_2, … a_n dan b_1, b_2, b_3, … b_n, maka perlu dipakai sifat-sifat fungsi trigoniometri di bawah ini :

Sifat-Sifat fungsi Trigoniometri

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

untuk semua m dan n (2.2a)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{1}{2}, m = n \neq 0 \\ 0, m = n = 0 \end{cases} \quad (2.2b)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{1}{2}, m = n \neq 0 \\ 1, m = n = 0 \end{cases} \quad (2.2c)$$

Bukti untuk persamaan (2.2a) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(m+n)x} + e^{i(m-n)x} - e^{i(n-m)x} - e^{-i(m+n)x}}{4i} dx$$

Jika $m = n \neq 0$, maka integral di atas menjadi :

$$\frac{1}{4i}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(m+n)x} - e^{-i(m+n)x}\right)dx = \frac{1}{4i}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)dx$$

dan jika dituliskan $k = m + n$, maka :

$$\int (e^{ikx} - e^{-ikx})dx = \frac{1}{ik} e^{ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{ik}(e^{ik\pi} - e^{-ik\pi})$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\cos k\pi + i \sin k\pi - (\cos k\pi - i \sin k\pi)\right\} = \frac{1}{ik}(2i \sin k\pi) = 0$$

jika $m = n = 0$, maka $m + n = 0 = k$ dan $m - n = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{ikx} - e^{-ikx})dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1-1)dx = 0$$

jika $m \neq n$, $m + n = k_1$ dan $m - n = k_2$ seperti halnya di atas, maka :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{ik_1x}+e^{ik_2x}-e^{-ik_1x}}{4i}\right)dx=0$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx=0$

Untuk semua nilai *m* dan *n* seperti apa yang dituliskan dalam persamaan (2.2a). Dengan cara yang sama akan diperoleh juga untuk persamaan (2.2b) dan (2.2c) yaitu :

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin mx\sin nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{imx}-e^{-imx}}{2i}\cdot\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(m+n)x}-e^{i(m-n)x}-e^{-i(m-n)x}+e^{-i(m+n)x}\right)dx$$

Jika $m = n \neq 0$, maka :

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin mx\sin nx)dx=-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(m+n)x}+e^{-i(m+n)x}-2\right)dx$$
$$=-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}-2\,dx=-\frac{1}{4}(-2x\,\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{4}.(-4\pi)=\pi$$

Jadi : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin mx\sin nx)dx=\frac{1}{2\pi}.\pi=\frac{1}{2}$; untuk $m = n \neq 0$

Jika $m = n = 0$, maka :

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin mx\sin nx)dx=-\frac{1}{4}.\int_{-\pi}^{\pi}(1-1-1+1)dx=0$$

Jadi : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin mx\sin nx)dx=0$; untuk $m = n = 0$.

Jika $m \neq n$, maka dapat dituliskan $k_1 = m + n$ dan $k_2 = m - n$, sehingga :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{ik_1x} - e^{ik_2x} - e^{-ik_2x} + e^{-ik_1x}\right)dx = 0$$

Jadi : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0$; untuk $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2}\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{(m+n)x} + e^{i(m-n)x} + e^{-i(m+n)x} + e^{-i(m+n)x}\right)dx$$

Jika $m \neq n$, maka dapat ditulis $k_1 = m + n$ dan $k_2 = m - n$, sehingga

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{k_1x} + e^{ik_2x} + e^{-ik_2x} + e^{-ik_1x}\right)dx = 0$$

Jika $m = n = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos mx \cos nx\right) dx = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+1+1+1\right) dx = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} 4\, dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

sehingga :

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2\pi}.2\pi = 1$; untuk $m = n = 0$.

Jika $m = n \neq 0$, maka dapat dituliskan $k_1 = m + n$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos mx \cos nx\right) dx = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{ik_1x} + 1 + 1 + e^{-ik_1x}\right) dx = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} 2\, dx = \frac{1}{4}\cdot(4\pi) = \pi$$

Jadi $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos mx \cos nx)dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}$ untuk $m = n \neq 0$.

Jika dilihat kembali bentuk Deret Fourier dari persamaan (2.1) :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + ... + a_n \cos nx$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + ... + b_n \sin nx$$

maka dapat diintegrasikan suku di sebelah kiri dan suku-suku di sebelah kanan tanda "=" dalam batas -π s.d π dan dibagi dengan 2π :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx + a_1 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx + a_2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2xdx$$
$$+ a_3 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 3xdx + \cdots + a_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx$$
$$+ b_1 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx + b_2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2xdx$$
$$+ b_3 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 3xdx + \cdots + b_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, dx \tag{2.3}$$

Dapat ditunjukkan dari persamaan (2.3) bahwa :

1. Suku-suku di sebelah kanan tanda "=" yang memiliki faktor cosinus memiliki bentuk :

   $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \cos nxdx$; dengan $m \neq 0$, $n = 0$ atau $m \neq n$

