Fisika Matematika 1

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat-Nya sehingga sehingga Dikat Mata Kuliah Dasar 2024 ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Tak lupa juga kami menyampaikan banyak terima kasih kepada teman-teman yang telah membantu menyelesaikan diktat ini atas bantuannya yang telah berkontribusi dalam pengerjaan diktat ini dengan memberikan materi soal dan pembahasan untuk Diktat Mata Kuliah Dasar 2024 ini.

Kami berharap agar diktat ini dapat benar-benar membantu mahasiswa dan memberikan manfaat terutama untuk mahasiswa tingkat 1 dalam rangka persiapan menghadapi Ujian Tengah Semester dan Akhir Semester ini. Semoga Diktat Mata Kuliah Dasar 2024 ini dapat menambah pengetahuan dan dapat melatih mahasiswa untuk terbiasa mengerjakan soal agar nanti pada saat ujian dapat mengerjakan soal dengan baik dan benar.

Adapun karena keterbatasan pengetahuan maupun pengalaman kami, kami menyadari masih terdapat kekurangan dalam penyusunan diktat ini yang perlu kami perbaiki. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun ke arah penyempurnaan diktat ini, sangat kami harapkan dan kami terima dengan terbuka agar dapat kami jadikan evaluasi dan pelajaran untuk diktat yang lebih baik lagi. Sebelumnya kami juga mohon maaf apabila ada kekurangan dalam penyusunan diktat ini.

Tertanda,

Tim Diktat Mata Kuliah Dasar

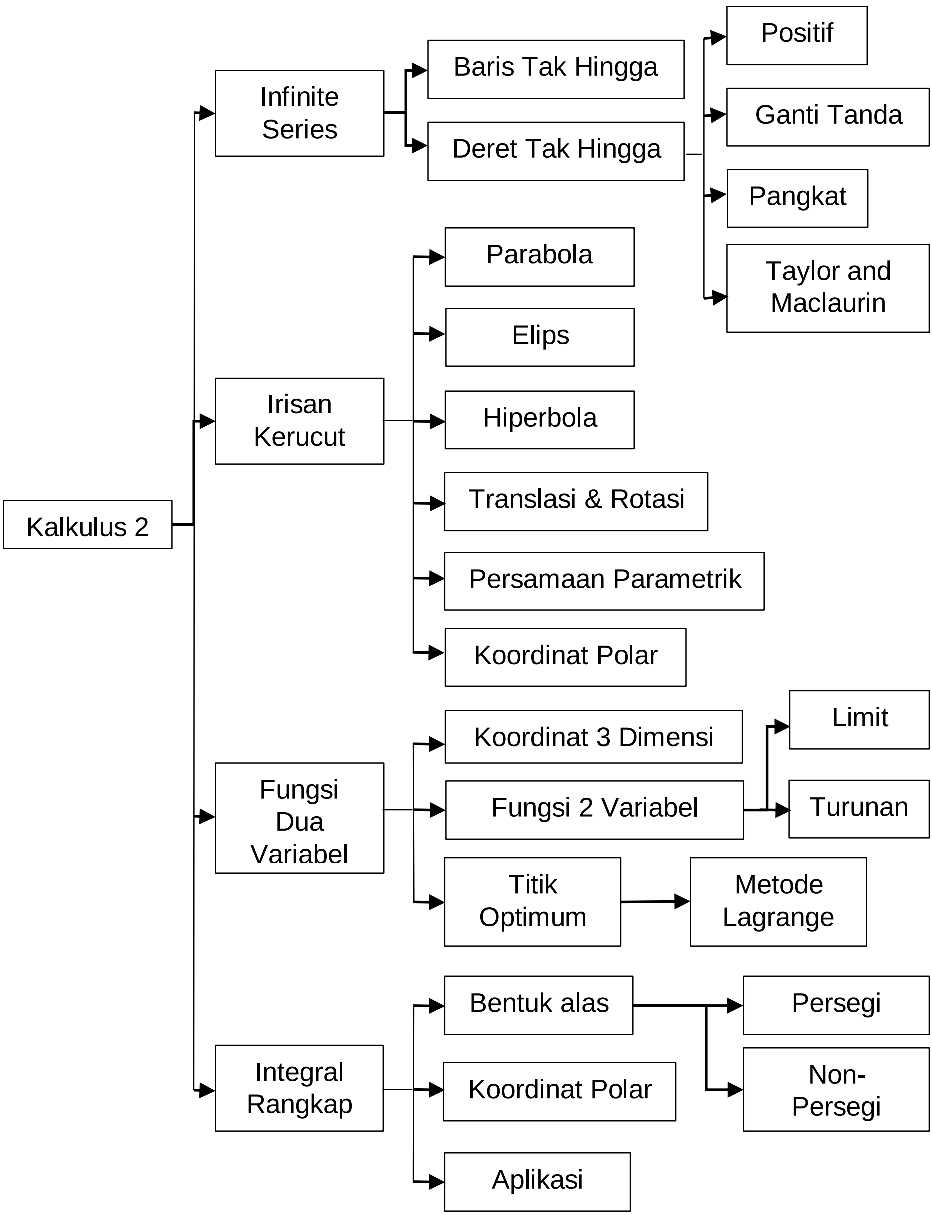
PENERBIT

TIM DIKTAT MATA KULIAH DASAR

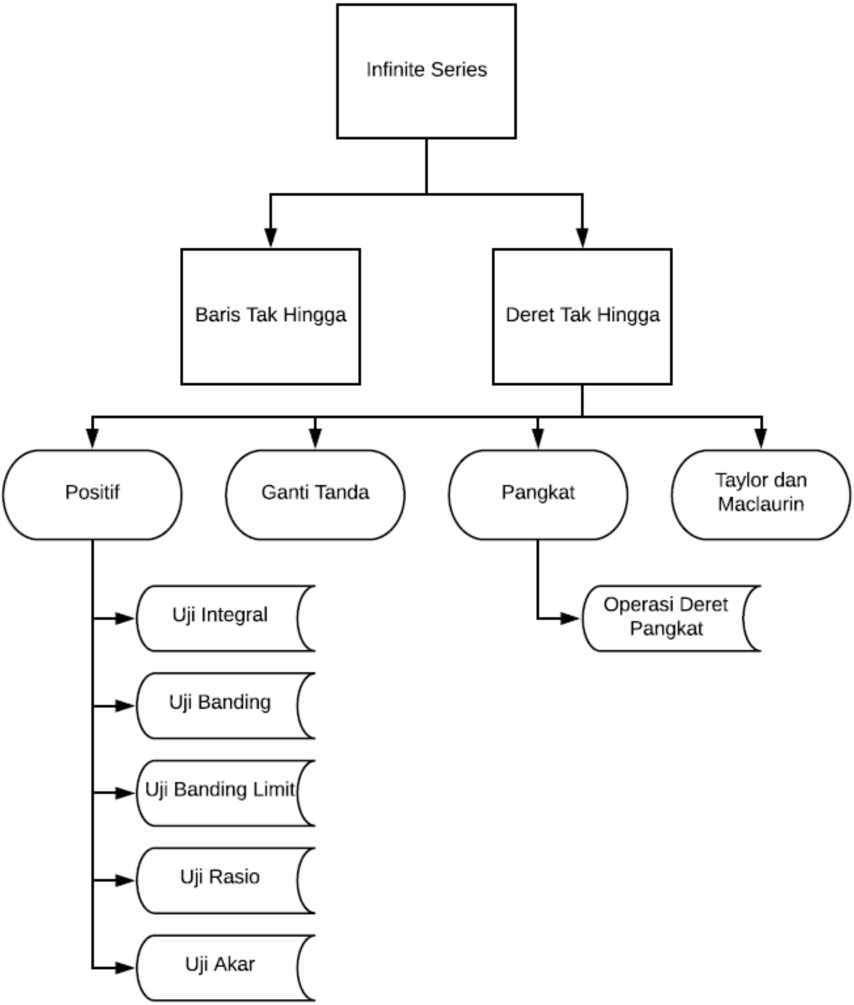
CETAKAN PERTAMA, JUNI 2019
CETAKAN KEDUA, JUNI 2020
CETAKAN KETIGA, JULI 2021
CETAKAN KEEMPAT, JULI 2022
CETAKAN KELIMA, JULI 2023
CETAKAN KEENAM, JULI 2024

DAFTAR ISI

PETA KONSEP


Kalkulus 2
Infinite Series
Baris Tak Hingga
Deret Tak Hingga
Positif
Ganti Tanda
Pangkat
Taylor and Maclaurin
Irisan Kerucut
Parabola
Elips
Hiperbola
Translasi & Rotasi
Persamaan Parametrik
Koordinat Polar
Fungsi Dua Variabel
Koordinat 3 Dimensi
Fungsi 2 Variabel
Limit
Turunan
Titik Optimum
Metode Lagrange
Integral Rangkap
Bentuk alas
Persegi
Non-Persegi
Koordinat Polar
Aplikasi

BAB 1 INFINITE SERIES



Bab ini mirip dengan materi baris dan deret di SMA, tapi yang dibahas khusus bagian baris tak hingga (infinite sequence) dan deret tak hingga (infinite series)

1.1 BARIS TAK HINGGA

Aturan simbol-simbolnya masih sama dengan SMA dulu, yaitu: a_1 artinya bilangan pertama; a_2 artinya bilangan kedua; dan seterusnya hingga a_n artinya bilangan ke-n

Contoh baris:

$$a_1 , a_2 , \ldots\ldots\ldots , a_n$$

dalam materi baris dan deret tak hingga ini, kita notasikan baris tersebut sebagai $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dimana "n=1" artinya dimulai dari bilangan 1 dan "∞" artinya barisnya sampai tak hingga. Jika barisnya dimulai dari n=1 sampai tak hingga, maka notasinya boleh (dan biasanya) disederhanakan menjadi $\{a_n\}$

contoh lain:

2 , 4 , 6 ,8 , ... notasinya {2n}

$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots\ldots\ldots$ notasinya $\left\{\frac{n}{2+n}\right\}$

Baris konvergen adalah baris yang nilainya **konsisten** mendekati suatu bilangan, atau secara matematis dikatakan baris $\{a_n\}$ konvergen mendekati L (L sebagai suatu bilangan), apabila:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{L}$$

Dari definisi tersebut, untuk mengetahui kekonvergenan suatu baris, kita tinggal membuat limit tak hingga dari notasi barisnya. Jika mendekati suatu bilangan maka baris dikatakan konvergen, jika hasil dari limit menunjukan bentuk tak tentu (seperti: $\pm\infty , \frac{\infty}{\infty} , \infty - \infty$) maka barisan dikatakan divergen.

1. Tentukan kekonvergenan dari baris $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$

   Jawab :

   - Kita tinggal membuat limit tak hingga dari baris tersebut. Oleh karena itu untuk menjawab soal-soal seperti ini pembaca seharusnya sudah paham mengenai limit tak hingga. Kalau belum paham atau lupa sebaiknya dibaca lagi di kalkulus 1.

   Karena pangkat pada penyebut lebih besar dari pada pembilang, maka limit menuju tak hingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$$

   Karena limit menuju bentuk tak tentu, maka baris tersebut divergen

2. Tentukan kekonvergenan dari baris $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots\ldots\ldots$

   jawab :

   karena soal dalam bentuk barisannya, pertama kita bikin dulu notasi barisnya (dicoba-coba aja), yaitu $\left\{\frac{n}{2+n}\right\}$ Lalu kita limit tak hingga. Karena pangkat di penyebut sama dengan pangkat di pembilang, maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2+n} = 1$$

   baris tersebut konvergen menuju 1

3. Tentukan kekonvergenan dari baris $\frac{1}{2-\frac{1}{2}}, \frac{2}{3-\frac{1}{3}}, \frac{3}{4-\frac{1}{4}}, \ldots$

   Jawab :

   Notasi barisnya adalah $\left\{\frac{n}{(n+1)-\frac{1}{n+1}}\right\}$

   Lalu untuk bentuk limit tak hingganya bisa disederhanakan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)-\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(n+1)}{(n+1)^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+2n} = 1$$

Baris tersebut konvergen menuju 1

Karena cara menentukan kekonvergenan dari baris sangat sederhana, yaitu cuman dicari limit tak hingganya, maka pastinya akan diberikan bentuk limit tak hingga yang sulit. Sehingga benar-benar perlu dipahami lagi bentuk-bentuk limit tak hingga. Seperti teorema apit, dalil L'Hopital's, dan bentuk limit dari bilangan euler.

4. Tentukan kekonvergenan dari baris $\frac{1}{e}, \frac{4}{e^2}, \frac{9}{e^3}, \frac{16}{e^4}, \ldots$

Jawab :

Buat dulu notasinya, yaitu $\left\{\frac{n^2}{e^n}\right\}$

Lalu kita limit tak hingga. Bentuk limit ini ternyata perlu diselesaikan dengan dalil L'Hopital's

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{e^n} = 0$$

Sehingga baris tersebut konvergen menuju 0

Ada juga limit yang bisa dikatakan mendekati suatu bilangan, tapi ternyata divergen. Yaitu karena **tidak konsisten** dimana bilangan pada barisnya bolak balik antara positif dan negatif

5. Tentukan kekonvergenan dari baris $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}$

Jawab:
jika kita membuat barisannya, maka barisannya adalah

$$\left\{(-1)^n \frac{n}{n+2}\right\} = -\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots\ldots$$

Dari soal nomor 2, sudah dibuktikan bahwa baris $\left\{\frac{n}{2+n}\right\}$ konvergen. Tetapi pada kasus ini, karena ada tambahan $(-1)^n$ mengakibatkan barisannya menjadi barisan ganti tanda (antara positif dan negatif). Sehingga baris tersebut divergen.

6. Tentukan kekonvergenan dari baris $a_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n-1}$

   Jawab:
   Kalau kita pisah terlebih dahulu cos-nya, maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

   Tapi karena ada cos(nπ) pada baris tersebut membuatnya menjadi baris yang ganti tanda. Karena cos(nπ) = 1 ketika n = ganjil, dan cos(nπ) = -1 ketika n = genap. maka baris tersebut divergen

7. Tentukan kekonvergenan dari baris $\left\{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}$

   jawab :
   dengan dalil L'Hopital's

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

   sehingga baris tersebut konvergen menuju 0

8. Tentukan kekonvergenan dari baris $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

   Jawab :
   Soal yang kayak gini kita bawa ke bentuk euler (e)
   Dimana menurut definisi dari bilangan euler

$$e = \lim_{h\to\infty} (1+h)^{1/h}$$

   *note : definisi euler ini adalah materi kalkulus 1

   kita misalkan $\frac{2}{n} = h$ maka

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = (1+h)^{2/h} = ((1+h)^{1/h})^2 = e^2$$

maka baris tersebut konvergen menuju e^2

1.2 DERET TAK HINGGA

Pengertian deret mirip dengan baris, bedanya kalau deret dijumlah (pasti kalian juga paham). Contoh deret:

$$a_1 + a_2 + a_3 \text{.........} + a_n$$

dilambangkan dengan dengan s_n yang artinya deret sampai bilangan ke-n. dimana dalam bab deret tak hingga ini, juga dinotasikan sebagai $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yang artinya deret "a" dimulai dari bilangan satu (k=1) sampai tak hingga

contoh lain:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Deret juga ada konvergen dan divergennya. Deret dikatakan konvergen apabila jumlahnya menuju suatu bilangan tentu. Sehingga deret seperti pada contoh $\sum_{k=1}^{\infty} 2k$ sudah pasti divergen, karena jika deret dijumlah sampai bilangan ke-tak hingga sudah pasti nilainya tak hingga juga (karena deretnya makin lama makin besar). Sedangkan pada contoh $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ deretnya makin lama makin kecil, sehingga ada kemungkinan jumlah dari deretnya bisa menuju suatu bilangan (konvergen).

S_n adalah notasi yang artinya jumlah deret sampai suku ke-n. Apa bila kita dapat membentuk definisi S_n dari suatu deret, maka kita dapat menentukan kekonvergenan deret dengan limit tak hingga. Jika limit menuju suatu nilai, deret konvergen

Contoh: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Deret diatas jika diperhatikan, akan saling menghabisi, sehingga

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Maka deret konvergen menuju 1.

Tidak semua deret dapat dibuat bentuk S_n –nya. Malah kebanyakan yang nggak bisa. Jadi untuk menguji deret yang tidak bisa didefinisikan S_n –nya, kita akan menggunakan berbagai macam metode lain yang akan dibahas berikutnya, tergantung pada jenis deretnya.

1.3 DERET POSITIF

Deret positif : deret yang semua suku-sukunya positif.

Jenis-jenisnya:

- Deret geometri

  Deret ini sering ditemui di-sma (tapi kali ini deretnya sampai tak hingga), bentuk umumnya adalah

  $$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

  Jika nilai r = 1 maka deret divergen

  Jika nilai |r| > 1 maka deret divergen

  Jika nilai |r| < 1 maka deret konvergen menuju $\frac{a}{1-r}$

- Deret harmonis

  Deret harmonis adalah deret yang memiliki bentuk

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots$$

  Mungkin pada awalnya pembaca akan berasumsi bahwa deret harmonis adalah deret konvergen, karena suku-sukunya makin kecil. Tetapi telah dibuktikan bahwa deret harmonis adalah deret divergen pada Purcell 9th edition halaman 458. Sehingga ketika kita bertemu dengan deret harmonis dapat langsung kita katakan divergen.

- Deret- p

  Bentuk dari deret p adalah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

  Sehingga deret harmonis juga termasuk deret p untuk p=1.
  Jika p ≤ 1, maka deret divergen
  Jika p > 1, maka deret konvergen

Pengujian dari deret positif:

- Pada kasus deret, ternyata **Kedivergenan deret tak hingga** dapat lebih mudah dibuktikan dengan ketentuan
  - Bila deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  - Bila $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ belum tentu deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen
  - Bila $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ maka sudah pasti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen

  Jadi ketika diberi soal kekonvergenan, kita dapat lebih dahulu mencari tahu apakah deret divergen atau tidak dengan menggunakan limit tak hingga. Contoh:

1. apakah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+n+2}$ konvergen?

   Jawab: kita lakukan limit tak hingga

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\ ^1\!/_n + \ ^2\!/_{n^2}} = 2$$

   Karena hasil limitnya bukan nol, maka deret divergen

2. apakah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{5n^3+n}$ konvergen?

   Jawab: kita lakukan limit tak hingga. Karena pangkat penyebut lebih besar maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n}{5n^3 + n} = 0$$

Karena hasil limit tak hingganya nol, kita belum dapat menentukan apakah deret divergen atau konvergen. Untuk itu diperlukan metode pengujian lain

Untuk uji **kekonvergenan**, ada beberapa metode

- **UJI INTEGRAL**

  Digunakan untuk deret positif yang monoton turun (suku-sukunya selalu makin kecil). Definisinya adalah limit tak hingga dari integral deret. Jadi deret diintegralkan dengan batas 1 sampai tak hingga (integral tak wajar). Apabila limitnya menuju suatu nilai, maka deret konvergen

  Contoh: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

  Deret tersebut monoton turun sehingga dapat digunakan uji integral. Supaya lebih enak mengintegralkannya, biasanya deret tersebut diubah sebagai fungsi x (f(x))

  $$a_n = f(n) = \frac{1}{n^3} \; diubah\ ke\ fungsi\ x \to f(x) = \frac{1}{x^3}$$

  Lalu kita integralkan

  $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{-2}}{-2}\right) - \left(\frac{1^{-2}}{-2}\right)$$

  $$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{2b^2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

  Karena limit memiliki nilai, deret konvergen

- **UJI BANDING**

  Merupakan salah satu pengujian yang paling mudah, kita cukup membandingkan deret pada soal dengan deret yang sudah kita ketahui kekonvergenannya. Dengan ketentuan:

  Jika deret A ≥ deret B

  - Bila **deret A konvergen**, maka **deret B konvergen**
  - Bila **deret B divergen**, maka **deret A divergen**

Contoh: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+4}$

Kita uji banding dengan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$ yang merupakan deret konvergen. karena $\frac{2}{n^3+4} < \frac{2}{n^3}$ maka deret tersebut juga konvergen.

*note : deret untuk pengujinya dipilih yang mirip dengan deret yang diuji

- **UJI BANDING LIMIT**

  Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret yang ingin dicari tahu (soal)

  Deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret yang sudah diketahui kekonvergenannya

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

  - Jika $0 < L < \infty$, maka kedua deret sama-sama konvergen atau sama-sama divergen
  - Jika L = 0 dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen
  - Jika L = ∞ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen

Contoh : uji kekonvergenan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 3n}{3n^5 + 4}$$

Kita perlu memilih deret pembanding yang sudah kita ketahui kekonvergenannya. Disini saya memilih deret harmonis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sebagai deret ujinya, Sehingga

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^4 + 3n}{3n^5 + 4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 3n^2}{3n^5 + 4} = \frac{1}{3}$$

Dari ketentuan diatas ($0 < L < \infty$), karena deret harmonis divergen, maka deret tersebut juga divergen

*note : deret untuk mengujinya boleh apapun, asalkan sudah diketahui kekonvergenannya

- **UJI RASIO**

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret yang ingin dicari tahu (soal)

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

➢ Bila P < 1 deret konvergen
➢ Bila P > 1 deret divergen
➢ Bila P = 1 tidak dapat ditarik kesimpulan

Digunakan pada soal-soal yang ada faktorialnya

Contoh :

Uji kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

Jawab:

Apabila $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ Maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!}$

Sehingga

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1).n!} \times \frac{n!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)} \times \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)n^3}$$

$$= 0$$

Dari ketentuan diatas, karena nilai P = 0 (P < 1) maka deret konvergen.

- **UJI AKAR**

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret yang ingin dicari tahu (soal)

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

➢ Bila r < 1 deret konvergen
➢ Bila r > 1 deret divergen
➢ Bila r = 1 tidak dapat ditarik kesimpulan

Digunakan untuk soal yang ada “pangkat n-nya”
Contoh:
Uji kekonvergenan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{13^n}{(2n+1)^n}$$

Jawab: $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{13^n}{(2n+1)^n}} = = \lim_{n\to\infty} \frac{13}{(2n+1)} = 0$

Dari ketentuan diatas, karena nilai r = 0 (r < 1) maka deret konvergen

TIPS MEMILIH METODE UJI

- ❖ Bila deret suku berbentuk rasional (fungsi polinom) maka dapat dipilih uji banding atau uji banding limit.
- ❖ Bila deret suku positif mengandung bentuk pangkat n dan atau faktorial maka dipilih uji rasio atau uji akar
- ❖ Bila uji – uji diatas tidak dapat digunakan dan suku – sukunya monoton turun maka dapat dipilih uji integral

SOAL JAWAB : tentukan kekonvergenan

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(3(\frac{1}{8})^n - 5(\frac{1}{3})^n)$

   Jawab: ada dua deret geometri yang di jumlah. Tingga hitung masing masing pakai rumus deret geometri lalu dijumlah

$$= 3\sum(\frac{1}{8})^n - 5\sum(\frac{1}{3})^n = 3\left(\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}\right) - 3\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{3}{7} - \frac{5}{2} = -\frac{29}{14} \rightarrow konvergen$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{100}}$

   Jawab : uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{100}} \times \frac{n^{100}}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{(n+1)^{99}} = \infty \rightarrow divergen$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n!}$

   Jawab : uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(2(n+1))!} \times \frac{2n!}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(2n+2)!} \times \frac{2n!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3(2n+2)(2n+1)}$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n}{n!}$

   Jawab: uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+(n+1)}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3^n+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + (n+1)}{(n+1)(3^n + n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + n + 1}{3^n + n}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$ hasilnya adalah mendekati nol. Sedangkan $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+n+1}{3^n+n}$ dengan aturan L'Hospital adalah 3. Sehingga

$$P = 0 \times 3 = 0 < 1 \rightarrow konvergen$$

*note: disini harus dibuktikan bahwa P = 0 x 3 . karena jika P = 0 x 0 maka divergen. (karena 0 x 0 adalah bilangan tak tentu)

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$

   Jawab: uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{\ln n}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow konvergen$$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$

   Jawab: uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + 1}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^2+1}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} = \frac{1}{3} < 1 \rightarrow konvergen$$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

   Jawab : uji akar

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1\ \rightarrow konvergen$$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{n^n}{(3n+2)^n}$

Jawab : uji akar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(3n+2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(3n+2)}\right)^n$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{(3n+2)}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(3n+2)}=\frac{1}{3}<1\ \rightarrow konvergen$$

9. Tentukan apakah deret dibawah ini konvergen atau divergen. Jika konvergen, hitunglah jumlahnya

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-5}{k+2}$$

Jawab:

Uji pertama yang dapat dilakukan pada deret tak hingga positif adalah dengan menggunakan limit tak hingga. Jika hasil limit tak hingga tidak sama dengan nol maka deret tersebut adalah divergen (apabila hasil limit tak hingga sama dengan nol belum dapat dipastikan apakah konvergen atau divergen.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k-5}{k+2}=\lim_{k\to\infty}\frac{k/k-5/k}{k/k+2/k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1-5/k}{1+2/k}=1$$

Karena hasil limit tak hingga tidak sama dengan nol maka deret tersebut adalah **divergen**

1.4 DERET GANTI TANDA

Deret ganti tanda (*alternating series)* adalah deret yang sukunya berganti ganti tanda antara positif dan negatif. Contoh:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots\ldots\ldots + a_n$$

notasi dari deret ganti tanda sama aja kayak deret positif tapi ada tambahan “minus satu pangkat n”

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n\;atau\;\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\,a_n$$

Deret ganti tanda dikatakan kovergen apabila:

- Monoton tidak naik, yaitu $0 \le a_{n+1} \le a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Contoh : tentukan kekonvergenan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{n+3}{n(n+1)}$$

Jawab : untuk menentukan kekonvergenan deret ganti tanda, pertama kita membuktikan terlebih dahulu apakah **deret monoton tidak naik**

$$a_n = \frac{n+3}{n(n+1)}\;\;maka\;a_{n+1} = \frac{n+4}{(n+1)(n+2)}$$

Jika memang deret monoton tidak naik, seharusnya hasil bagi antara a_{n+1} oleh a_n tidak lebih dari satu $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ jadi sekarang kita buktikan untuk deret pada soal ini.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \times \frac{n(n+1)}{n+3} = \frac{n^2+4n}{n^2+5n+6}\;\le 1$$

$\frac{n^2+4n}{n^2+5n+6}$ sudah pasti lebih kecil dari satu karena penyebutnya lebih besar.sehingga deret monoton tidak naik.

Setelah itu kita buktikan syarat kedua, yaitu limit tak hingga

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n(n+1)} = \;0$$

Kedua syarat telah terbukti. Deret tersebut adalah deret yang konvergen

Kekonvergenan deret ganti tanda ada dua macam, yaitu:

- Konvergen mutlak
  Dikatakan konvergen mutlak apabila deret mutlaknya konvergen. Deret multak maksudnya deret ganti tanda yang kita punya dibuat menjadi deret positif (diberi kurung mutlak)
- Konvergen bersyarat
  Dikatakan konvergen bersarat apabila deret ganti tandanya konvergen, tetapi deret mutlaknya tidak

Contoh :

1. apakah deret ini konvergen mutlak atau bersyarat

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!}$$

Jawab: bentuk deret mutlaknya adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{2^n}{n!}\right| \; atau \; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

Maka kita tinggal menguji kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ Caranya dengan uji deret positif. Karena deret tersebut memiliki pangkat-n dan juga faktorial, maka uji yang cocok adalah uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

P < 1 maka deret mutlaknya konvergen. Sehingga deret tersebut konvergen mutlak

2. apakah deret ini konvergen mutlak atau bersyarat

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$$

Jawab:

Deret mutlaknya adalah $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ yang merupakan deret harmonis. Dan sudah kita ketahui bahwa deret harmonis adalah divergen. Sehingga deret ini sudah dipastikan bukan konvergen mutlak. Setelah itu kita buktikan apakah deret ganti tandanya konvergen atau tidak

Syarat pertama deret harus monoton tidak naik

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \leq 1$$

Syarat kedua limit tak hingganya harus nol

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Deret ganti tandanya konvergen. Sehingga kesimpulannya deret tersebut merupakan deret konvergen bersyarat.

Konvergen mutlak dapat diuji dengan uji rasio. Misal deret ganti tanda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

- Bila P < 1 deret konvergen mutlak
- Bila P > 1 deret divergen
- Bila P = 1 tidak dapat ditarik kesimpulan

Sedangkan kalau konvergen bersyarat gabisa dibuktikan dengan cara ini.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^4}{2^n}$

   Jawab: uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{2n^4} = \frac{1}{2} \to konvergen\ mutlak$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n+1}$

   Jawab:

   Uji rasio $P = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3(n+1)+1} \times \frac{3n+1}{2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{3n+4} = 1$$

Karena hasil uji rasio adalah satu, maka tidak dapat ditarik kesimpulan. Sehingga harus digunakan cara lain : uji banding limit

- Uji konvergen mutlak

Deret mutlak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n+1}$ diuji banding limit dengan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

(0 < L < ∞), karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen, maka deret tersebut juga divergen

- Uji konvergen bersyarat

  Membuktikan deret monoton tak naik

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3n+4}}{\frac{2}{3n+1}} = \frac{3n+1}{3n+4} < 1 \rightarrow monoton\ tak\ naik$$

  Limit tak hingga

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3n+1} = 0$$

  Kesimpulannya adalah deret tersebut konvergen bersyarat

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$

   Jawab : kalau pakai uji rasio, nanti hasilnya P=1 sehingga tidak dapat ditarik kesimpulan. Jadi pakai uji positif dulu

- Uji banding limit dengan dengan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

  (0 < L < ∞), karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen, maka deret tersebut juga divergen

- Uji konvergen bersyarat

  Membuktikan deret monoton tak naik

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{((n+1)^2+1)n} < 1$$

$$\to monoton\ tak\ naik$$

Limit tak hingga

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

Kesimpulannya adalah deret tersebut konvergen bersyarat

1.5 DERET PANGKAT

Bentuk umum dari deret pangkat adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \cdots + a_n(x-b)^n$$

Mungkin keliatannya mirip dengan deret geometri. Tetapi perbedaannya adalah pada deret pangkat terdapat dua variable, yaitu n dan x. Nilai n seperti biasa, yaitu sampai tak hingga karena deret tak hingga. Sedangkan nilai x akan mempengaruhi apakah deret tersebut konvergen atau tidak. Sehingga dalam mencari kekonvergenan pada deret pangkat, kita akan mencari interval kekonvergenan, yaitu nilai x yang menghasilkan deret tersebut konvergen.

Cara menentukan interval kekonvergenan tersebut adalah dengan menggunakan uji rasio mutlak, dimana pada uji rasio deret disebut konvergen apabila nilai P < 1.

Contoh :

1. Tentukan interval kekonvergenan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)}$$

Jawab :

Langsung kita uji rasio.

$$P = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)} \times \frac{3^n(n+1)}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x(n+1)}{3(n+2)}\right|$$

Sampai disini, kita pisahkan antara variable n dengan lainnya, karena limitnya "n menuju tak hingga"

$$P = \left|\frac{x}{3}\right| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)}{(n+2)}\right|$$

Nilai dari $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)}{(n+2)}\right|$ adalah satu. Sehingga dapat ditulis

$$P = \left|\frac{x}{3}\right|.1 \;\; \to P = \left|\frac{x}{3}\right|$$

dari ketentuan uji rasio, deret akan konvergen apabila P < 1 sehingga interval kekonvergenan dapat dicari sebagai berikut

$$P = \left|\frac{x}{3}\right| < 1$$

$$-3 < x < 3$$

Jadi interval kekonvergenan dari deret tersebut adalah -3 < x < 3

2. Tentukan interval kekonvergenan $\sum_{n=0}^{\infty} n!\; x^n$

   Jawab: uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1)$$

$$P = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) < 1$$

   sehingga nilai x yang memenuhi hanyalah x=0 atau dapat dikatakan deret divergen kecuali pada x=0

3. Tentukan interval kekonvergenan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2}$$

Jawab :
Uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{(x-5)^n}\right|$$

$$= |x-5|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right| = |x-5|.1$$

$$P = |x-5| < 1$$

$$4 < x < 6$$

Karena pada kasus ini nilai x mempengaruhi negatif positif, maka harus di uji pada kedua ujungnya

Pada x = 4 deretnya menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Dimana deret tersebut merupakan deret ganti tanda yang konvergen mutlak.

Pada x = 6 deretnya menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

merupakan deret yang konvergen. Sehingga x=4 dan x=6 termasuk ke daerah interval, sehingga kita menggunakan "lebih kecil sama dengan"

kesimpulan: daerah interval deret tersebut adalah 4 ≤ x ≤ 6

4. Tentukan interval kekonvergenan

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n(2n+1)}$$

Jawab : uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(2(n+1)+1)}\times\frac{2^n(2n+1)}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(2n+1)}{2(2n+3)}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)}{(2n+3)}\right|$$

$$P = \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$-2 < x < 2$$

Karena ini merupakan deret ganti tanda, kita harus menguji kedua ujungnya

Pada x = -2

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(-2)^n}{2^n(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(-1)^n.2^n}{2^n(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}$$

Dengan uji banding, deret $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}$ adalah deret divergen, sehingga pada x = -2 bukan interval konvergen

Pada x = 2

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2)^n}{2^n(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)}$$

Dengan uji deret ganti tanda, deret tersebut adalah konvergen. Sehingga x = 2 termasuk ke interval konvergen

Kesimpulan : interval konvergen dari deret tersebut adalah -2 < x ≤ 2

6. Tentukan interval kekonvergenan $\frac{x}{1\cdot 2} - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} - \frac{x^4}{4\cdot 5} + \frac{x^5}{5\cdot 6} - \cdots$

Jawab: pertama cari dulu notasi deretnya, yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

Lalu tinggal uji rasio mutlak

$$P = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \times \frac{n(n+1)}{x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+2}\right|$$

$$P = |x| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

Uji kedua ujung

Pada x = -1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^1 \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= (-1)^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Deretnya konvergen (bisa dengan uji banding atau uji banding limit)

Pada x = 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}$$

Deretnya konvergen (bisa dengan uji banding atau uji banding limit)

Sehingga kesimpulannya, interval kekonvergenan adalah

-1 ≤ x ≤ 1

1.6 OPERASI DERET PANGKAT

Deret geometri sederhana berikut ini

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$$

dengan rumus deret geometri, jumlah deretnya adalah $\frac{1}{1-x}$

atau dapat ditulis menjadi

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots}$$

$\frac{1}{1-x}$ dapat dinyatakan dalam bentuk deret pangkat sebagai $1 + x + x^2 + x^3 \ldots$

persamaan diatas sangat penting, karena menjadi dasar operasi-operasi deret pangkat yang akan kita bahas selanjutnya.

1. nyatakan $\frac{1}{1+x}$ dalam bentuk deret pangkat

Jawab :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$$

Sehingga semua x pada deret yang ada dipersamaan atas yang di kotakin di subtitusi jadi (-x)

$$\frac{1}{1+x} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

2. nyatakan $\frac{x}{1+x}$ dalam bentuk deret pangkat

   jawab:

   dari soal 1 kita sudah tah bahwa

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Sehingga

$$\frac{x}{1+x} = (x)\frac{1}{1+x} = (x)(1 - x + x^2 - x^3) = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots$$

Dari dua soal diatas, kita dapat menyatakan suatu fungsi pecahan dengan variabel x kedalam deret dengan mengutak-atik persamaan yang paling awal (yang dikotakin). Selanjutnya akan lebih rumit lagi soal-soalnya, tetapi dasarnya tetap persamaan awal.

3. nyatakan $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ dalam bentuk deret pangkat

jawab: dari sifat logaritma

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \qquad \ldots\ldots.(1)$$

Sehingga sekarang kita cari masing-masing deret dari $\ln(1+x)\ dan\ \ln(1-x)$ baru nanti diakhir dijumlah

Ingat kembali definisi ln (logaritma natural)

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx$$

Karena kita udah tau deret dari $\frac{1}{1+x}$ langsung kita subtitusi

$$\ln(1+x) = \int 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Kita sudah dapet deret dari $\ln(1+x)$ dengan cara yang sama kita cari yang satunya

$$\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\int 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Kembali lagi ke sifat logaritma yang (1)

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5$$

4. nyatakan $\frac{1}{(1+x)^2}$ dalam bentuk deret pangkat

   jawab:

   $\frac{1}{(1+x)^2}$ adalah hasil turunan dari $-\frac{1}{1+x}$

Karena kita sudah tau deret dari $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

Maka $-\frac{1}{1+x} = -1 + x - x^2 + x^3 - \cdots$

sehingga turunannya adalah $\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{d\left(-\frac{1}{1+x}\right)}{dx} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots$

1.7 DERET TAYLOR DAN MACLAURIN

Pada sub-bab “1.6 Operasi deret pangkat” sudah dikuasai cara untuk mengubah fungsi menjadi deret yaitu berdasarkan deret geometri. Selanjutnya ada orang bernama Taylor dan Maclaurin yang membuat cara lain untuk mendefinisikan fungsi menjadi deret. Melalui persamaan yang selanjutnya disebut sebagai deret maclaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

1. Nyatakan $f(x) = \sin x$ dalam deret maclaurin

   Jawab:

   Dari persamaan maclaurin, kita perlu tau dulu nilai dari $f(0), f'(0), f''(0)$ dan seterusnya.

$$f(x) = \sin x \rightarrow f(0) = 0$$
$$f'^{(x)} = \cos x \rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''^{(x)} = -\sin x \rightarrow f''(0) = 0$$
$$f'''^{(x)} = -\cos x \rightarrow f'''^{(0)} = -1$$
$$f''''^{(x)} = \sin x \rightarrow f''''(0) = 0$$

Dst....

   Lalu nilainya kita subtitusi

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$sin(x) = 0 + (1)x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Deret maclaurin untuk berbagai fungsi sederhana sudah tertulis dalam buku (purcell). sebagian kecilnya adalah:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \Re$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}, x \in \Re$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, -1 < x \leq 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \leq x \leq 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \Re$$

Sehingga untuk menyatakan fungsi yang lebih rumit ke bentuk deret maclaurin, deret deret dasar diatas boleh langsung digunakan.

2. Nyatakan $f(x) = e^{2x+1}$ kedalam deret maclaurin

   Jawab: dari catatan, kita sudah tau bahwa

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

   Sehingga

$$e^{2x+1} = 1 + (2x+1) + \frac{(2x+1)^2}{2!} + \frac{(2x+1)^3}{3!} + \cdots$$

3. Nyatakan $f(x) = e^x \sin x$ kedalam deret maclaurin
   Jawab:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{50} - \cdots$$

   Pengalaman saya dulu saat ujian, deret maclaurinnya dikasih tau di soal. Jadi tidak perlu dihafalkan. Tetapi ada baiknya bertanya pada dosen masing-masing apakah deret maclaurin perlu dihafalkan untuk ujian

Latihan Soal Infinite Series

1. Soal UAS 2023
   Diberikan barisan berikut
   $$-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{9}{8}, \frac{13}{16}, -\frac{17}{32}, \ldots$$
   a) Tentukanlah formula eksplisit dari barisan tersebut
   b) Jelaskanlah konvergensi dari barisan tersebut! Jika konvergen, tentukanlah konvergen ke nilai berapa

2. Diberikan barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = \frac{cos^{2019}(2n)}{n}$
   a) Tentukan apakah barisan $\{a_n\}$ monoton naik, monoton turun, atau bukan keduanya
   $$a_n = \frac{cos^{2019}(2n)}{n}$$
   b) Tentukan apakah barisan $\{a_n\}$ konvergen atau divergen. Jika divergen tentukanlah $\lim_{n\to\infty} a_n$. Jika divergen, berikanlah alasannya

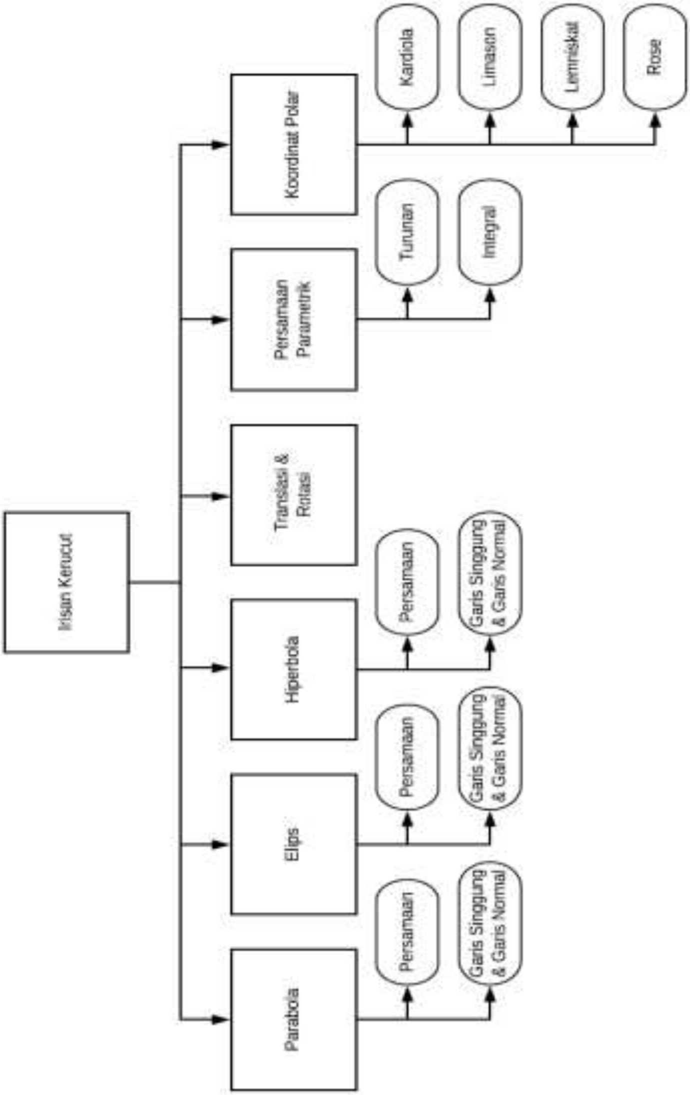
3. Tunjukan bahwa barisan $\{b_n\}$ dimana $b_n = \frac{n^2}{2^n}$ konvergen. Gunakan teorema barisan monoton

4. Dari fungsi $f(x) = \ln(1+x)$ tentukanlah
   a) Deret Mclaurin
   b) Deret Taylor pada $x = 1$

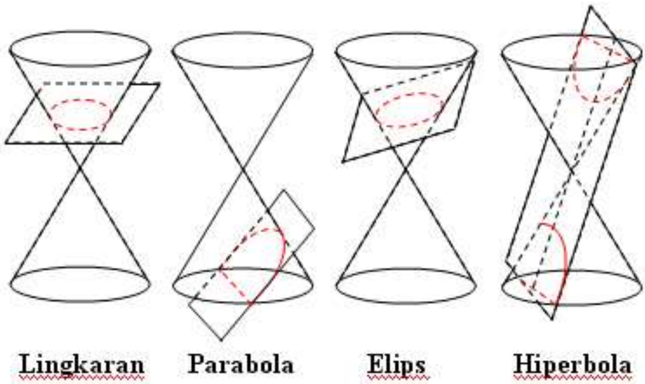
5. Tentukan solusi persamaan differensial $y'' = xy' + y = 0$

6. Selesaikan persamaan differensial $y' - y = 0$

BAB 2 IRISAN KERUCUT DAN KOORDINAT POLAR



Pernah dipelajari di SMA, jadi gak sulit. Walapun ada beberapa hal baru yang ditambah.

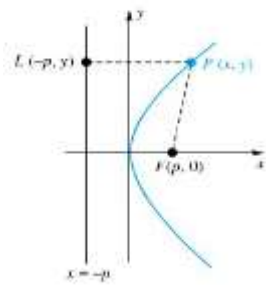


Gambar 1. Irisan kerucut

Irisan kerucut (konik) adalah bidang lengkung kerucut yang dipotong oleh sebuah bidang datar. Ada empat jenis, yaitu: lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola. Tetapi pada bab ini lingkaran tidak dibahas karena sudah pernah di pelajari di kalkulus 1

2.1 PARABOLA

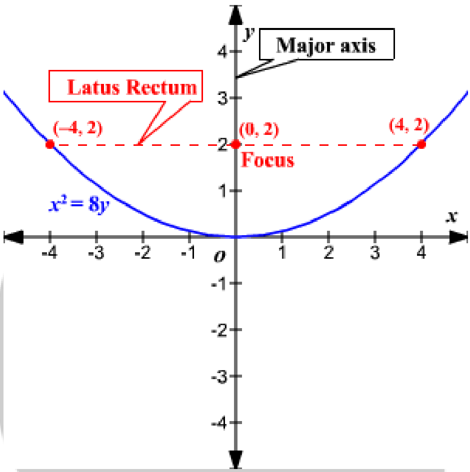
Definisi : Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya ke suatu titik tertentu (titik fokus) sama dengan jaraknya ke garis tertentu (direktris).



Gambar 2. Definisi parabola

Gambar 2 menunjukan definisi dari parabola. Jarak LP sama dengan jarak PF. Dimana titik F adalah titik fokus, dan garis x= -p adalah garis direktrisnya. Jarak direktris ke titik puncak sama dengan jarak fokus ke titik puncak

Latus Rectum adalah garis yang melalui titik fokus, dan tegak lurus dengan sumbu simetri parabola. Dan titik potongnya dengan parabola disebut titik latus rectum



Gambar 3. Latus Rectum

Persamaan Umum parabola.

$y^2 = 4px$	parabola terbuka ke kanan
$y^2 = -4px$	parabola terbuka ke kiri
$x^2 = 4py$	parabola terbuka ke atas
$x^2 = -4py$	parabola terbuka ke bawah

p pada persamaan diatas adalah jarak titik fokus ke titik puncak parabola

Gambar 2 adalah contoh parabola terbuka ke kanan.

Apa bila titik puncaknya bukan di (0,0) maka akan berpengaruh ke persamaannya. Yaitu pada x dan y nya. Sebagai berikut

$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$

Dimana (a, b) adalah titik puncaknya. Contoh:

Parabola terbuka ke kanan tetapi titik puncaknya di (4,-1). Persamaannya:

$$\left(y-(-1)\right)^2 = 4p(x-1) \rightarrow (y+1)^2 = 4p(x-1)$$

RUMUS	**y^2=4px**	**y^2=-4px**	**x^2=4py**	**x^2=-4py**
Koordinat fokus	(p,0)	(-p,0)	(0,p)	(0,-p)
Garis direktris	x = -p	x = p	y = -p	y = p
Sumbu simetri	y = 0	y = 0	x = 0	x = 0
Titik Latus Rectum	(p,2p) (p,-2p)	(-p,2p) (-p,-2p)	(2p,p) (-2p,p)	(2p,-p) (-2p,-p)

1. Carilah fokus dan direktris parabola dengan persamaan y^2 = 10x

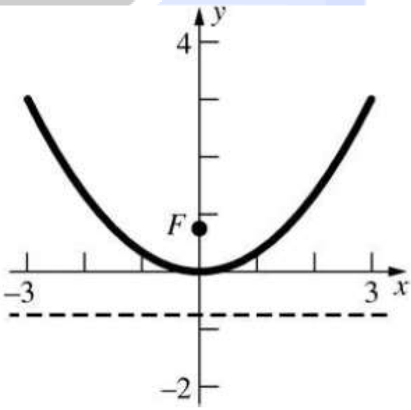
   Jawab :

   y^2 = 10x ⇔ y^2 = 4px

sehingga dapat kita cari nilai p = 2.5

Jadi fokus berada di (2.5 , 0) dan direktris adalah garis x = -2.5

2. Gambarkan $6y - 2x^2 = 0$
Jawab:
Pertama kita cari tau dulu titik puncak, fokus, sama direktrisnya. X di persamaan kita pindah ruas
$$6y - 2x^2 = 0 \; menjadi \; 6y = 2x^2 \leftrightarrow 2x^2 = 6y$$
Lalu kedua ruas kita bagi 2 supaya $2x^2$ menjadi x^2
$$x^2 = 3y \leftrightarrow x^2 = 4py$$
Kita dapat nilai p = 3/4, kita juga dapat titik puncak di (0,0) karena persamaannya sederhana. parabola terbuka keatas, fokusnya adalah (0, 3/4) dan direktrisnya y = - 3/4 lalu tinggal kita gambar.



3. Carilah persamaan parabola yang titik puncaknya di origin, sumbu simetrinya di sumbu x dan melalui titik (3,-1)
Jawab:
Karena sumbu simetrinya adalah sumbu x, dan melalui titik (3,-1), dimana absisnya positif. Maka dapat disimpulkan bahwa parabola terbuka ke kanan.
Persamaan umumnya $y^2 = 4px$ jika kita anggap $4p = c$ maka
$$y^2 = cx$$
Lalu kita subtitusi nilai (3,-1)
$$(-1)^2 = c(3)$$

$$c = \frac{1}{3}$$

Kita sudah dapat nilai c-nya (which is 4p) sehingga kita dapet persamaannya $y^2 = \frac{1}{3}x$

GARIS SINGGUNG PARABOLA

Jika kita memiliki suatu persamaan parabola dan suatu persamaan garis, kita dapat mencari tahu apakah garis tersebut bersinggungan dengan parabola. Dengan ketentuan diskriminan, yaitu:

- D > 0 garis memotong parabola di dua titik berbeda
- D = 0 garis menyinggung para bola di satu titik
- D < 0 garis tidak memotong/menyinggung parabola

GARIS NORMAL adalah garis yang tegak lurus dengan garis singgung, pada titik singgung

Parabola	Persamaan Garis Singgung	Persamaan Garis Normal
$y^2 = 4px$ **$y^2 = -4px$** **$x^2 = 4py$** **$x^2 = -4py$**	**$yy_1 = 2p(x+x_1)$** **$yy_1 = -2p(x+x_1)$** **$xx_1 = 2p(y+y_1)$** **$xx_1 = -2p(y+y_1)$**	**Ditentukan dari persamaan garis singgung** **$y - y_1 = m(x-x_1)$** **(m = kebalikan negatif m pada persamaan garis singgung)**

1. Cari persamaan garis singgung dan garis normal parabola $y^2 = 16x$ pada titik (1, -4)

   Jawab:

   Pertama kita perlu mencari gradien garis singgungnya. Dengan cara mencari y' (turunan)

$$y^2 = 16x$$

$$2y\,y' = 16$$
$$y' = \frac{16}{2y}$$

Lalu kita subtitusi (1, -4) menjadi

$$y' = \frac{16}{2(-4)} = -2$$

Kita sudah dapat gradien garis, dan titik yang dilalui garis. Sehingga untuk mencari persamaan garis tinggal pake rumus jaman smp/sma. yaitu

$$y - b = m(x - a)$$

Persamaan garis singgung

$$y - (-4) = -2(x - 1)$$
$$y = -2x - 2$$

Untuk garis normal, karena tegak lurus dengan garis singgung, hasil kali gradien normal dan singgung adalah minus satu. Sehingga gradien garis normalnya adalah ½

Persamaan garis normal

$$y - (-4) = \frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$$

CARA LAIN bisa menggunakan rumus yang ada di tabel diatas soal ini.