   Jadi $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \cos nxdx = 0$

2. Suku-suku di sebalah kanan tanda " = " yang memiliki faktor sinus memiliki bentuk :

   $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx \cos nxdx$; dengan $m \neq 0$, $n = 0$ atau $m \neq n$

Jadi $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$

Oleh karena itu dari persamaan (2.3) dapat dituliskan :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2}$$

maka akan diperoleh :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{2.4}$$

Kemudian apabila persamaan (2.1) diintegralkan dengan faktor cos *x* akan diperoleh bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\, dx + a_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos x + a_2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos 2x dx$$

$$+ a_3\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos 3x dx + \cdots + b_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin\, x dx b_2\frac{1}{2\pi}\cos x\sin 2x dx$$

$$+ b_3\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin 3x dx + \cdots \tag{2.5}$$

Akan diperoleh juga bahwa :

1. Suku-suku di sebelah kanan tanda "=" yang memiliki faktor cosinus :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\, dx$$

dan nilainya akan diperoleh ½ untuk suku yang mengandung cos x karena disini nilai *m = n ≠ 0*

2. Suku-suku di sebelah kanan tanda "=" yang memiliki faktor sinus memiliki bentuk :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin nx dx$$; dan nilainya adalah 0 untuk semua *n*

Jadi persamaan (2.5) bentuknya menjadi :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\, dx = a_1 \cdot \frac{1}{2}$$

sehingga diperoleh : $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\, dx$

dengan cara yang sama akan diperoleh :

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\, dx$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 3x\, dx$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (2.6)$$

Untuk memperoleh nilai b_n dapat dilakukan prinsip yang sama yaitu persamaan (2.1) diintegralkan dengan faktor sin *nx* :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{a_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, dx + a_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x \sin nx\, dx$$

$$+ a_2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x \sin nx\, dx + a_3\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{\pi}\cos 3x \sin nx\, dx$$

$$+\cdots + a_n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \sin nx\, dx$$

$$+b_1 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin nx\, dx + b_2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin nx\, dx$$

$$+b_3 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin nx\, dx + \cdots$$

$$+bn \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin nx dx$$

1. Suku-suku di sebelah kanan tanda "=" yang memiliki faktor cosinus memiliki bentuk:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin nx\, dx = 0$$

2. Suku-suku di sebelah kanan tanda "=" yang memiliki faktor sinus memiliki bentuk :

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$, yang memiliki nilai $\frac{1}{2}$ untuk *m* = *n* ≠ 0, dan memiliki nilai 0 untuk *m* = *n*. Jadi dapat dituliskan :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = b_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin nx\, dx$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{2} b_n$$

Rumusan Deret Fourier

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \qquad (2.7)$$

Maka dapat disimpulkan bahwa deret Fourier :

Konstanta-Konstanta Deret Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

memiliki konstanta-konstanta :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad (2.8)$$

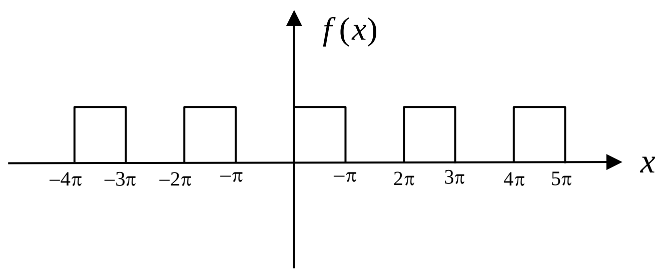
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

CONTOH

Carilah Deret Fourier dari f(x) jika diberikan fungsi:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Kurva dari f(x) dapat digambarkan :



SOLUSI

Gambar 2.1 Fungsi f (x) = 0, **-**π < x <0, dan f(x) =1 , 0< x <**-**π

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx = \frac{1}{\pi}\, x\Big|_0^{\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx\, dx \quad = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi - 0)$$

$= 0 \quad ; \forall \quad n$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\, dx \quad = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}(\cos nx|_{0}^{\pi})$$

$$= \frac{1}{4\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 0,2,4,6\cdots \rightarrow \text{untuk } n \text{ genap} \\ \dfrac{2}{n\pi}, & n = 1,3,5,7\cdots \rightarrow \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Jadi diperoleh :

$$a_0 = 1$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{n} = \text{genap} \\ 2/n\pi, & \text{n} = \text{ganjil} \end{cases}$$

Substitusi a_0, a_n dan b_n ke dalam fungsi *f(x)* akan diperoleh :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \ldots\ldots + a_n\cos nx$$
$$+ b_1\sin nx + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \ldots\ldots + b_n\sin nx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + 0\cdot\cos x + 0\cdot\cos 2x + 0\cdot\cos 3x + \ldots. + \frac{2}{\pi}\sin x + 0\cdot\sin 2x$$
$$+ \frac{2}{3\pi}\sin 3x + 0\cdot\sin 4x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \ldots.$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots. \right)$$

Soal-Soal

1. Carilah deret Fourier dari f(x) jika diberikan ;

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

2. Carilah deret Fourier dari f(x) jika diberikan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$