Persamaan parabola yang kita punya $y^2 = 16x$ jika dibuat ke bentuk $y^2 = 4px$ maka nilai p = 4. Lalu kita gunakan rumus untuk garis singgungnya yaitu $y\,y_1 = 2p(x + x_1)$ dengan (x_1, y_1) adalah titik singgungnya (1. -4)

Persamaan garis singgungnya

$$y\,(-4) = 2(4)(x + 1)$$
$$y = -2x - 2$$

2. Cari persamaan garis singgung dan garis normal parabola $x^2 = -10y$ pada titik $(2\sqrt{5}, -2)$

Jawab:

Kita cari gradiennya dengan mencari y’ pada $(2\sqrt{5}, -2)$

$$x^2 = -10y$$
$$2x = -10y'$$
$$y' = \frac{2x}{-10} = \frac{2(2\sqrt{5})}{-10} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Persamaan garis singgung

$$y - (-2) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(x - 2\sqrt{5}\right)$$
$$y = -\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2$$

Gardien garis normal = $\frac{\sqrt{5}}{2}$ sehingga persamaannya adalah

$$y - (-2) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(x - 2\sqrt{5}\right)$$
$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}\,x - 7$$

3. Tentukan persamaan garis singgung parabola $2y^2 + 36x = 0$ yang sejajar dengan garis $4x - 3y + 5 = 0$! Dan cari persamaan garis normalnya!

Jawab:

Karena garis singgungnya sejajar dengan $4x - 4y + 5 = 0$ artinya gradiennya sama. Yaitu $m = -\frac{4}{(-4)} = 1$

Lalu dari persamaan parabola, kita cari titik yang gradiennya 1

$$2y^2 + 36x = 0$$
$$2y^2 = -36\,x$$
$$4y\,y' = -36$$
$$y' = -\frac{36}{4y} \leftrightarrow = -\frac{36}{4y}$$
$$y = -9$$

Karena baru dapet titik ordinatnya, kita cari absisnya dengan subtitusi ke persamaan parabolanya

$$2y^2 + 36x = 0$$
$$2(-9)^2 + 36x = 0$$
$$x = -\frac{9}{2}$$

Jadi titik singgungnya adalah $\left(-\frac{9}{2}, -9\right)$ dan gradiennya adalah 1. Jadi persamaan garis singgungnnya adalah

$$y-(-9)=1\left(x-\left(-\frac{9}{2}\right)\right)$$

$$y=x-\frac{9}{2}$$

Garis normalnya memiliki gradien -1 sehingga persamaan garis singgungnya

$$y-(-9)=(-1)\left(x-\left(-\frac{9}{2}\right)\right)$$

$$y=\ -x-\frac{27}{2}$$

4. Tentukan persamaan garis singgung parabola $y^2=-18x$ yang sejajar dengan garis $3x-2y+4=0$!
   Jawab:
   Gradien = 3/2

$$y^2=-18x$$

$$2y\,y'=-18$$

$$y'=-\frac{18}{2y}$$

$$\frac{3}{2}=\ -\frac{18}{2y}\ \rightarrow\ y=\ -6$$

   Subtitusi nilai y = -6

$$(-6)^2=-18x$$

$$x=\ -2$$

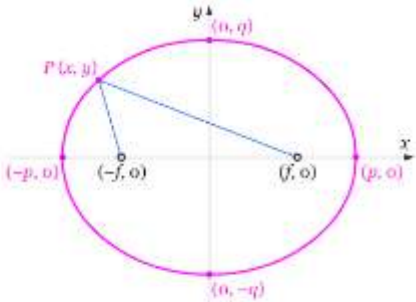
   Garis singgung di titik (-2,-6) dengan gradien 3/2

$$y-(-6)=\frac{3}{2}\left(x-(-2)\right)$$

$$y=\frac{3}{2}x-3$$

2.2 ELIPS DAN HIPERBOLA

ELIPS adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu (titik fokus) mempunyai nilai yang tetap.

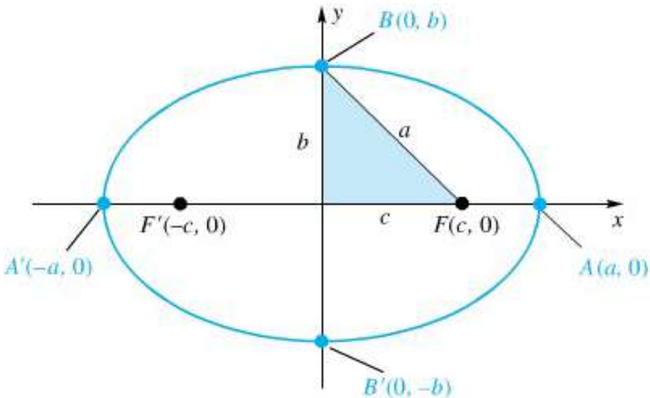


Gambar 4. Definisi elips

PERSAMAAN ELIPS secara umum memiliki bentuk baku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dimana nilai (x,y) menunjukan titik pusat elips. Nilai a dan b menunjukan hubungan seperti yang ditunjukan oleh gambar 5



Gambar 5. Hubungan a dan b pada persamaan elips

a adalah titik puncak mayor dan b adalah titik puncak minor. Sedangkan jarak pusat ke fokus disebut dengan c, yang nilainya bisa dicari dengan pythagoras a dan b

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elips horisontal)

   atau

   $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

2. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (elips vertikal)

   $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$

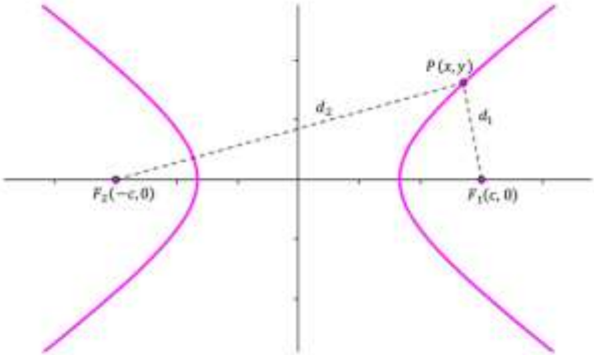
   berlaku

   $a^2 > b^2$ dan $a^2 = b^2 + c^2$

PERSAMAAN GARIS SINGGUNG DAN NORMAL ELIPS

Elips	Persamaan Garis Singgung	Persamaan Garis Normal
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ $\frac{xx_1}{b^2} + \frac{yy_1}{a^2} = 1$	Sama dengan perhitungan PGN pada parabola

HIPERBOLA adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu (titik fokus) mempunyai nilai yang tetap.

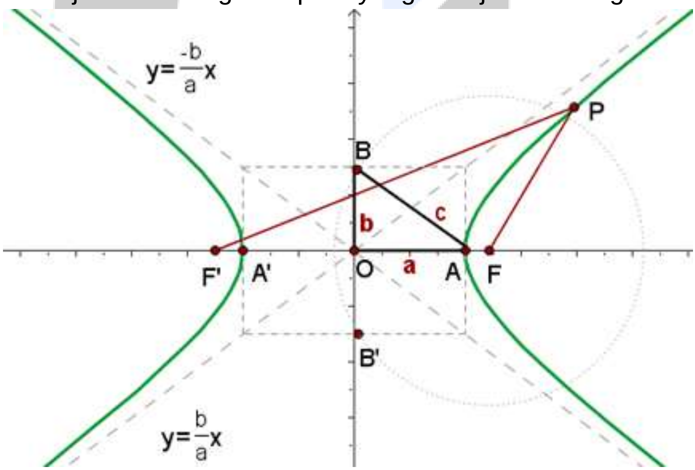


Gambar 6. Definisi hiperbola

PERSAMAAN HIPERBOLA secara umum memiliki bentuk

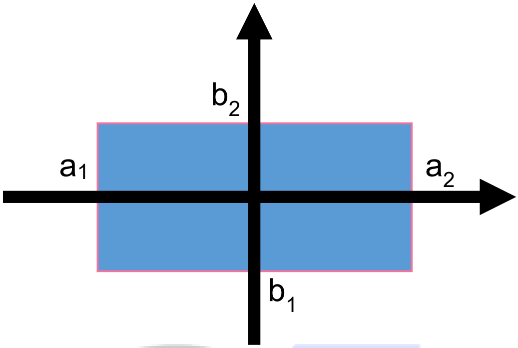
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dimana nilai (x,y) menunjukan titik pusat hiperbola. Nilai a dan b menunjukan hubungan seperti yang ditunjukan oleh gambar 7



Gambar 7. Hubungan nilai a dan b pada persamaan elips.

Dari gambar 7 dapat kita amati bahwa grafik dari hiperbola memiliki asimtot. Dan dari kedua asimtot, dibuat sebuah bayangan garis putus-putus persegi panjang yang menjadi dasar nilai a dan nilai b.



Gambar 8. Siku empat dasar dari hiperbola

1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hiperbola horisontal)

   atau

   $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

2. $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (hiperbola vertikal)

   $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$

   berlaku

   $c^2 = a^2 + b^2$

PERSAMAAN GARIS SINGGUNG DAN GARIS NORMAL

Hiperbola	Persamaan Garis Singgung	Persamaan Garis Normal
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$	Sama dengan perhitungan PGN pada parabola
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$	

1. Gambarkan $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

   Jawab:

   Pertama identifikasi dulu ini persamaan apa

   Persamaan diatas adalah persamaan elips, karena persamaannya ditambah (kalau hiperbola kan dikurang). Dan sumbu mayornya ada di sumbu x karena 16 > 4 sehingga persamaan tersebut merupakan elips horizontal.

   Titik pusatnya di (0,0)

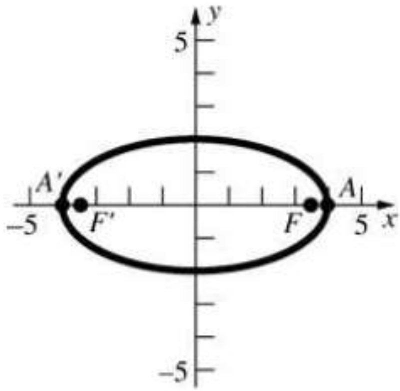
   Puncak mayornya adalah $\sqrt{16} = 4$

   Puncak minornya adalah $\sqrt{4} = 2$

   Titik fokus dapat dicari dengan pythagoras

   $$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

   Fokusnya adalah $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$



2. Gambarkan $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

   Jawab:

   Pertama identifikasi dulu ini persamaan apa

   Persamaan diatas adalah hiperbola, karena persamaannya dikurang. Lalu hiperbolanya horizontal karena x dikurang y (kalau vertikal kebalikannya)

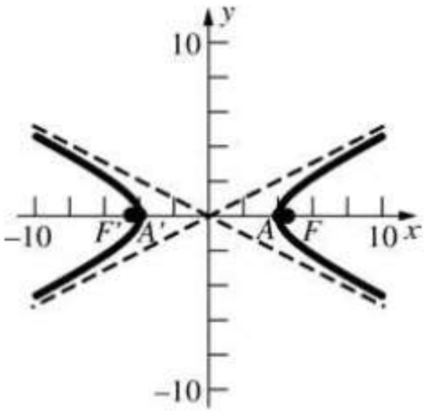
   Lalu nilai a = $\sqrt{16} = 4$ dan $b = \sqrt{4} = 2$

Puncak hiperbola ada di $(\pm 4{,}0)$ lalu fokusnya dicari dengan pythagoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

Sehingga titik fokusnya $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$

Persamaan asimtotnya $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{1}{2}x$



3. Gambarkan $\frac{-x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Jawab:
Pertama identifikasi dulu ini persamaan apa
Persamaan diatas dapat di *re-arrange* menjadi

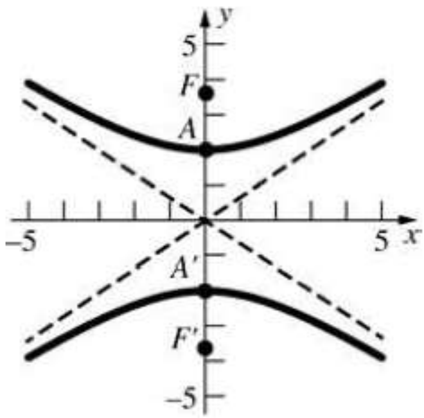
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Yang merupakan persamaan hiperbola vertikal

$$a = \sqrt{4} = 2$$
$$b = \sqrt{9} = 3$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Titik puncak di $(0, \pm 2)$ dan titik fokus di $\left(0, \pm\sqrt{13}\right)$

Asimtotnya $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{2}{3}x$



4. Gambarkan $16x^2 + 4y^2 = 32$

   Jawab:

   Pertama kita bagi kedua ruas dengan 32 (agar ruas kanan menjadi 1)

$$\frac{16x^2}{32} + \frac{4y^2}{32} = \frac{32}{32} \leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$$

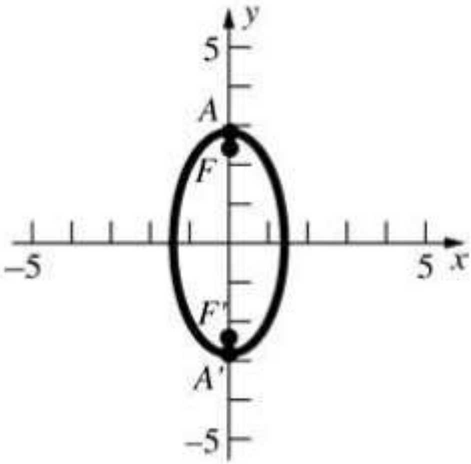
   Persamaan tersebut adalah elips vertikal karena yang lebih besar yang dibawahnya y^2

$$a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$b = \sqrt{2}$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6}$$

   Titik puncak mayor $(0, \pm 2\sqrt{2})$

   Titik puncak minor $(\pm\sqrt{2}, 0)$

   Titik fokus $(0, \pm\sqrt{6})$



5. Buatlah persamaan dari elips yang pusatnya di origin. Puncaknya di (6,0) dan fokusnya di (-3,0)
   Jawab:
   Merupakan elips horizontal.
   Nilai a = 6 didapat dari titik puncaknya
   dan nilai c = 3 didapat dari titik fokusnya
   kita cari dulu nilai b dengan pythagoras

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

   Persamaan untuk parabola horizontal adalah adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   input nilai a dan b nya menjadi

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

6. Buatlah persamaan hiperbola yang puncaknya di (5,0) dan fokusnya di (4,0)
   Jawab: hiperbola horizontal
   a = 5 didapat dari titik puncak
   c = 4 didapat dari titik fokus
   cari nilai b = $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ lalu subtitusi ke persamaan umumnya
   $$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$
7. Buat persamaan dari elips yang puncaknya di (5,0) dan melalui titik (2,3)
   Jawab: elips horizontal
   Karena puncaknya di (5,0) maka a = 5
   Lalu kita bisa mencari nilai b dengan mensubtitusi (x,y) dari titik (2,3) ke persamaan baku elips
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \leftrightarrow \frac{2^2}{5^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$$
   $$b^2 = \frac{225}{21}$$
   Karena sudah dapat nilai b^2 tingga di input ke persamaan
   $$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{225}{21}} = 1$$

2.3 TRANSLASI DAN ROTASI SUMBU

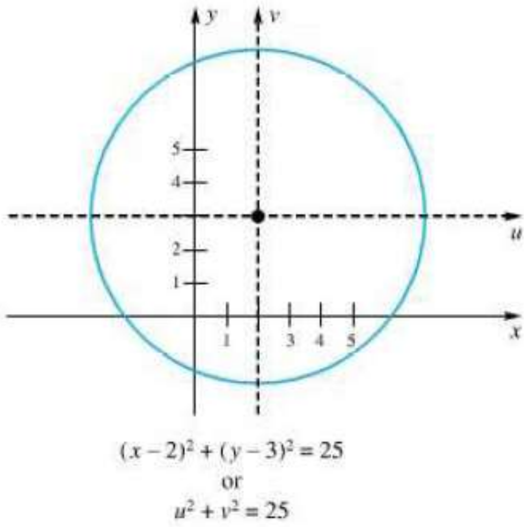
Sekarang kita masuk ke bahasan yang belum pernah dipelajari di SMA. Kita telah membahas persamaan dari parabola, elips dan juga hiperbola. Selanjutnya kita akan membahas persamaan parabola yang puncaknya **bukan** di origin. Dan juga persamaan elips dan hiperbola yang pusatnya **bukan** diorigin.

Misalnya kita memiliki suatu elips yang pusatnya bukan di origin. Origin yang dimaksud disini adalah titik (0,0) dari koordinat (x,y). Kita akan memiliki persamaan dari elips tersebut.

Persamaan elips tersebut dapat kita sederhanakan dengan cara membuat sumbu khayal baru sehingga pusat elips berada di (0,0) dari sumbu baru ini yang biasanya disebut (u,v). Perubahan sumbu (x,y) ke sumbu (u,v) ini disebut dengan **translasi.**

Contoh: persamaan lingkarang $(x-2)^2+(y-3)^2=25$

Memiliki grafik seperti berikut



Gambar 9. Lingkaran

Jika kita membuat sumbu u,v seperti pada gambar diatas, maka persamaan lingkarannya menjadi lebih sederhana, yaitu

$$u^2 + v^2 = 25$$

Dibuatnya sumbu baru inilah yang disebut translasi. Dimana pada contoh ini $u = x - 2$ dan $v = y - 3$

1. Buatlah translasi untuk menyederhadanakan $9x^2 + 4y^2 + 72x - 16y + 124 = 0$
   Jawab:
   Pertama kita kumpulin semua yang ada x-nya dan semua yang ada y nya di ruas kiri. Sisanya pindahin keruas kanan. menjadi
   $$9x^2 + 72x + 4y^2 - 16y = -124$$
   Lalu kita sempurnakan kuadrat masing masing x dan y
   $$9x^2 + 72x + 144 + 4y^2 - 16y + 16 = -124 + 144 + 16$$
   $$(9x^2 + 72x + 144) + (4y^2 - 16y + 16) = 36$$
   $$9(x^2 + 8x + 16) + 4(y^2 - 4y + 4) = 36$$
   $$9(x + 4)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$$
   Kita translasikan dengan ketentuan
   $$u = x + 4$$
   $$v = y - 2$$
   $$9u^2 + 4v^2 = 36$$
   $$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} = 36$$
   Persamaan tersebut merupakan persamaan elips vertikal

2. $16x^2 - 9y^2 + 192x + 90y - 495 = 0$
   Jawab:
   $$16x^2 + 192x - 9y^2 + 90y = 495$$
   $$(16x^2 + 192x + 576) - (9y^2 - 90y + 225) = 495 + 576 - 225$$
   $$16(x^2 + 12x + 36) - 9(y^2 - 10y + 25) = 846$$
   $$16(x + 6)^2 - 9(y - 5)^2 = 846$$
   $$\frac{16(x + 6)^2}{846} - \frac{9(y - 5)^2}{846} = 1$$
   $$\frac{16(x + 6)^2}{846} - \frac{9(y - 5)^2}{846} = 1$$

Jika $u = x + 6$ dan $v = y - 5$

$$\frac{16u^2}{846} - \frac{9v^2}{846} = 1$$

Merupakan persamaan hiperbola horizontal

3. $y^2 - 5x - 4y - 6 = 0$

Jawab:

$$y^2 - 4y = 5x + 6$$
$$y^2 - 4y + 2 = 5x + 6 + 4$$
$$y^2 - 4y + 2 = 5x + 10$$
$$(y - 2)^2 = 5(x + 2)$$

Jika $u = x + 2$ dan $v = y - 2$

$$v^2 = 5u$$

Merupakan persamaan parabola terbuka ke kanan

ROTASI juga digunakan untuk menyederhanakan suatu persamaan. Persamaan yang dapat disederhanakan adalah cross-product. Contohnya:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 + 8 = 0$$

Persamaan diatas merupakan cross-product. Kita tidak bisa menyederhanakannya dengan translasi karena ada “10xy” tetapi bisa disederhanakan dengan rotasi. Dengan ketentuan seperti berikut.

Penyederhanaan suatu persamaan cross-product

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Setelah rotasi, Subtitusi

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta$$
$$y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

Dengan $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$

Biar gak bingung kita langsung coba soal aja.

1. Lakukan penyederhanaan untuk persamaan berikut setelah rotasi

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 + 8 = 0$$

Jawab: pertama kita cari nilai θ

Dari persamaan kita dapat

$$A = 3\,; B = 10\,; C = 3$$

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{3 - 3}{10} = 0$$

Cotangen yang nilainya 0 adalah $90°$

$$2\theta = 90° \rightarrow \theta = 45°$$

Kita sudah dapat θ lalu kita gunakan untuk subtitusi

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta$$
$$x = u\cos(45) - v\sin(45)$$
$$x = \frac{u}{2}\sqrt{2} - \frac{v}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(u - v)$$

$$y = u\sin\theta + v\cos\theta$$
$$y = u\sin(45) + v\cos(45)$$
$$y = \frac{u}{2}\sqrt{2} + \frac{v}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(u + v)$$

Kita subtitusikan x dan y diatas ke persamaan awal

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 + 8 = 0$$
$$3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(u - v)\right)^2 + 10\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(u - v)\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(u + v)\right) + 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(u + v)\right)^2 + 8 = 0$$
$$\frac{3}{2}(u - v)^2 + \frac{10}{2}(u^2 - v^2) + \frac{3}{2}(u + v)^2 + 8 = 0$$
$$\frac{3}{2}u^2 - 3uv + \frac{3}{2}v^2 + 5u^2 - 5v^2 + \frac{3}{2}u^2 + 3uv + \frac{3}{2}v^2 + 8 = 0$$
$$8u^2 - 2v^2 = -8$$
$$\frac{v^2}{4} - \frac{u^2}{1} = 1$$

Merupakan hiperbola

2.
$$\frac{3}{2}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 13$$

$$\cot 2\theta = 0, 2\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v)$$

$$\frac{3}{4}(u-v)^2 + \frac{1}{2}(u-v)(u+v) + \frac{3}{4}(u+v)^2 + (u-v) + (u+v) = 13$$

$$2u^2 + v^2 + 2u = 13$$

$$2\left(u^2 + u + \frac{1}{4}\right) + v^2 = 13 + \frac{1}{2}$$

$$2\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{27}{2}$$

$$\frac{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{27}{4}} + \frac{v^2}{\frac{27}{2}} = 1$$

Persamaan merupakan elips

2.4 PERSAMAAN PARAMETRIK

Persamaan yang kita bahas sebelumnya disebut dengan persamaan kartesian, dimana ditunjukkan hubungan antara x dan y. Sekarang kita akan membahas persamaan parametrik yang bentuknya x dan y masing masing memiliki persamaan sendiri terhadap t. Contohnya

$$x = t^2 + 2t \qquad y = t - 3 \qquad -2 \leq t \leq 3$$

Elips dan hiperbola merupakan kurva di bidang yang bukan merupakan grafik dari suatu fungsi. Jadi elips dan hiperbola tidak dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan y = f(x).

Namun dengan menggunakan parameter t, elips dan hiperbola dapat dinyatakan dalam persamaan parametrik.

x = f(t), y = g(t), dengan t $\in I$, untuk suatu interval.

- Pasangan persamaan x=f(t), y =g(t) dengan t $\in I$, disebut parametrisasi.
- Jika I=[a,b], maka P[x(a),y(a)] disebut titik awal kurva, sementara titik Q[x(b),y(b)] disebut titik akhir kurva
- Jika titik awal sama dengan titik akhir, maka kurva dikatakan tertutup
- Jika setiap titik pada kurva hanya dilalui satu kali, maka kurva tersebut dikatakan kurva sederhana

ELIPS

Cartesian: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$

parametrik: $x = a\cos t\,;\;\; y = a\sin t\,; t \in [0{,}2\pi]$

HIPERBOLA

Cartesian: $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$

parametrik: $x = a\cosh t\,;\;\; y = a\sinh t\,; t \in R$

1. Identifikasi bentuk grafis dari persamaan berikut

$$x = t^2 + 2t \qquad y = t - 3 \qquad -2 \le t \le 3$$

Jawab:
Langkah pertama adalah kita membuat definisi t dari salah satu persamaan antara x atau y. Tapi pada soal ini yang mudah adalah dari y

$$y = t - 3 \;\rightarrow t = y + 3$$

Lalu kita subtitusi $t = y + 3$ ke persamaan parametriknya x

$$x = t^2 + 2t$$

$$x = (y+3)^2 + 2(y+3)$$
$$x = y^2 + 8y + 15$$
$$x + 1 = (y+4)^2$$

Merupakan parabola

2. Ubah ke persamaan kartesian
$$x = t^3 - 4t; y = t^2 - 4;\ -3 \leq t \leq 3$$
Jawab:
Pertama buat definisi dari t^2
$$y = t^2 - 4 \ \rightarrow \ t^2 = y + 4$$
Lalu kuadratkan x
$$x = t^3 - 4t \ \rightarrow \ x^2 = t^6 - 8t^4 + 16t^2$$
Lalu subtitusi nilai $t^2 = y + 4$ ke persamaan x^2
$$x^2 = t^6 - 8t^4 + 16t^2$$
$$x^2 = (y+4)^3 - 8(y+4)^2 + 16(y+4)^1$$
$$x^2 = y^3 + 4y^2$$

3. Identifikasi bentuk grafis dari persamaan berikut
$$x = 5\cos t\,; y = 3\sin t\ \ ; 0 \leq t \leq 2\pi$$
Jawab:
Pertama buat definisi dari $\cos^2$ t dan $\sin^2$ t
$$x = 5\cos t \ \rightarrow \cos t = \frac{x}{5} \rightarrow \ cos^2 t = \frac{x^2}{25}$$
$$y = 3\sin t \rightarrow \sin t = \frac{y}{3} \rightarrow \frac{y^2}{9}$$
Dari identitas trigonometri, $\cos^2$ t + $\sin^2$ t = 1 sehingga
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$
Merupakan persamaan elips

Persamaan parametrik dapat dibuat turunan bentuk $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunalan aturan rantai dimana
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/_{dt}}{dx/_{dt}}$$

1. Buatlah dua turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$dari persamaan parametrik

$$x = 1 - \cos t\,; \qquad y = 1 + \sin t\,; \qquad t \neq n\pi$$

Jawab:
Kita akan pakai aturan rantai. Oleh karena itu kita cari dulu dx/dt dan dy/dt

$\frac{dx}{dt} = \sin t$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{dt} = \cos t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$$

Untuk turunan kedua, aturan rantainya sebagai berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

Sehingga kita cari dulu dy'/dt

$$\frac{dy'}{dt} = -csc^2 t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = -\frac{csc^2 t}{\sin t} = -csc^3 t$$

2. Buatlah dua turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$dari persamaan parametrik

$$x = \sqrt{3}t^2; \qquad y = -\sqrt{3}t^3; \qquad t \neq 0$$

Jawab:
kita cari dulu dx/dt dan dy/dt

$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{3}t$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{dt} = -3\sqrt{3}t^2$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}t^2}{2\sqrt{3}t} = -\frac{3}{2}t$$

$$\frac{dy'}{dt} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{-\frac{3}{2}}{2\sqrt{3}t} = \frac{\sqrt{3}}{4t}$$

Kalau turunan bisa, maka integral juga bisa. Berikut cara mengintegralkan persamaan parametrik

3. Hitunglah (a). $\int_1^3 y\,dx$ dan (b). $\int_1^3 xy^2\,dx$ dgn $x = 2t - 1$ dan $y = t^2 + 2$

   Jawab:

   kita integralin kayak biasa aja,tapi bedanya harus kita ubah dulu ke fungsi t

   (a) $\int_1^3 y\,dx$

   Diketahui $x = 2t - 1$ maka $dx = 2dt$

   Lalu untuk batas atas batas bawah dan atas integralnya juga diganti

   *batas bawah $x = 1$
   $x = 2t - 1$ maka $t = 1$
   *batas atas $x = 3$
   $x = 2t - 1$ maka $t = 2$

   Kita subtitusikan $y = t^2 + 2$ dan $dx = 2dt$ maka integralnya menjadi

$$\int_1^2 (t^2 + 2)\,2dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t\right]_1^2 = \frac{26}{3}$$

   (b) $\int_1^3 xy^2\,dx$

   Kita subtitusi $x = 2t - 1$; $y = t^2 + 2$ dan $dx = 2dt$

$$\int_1^2 (2t-1)(t^2+2)^2\ 2dt$$

$$= 2\int_1^2 2t^5 - t^4 + 8t^3 - 4t^2 + 8t - 4\ \ dt = 86\frac{14}{15}$$

4. Hitunglah luas kurva dan panjang busur kurva dari persamaan berikut

$$x = 2t - 1\,; \qquad y = 3t - 1; \qquad 0 \le t \le 3$$

   Jawab:

Untuk menghitung luas kurva, kita pakai integral

$$A = \int y\ dx$$

Kita cari dulu dx-nya

$$x = 2t - 1\ \rightarrow dx = 2dt$$

Lalu kita subtitusi $y = 3t - 1$ dan $dx = 2dt$ ke integral. Dan karena disoal batasnya sudah dalam bentuk t, maka tinggal kita input ke integral

$$A = \int_0^3 (3t - 1)\ 2dt = [3t^2 - 2t]_0^3 = 21$$

Untuk menghitung panjang busur kurva, kita pakai rumus

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

Langkah-langkahnya sebagai berikut

Pertama cari dulu dx/dt dan dy/dt

$$x = 2t - 1\ \rightarrow dx = 2dt \rightarrow \frac{dx}{dt} = 2$$

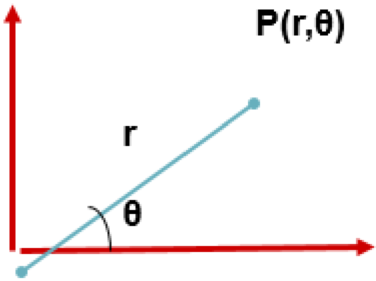
$$y = 3t - 1 \rightarrow dy = 3dt \rightarrow \frac{dy}{dt} = 3$$

Lalu input ke persamaan integral untuk mencari panjang busur

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt = \int_0^3 \sqrt{2^2 + 3^2}\, dt$$

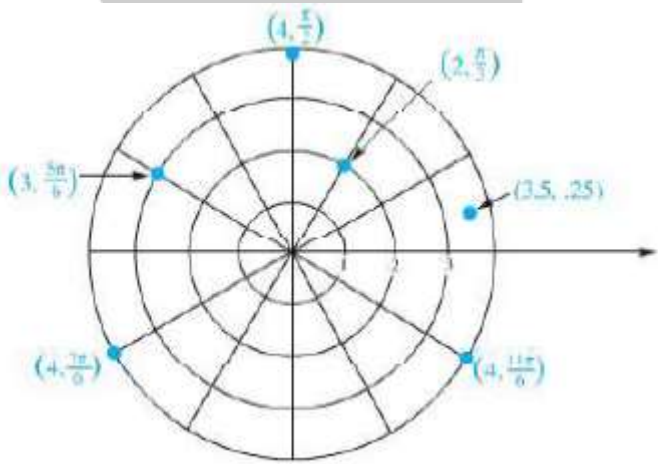
$$= \int_0^3 \sqrt{13}\, dt = \left[\sqrt{13}\ t\right]_0^3 = 3\sqrt{13}$$

2.5 SISTEM KOORDINAT POLAR



Sistem koordinat polar terdiri dari sumbu polar (berupa setengah garis yg berimpit dengan sumbu x positif pada bidang R2) dan titik asal O. Setiap titik P pada bidang Kemudian dinyatakan dengan jaraknya dari O, sebutlah r, Dan besar sudut θ yang dibentuk oleh ruas garis OP dan sumbu polar (dihitung berlawanan arah dengan arah jarum jam).

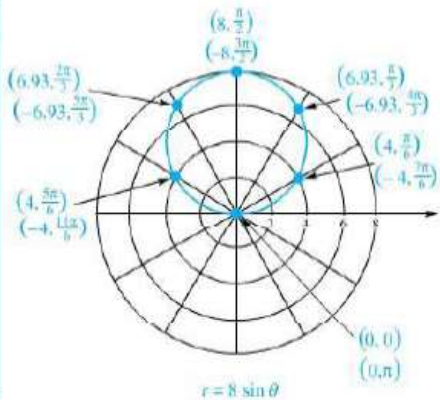
Jadi grafik dari suatu koordinat polar akan bergantung pada derajat sudutnya. Dimana sumbu x dinyatakan sebagai nol derajat, lalu secara berlawanan arah jarum jam, sumbu y sebagai 90 derajat, sumbu x negatif sebagi 180 derajat dan seterusnya



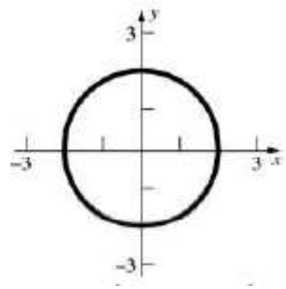
1. Gambarkan grafik dari $r = 8\sin\theta$!
   Persamaa diatas merupakan contoh persamaan polar. Dimana ada $\sin\theta$ yang menunjukkan hubungannya dengan sudut sudut. Dan r adalah jarak dari titik pusat ke grafik.
   Untuk membuat grafik dari koordinat polar, kita perlu memplot terlebih dahulu beberapa sudut penting.
   - Pada $\theta = 0 \to r = 8\sin 0 = 0$
   - Pada $\theta = 90 \to r = 8\sin 0 = 8$
   - Pada $\theta = 180 \to r = 8\sin 0 = 0$
   - Pada $\theta = 270 \to r = 8\sin 0 = -8$ dst.

   Lalu hasilnya di plot

θ	r
0	0
$\pi/6$	4
$\pi/3$	6.93
$\pi/2$	8
$2\pi/3$	6.93
$5\pi/6$	4
π	0
$7\pi/6$	−4
$4\pi/3$	−6.93
$3\pi/2$	−8
$5\pi/3$	−6.93
$11\pi/6$	−4



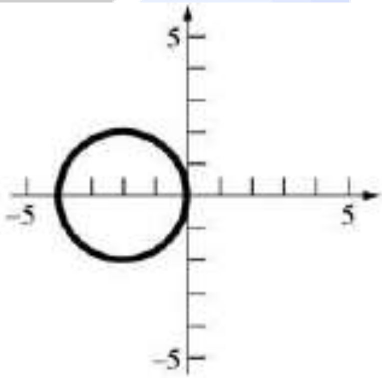
2. Gambarkan grafik $r = 2$
   Jawab: persamaan polar diatas, tidak ada θ-nya (soal sebelumnya kan ada $\sin\theta$) jadi jika kita plot disemua sudut nilainya sama, yaitu 2. Sehingga akan membentuk lingkaran dengan jari jari 2



3. Grafik dari $r = -4\cos\theta$

   Jawab:

   Karena ada $\cos\theta$ maka grafiknya akan nol pada sudut yang $\cos\theta$-nya adalah nol, yaitu pada 90 dan 270 derajat. Sedangkan pada 0 derajat dan 180 derajat nilainya penuh. Jika di plot akan membentuk lingkaran



Hubungan antara koordinat polar dan kartesian adalah sebagai berikut

- Polar ke kartesian

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

- Kartesian ke polar

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

4. Buatlah koordinat kartesian dari $(7, \frac{\pi}{2})$

   Jawab:

   Dari koordinat polar diatas, artinya $r = 7$ dan $\theta = \frac{\pi}{2}$

   Dari ketentuan koordinat polar ke kartesian,

   $$x = r\cos\theta = 7\cos\pi/2 = 7(0) = 0$$
   $$y = r\sin\theta = 7\sin\pi/2 = 7(1) = 7$$

5. Buat koordinasi polar dari $(1, \sqrt{3})$

   Jawab:

   Dari koordinat kartesian diatas, $x = 1$ dan $y = \sqrt{3}$

   $$r^2 = x^2 + y^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$$
   $$r = \sqrt{4} = 2$$

   Lalu kita cari θ

   $$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

   Sehingga $\theta = 60°$ atau $\frac{\pi}{3}$

   Jadi jawabannya adalah $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

6. Ubah persamaan $r = 4\cos\theta$ ke persamaan kartesian

   Jawab:

   Langkah pertama kita kalikan kedua ruas dengan r, menjadi

   $$r^2 = 4r\cos\theta$$

   Lalu kita subtitusi ketentuan berikut

   $$r^2 = x^2 + y^2$$
   $$x = r\cos\theta$$

   Sehingga persamaan menjadi

   $$x^2 + y^2 = 4x$$

   Setelah itu kita pindah ruas 4x-nya dan dibuat jadi kuadrat sempurna

   $$x^2 - 4x + y^2 = 0$$
   $$(x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4$$
   $$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

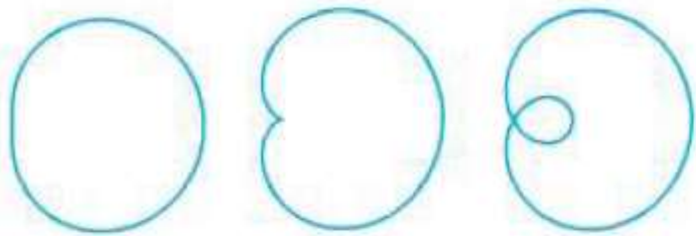
Adalah persamaan lingkaran berjari jari 2 dan titik pusat di (2,0)
Ada beberapa bentuk umum yang dapat dibuat dengan persamaan koordinat polar.

- **Kardioda dan Limason**

Persamaannya secara umum adalah

$$r = a \pm b \cos\theta \qquad\qquad r = a \pm b \sin\theta$$

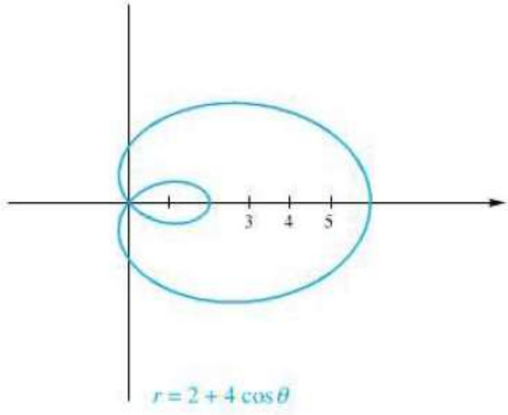
dengan nilai a dan b positif. Jika, nilai $a = b$, maka persamaan merupakan **kardioda**, dan jika $a \neq b$ maka persamaan merupakan limason. Nilai a dan b akan mempengaruhi bentuknya



Contoh limason : $r = 2 + 4\cos\theta$

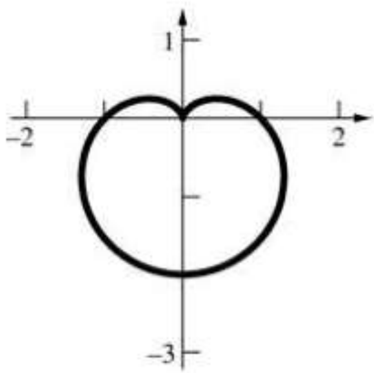
Jika diplot, r akan maksimal pada derajat nol, yaitu r = 6
Dan pada derajat 180, r = -2. Karena derajat 180 arahnya kekiri dari titik origin, maka negatifnya arahnya kekanan, sehingga pada derajat 180 grafiknya akan membentuk oval kecil didalam oval luar.

θ	r
0	6
$\pi/6$	5.5
$\pi/3$	4
$\pi/2$	2
$7\pi/12$	1.0
$2\pi/3$	0
$3\pi/4$	−0.8
$5\pi/6$	−1.5
π	−2



Contoh kardiola: $r = 1 - 1\sin\theta$

Karena nilai $a = b$ maka pada suatu derajat r akan bernilai nol. Pada persamaan ini, r akan nol pada derajat 90, karena nilai sin 90 adalah satu. Dan r akan maksimum pada 270 derajat karena sin 270 adalah negatif satu, sehingga negatif ketemu negatif jadi positif. Bentuk dari kardiola menyerupai bentuk hati (love) atau bokong



- **Lemniskat**

  Persamaannya secara umum adalah

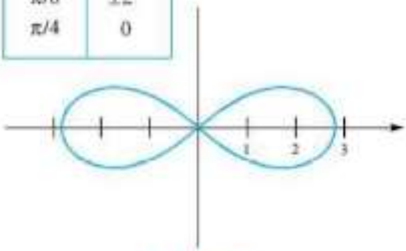
$$r^2 = \pm a\cos 2\theta \qquad\qquad r^2 = \pm a\sin 2\theta$$

  Bentuk dari lemniskat adalah seperti dua daun yang simetris

  Contoh lemniskat : $r^2 = 8\cos 2\theta$

Grafik akan maksimum pada dua sudut, yaitu 0 dan 180 derajat. Karena $\cos 2(0) = \cos 2(180) = 1$.

θ	r
0	±2.8
π/12	±2.6
π/6	±2
π/4	0



$r^2 = 8\cos 2\theta$

- **Rose**

  Sesuai namanya, bentuknya menyerupai bunga.persamaannya adalah seperti berikut

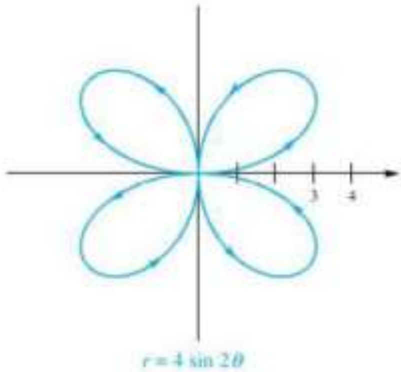
  $$r = a\cos n\theta \qquad\qquad r = a\sin n\theta$$

  Jika n merupakan bilangan **genap**, maka jumlah helainya adalah 2n. Dan jika n adalah bilangan **ganjil**, maka jumlah helainya adalah n

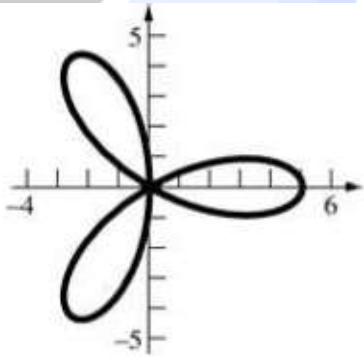
  Contoh: $r = 4\sin 2\theta$

  Dari persamaan tersebut, n=2 (genap) sehingga kita dapat simpulkan bahwa akan ada 4 helai. Karena ada $\sin 2\theta$, maka grafik akan maksimum di sudut 45,135,225, dan 315 derajat. Karena sin dari semua sudut tersebut adalah 1 dan -1 (maksimum).

θ	r	θ	r
0	0	$2\pi/3$	-3.5
$\pi/12$	2	$5\pi/6$	-3.5
$\pi/8$	2.8	π	0
$\pi/6$	3.5	$7\pi/6$	3.5
$\pi/4$	4	$4\pi/3$	3.5
$\pi/3$	3.5	$3\pi/2$	0
$3\pi/8$	2.8	$5\pi/3$	-3.5
$5\pi/12$	2	$11\pi/6$	-3.5
$\pi/2$	0	2π	0



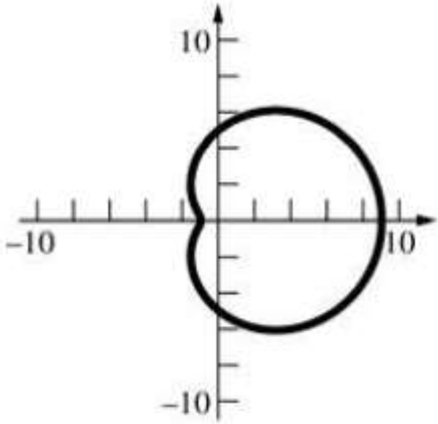
Contoh 2: $r = 5\cos 3\theta$
Karena n=3 maka akan ada 3 helai. Grafik maksimum pada sudut 0,60,dan 120 karena nilai cos nya maksimum antara 1 dan -1.



Grafik grafik dari persamaan polar yang telah kita bahas, **dapat dihitung luasnya** sebagai berikut

$$A = \frac{1}{2}\int_{\propto}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

1. Hitung luas dari $r = 5 + 4\cos\theta$
   Jawab:
   Persamaan diatas merupakan sebuh persamaan limason



Untuk menghitung luasnya, kita akan menggunakan rumus integral diatas. Karena yang ditanya adalah luas keseluruhan, maka batas integralnya adalah dari 0 sampai 2π (satu putaran penuh). kita harus ingat kembali cara integral trigonometri, materi kalkulus 1

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (5 + 4\cos\theta)^2 \, d\theta$$

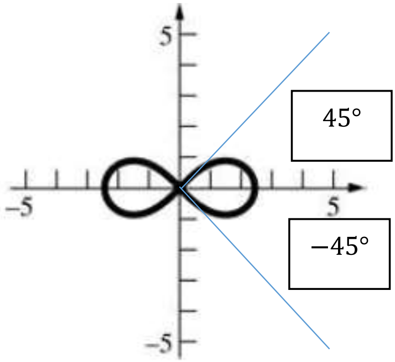
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (25 + 40\cos\theta + 16\,cos^{\,2}\,\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (25 + 40\cos\theta + 8(1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (33 + 40\cos\theta + 8\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}[33\theta + 40\sin\theta + 4\sin 2\theta]_0^{2\pi} = 33\pi$$

2. Hitung luas dari $r^2 = 6\cos 2\theta$
   Jawab:
   Persamaan diatas merupakan persamaan lemniskat.



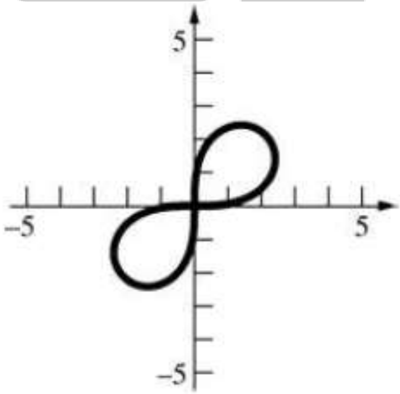
Untuk lemniskat, karena persamaannya agak berbeda dengan yang lain, yaitu ada kuadratnya. Jadi di persamaan integralnya gaperlu pake kuadrat lagi. Cara kita menghitung luasnya adalah dengan menghitung salah satu helainya saja, karena ukurannya sama, lalu di kali dua. Oleh karena itu batas yang kita gunakan adalah $-45°$ sampai dengan $45°$ ($-\frac{1}{4}\pi$ sampai $\frac{1}{4}\pi$)

$$A = 2 \times \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 6\cos 2\theta \, d\theta = 6\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2\theta \, d\theta$$

$$= 3[\sin 2\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 6$$

3. Hitung luas dari $r^2 = 9\sin 2\theta$

Jawab: ini juga persamaan lemniskat

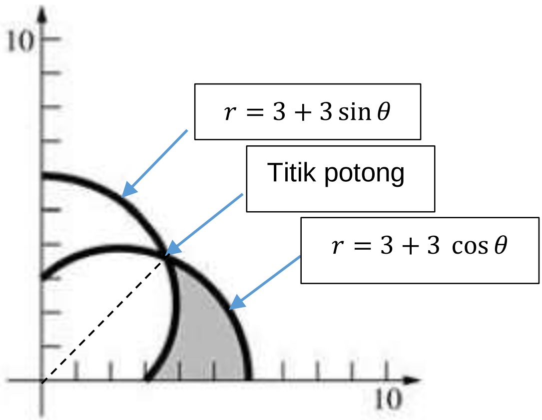


Kita akan menggunakan batas untuk setengah bagiannya lagi, yaitu dari 0° sampai dengan 90° $(0\ sampai\ \frac{\pi}{2})$

$$A = 2 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 9\sin 2\theta = 9\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta$$
$$= \frac{9}{2}[-\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = 9$$

4. Hitung luas daerah pada kuadran pertama yang berada didalam $r = 3 + 3\ \cos\theta$ dan berada diluar $r = 3 + 3\sin\theta$

Jawab:



Daerah yang dimaksud ditujukan pada daerah gelap pada gambar diatas. Luasnya adalah luas dari grafik yang diluar $(r = 3 + 3\ \cos\theta)$ dikurang luas grafik yang didalam $(r = 3 + 3\sin\theta)$ oleh karena itu akan lebih baik jika kita menggambar terlebih dahulu, agar terbayang mana yang diluar dan mana yang didalam.

Untuk soal seperti ini, kita perlu mencari tahu batas atas dan batas bawah dari daerah yang kita cari. Batas bawahnya adalah 0 karena daerah ada dikuadran 1. Dan batas atasnya adalah titik potong kedua kurva. Oleh karena itu, kita perlu terlebih dahulu mencari derajat dari titik potongnya.

Titik potong adalah ketika $3 + 3\sin\theta = 3 + 3\ \cos\theta$

$$3\sin\theta = 3\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{3}$$

$$\tan\theta = 1 \;\rightarrow\; \theta = 45° \;(\frac{\pi}{4})$$

Sehingga batas atasnya adalah $\pi/4$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} [\,(3+3\cos\theta)^2 - (3+3\sin\theta)^2]\,d\theta$$

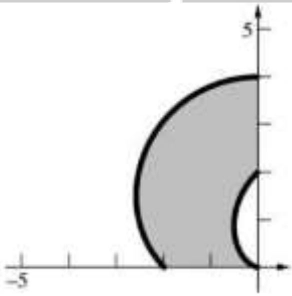
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} [\,18\cos\theta + 9cos^2\theta - 18\sin\theta - 9sin^2\theta]\,d\theta$$

Kita gunakan identitas $\cos 2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} [\,18\cos\theta - 18\sin\theta + 9\cos 2\theta]\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[18\sin\theta + 18\cos\theta + \frac{9}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = 9\sqrt{2} - \frac{27}{4}$$

5. Hitung luas daerah pada kuadran kedua yang berada diluar $r = 2 + 2\;\cos\theta$ dan berada didalam $r = 2 + 2\sin\theta$
Jawab: kita gambar terlebih dahulu



Pada soal ini ternyata tidak terjadi perpotongan di kuadran kedua, sehingga batas bawah dan atasnya adalah batas kuadran dua, yaitu $90°\;\;sampai\;180°\;(\frac{\pi}{2}\;sampai\;\pi)$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} [(2 + 2\sin\theta)^2 - (2 + 2\cos\theta)^2]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [8\sin\theta + 4\, sin^2\theta - 8\cos\theta - 4\, cos^2\theta]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} [(2 + 2\sin\theta)^2 - (2 + 2\cos\theta)^2]\, d\theta$$

Kita gunakan identitas

$$\cos 2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta \leftrightarrow -\cos 2\theta = sin^2\theta - \ cos^2\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} [\, 8\sin\theta - 8\cos\theta - 4\cos 2\theta]\ \, d\theta$$

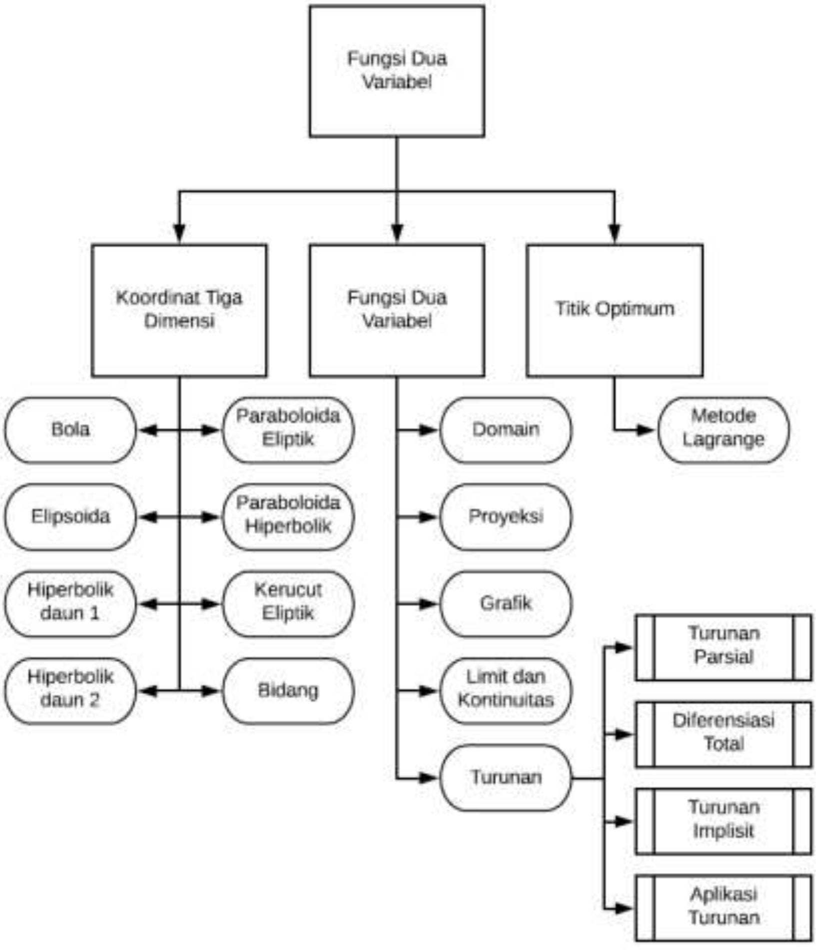
$$= \frac{1}{2}[-8\cos\theta - 8\sin\theta - 2\sin 2\theta]_{\pi/2}^{\pi} = 8$$

Latihan Soal Irisan Kerucut dan Koordinat Polar

SOAL KUIS 2022

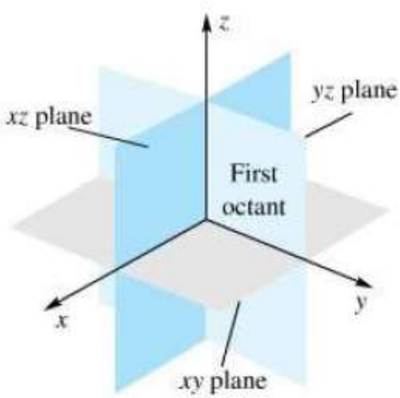
1. Diberikan dua kurva yang berturut-turut mempunyai persamaan parameter:
   $x = e^{\sqrt{t}}; y = t - ln\, t^2$ dan $x = t + t\ln t; y = ae^t$, dengan $0.5 \leq t \leq 4$.
   tentukanlah nilai a agar kedua garis singgung dari masing-masing kurva tersebut saling tegak lurus di $t = 1$
2. Posisi sebuah titik pada saat t dinyatakan sebagai $x = \frac{1}{2}t^2$; $y = \frac{1}{9}(6t+9)^{\frac{3}{2}}$. Tentukan jarak yang ditempuh oleh titik tersebut dari $t = 0$ sampai $t = 4$
3. Hitung panjang busur kurva $24xy = x^4 + 48$ dari $x = 2$ hingga $x = 4$
4. Diberikan grafik mawar berdaun tiga $r = 2\sin 3\theta$
   a) Selidikilah kesimetrian grafik tersebut terhadap semua kemungkinan pengujian
   b) Gambarlah grafik tersebut
   c) Hitunglah luas daerah pada salah satu daun mawar tersebut
5. Suatu kurva C didefinisikan dengan persamaan parametrik $x = t^2; y = t^3 - 3t$
   a) Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$
   b) Carilah titik C dimana garis singgung horizontal atau vertikal
   c) Tentukan kapan kurva tersebut cekung keatas atau kebawah
6. Hitung luas permukaan yang terbentuk jika kurva $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t; y = \cos t$ dengan $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ diputar mengelilingi sumbu$-x$

BAB 3 FUNGSI DUA VARIABEL



3.1 KOORDINAT KARTESIAN PADA DIMENSI TIGA

Sekarang kita akan membahas koordinat tiga dimensi, jadi selain sumbu x dan sumbu y, kita akan mengenal sumbu z.



Jadi kalau di dua dimensi ada (x,y) sedangkan di tiga dimensi ada (x,y,z). Contoh dari koordinat 3 dimensi: (2,3,-5)

Kita dapat mencari jarak dari 2 koordinat pada tiga dimensi dengan cara seperti berikut. Jika $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ maka jarak antara P_1 dan P_2 adalah

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

1. Jika $P_1 = (0,2,-3)$ dan $P_2 = (7,9,-10)$ carilah jarak P_1 dan P_2
   Jawab:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(0-7)^2 + (2-9)^2 + (-3-(-10))^2}$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{49 + 49 + 169} = \sqrt{267} = 16{,}34$$

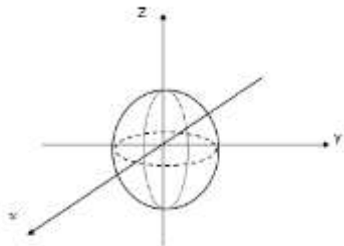
- Bola

  Memiliki bentuk umum

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

  Dimana (h, k, l) adalah titik pusat dari bola. Dan r adalah jari jari bola. Jika titik pusat bola adalah pada origin $(0,0,0)$ maka persamaan bolanya menjadi

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

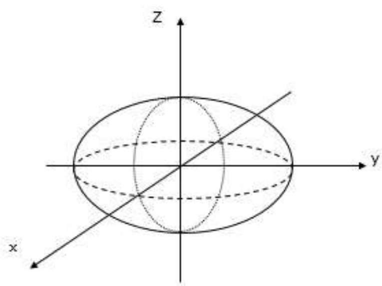


  Lalu dapat kita buat jejaknya ditiap bidang.

  - Pada bidang XY (dimana Z=0)
    $x^2 + y^2 = a^2$ merupakan lingkaran
  - Pada bidang XZ (dimana Y=0)
    $x^2 + z^2 = a^2$ merupakan lingkaran
  - Pada bidang YZ (dimana X=0)
    $y^2 + z^2 = a^2$ merupakan lingkaran

- Elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

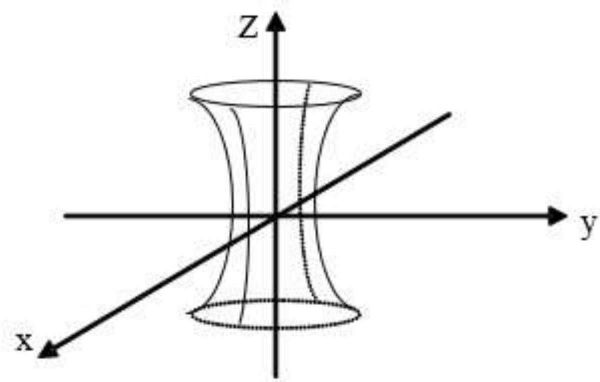


buat jejaknya ditiap bidang.

- Pada bidang XY (dimana Z=0)
  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ merupakan elips
- Pada bidang XZ (dimana Y=0)
  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ merupakan elips
- Pada bidang YZ (dimana X=0)
  $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ merupakan lingkaran

➢ Hiperbolik berdaun satu
Memiliki bentuk umum

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



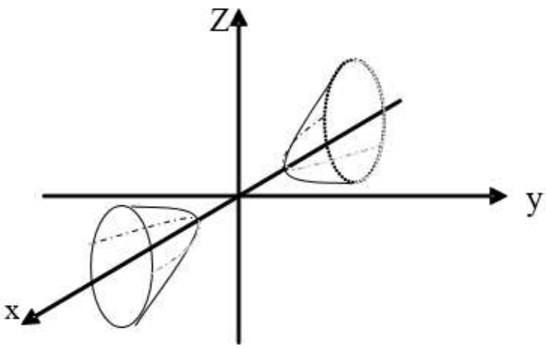
jejaknya ditiap bidang.

- Pada bidang XY (dimana Z=0)
  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ merupakan elips
- Pada bidang XZ (dimana Y=0)
  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ merupakan hiperbola
- Pada bidang YZ (dimana X=0)

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ merupakan hiperbola

- Hiperbolik berdaun dua

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

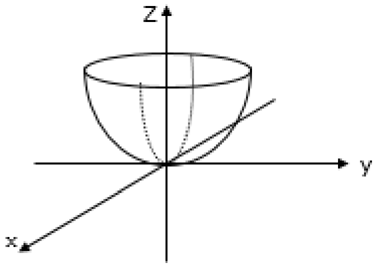


jejaknya ditiap bidang.

- Pada bidang XY (dimana Z=0)
  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ merupakan elips
- Pada bidang XZ (dimana Y=0)
  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ merupakan hiperbola
- Pada bidang YZ (dimana X=0)
  $-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ tidak ada jejak
- Jejak di bidang, x = k (konstanta), k > a atau k < - a , berupa ellips

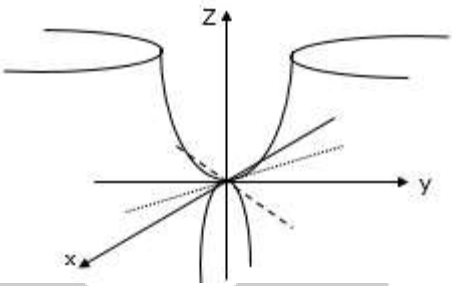
- Paraboloida eliptik

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$



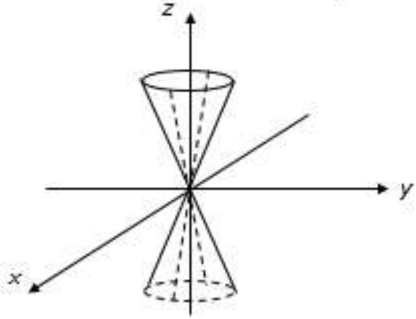
- Paraboloida hiperbolik

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$



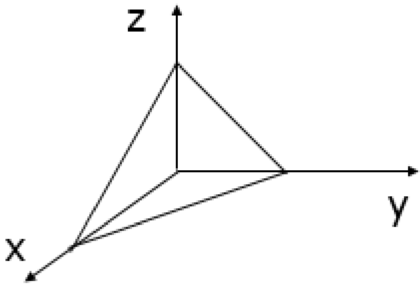
- Kerucut eliptik

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



- Bidang

$$Ax + By + Cz = D$$



1. Carilah titik pusat dan jari jari bola berikut

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 14y - 8z + 1 = 0$$

Jawab:

Pertama kita kelompokkan masing masing variable (x,y dan z)

$$x^2 - 12x + y^2 + 14y + z^2 - 8z = -1$$

Lalu kita buat kuadrat sempurna untuk setiap variable

$$(x^2 - 12x + 36) + (y^2 + 14y + 49) + (z^2 - 8z + 16)$$
$$= -1 + 36 + 49 + 16$$
$$(x-6)^2 + (y+7)^2 + (z-4)^2 = 100$$

Dari persamaan diatas dapat kita simpulkan bahwa titik pusatnya adalah $(x, y, z) = (6, -7, 4)$ dan jari jarinya adalah $r = \sqrt{100} = 10$

2. Carilah titik pusat dan jari jari bola berikut

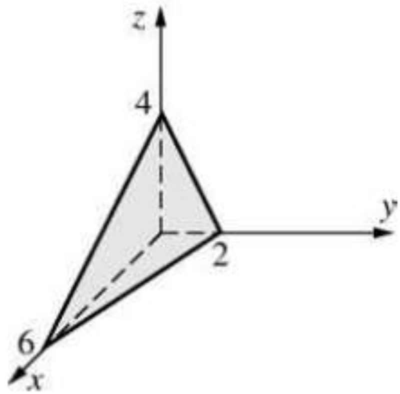
$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y - 22z + 77 = 0$$

Jawab:

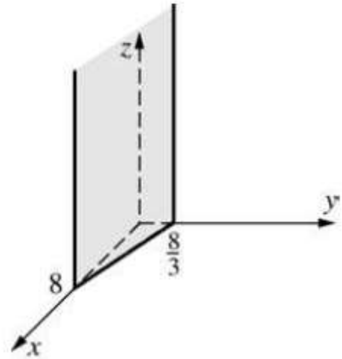
$$x^2 + 8x + y^2 - 4y + z^2 - 22z = -77$$
$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 22z + 121)$$
$$= -77 + 16 + 4 + 121$$
$$(x+4)^2 + (y-2)^2 + (z-11)^2 = 64$$

bahwa titik pusatnya adalah $(x, y, z) = (-4, 2, 11)$ dan jari jarinya adalah $r = \sqrt{64} = 8$

3. Sketsakan bidang $2x + 6y + 3z = 12$
   Jawab:
   Caranya sangat simpel, kira tinggal cari titik potong disetiap sumbu
   Titik potong sumbu x (y dan z= 0) $2x = 12 \rightarrow x = 6$
   Titik potong sumbu y (x dan z= 0) 6y= $12 \rightarrow y = 2$
   Titik potong sumbu z (x dan y= 0) 3z= $12 \rightarrow z = 4$



4. Sketsakan bidang $x + 3y = 8$
   Jawab: bidang ini gak menyentuh sumbu z (sejajar sumbu z)
   Titik potong sumbu x (y dan z= 0) $x = 8$
   Titik potong sumbu y (x dan z= 0) 3y= $8 \rightarrow y = 3/8$



3.2 FUNGSI DUA VARIABEL

Kita sudah sering mempelajari fungsi. Fungsi yang sebelumnya kita pelajari biasanya fungsi dengan satu variabel. Bentuk fungsinya biasanya y = f(x) (fungsi dengan variabel x). Yang artinya y adalah nilai dari fungsi x

Sekarang kita akan bahas fungsi dua variabel. Bentuk umumnya adalah z = f(x,y) yang artinya z adalah nilai dari fungsi x dan y.

Contoh fungsi dua variabel:

$$f(x,y) = x - y^2$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x-1}}{y}$$

Domain fungsi adalah daerah asal fungsi. Domain dari tiap fungsi bisa berbeda-beda. Domain fungsi adalah semua nilai (x,y) yang dapat menghasilkan bilangan real.

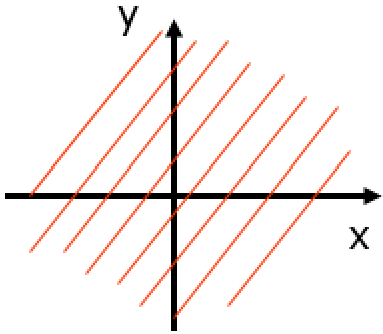
1. Tentukan domain dari fungsi $f(x,y) = 3x + y^2$

   Jawab: pada fungsi diatas, berapapun nilai real x dan y yang kita input, semuanya akan membentuk bilangan real juga. Jadi dapat dibilang bahwa domainnya adalah seluruh bilangan. Dinotasikan sebagai berikut

$$D_f = \{(x,y) \in R^2 | \ 3x + y^2 \in R^2 \}$$

$$D_f = \{(x,y) \in R^2\}$$

Jika disuruh gambarkan, maka gambarnya adalah seluruh bidang xy diarsir



2. Tentukan domain fungsi $f(x,y) = \frac{1}{5}\sqrt{144 - 16x^2 - 9y^2}$

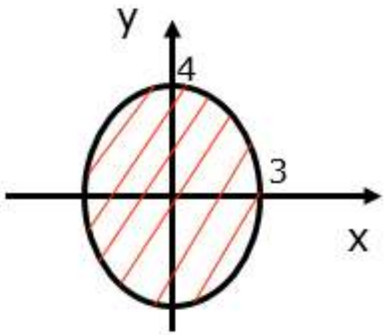
   Jawab: pada soal ini, fungsi dapat membentuk bilangan tidak real, yaitu **apabila** $144 - 16x^2 - 9y^2$ hasilnya negatif. Karena bilangan negatif tidak ada akarnya, sehingga fungsi tidak terdefinisi. Jadi untuk mencari domainnya, kita harus mencari daerah yang hasil $144 - 16x^2 - 9y^2$ tidak negatif (lebih besar sama dengan nol)

$$144 - 16x^2 - 9y^2 \geq 0$$
$$16x^2 + 9y^2 \leq 144$$
$$\frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} \leq 1$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1$$
$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 \leq 1$$

   Dibuat notasinya

$$D_f = \{(x,y) \in R^2 | \ \frac{1}{5}\sqrt{144 - 16x^2 - 9y^2}\ \}$$
$$D_f = \left\{(x,y) \in R^2 \mid \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 \leq 1\right\}$$

   Jika diminta digambarkan maka akan membentuk elips vertikal



3. Tentukan domain fungsi $f(x,y)=\frac{3}{7}\sqrt{x(1-y)}$

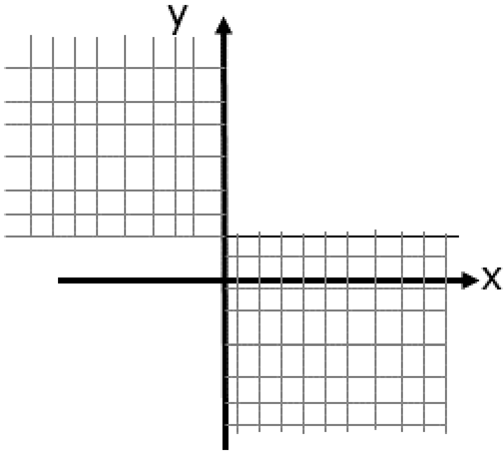
   Jawab: sama seperti soal sebelumnya, kita harus mencari daerah yang tidak membentuk akar yang negatif.

   $x(1-y)\geq 0$ akan terpenuhi pada:

   - $x\geq 0\ dan\ (1-y)\geq 0$ disederhanakan menjadi $x\geq 0\ dan\ y\ \leq 1$
   - $x\leq 0\ dan\ (1-y)\leq 0$ disederhanakan menjadi $x\leq 0\ dan\ y\geq 1$

$$D_f=\{(x,y)\in R^2 |\ \frac{3}{7}\sqrt{x(1-y)}\ \}$$

$$D_f=\{(x,y)\in R^2\ |\ x\geq 0\ dan\ y\leq 1\ atau\ x\leq 0\ dan\ y\geq 1\ \}$$

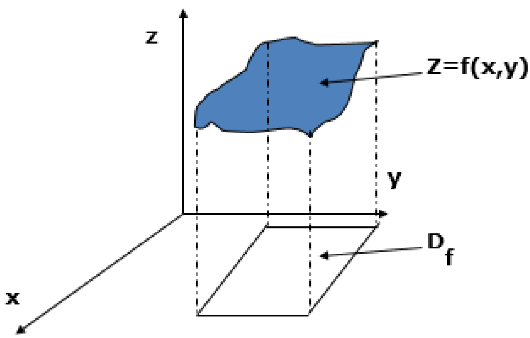


4. Tentukan domain fungsi $f(x,y) = \frac{x}{7-y}$

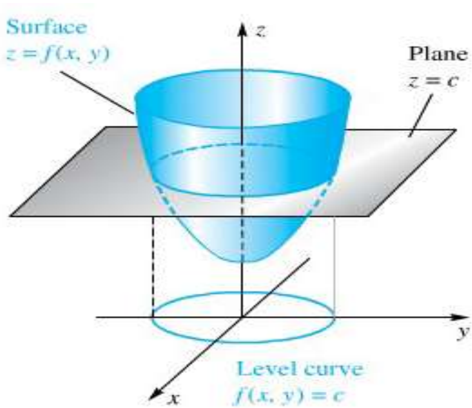
Jawab: pada fungsi ini, semua nilai x dan y adalah domain keculai $y = 7$ karena jika $y = 7$ penyebutnya jadi nol. Sehingga nilainya tidak terdefinisi

$$D_f = \{(x,y) \in R^2 | \frac{x}{7-y}\}$$
$$D_f = \{(x,y) \in R^2 \mid y \neq 7\}$$

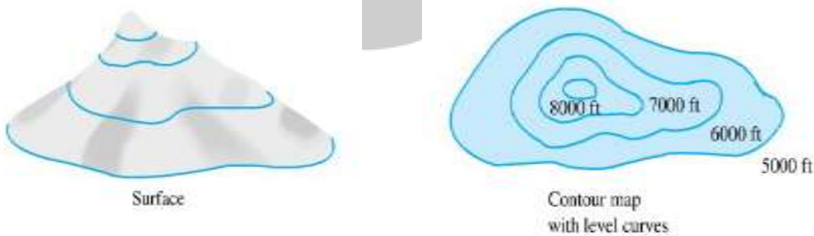
Grafik dari fungsi dengan dua variable adalah suatu permukaan (layer) di ruang R^3



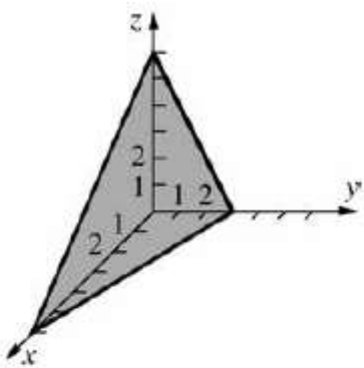
Grafik dari fungsi dua variabel bentuknya dapat diproyeksikan pada suatu nilai z tertentu. Disebut sebagai **kurva ketinggian. Setiap bidang z = c memotong permukaan menurut sebuah kurva. Proyeksi kurva ini pada bidang xy disebut kurva ketinggian.**



Kumpulan dari kurva ketinggan tadi jika digabung akan membentuk **kontur**. Bentuknya seperti peta kontur



1. Sketsakan grafik $f(x,y) = 6 - x - 2y$
   Jawab: diingat bahwa $f(x,y) = z$
   Sehingga $z = 6 - x - 2y \rightarrow z + x + 2y = 6$ bentuknya adalah sebuah bidang



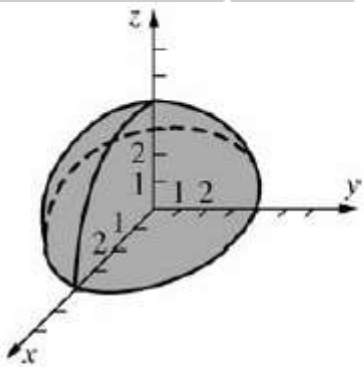
2. Sketsakan grafik $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

   Jawab: $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

   Pertama kita kuadratkan kedua sisi agar akarnya hilang

$$z^2 = 16 - x^2 - y^2$$
$$z^2 + x^2 + y^2 = 16$$

   Merupakan persamaan bola dengan pusat (0,0) dan jari jari 4. Tetapi disini perlu kita perhatikan fungsi awalnya adalah $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ dan ketentuannya adalah akar tidak bisa negatif. Sehingga grafik yang kita gambar cukup setengah bola saja, yaitu pada bagian atas dimana fungsinya positif ($z \geq 0$)

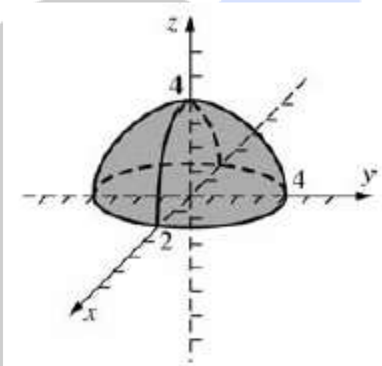


3. Sketsakan grafik $f(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

Jawab:

$$z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$
$$z^2 = 16 - 4x^2 - y^2$$
$$z^2 + x^2 + y^2 = 16$$
$$\frac{z^2}{16} + \frac{4x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$$
$$\frac{z^2}{16} + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Merupakan persamaan elipsoida, dengan alasan yang sama dengan soa sebelumnya, kita gambar bagian atas saja



4. Gambarkan kurva ketinggian z=k dari $f(x,y) = x^2 + 2y^2, k = 0,1,2,4$

Jawab:

- Untuk k=0

$$x^2 + 2y^2 = 0$$
$$x = 0\ y = 0\ \rightarrow titik\ (0,0)$$

- Untuk k=1

$$x^2 + 2y^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1\ \rightarrow elips$$

- Untuk k=2

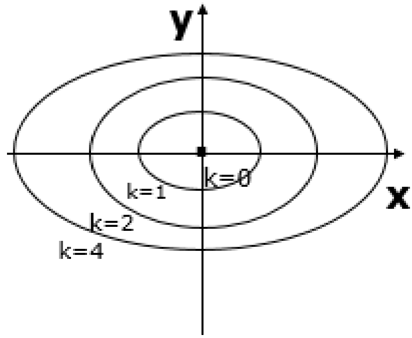
$$x^2 + 2y^2 = 2$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \rightarrow elips$$

- Untuk k=2

$$x^2 + 2y^2 = 4$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \rightarrow elips$$

Lalu semuanya digambar dalam satu kartesian



5. Gambarkan kurva ketinggian z=k dari $f(x, y) = x - y^2, k = -2,0,2,4$

   Jawab:

   - Untuk k = -2

   $$x - y^2 = -2$$
   $$y^2 = x + 2 \rightarrow parabola$$

   - Untuk k = 0

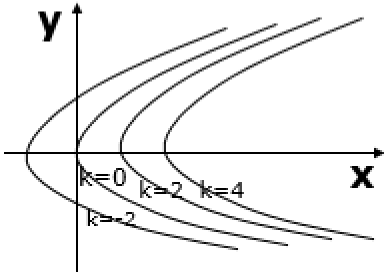
   $$x - y^2 = 0$$
   $$y^2 = x \rightarrow parabola$$

   - Untuk k = 2

   $$x - y^2 = 2$$
   $$y^2 = x - 2 \rightarrow parabola$$

   - Untuk k = -2

   $$x - y^2 = 4$$
   $$y^2 = x - 4 \rightarrow parabola$$



3.3 LIMIT DAN KONTINUITAS FUNGSI DUA VARIABEL

Fungsi $f(x,y)$ mempunyai limit L untuk (x,y) mendekati (a,b) ditulis

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Ada beberapa kasus untuk limit Fungsi:

- Bila fungsinya polinomial, maka limitnya sudah pasti ada

  Contoh : $$\lim_{(x,y)\to(3,4)} xy^2 + 2x + y$$

  $f(x,y) = xy^2 + 2x + y$ adalah sebuah fungsi polinom biasa. Jadi untuk cari limitnya tinggal subtitusi aja

  $$\lim_{(x,y)\to(3,4)} xy^2 + 2x + y = (3)(4)^2 + 2(3) + 4 = 58$$

  Mudah ya

- Bila fungsinya pecahan, dan penyebutnya bukan nol. Maka limitnya juga sudah pasti ada

  Contoh: $$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{xy^2+2x+y}{2x+5y}$$

  Pada $(x,y) \to (3,4)$ nilai penyebut dari fungsi diatas bukan nol. Maka untuk mencari limitnya tingga subtitusi juga

  $$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{xy^2 + 2x + y}{2x + 5y} = \frac{(3)(4)^2 + 2(3) + 4}{2(3) + 5(4)} = \frac{58}{26} = \frac{29}{13} = 2\,\frac{3}{13}$$

- Bila fungsinya pecahan, pembilangnya **bukan** nol sedangkan penyebutnya nol. Maka limitnya **tidak ada**

Contoh: $\lim\limits_{(x,y)\to(5,2)} \frac{xy^2+2x+1}{2x-5y}$

Pembilangnya hasilnya bukan nol sedangkan penyebutnya nol sehingga limitnya tidak ada

- Bila fungsinya pecahan, dan menghasilkan bilangan tidak tentu yaitu $0/0$ maka cara menentukan limitnya ada atau tidak beda dengan yang diatas. Ada beberapa cara, yaitu dengan melakukan pendekatan sumbu dan juga menggunakan koordinat polar

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

   Jawab : nilai diatas udah pasti 0/0 jadi kita perlu buktiin limitnya
   Kita pake cara pendekatan sumbu. Jadi ketentuannya adalah limitnya akan memiliki nilai L apabila pendekatan dari setiap sumbu adalah sama dengan L. Apa bila ada nilai yang berbeda dari salah satu sumbu, maka limit tidak memiliki nilai

   ✓ Pendekatan dari sumbu x (y=0)

   $$f(x,0) = \frac{x(0)}{x^2 + 0^{\ 2}} = 0$$

   ✓ Pendekatan dari sumbu y (X=0)

   $$f(0,y) = \frac{(0)y}{0^2 + y^{\ 2}} = 0$$

   ✓ Pendekatan dari sumbu x=y

   $$f(x,x) = \frac{x \cdot x}{x^2 + x^{\ 2}} = \frac{1}{2}$$

   karena $f(x,x) \neq f(x,0)$ maka limit tidak ada

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{3x^2+3y^2}$

   Jawab: sekarang kita pake cara koordinat polar
   Pertama kita ubah ke koordinat polar dengan ketentuan

$$x^2 + y^2 = r^2$$

   Lalu karena (x,y) menuju nol. r juga menuju nol

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{3x^2+3y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{3r^2}$$

   Ingat aturan limit menuju nol, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ maka

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{3r^2} = \frac{1}{3} \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{r^2} = \frac{1}{3}$$

   Limit menuju 1/3

Kekontinuan dari fungsi mengikuti ketentuan sebagai berikut.
Definisi: Fungsi dua variabel $f(x,y)$ kontinu di titik (x,y) jika

- $f(a,b)$ terdefinisi
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ada
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Teorema:

1) Polinom dengan m peubah kontinu di R^m
2) Fungsi rasional m peubah $f(x,y) = p(x,y)/q(x,y)$ kontinu pada D_f asal $q(x,y) \neq 0$
3) Jika g fungsi dua peubah kontinu di (a,b) dan f fungsi satu peubah kontinu di $g(a,b)$ maka $f°g$ kontinu di (a,b) didefinisikan $f°g(x,y) = f(g(x,y))$

1. Selidiki kekontinuan $f(x,y) = \frac{2x+3y}{(y^2-4x)}$

   Jawab: fungsi diatas akan kontinu pada seluruh (x,y) kecual pada $y^2 - 4x = 0$ karena akan membentuk nilai tak tentu (per nol)

$$y^2 - 4x = 0$$
$$y^2 = 4x$$

Jadi, fungsi diatas kontinu di semua R^2 kecuali parabola $y^2 = 4x$

2. Selidiki kekontinuan $f(x,y) = \cos(x^2 - 4xy + y^2)$
Jawab: fungsi diatas adalah fungsi cosinus. Kita tahu bahwa cosinus akan kontinu pada nilai real dimanapun (selalu kontinu). Jadi kita perlu mengetahui apakah variabel cosinusnya selalu kontinu juga. Variabel cosinusnya adalah $x^2 - 4xy + y^2$. Fungsi tersebut adalah polinom, dan polinom selalu kontinu. Jadi kesimpulannya adalah $f(x,y) = \cos(x^2 - 4xy + y^2)$ kontinu pada seluruh R^2

3.4 TURUNAN FUNGSI DUA VARIABEL

Fungsi dua variabel juga memiliki turunan. Turunannya biasa disebut turunan parsial karena turunan terhadap salah satu variabel. Yang perlu kita perhatiin untuk fungsi dua variabel adalah turunannya terhadap variable apa.

Notasi dari turunan adalah $f_x, D_x, \frac{\partial}{\partial x}$

1. jika $f(x,y) = 3x^2y + 5y^3$
   a) buat turunan $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$
   b) hitung $f_x(2{,}4)$ dan $f_y(3{,}1)$

Jawab:

a) f_x artinya turunan terhadap variabel x dan f_y turunan terhadap y

$$f_x(x,y) = 6xy + 0$$

Jadi untuk turunan terhadap x, $3x^2y$ bakal jadi $6xy$ karena pangkatnya x dikalikan ke depan. Dan pangkatnya x turun dari kuadrat jadi pangkat satu. Sedangkan $5y^3$ bakal jadi 0. Karena tidak ada x-nya

$$f_y(x,y) = 3x^2 + 15y^2$$

Turunan terhadap y. $3x^2y$ bakal jadi $3x^2$. Karena y-nya pangkat satu jadi jika diturunin jadi hilang. Sedangkan $5y^3$ bakal jadi $15y^2$

b) Untuk soal macam ini, karena kita sudah dapet turunannya kita tinggal subtitusi

$f_x(2,4) = 6(2)(4) = 48$ $\qquad$ $f_y(3,1) = 3(3)^2 + 15(y)^2$

2. Jika $f(x,y) = (2x-y)^4$ cari $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$
   Jawab: ingat lagi aturan cara turunan di kalkulus 1
   $$f_x(x,y) = 4(2x-y)^3(2) = 8(2x-y)^3$$
   $$f_y(x,y) = 4(2x-y)^3(-1) = -4(2x-y)^3$$
   Kita turunin pangkat 4 kedepan. Lalu jangan lupa (2x-y) juga diturunin

3. Jika $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ cari $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$
   Jawab: ingat aturan turunan di kalkulus satu yang uv uv
   $$f'\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$
   $$f_x(x,y) = \frac{(2x)(xy) - (x^2-y^2)(y)}{(xy)^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2y}$$
   $$f_y(x,y) = \frac{(-2y)(xy) - (x^2-y^2)(x)}{(xy)^2} = -\frac{(x^2+y^2)}{xy^2}$$

4. Jika $f(x,y) = e^y \sin x$ cari $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$
   Jawab: ingat aturan turunan dikalkulus satu yang uv uv
   $$f'(UV) = U'V + UV'$$
   $$e^y = U \quad dan \quad \sin x = V$$
   $$f_x(x,y) = (0)(\sin x) + (e^y)(\cos x) = e^y \cos x$$
   $$f_y(x,y) = (e^y)(\sin x) + (e^y)(0) = e^y \sin x$$

5. Jika $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$ cari $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$
   Jawab:
   $$f(x,y) = (x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$$
   $$f_x(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$$
   $$f_y(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

Variabel dari fungsi gak harus selalu x dan y. Suka-suka aja bisa huruf atau simbol apapun

6. Jika $f(s,t) = \ln(s^2 - t^2)$ cari $f_s(s,t)$ dan $f_t(s,t)$
   Jawab: Ingat turunan $\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \left(\frac{1}{f(x)}\right)\left(f'(x)\right)$
$$f_s(s,t) = \frac{1}{s^2 - t^2}(2s) = \frac{2s}{s^2 - t^2}$$
$$f_t(s,t) = \frac{1}{s^2 - t^2}(-2t) = -\frac{2t}{s^2 - t^2}$$

7. Jika $f(r,\theta) = 3r^3 \cos 2\theta$ cari $f_r(r,\theta)$ dan $f_\theta(r,\theta)$
   Jawab: pake aturan uv uv
$$f_r(r,\theta) = (9r^2)(\cos 2\theta) + (3r^3)(0) = 9r^2 \cos 2\theta$$
$$f_\theta(r,\theta) = (0)(\cos 2\theta) + (3r^3)((-\sin 2\theta)(2) = -6r^3 \sin 2\theta$$

Turunan parsial kedua

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

8. Jika $f(x,y) = 2x^2y^3 - x^3y^5$ carilah
   a. $f_{xy}(x,y)$
   b. $f_{yx}(x,y)$

   Jawab:
   a. bikin dulu turunan terhadap x lalu hasilnya diturunkan terhadap y
$$f_x(x,y) = 4xy^3 - 3x^2y^5$$
$$f_{xy}(x,y) = 12xy^2 - 15x^2y^4$$
   b. bikin dulu turunan terhadap y lalu hasilnya diturunkan terhadap x
$$f_y(x,y) = 6x^2y^2 - 5x^3y^4$$

$$f_{yx}(x,y) = 12xy^2 - 15x^2y^4$$

Jawaban dari soal (a) dan (b) sekaligus membuktikan bahwa $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

9. Jika f(x,y) = xy sin(x^2+2xy+y^3) carilah f_{xy}(x,y)
   Jawab:
   f_x(x,y) = y sin(x^2+2xy+y^3) + xy(2x+2y) cos(x^2+2xy+y^3)
   f_{xy}(x,y) = sin (x^2+2xy+y^3) + y(2x+3y^2) cos(x^2+2xy+y^3) + (2x^2+4xy)cos(x^2+2xy+y^3) – xy(2x+2y)(2x+3y^2)sin(x^2+2xy+y^3)

   ATURAN RANTAI juga ada pada turunan fungsi dua variabel.

   Misalkan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ terdifferensialkan di t dan $z = f(x,y)$ terdifferensialkan di $(x(t), y(t))$ Maka $z = f(x(t), y(t))$ dapat didifferensialkan di t dan didefinisikan sebagai

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dt}{dt}$$

10. Misalkan $z = xy^2$ dengan $x = 2t^2$ dan $y = t^3$ tentukan $\frac{dz}{dt}$
    Jawab:
    menurut aturan rantai, kita harus mencari dulu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 ; \frac{dx}{dt} = 4t \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \ ; \frac{dt}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dt}{dt} = (y^2)(4t) + (2xy)(3t^2)$$

    Setelah itu subtitusi lagi fungsi x dan y terhadap t, jadi jawaban akhirnya pake t semua

$$\frac{dz}{dt} = (y^2)(4t) + (2xy)(3t^2) = (t^3)^2(4t) + \left(2(2t^2)(t^3\ )\right)(3t^2)$$
$$= 4t^7 + 12t^7 = 16t^7$$

Diferensial total

Kita sudah membahas turunan parsial dari z. Dimana turunan parsial adalah turunan terhadap salah satu variabel saja. Pada turunan total ini, yang didiferensial adalah z. Dimana z merupakan fungsi x dan y. Sehingga ketika z didiferesiansi, x dan y juga akan ikut terdiferensiasi. Secara umum didefinisikan sebagai berikut:

$$z = f(x, y)$$
$$dz = df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

Dapat kita lihat dari pengertian diatas, bahwa ketika z diturunkan, hasilnya fungsi diturunkan terhadap x dikalikan dengan dx ditambah dengan fungsi diturukan terhadap y dan dikalikan dengan dy. Deiferensiasi total biasa dilambangkan dengan ∇

1. Jika $z = f(x, y) = 2x^3 + xy - y^3$ hitunglah dz ketika (x, y) berubah dari $(2,1)$ ke $(2.03,0.98)$

   Jawab:

   dz artinya perubahan z.

   - Perubahan z sebenarnya dapat kita hitung langsung dengan menghitung selisih dari $f(2,1)$ dan $f(2.03,0.98)$

   $$f(2,1) = \ 2(2)^3 + (2)(1) - 1^3 = 17$$
   $$f(2.03,0.98) = \ 2(2{,}03)^3 + (2{,}03)(0{,}98) - (0{,}98)^3 = 17{,}779062$$

   Sehingga selisihnya adalah $17{,}779062 - 17 = 0{,}779602$

   - Kalau kita pake rumus dz

   $$dz = df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$
   $$dz = (6x^2 + y)\ dx + (x - 3y^2)\ dy$$

   Untuk x dan y nya kita subtitusi (2,1) sedangkan untuk dx dan dy nya kita subtitusi perubahan (x, y) nya

   (x, y) berubah dari (2,1) ke (2.03,0.98) sehingga perubahannya adalah $dx = 2{,}03 - 2 = 0{,}03$ dan $dy = 0{,}98 - 1 = -0{,}02$

   $$dz = (6(2)^2 + 1)\ (0{,}03) + (2 - 3(1)^2)(-0{,}02) = 0{,}77$$

   Dapat dilihat bahwa hasil yang kita dapatkan sama deangan dua cara. Membuktikan kebenaran

   $$dz = df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

Turunan Fungsi Implisit

Fungsi implisit adalah fungsi yang semua variabelnya terkumpul pada salah satu sisi di persamaan, yang akan kita pelajari pada bab ini adalah turunan **parsial** terhadap fungsi implisit.

➢ Turunan parsial terhadap x $\frac{\partial z}{\partial x}$

Persamaan yang ada berturut-turut diturunkan terhadap x dan z, dengan mengganggap variabel y sebagai konstanta. Khusus ketika diturunkan terhadap z , hasilnya selalu dikalikan dengan $\frac{\partial z}{\partial x}$

- Turunan parsial terhadap y $\frac{\partial z}{\partial y}$
  Persamaan yang ada berturut-turut diturunkan terhadap y dan z ,dengan mengganggap variabel x sebagai konstanta. Khusus ketika diturunkan terhadap z , hasilnya selalu dikalikan dengan $\frac{\partial z}{\partial y}$

1. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $xy + xz + yz = 13$

   Jawab:
   - Turunan parsial x

     $$xy + xz + yz = 13$$

     Kita turunkan parsial terhadap x. Maka xy jadi y. Untuk xz akan terjadi dua kali diferensiasi, yaitu xz menjadi z. Dan xz menjadi $x\frac{\partial z}{\partial x}$. Yang terakhir yz menjadi $y\frac{\partial z}{\partial x}$ sedangkan 13 jadi nol karena cuman konstanta.

     $$y + z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

     Setelah itu kita definisikan $\frac{\partial z}{\partial x}$

     $$\frac{\partial z}{\partial x}(x + y) = -y - z$$

     $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y - z}{x + y}$$

   - Turunan parsial y
     Caranya sama kayak yang atas

     $$xy + xz + yz = 13$$

     $$x + x\frac{\partial z}{\partial y} + z + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

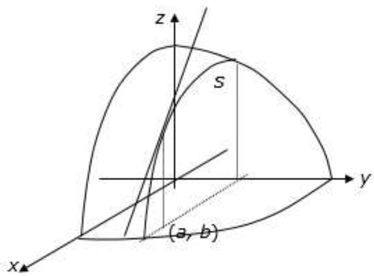
     $$\frac{\partial z}{\partial y}(x + y) = -x - z$$

     $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x - z}{x + y}$$

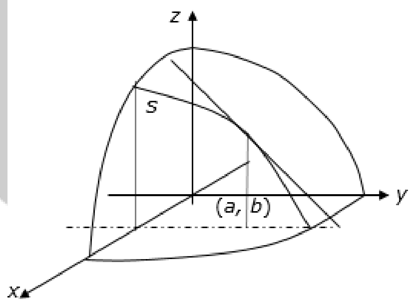
Aplikasi turunan

Turunan pertama dari fungsi adalah untuk mencari gradien garis singgung:

- Turunan parsial fungsi f(x,y) terhadap x di titik (a,b) merupakan **gradien garis singgung terhadap kurva *s* pada titik (a, b, f(a,b)) dalam arah sejajar sumbu *x*.**



- Turunan parsial fungsi f(x,y) terhadap y di titik (a,b) merupakan **gradien garis singgung terhadap kurva *s* pada titik (a, b, f(a,b)) dalam arah sejajar sumbu *y*.**



1. Buatlah persamaan parameter dari garis singgung kurva perpotongan $36z = 4x^2 + 9y^2$ dengan $x = 3$ di titik $(3,2,2)$
   Jawab: karena garis singgungnya berpotongan dengan kurva **dan $\boldsymbol{x = 3}$** artinya garis singgung tersebut **sejajar sumbu y** sehingg kita gunakan turunan parsial y. Ingat kembali turunan implisit

$$36z = 4x^2 + 9y^2$$

$$36\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 18y$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}y$$

Sehingga kita dapat mencari gradien pada titik tersebut dengan menginput (x,y) yaitu $(3,2)$

$$f_y(3,2) = \frac{1}{2}(2) = 1$$

Kemiringan garis singgung kurva pada $(3,2,2)$ adalah 1 atau kita sebut $1/1$. Ini menunjukkan bahwa garis singgungnya arahnya $(0,1,1)$ *penjelasan: nol di x karena garis sejajar x. 1,1 di x,y karena tadi kita hitung turunan parsial z terhadap y adalah 1/1.

Jadi kita sudah dapat arah dari garisnya yaitu $(0,1,1)$ dan salah satu titik yang dilalui titik. Sehingga kita dapat menentukan persamaan parameter garisnya. ingat kembali cara menentukan persamaan parameter

> Jika garis melalu titik (x_1, y_1, z_1) dan memiliki arah (p,q,r) maka persamaan parameternya adalah
>
> $$x = x_1 + pt \qquad y = y_1 + qt \qquad z = z_1 + rt$$

Sehingga untuk soal ini garis melalu $(3,2,2)$ dan arah dari garisnya $(0,1,1)$ sehingga persamaan parameternya adalah

$$x = 3 \qquad y = 2 + t \qquad z = 2 + t$$

2. Buatlah persamaan parameter dari garis singgung kurva perpotongan $2z = \sqrt{9x^2 + 9y^2 - 36}$ dengan $y = 1$ di titik $(2,1,\frac{3}{2})$

   Jawab: karena garis singgungnya berpotongan dengan kurva **dan $\boldsymbol{y = 1}$** artinya garis singgung tersebut **sejajar sumbu x** sehingga kita gunakan turunan parsial x.

$$2z = \sqrt{9x^2 + 9y^2 - 36}$$

$$2z = (9x^2 + 9y^2 - 36)^{\frac{1}{2}}$$

$$2\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(9x^2 + 9y^2 - 36)^{-\frac{1}{2}}(18x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4}(9x^2 + 9y^2 - 36)^{-\frac{1}{2}}(18x)$$

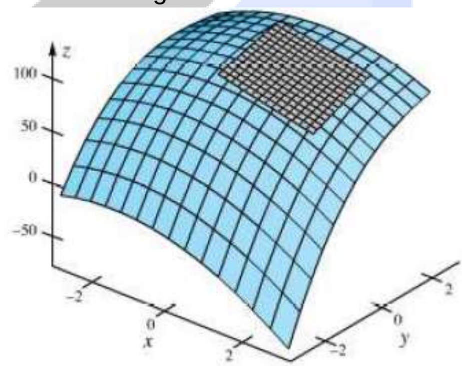
$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{18x}{4\sqrt{9x^2 + 9y^2 - 36}} = \frac{9x}{2\sqrt{9x^2 + 9y^2 - 36}}$$

Lalu kita cari gradien garis singgung $f_x(3{,}2) = \frac{9(3)}{2\sqrt{9(3)^2+9(2)^2-36}} = 3$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa arah garis singgungnya adalah $(1{,}0{,}3)$. Sehingga persamaan parameter garis yang melalu titik $(2{,}1{,}\frac{3}{2})$ dan arahnya $(1{,}0{,}3)$ adalah

$$x = 2 + t \qquad y = 1 \qquad z = \frac{3}{2} + 3t$$

Aplikasi turunan juga untuk menghitung gradien bidang singgung pada suatu titik di kurva fungsi dua variabel



Gambar bidang singgung

Adapun untuk menghitung gradien bidang singgung sebagai berikut:

Vektor gradien dari fungsi z = f (x,y) di (x,y) $\in$D, didefinisikan sebagai

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j$$

Jadi hasil gradien yang kita dapatkan dalam bentuk i dan j

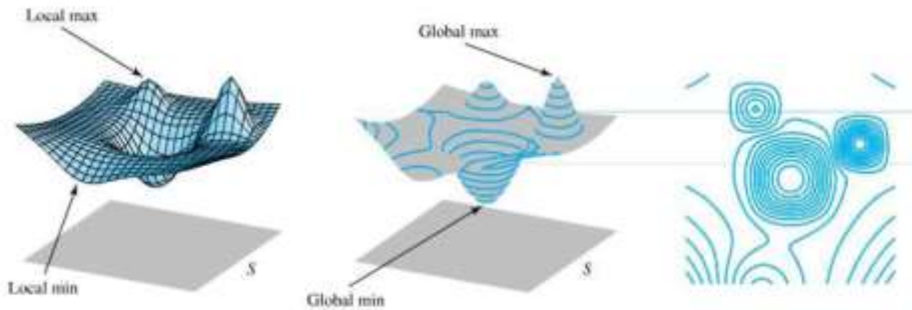
Lalu jika kita sudah mendapatkan vektor gradien dari suatu bidang. Dan diketahui titik yang dilalui bidang tersebut adalah (a,b) maka kita dapat mencari persamaan bidangnya, yaitu:

$$z = f(a,b) + \nabla f(x,y) \cdot (x-a, y-b)\ atau$$

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)i\big(x-a\big) + f_y(a,b)j(y-b\big)$$

1. Tentukan persamaan bidang singgung dari $f(x,y) = x^2 + y^2$ di titik $(1,2)$
   Jawab:
   $$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j$$
   $$\nabla f(x,y) = 2x\ i + 2y\ j$$
   $$\nabla f(1,2) = 2\ i + 4\ j$$
   Kita sudah dapat bahwa gradiennya adalah $2i + 4j$ dan bidang melalui titik (1,2) sehingga persamaannya adalah
   $$z = f(a,b) + f_x(a,b)i\big(x-a\big) + f_y(a,b)j(y-b\big)$$
   $$z = 1^2 + 2^2 + 2(x-1) + 4(y-2)$$
   $$z = 2x + 4y - 5$$

3.5 MAKSIMUM DAN MINIMUM FUNGSI DUA VARIABEL



Gambar 6. Maksimum dan minimum pada R^3

Definisi dari maksimum dan minimum dapat lebih mudah kita pahami melalu gambar diatas, dimana gambar diatas adalah kurva bidang dari fungsi dua variabel. Ada local maximum dan local minimum, ada juga global maximum dan global minimum.

Cara menentukan titik ekstrim pada fungsi dua peubah kita menggunakan turunan parsial kedua. Dengan ketentuan sebagai berikut:

$f(x,y)$ memiliki turunan parsial kedua.

$$D = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

- $f(x,y)$ nilai maksimum lokal jika $D > 0$ dan $f_{xx}(x,y) < 0$
- $f(x,y)$ nilai minimum lokal jika $D > 0$ dan $f_{xx}(x,y) > 0$
- $f(x,y)$ adalah titik pelana jika $D < 0$
- Jika $D = 0$ tidak dapat ditarik kesimpulan

1. Cari titik ekstrim $f(x,y) = 2x^4 - x^2 + 3y^2$

   Jawab:

   Pertama kita cari dulu turunan parsial pertama dan kedua

$$f_x(x,y) = 8x^3 - 2x$$
$$f_y(x,y) = 6y$$
$$f_{xx}(x,y) = 24x^2 - 2$$
$$f_{yy}(x,y) = 6$$
$$f_{xy}(x,y) = 0$$

Lalu kita cari titik ekstrimnya. Yaitu dengan memanfaatkan turunan parsial pertama. Dimana titik kritis adalah pada $f_x(x,y) = 0$ dan $f_y(x,y) = 0$

$$f_x(x,y) = 0$$
$$8x^3 - 2x = 0 \rightarrow 8x^3 = 2x$$
$$x^2 = \frac{2}{8} \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Titik kritis yang kita dapat $(\frac{1}{2}, 0)$ dan $(-\frac{1}{2}, 0)$

$$f_y(x,y) = 0$$
$$6y = 0$$
$$y = 0$$

Titik kritis yang kita dapat $(0,0)$

Lalu kita buat tabel seperti dibawah ini

$$D = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

titik	f_{xx}	D	keterangan
(0,0)	-2	-12	Titik pelana
(1/2,0)	4	24	Titik minimum
(-1/2,0)	4	24	Titik minimum

Dari ketentuan diatas, dapat kita simpulkan bahwa titik minimum lokal adalah pada $(\frac{1}{2}, 0)$ dan $(-\frac{1}{2}, 0)$. Dan titik $(0,0)$ adalah titik pelana

2. Cari titik ekstrim $f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

   Jawab:

$$f_x(x, y) = y - \frac{2}{x^2}$$
$$f_y(x, y) = x - \frac{4}{y^2}$$
$$f_{xx}(x, y) = \frac{4}{x^3}$$
$$f_{yy}(x, y) = \frac{8}{y^3}$$
$$f_{xy}(x, y) = 1$$

   Kita cari titik kritis

$$f_x(x, y) = 0$$
$$y - \frac{2}{x^2} = 0$$
$$y = \frac{2}{x^2} \to (x, y) = (1,2)$$
$$f_y(x, y) = 0$$
$$x - \frac{4}{y^2} = 0$$
$$x = \frac{4}{y^2} \to (x, y) = (1,2)$$

   Titik kritisnya adalah $(1,2)$

$$D = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

titik	f_{xx}	D	keterangan
(1,2)	4	3	Minimum lokal

   Kesimpulan: titik minimum lokal pada $(1,2)$

3.6 METODE LAGRANGE

Metode lagrange adalah metode yang digunakan untuk mencari titik maksimum dan minimum pada batas tertentu. Misalnya kita diminta mencari titik maksimum dan minimum dari $f(x, y)$ dengan batas $g(x, y)$. Adapun metode lagrange adalah sebagai berikut:

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad dan \qquad g(x, y) = 0$$

Dengan (x, y) titik kritis dan λ adalah faktor lagrange

1. Cari nilai maksimum dan minimum $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$
   Jawab: kita akan menggunakan metode lagrange, kita buat dulu $\nabla f(x,y)$ dan $\nabla g(x,y)$, ingat kembali bahwa
   $$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j$$
   maka
   $$f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$$
   $$\nabla f(x,y) = 2x\ i - 2y\ j$$

   $$x^2 + y^2 = 1$$
   $$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$
   $$\nabla g(x,y) = 2x\ i + 2y\ j$$

   Dari metode lagrange
   $$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \qquad dan \qquad g(x,y) = 0$$
   $$2x\ i - 2y\ j = \lambda(2x\ i + 2y\ j)$$
   Kita uraikan menjadi
   $$2x = \lambda\ 2x \ldots\ldots\ldots (1)$$
   $$-2y = \lambda\ 2y \ldots\ldots\ldots (2)$$
   $$x^2 + y^2 = 1 \ldots\ldots\ldots (3)$$
   Dari persamaan (3) nilai x dan y tidak mungkin sama sama nol. jadi kita buat dua kemungkinan
   - Untuk $x \neq 0$
     Dari persamaan (1) $\lambda = 1$
     Dari persamaan (2) $y = 0$
     Dari persamaan (3) $x = \pm 1$
     titik kritisnya $(1{,}0)\ dan\ (-1{,}0)$
   - Untuk $y \neq 0$
     Dari persamaan (1) $\lambda = -1$
     Dari persamaan (2) $x = 0$
     Dari persamaan (3) $y = \pm 1$
     titik kritisnya $(0{,}1)\ dan\ (0,-1)$

   Total titik kritis ada 4 yaitu: $(1{,}0)\ (-1{,}0)\ \ (0{,}1)\ dan\ (0,-1)$
   Kita coba tiap titik ke fungsinya $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$

- Untuk $(1,0)$
$$f(1,0) = 1^2 - 0^2 + 1 = 2$$
- Untuk $(-1,0)$
$$f(-1,0) = (-1)^2 - 0^2 + 1 = 2$$
- Untuk $(0,1)$
$$f(0,1) = 0^2 - (1)^2 + 1 = 0$$
- Untuk $(0,-1)$
$$f(0,1) = 0^2 - (1)^2 + 1 = 0$$

Jadi nilai maksimumnya = 2 pada titik $(1,0)$ $(-1,0)$
Dan nilai minimumnya = 0 pada titik $(0,1)$ dan $(0,-1)$

2. Dimanakan minimum dari $f(x,y,z) = 4x - 2y + 3z$ dalam batas $2x^2 + y^2 - 3z = 0$

   Jawab:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

   Dimana

$$g(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 3z = 0$$
$$\langle 4, -2, 3 \rangle = \lambda \langle 4x, 2y, -3 \rangle$$

$$4 = 4\lambda x \tag{1}$$
$$-2 = 2\lambda y \tag{2}$$
$$3 = -3\lambda \tag{3}$$
$$2x^2 + y^2 - 3z = 0 \tag{4}$$

   Dari (3)

$$\lambda = -1 \tag{5}$$

   Dari (1) dan (5)

$$x = -1 \tag{6}$$

   Dari (2) dan (5)

$$y = 1 \tag{7}$$

   Dari (4),(6), dan (7)

$$z = 1 \tag{8}$$

   Berdasarkan (6),(7), dan (8), titik (-1,1,1) adalah titik kritis

$$f(-1,1,1) = -3$$

   Untuk membuktikan apakah ini titik minimum adalah dengan membandingkan nilai f pada titik lain dimana $g = 0$. Salah satunya adalah $g(1,1,1) = 0$ dan $f(1,1,1) = 5$

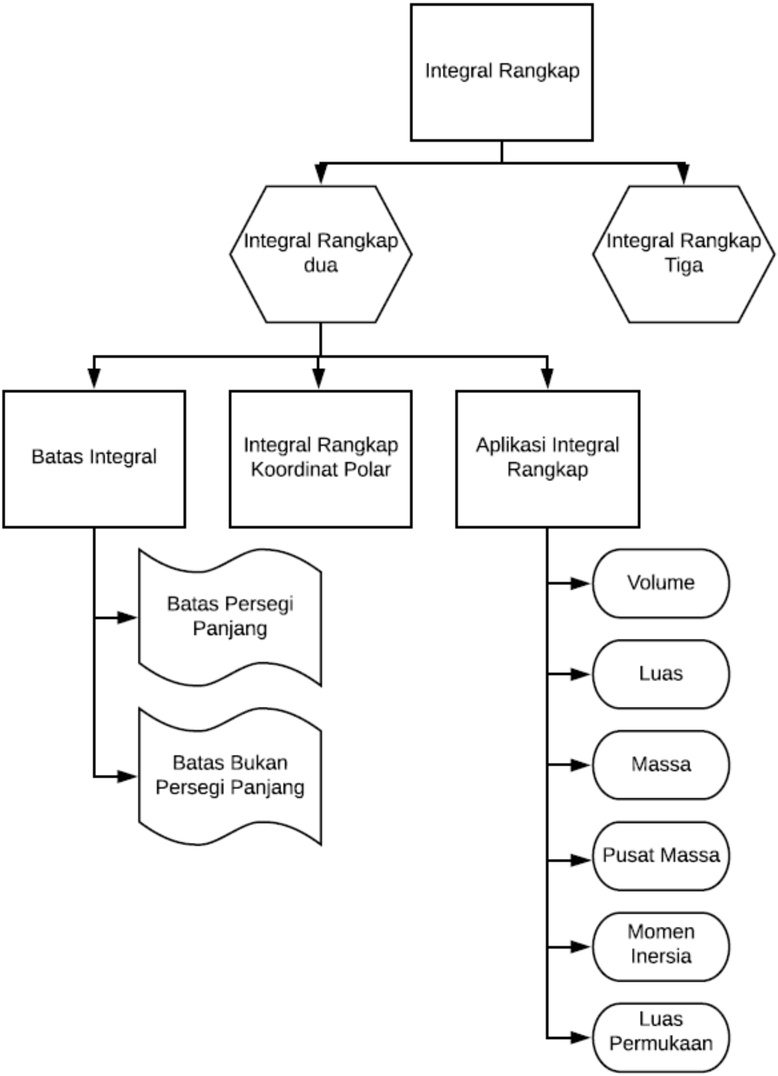
   Karena $f(-1,1,1) < f(1,1,1) = 5$ maka titik (-1,1,1) adalah titik minimum

Latihan Soal Fungsi Dua Variabel

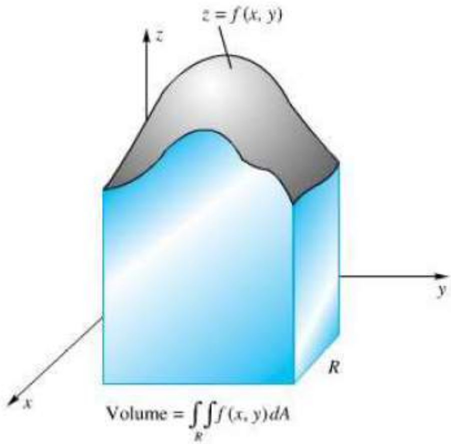
Soal UTS 2023

1. Diberikan fungsi f sebagai berikut
$$f(x,y) = \frac{8x^3 + y^3}{2x + y}$$
   a) Tentukan daerah terbesar dimana fungsi f kontinu. Jelaskan bagaimana agar fungsi f kontinu di seluruh bidang xy
   b) Tentukan persamaan parametrik garis singgung pada kurva perpotongan permukaan $f(x,y)$ dengan bidang $y = 1$ di titik $(0,1,1)$
2. Diberikan fungsi f yang merupakan fungsi dua peubah bernilai real dengan
$$f(x,y) = x^2y + xy^3 - 2y$$
   a) Carilah persamaan parameter dari garis singgung terhadap permukaan $z = f(x,y)$ di titik (0,1,-2) yang proyeksinya pada bidang-xy adalah sejajar garis $x = 0$
   b) Jika $x = r^2t + \ln t$ dan $y = t^3 + \sin(r^2t)$, maka tentukanlah $\frac{\partial f}{\partial t}$ saat r = 0 dan t = 1
3. Tentukan semua titik pada bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$dimana bidang singgung pada titik tersebut sejajar dengan bidang $2x + y - 3z = 2$
4. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$ pada daerah $D = \{(x,y)|0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2\}$
5. Tentukan titik pada permukaan $y^2 = 9 + xz$ yang mempunyai jarak terdekat dengan asal
6. Diketahui sebuah piringan mempunyai bentuk permukaan yang dapat dinyatakan sebagai $\{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1\}$. Misalkan piringan tersebut dipanaskan dan suhu pada suatu titik (x,y) dinyatakan dalam $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$.
   Tentukan titik-titik pada piringan tersebut yang mempunyai suhu terpanas dan suhu terdingin.

BAB 4 INTEGRAL RANGKAP



Kita sudah mengenal Integral dari jaman SMA, salah satu kegunaan dari integral adalah untuk menghitung **Luas** dari kurva suatu fungsi. Jika yang kita miliki adalah fungsi dua variabel seperti $z = f(x, y)$ maka **volume** dari kurva fungsi tersebut juga dapat dihitung dengan integral.



Gambar 1. volume dari kurva fungsi dua variabel

4.1 INTEGRAL RANGKAP

Untuk menghitung volume dari kurva fungsi dua variabel, kita akan menggunakan integral rangkap. Secara umum dituliskan sebagai berikut

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint f(x, y)\, dxdy$$

*Keterangan: lambang integralnya ada dua, lalu karena fungsinya dua variabel (yaitu) x dan y, maka batas batasnya tergantung x dan y nya, dan integralnya dx dy.

Sifat-sifat dari integral rangkap kurang lebih sama dengan sifat integral biasa:

- Perkalian skalar (k adalah skalar)

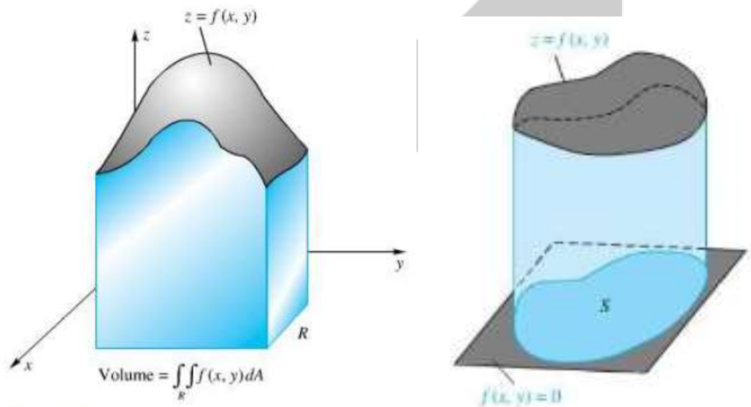
$$\iint_R kf(x,y)\,dA = k\iint_R f(x,y)\,dA$$

- Sifat asosiatif dan distributif

$$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$$

4.2 INTEGRAL RANGKAP DENGAN BATAS PERSEGI PANJANG

Dengan integral rangkap, kita menghitung volume dari suatu bangun. Dimana tingginya adalah z yang merupakan fungsi x dan y $z = f(x,y)$ .Batas persegi panjang yang kita maksud disini adalah alas bangun yang kita hitung pada bidang xy. Dikatakan persegi panjang karena benar-benar bagian bawahnya persegi panjang



Gambar 2. Kiri: Batas persegi panjang; kanan: batas **bukan** persegi

Untuk batas persegi, batas-batas integralnya dituliskan bilangan real, e.g:

$$\int_0^3 \int_1^2 (2x + 3y)\, dxdy$$

1. Hitunglah

$$\int_0^3 \int_1^2 (2x + 3y)\, dxdy$$

Jawab:

Pertama kita harus perhatikan dengan baik urutan integralnya terhadap variabel apa, apakah dx dulu atau dy dulu, lalu batesnya yang mana. Untuk memperjelas, soal ini dapat saya tulis seperti ini

$$\int_0^3 \left(\int_1^2 (2x + 3y)\, dx \right) dy$$

Sehingga pada soal ini yang duluan adalah dx, sehingga kita pisah dulu, kita hitung

$$\int_1^2 (2x + 3y)\, dx$$

$$= [x^2 + 3xy]_1^2 = [(2)^2 + 3(2)y] - [(1)^2 + 3(1)y]$$
$$= 3 + 3y$$

Hasil dari integral dx selanjutnya kita integralkan terhadap dy

$$\int_0^3 3 + 3y\, dy$$

$$= \left[3y + \frac{3}{2}y^2\right]_0^3 = \left[3(3) + \frac{3}{2}(3)^2\right] = \frac{45}{2}$$

Jadi hasil integralnya adalah $\frac{45}{2}$

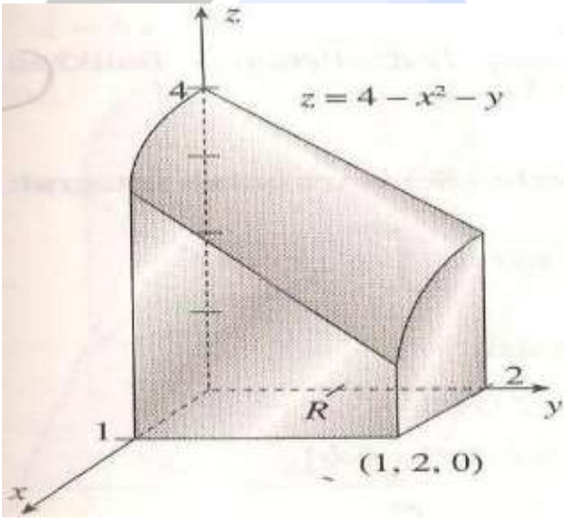
Karena integral lipat dua merepresentasikan volume dari suatu bangun, maka jika kita menghitung integralnya dengan urutan yang berbeda (antara dx dulu atau dy dulu), nilainya akan sama

Pada soal ini, kita dapat menghitung integral dengan dy terlebih dahulu, tetapi harus diperhatikan, jika kita tukar dx dan dy-nya maka batasnya juga harus ditukar

$$\int_0^3 \int_1^2 (2x + 3y)\, dxdy \quad menjadi \quad \int_1^2 \int_0^3 (2x + 3y)\, dydx$$

Nilai dari dua integral diatas pasti dan harusnya sama. Silahkan dibuktikan sendiri.

2. Hitung volume bangun berikut



Jawab:

Bangun diatas adalah fungsi $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y$ dengan batas persegi panjang. Pertama kita harus lihat batas x dan y-nya.

- Batas x

  Kita lihat sumbu x, bangun yang kita cari volumenya memiliki panjang dari 0 sampai 1 terhadap sumbu x, sehingga batas dx-nya adalah 0 sampai 1

- Batas y
  Pada sumbu y, bangun yang kita cari volumenya memiliki panjang dari 0 sampai 2, batas dy-nya adalah 0 sampai 1

Sehingga intergralnya dapat kita tuliskan

$$\int_0^2 \int_0^1 (4 - x^2 - y)\, dxdy \quad atau \quad \int_0^1 \int_0^2 (4 - x^2 - y)\, dydx$$

Untuk hitung volum, kita pake salah satu aja dari dua diatas karena hasilnya pasti sama

$$V = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x^2 - y)\, dxdy$$

$$= \int_0^2 \left[4x - \frac{1}{3}x^3 - xy\right]_0^1 dy = \int_0^2 \left[4x - \frac{1}{3}x^3 - xy\right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^2 \frac{11}{3} - y\, dy$$

$$= \left[\frac{11}{3}y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

Jadi volumenya adalah $\frac{16}{3}$

4.3 INTEGRAL RANGKAP DENGAN BATAS BUKAN PERSEGI PANJANG

Apabila batasnya bukan persegi panjang, pada batas batasnya bukan angka doang, tapi bisa juga fungsi yang merepresentasikan bentuk dari batesnya

1. Hitunglah

$$\int_0^1 \int_0^{3x} x^2 \; dydx$$

Jawab: dari urutan integralnya, pertama kita integralkan terhadap y

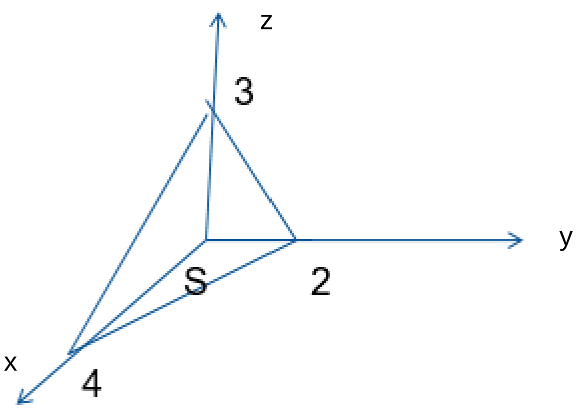
$$\int_0^{3x} x^2 \; dy = [x^2 y]_0^{3x} = [x^2(3x)] - [0] = 3x^3$$

Lalu kita integral terhadap x

$$\int_0^1 3x^3 \, dx = \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

Jadi nilai intergalnya adalah ¾

2. Hitunglah volume bangun ini



Jawab: untuk soal kayak gini, step stepnya cukup banyak

- Mencari fungsi $z = f(x, y)$

  Kita buat dulu fungsinya, bidang diatas persamaannya adalah

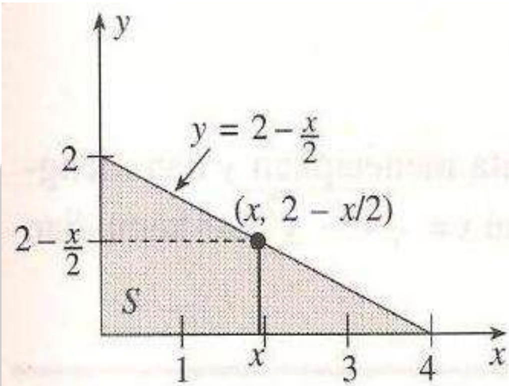
$3x + 6y + 4z = 12$ (diingat lagi cara membuat persamaan bidang.)

Lalu kita ubah ke fungsi z

$$3x + 6y + 4z = 12$$
$$4z = 12 - 3x - 6y$$
$$z = \frac{12 - 3x - 6y}{4} = \frac{3}{4}(4 - x - 2y)$$

- Mencari Batas

  Untuk mencari batas, kita gambarkan dulu penampang dari bidang x,y nya. Ternyata adalah bentuk segitiga seperti berikut



  Batas x-nya adalah dari 0 sampai 4, sedangkan y merupakan fungsi terhadap x, yaitu

$$y = f(x) = 2 - \frac{x}{2}$$

  Sehingga batas y-nya adalah dari 0 sampai $2 - \frac{x}{2}$

- Mencari volume

  Karena udah dapet fungsi z nya dan batesnya, tinggal integral

$$V = \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \frac{3}{4}(4 - x - 2y)\, dydx$$
$$= \int_0^4 \frac{3}{4}\left[4y - xy - y^2\right]_0^{2-\frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \frac{3}{16}\int_{0}^{4} \left[4\left(2-\frac{x}{2}\right) - x\left(2-\frac{x}{2}\right) - \left(2-\frac{x}{2}\right)^2\right] - [0]\ dx$$

$$= \frac{3}{16}\int_{0}^{4} 16 - 8x + x^2\ dx$$

$$= \frac{3}{16}\left[16x - 4x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{3}{16}\left[16(4) - 4(4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3\right] = 4$$

Jadi, volumenya adalah 4

3. Selesaikan Integral rangkap berikut

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\sin\theta} 6r\cos\theta\ dr\ d\theta$$

Jawab:

Pertama fokus ke integral terhadap r terlebih dahulu

$$\int_{0}^{\sin\theta} 6r\cos\theta\ dr = [3r^2\cos\theta]_0^{\sin\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta$$

Hasil integral pertama digunakan untuk integral kedua terhadap θ

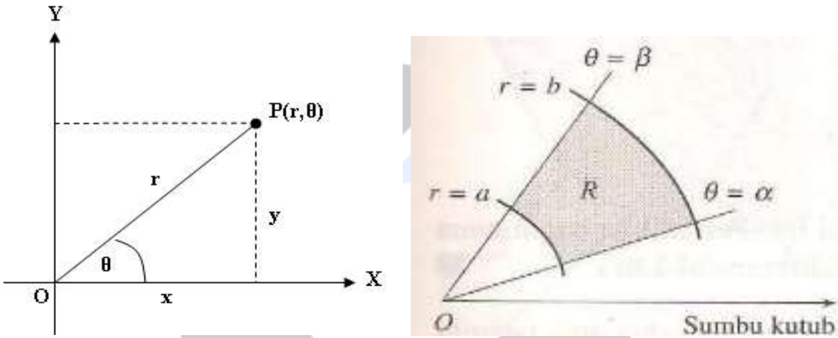
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2\theta\cos\theta\ d\theta = [\sin^3\theta]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= \sin^3\frac{\pi}{2} - \sin^3\frac{\pi}{6} = (1)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$$

4.4 INTEGRAL RANGKAP PADA KOORDINAT POLAR

Integral rangkap pada koordinat polar digunakan untuk menghitung volume yang alasnya bidang geometri seperti lingkaran, kardioda, lemniskat dsb. Yang tidak dapat atau sulit dihitung jika menggunakan koordinat kartesian. Hubungan antara koordinat polar dan koordinat kartesian sudah dibahas di bab sebelumnya, secara garis besar adalah

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$dA = r\ drd\theta$$



Gambar 3. Hubungan koordinat kartesian dan koordinat polar (kiri), dan variable pada Koordinat Polar (kanan)

Suatu daerah tiga dimensi dari fungsi z yang alasnya kurva dengan koordinat polar dengan r (jari-jari) yang diketahu nilainya, dan batas atas dan bawah sudut (θ) dapat dihitung volumnya Dengan persamaan integral

$$V = \iint r\ drd\theta$$

1. Tentukan volume V dari benda padat diatas persegipanjang polar : $R = \{(r,\theta): 0 \le r \le 3\ ; 0 \le \theta \le \pi\}$ dan dibawah permukaan $z = x^2 + y^2$

   Jawab:

   - pertama kita ubah fungsi z nya ke polar: Diketahui $x^2 + y^2 = r^2$

   Maka permukaan $z = x^2 + y^2 = r^2$

- Batas batas integral
  Untuk integral dr, batasnya adalah 0 sampai 3
  Untuk integral $d\theta$, batasnya adalah 0 sampai π

$$V = \int_0^{\pi} \int_1^{3} r^2 \, dr d\theta$$

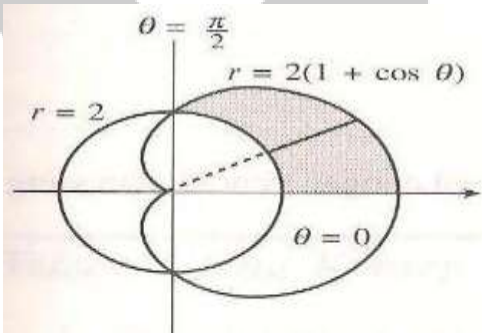
Tinggal kita kerjain integralnya, liat urutannya integral terhadap r dulu baru terhadap sudut

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{3} r^2 \, dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^3 d\theta = \int_0^{\pi} 9 \, d\theta = [9\theta]_0^{\pi} = 9\pi$$

Jadi volumenya adalah 9π

2. Hitunglah nilai dari $\iint y \, dA$ dengan alas berbentuk daerah arsir dibawah ini



Jawab:
Pertama kita identifikasi dulu daerah mana yang kita hitung, Daerah yang diarsir adalah daerah **diluar** lingkaran dan **didalam** kardioda.

Persamaan lingkarannya $r = 2$

Persamaan kardiodanya $r = 2(1 + \cos\theta)$
Sehingga batas integralnya adalah 2 sampai $2(1 + \cos\theta)$

$$r = 2 \to 2 + 2\cos\theta$$

Lalu kita lihat bahwa daerah yang diarsir tersebut batas sudutnya dari $0°$ sampai $90°$ (kuadran 1) sehingga batas integralnya dari 0 sampai $\frac{\pi}{2}$

$$\theta = 0 \to \pi/2$$

Lalu kita tulis integralnya secara lengkap sebagai berikut

$$\iint y\, dA$$

$$r = 2 \to 2(1 + \cos\theta)$$

$$\theta = 0 \to \frac{\pi}{2}$$

$$y = r\sin\theta$$

$$dA = r\, drd\theta$$

$$\iint y\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos\theta)} r\sin\theta\ r\, drd\theta$$

Pertama kita integral terhadap r. Perhatikan bahwa $dA = r\, drd\theta$

$$\int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(2(1+\cos\theta)^3}{3}\sin\theta - \frac{(2)^3}{3}\sin\theta\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(2(1+\cos\theta)^3}{3}\sin\theta - \frac{(2)^3}{3}\sin\theta\right] d\theta$$

Kita keluarkan $8/3$, menjadi

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} [(1+\cos\theta)^3 \sin\theta - \sin\theta] d\theta$$

Sampe disini gausah kita hitung hasil pengurangannya, tapi langsung kita jadiin integral masing-masing agar lebih mudah dikerjakannya

$$\frac{8}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)^3 \sin\theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta\right]$$

- Untuk yang ini kita gunakan metode subtitusi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos\theta)^3}{3} \sin\theta \, d\theta$$

$$1+\cos\theta = u$$
$$-\sin\theta = du$$

Integralnya menjadi

$$\int u^3 \, du = -\frac{1}{4}u^4 = -\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4$$

$$\frac{8}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)^3 \sin\theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta\right]$$

$$= \frac{8}{3}\left(\left[-\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\left[-\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4 + \cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{8}{3}\left[\left(-\frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)^4 + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}(1+\cos 0)^4 + \cos 0\right)\right]$$

$$= \frac{8}{3}\left[\left(-\frac{1}{4}(1+0)^4 + 0\right) - \left(-\frac{1}{4}(1+1)^4 + 1\right)\right]$$

$$= \frac{8}{3}\left[-\frac{1}{4} + \frac{16}{4} - 1\right] = \frac{8}{3}\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{22}{3}$$

4.5 APLIKASI INTEGRAL RANGKAP

1. LUAS

Luas bidang dapat dipandang sebagai integral lipat dua jika f(x,y) = 1 , sehingga integral lipat dua menjadi :

$$A = \iint_R dA \quad \text{atau A} = \iint_R \text{dxdy} = \iint_R \text{dydx}$$

2. VOLUME

Jika z=f(x,y) adalah persamaan permukaan , maka volume benda

$$V = \iint_R f(x,y)\, dxdy$$

3. MASSA

Jika f(x,y) dipandang sebagai massa jenis (massa persatuan luas), maka massa dari benda itu.

$$\iint_R f(x,y) dxdy$$

4. PUSAT MASSA

Jika f(x,y) merupakan massa jenis dari lamina (pelat tipis), maka pusat massanya : (x,y) adalah sbb :

$$x = \frac{M_Y}{M} = \frac{\iint_R x\ f(x,y) dA}{\iint_R f(x,y) dA} \qquad y = \frac{M_X}{M} = \frac{\iint_R y\ f(x,y) dA}{\iint_R f(x,y) dA}$$

5. MOMEN INERSIA

Momen Inersia dari pelat tipis yang mempunyai Kerapatan f(x,y) terhadap sumbu x dan sumbu y adalah :

$$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)..dA \qquad I_y = \iint_R x^2 f(x,y)..dA$$

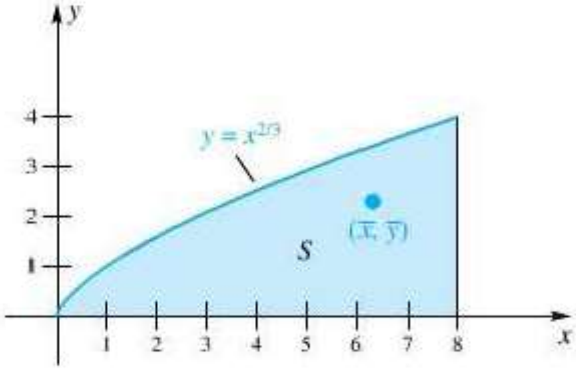
,

Sedangkan momen inersia terhadap sumbu z (titik asal) :

$$I_Z = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2)\, f(x,y)..dA$$

Contoh Soal Aplikasi Integral Rangkap

1.



bangun dua dimensi diatas memiliki densitas sebagai fungsi $\delta(x, y) = xy$. Hitunglah massa dari bangun diatas

jawab: pertama kita buat dulu bentuk integral rangkapnya. Kita sudah punya densitas sebagai fungsinya, sekarang kita tentukan batas batas integralnya. Untuk sumbu x batas integralnya adalah dari 0 sampai 8. Sedangkan untuk sumbu y batasnya adalah dari 0 sampai $x^{2/3}$

sehingga integralnya adalah

$$m = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} xy \; dydx$$

Kenapa kita pilih integral terhadap dy terlebih dahulu? Karena batas dari sumbu y dari nol sampai fungsi x. Sedangkan kalau batas sumbu x tidak berupa fungsi

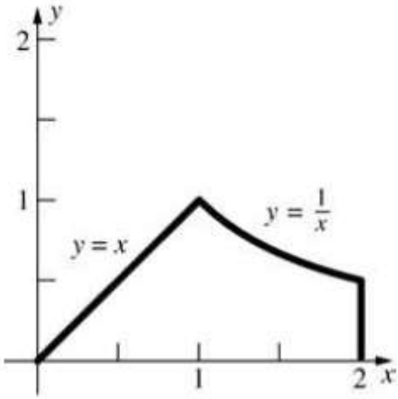
$$m = \int_0^8 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_0^8 \frac{x(x^{\frac{2}{3}})^2}{2} dx = \int_0^8 \frac{x^{\frac{7}{3}}}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{3}{10}\left[x^{\frac{10}{3}}\right]_0^8 = \frac{3}{20}\left[8^{\frac{10}{3}}\right] = \frac{768}{5} = 153{,}6$$

Jadi massa bangun tersebut adalah 153,6 satuan

2. Carilah pusat massa dari bangun yang dibentuk dari $y = x$ $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 2$, dengan densitas $\delta(x, y) = x$

Jawab: pertama kita sketsakan dulu bangun yang dimaksud.



Karena ada $y = x \; dan \; y = 1/x$ maka titik potongnya ada di $x = 1$
Sekarang kita hitung dulu massanya.
Karena bentuknya tidak kontinu (ada dua fungsi f(x)) maka integralnya kita bagi jadi 2 integral:

- integral batas x: 0 sampai 1. dan batas y: 0 sampai $y = x$
- integral batas x: 1 sampai 2. Dan batas y: 0 sampai $y = 1/x$

$$m = \int_0^1 \int_0^x x \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{1/x} x \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 [xy]_0^x \, dx + \int_1^2 [xy]_0^{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \, dx + \int_1^2 1 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + [x]_1^2 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

Sekarang kita hitung pusat massa y

$$M_y = \iint x\,\delta\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^x x^2\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{1/x} x^2\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 [x^2 y]_0^x\,dx + \int_1^2 [x^2 y]_0^{\frac{1}{x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

Sekarang kita hitung pusat massa y

$$M_x = \iint y\,\delta\,dA$$

$$M_x = \int_0^1 \int_0^x xy\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{x}} xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^x dx + \int_1^2 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{x}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + [\ln x]_1^2\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m},\frac{M_x}{m}\right) = \left(\frac{\frac{7}{4}}{\frac{4}{3}},\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln 2}{\frac{4}{3}}\right) = \left(\frac{21}{16},\frac{3}{32}+\frac{3}{8}\ln 2\right)$$
$$= (1{,}3125\,,0.3537)$$

Jadi pusat massanya ada di titik $(1.3125\,,0.3537)$

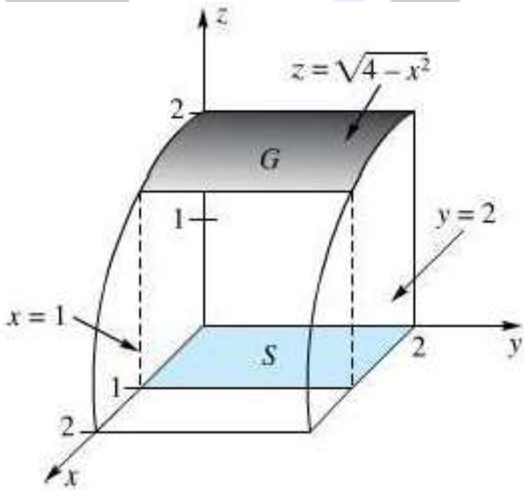
4.6 LUAS PERMUKAAN

Luas permukaan bangun yang dibentuk dari suatu fungsi dua peubah $f(x,y)$ dapat dihitung dengan integral sebagai berikut

$$A(G) = \iint\limits_{s} \sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2 + 1}\ dA$$

Dimana f_x dan f_y adalah turunan parsial terhadap x dan y

1. hitunglah luas permukaan yang ditandai G pada gambar berikut



Jawab: pertama kita identifikasi dulu. Bangun diatas memiliki persamaan $z = \sqrt{4-x^2}$ dan yang kita hitung adalah yang ditandai G. Jika kita proyeksikan ke bidang xy, maka alas dari permukaan yang kita hitung berupa persegi panjang (pada gambar ditunjukkan oleh S)

Karena alasnya persegi panjang, artinya mudah untuk kita menentukan batas integralnya. Yaitu:

- batas sumbu x dari 0 sampai 1
- batas sumbu y dari 0 sampai 2

sekarang kita buat dulu turunan parsial x dan y

$$z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} = (4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_x = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f_y = 0$$

Diingat lagi apa itu turunan parsial

$$A(G) = \iint_S \sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2 + 1}\ dA = \iint_S \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2 + 0^2 + 1}\ dA$$

$$= \iint_S \sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2} + 1}\ dA = \iint_S \sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2} + \frac{4 - x^2}{4 - x^2}}\ dA$$

$$= \iint_S \sqrt{\frac{4}{4 - x^2}}\ dA = \iint_S \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\ dA$$

Sekarang kita input batas batas integral tadi

$$A(G) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\ dydx = \int_0^1 \left[\frac{2y}{\sqrt{4 - x^2}}\right]_0^2 dx$$

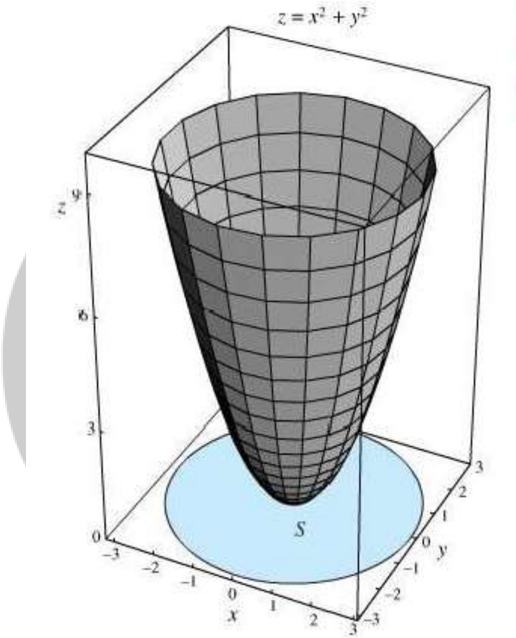
$$\int_0^1 \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}\ dx$$

Diingat kembali bahwa $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ sehingga

$$\int_0^1 \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 4\left[sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1$$

$$= 4[sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - sin^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)] = 4\,[\frac{\pi}{6} - 0] = \frac{2\pi}{3}$$

2. hitunglah luas permukaan bidang berikut diketahui persamaan bidangnya adalah fungsi $z = x^2 + y^2$ dan dibatasi alas yang berupa lingkaran $z = 9$



Jawab: untuk menjawab soal seperti ini kita menggunakan integral dengan koordinat polar (karena alasnya bentuk lingkaran)

Tetapi pertama kita tetap buat dulu turunan parsial x dan y

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f_x = 2x \qquad\qquad f_y = 2y$$

$$A(G) = \iint_S \sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2 + 1}\;dA = A(G) = \iint_S \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\;dA$$

$$= \iint_S \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\ dA$$

Sekarang kita ubah ke bentuk integral koordinat polar
Ingat kembali

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$dA = r\ drd\theta$$

Karena alasnya adalah lingkaran dengan jari jari 3, maka batas integralnya adalah:

- batas r adalah 0 sampai 3
- batas θ adalah 0 sampai 2π

$$A(G) = \iint_S \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\ dA = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1}\ r\ drd\theta$$

Kita fokus dulu ke integral yang terhadap r

$$\int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1}\ r\ dr$$

Kita gunakan metode subtitusi

$$u = 4r^2 + 1$$
$$du = 8r\ dr$$
$$dr = \frac{du}{8r}$$

$$\int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1}\ r\ dr = \int_0^3 u^{\frac{1}{2}}\, r\ \left(\frac{du}{8r}\right) = \left[\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{1}{12}\left[(4(3)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - \left((4(0)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]\right.$$

$$= \frac{1}{12}(37^{\frac{3}{2}} - 1)$$

Sehingga

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}\ r\,drd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\left(37^{\frac{3}{2}}-1\right)\,d\theta$$

Dengan sifat integral, kita pindahin semua angkanya ke depan

$$= \frac{1}{12}\left(37^{\frac{3}{2}}-1\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{12}\left(37^{\frac{3}{2}}-1\right)\,[\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{12}\left(37^{\frac{3}{2}}-1\right)\,(2\pi) = \frac{\pi}{6}\left(37^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

Jadi luas permukaan bangun diatas adalah
$\frac{\pi}{6}\left(37^{\frac{3}{2}}-1\right)$ atau 117.32 satuan

4.7 INTEGRAL RANGKAP TIGA

Integral rangkap tiga artinya integral terhadap tiga variabel, umumnya x,y dan z. Integral rangkap tiga kurang lebih ngerjainnya sama kayak integral rangkap 2, yang penting cari tau dulu bates-bates tiap integral (batas x, batas y, batas z), abis itu kerjain integralnya berurutan (harus perhatikan urutan integralnya.

Bentuk integral rangkap tiga secara umum adalah

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV$$

1. Hitunglah integral rangkap 3 berikut dengan $B = \{(x,y,z): 1 \le x \le 2, -2 \le y \le 4, 0 \le z \le 5\}$

$$\iiint_B 6xy^2z^3\,dV$$

Jawab:

Karena udah dikasih tau batas x,y,z nya pertama-tama kita rangkai dulu integralnya. Jadi pada soal jenis ini kita bebas bikin urutan integralnya kayak gimana pun. Boleh x dulu abis itu y trus z. Boleh juga z dulu abis itu x trus y. Gak masalah karena semua batasnya dalam bentuk angka (bukan fungsi). Dan urutan manapun yang digunakan pasti jawabannya sama.

Yang harus diperhatiin adalah kalau itntegral terhadap x harus pake batesnya x, dst. Urutan yang penulis pilih adalah integral terhadap x, lalu y dan terakhir z

$$\int_0^5 \int_{-2}^4 \int_1^2 6xy^2z^3\,dxdydz$$

$$= \int_0^5 \int_{-2}^4 \left(\int_1^2 6xy^2z^3\,dx \right) dydz = \int_0^5 \int_{-2}^4 \left[\frac{6}{2} x^2y^2z^3 \right]_1^2 dydz$$

$$= \int_0^5 \int_{-2}^4 (3(2)^2y^2z^3) - (3(1)^2y^2z^3)\,dydz = \int_0^5 \int_{-2}^4 9y^2z^3\,dydz$$

$$= \int_0^5 \left(\int_{-2}^4 9y^2z^3dy \right) dz = \int_0^5 \left[\frac{9}{3} y^3z^3 \right]_{-2}^4 dz$$

$$= \int_0^5 (3(4)^3z^3) - (3(-2)^3z^3)\,dz = \int_0^5 216z^3\,dz = \left[\frac{216}{4} z^4 \right]_0^5$$

$$= (54(5)^4 - 0) = 33750$$

Ada juga cara yang lebih sederhana, yaitu kerjain masing masing integral x y z nya

$$\int_0^5 \int_{-2}^4 \int_1^2 6xy^2z^3\,dxdydz = 6 \int_1^2 x\,dx \int_{-2}^4 y^2dy \int_0^5 z^3dz$$

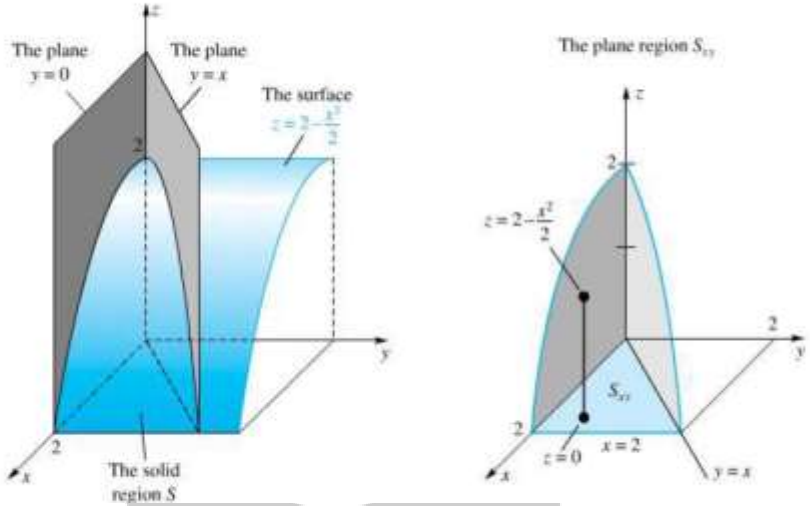
$$= 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-2}^4 \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^5 = 6 \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{64}{3} - \left(-\frac{8}{3} \right) \right) \left(\frac{625}{4} - 0 \right)$$

$$= 6 \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{72}{3} \right) \left(\frac{625}{4} \right) = 33750$$

Satu lagi jenis soal apa bila batas-batasnya ada yang berupa fungsi

2. Hitunglah integral lipat 3 dari $f(x,y,z) = 2xyz$ dengan batas berupa bangun pada oktan pertama yang dibatas oleh silinder $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$ bidang $z = 0$ $y = 0$ dan $y = x$

Jawab: sketsa dari bidang tersebut adalah sebagai berikut



Dari sini dapat kita tentukan batas-batas integralnya

- Batas x adalah dari 0 sampai 2
- Batas y adalah dari 0 sampai $y = x$
- Batas z adalah dari 0 sampai $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$

Karena batasnya ada yang pake fungsi, kita harus urutin integralnya sehingga integral terhadap x yang terakhir (Karena bates integral x angka semua). Sedangkan urutan y atau z duluan bebas.

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x^2/2} 2xyz \; dzdydx$$

$$= \int_0^2 \int_0^x \left(\int_0^{2-\frac{x^2}{2}} 2xyz \; dz \right) dydx = \int_0^2 \int_0^x [xyz^2]_0^{2-\frac{x^2}{2}} \, dydx$$

$$= \int_0^2 \int_0^x \left(4xy - 2x^3y + \frac{1}{4}x^5y\right) dydx =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{4}{2}xy^2 - \frac{2}{2}x^3y^2 + \frac{1}{8}x^5y^2\right]_0^x dx$$

$$= \int_0^2 2x^3 - x^5 + \frac{1}{8}x^7 \, dx = \left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{x^6}{6} + \frac{1}{64}x^8\right]_0^2$$

$$= \frac{2}{4}(2)^4 - \frac{(2)^6}{6} + \frac{1}{64}(2)^8 = 8 - \frac{32}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

Latihan Soal Integral Rangkap

1. Soal Kuis 2022

   Diberikan permukaan $z = xe^{\frac{x}{y^2}}$. Misalkan S adalah daerah di kuadran 1 pada bidang$-xy$ yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}; x = 0; dan\ y = 1$
   a) Sketsakan daerah S dan nyatakan S sebagai himpunan sederhana$-y$ dan himpunan sederhana$-x$
   b) Hitunglah volume benda pejal yang terletak dibawah permukaan $z = xe^{\frac{x}{y^2}}$ dan diatas daerah S

2. Soal UAS 2021
   Suatu daerah R di kuadran pertama dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4; x = 0; y = 4$ & $y = x$. Tanpa menghitung, tuliskan bentuk integral lengkap dengan batasnya dari
   a) $\iint_R f(x,y)\, dxdy$
   b) $\iint_R f(x,y)\, dydx$
   c) $\iint_R f(r,\theta) r\, drd\theta$

3. Soal Kuis 2022
   Gunakanlah integral lipat dua untuk menghitung volume benda pejal yang dibatasi oleh permukaan $z = 8 - x^2 - y^2$ dan $z = 3x^2 + 3y^2 - 8$ dan sketsakanlah daerah integrasinya terlebih dahulu

4. Sketsa benda pejal S yang terbentuk karena sebuah kerucut bersudut puncak $60°$ dipotong oleh bola berjari-jari 2, dan ujung krucut berimpit dengan pusat bola, hitunglah volume benda pejal S tersebut!

5. Tentukan volume benda pejal yang berada dibawah permukaan $z = xy$ dan diatas segitiga dengan titik sudut (1,1), (4,1), (1,2)

6. Tentukan hasil dari $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2) dydx$ dengan cara mengubah urutan integrasinya dan dengan mengubah ke koordinat polar

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN UTS

1. Tuliskan 5 suku pertama barisan $a_n = (2n)^{1/2n}$ kemudian tentukan apakah barisan tersebut konvergen atau divergen. Jika konvergen, carilah limitnya.

Jawaban:

Sesuai perintah soal, kita buat 5 suku pertama dengan cara mensubtitusi langsung ke persamaan baris.

$$a_1 = (2 \cdot 1)^{1/2 \cdot 1} = 2^{1/2}$$

$$a_2 = (2 \cdot 2)^{1/2 \cdot 2} = 4^{1/4}$$

$$a_3 = (2 \cdot 3)^{1/2 \cdot 3} = 6^{1/6}$$

$$a_4 = (2 \cdot 4)^{1/2 \cdot 4} = 8^{1/8}$$

$$a_5 = (2 \cdot 5)^{1/2 \cdot 5} = 10^{1/10}$$

Untuk menentukan konvergen atau divergen, maka dicari limit menuju tak hingga dari persamaan baris.

$$\lim_{n\to\infty} (2n)^{1/2n}$$

Untuk mencari limit dari persamaan tersebut, perlu dibuat permisalan. Buat y

$$y = (2n)^{1/2n}$$

Buat y kebentuk logaritma natural (ln) dan sederhanakan. (ingat sifat logaritmik)

$$\ln y = \ln(2n)^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2n} \ln 2n = \frac{\ln 2n}{2n}$$

Kemudian cari nilai limit ln y menggunakan dalil L'hopitals

$$\lim_{n\to\infty} \ln y \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2n}{2n} = \frac{\ln 2(\infty)}{2(\infty)} = \infty/\infty$$

Menggunakan dalil L`Hopitals, diturunkan terhadap n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2(\infty)} = 0$$

Didapatkan nilai limit tak hingga dari ln(y) adalah nol. Lalu Kembali ke soal yang ditanyakan. Dan diubah ke bentuk euler sehingga mendapat nilai ln y, sebagai berikut

Ingat Kembali: $e^{\ln x} = x$

Sehingga

$$(2n)^{1/2n} = e^{\ln y}$$

Maka dapat didapatkan nilai limit dari persamaan baris

$$\lim_{n\to\infty} (2n)^{1/2n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln y}$$

Telah dibuktikan bahwa limit tak hingga ln(y) adalah nol, sehingga

$$\lim_{n\to\infty} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

Kesimpulannya adalah **baris konvergen menuju 1**

2. Tentukan apakah deret ganti tanda konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^4}{2^n}$$

Jawaban:

Pengujian pertama menggunakan uji rasio untuk nilai mutlak dari baris tersebut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n^4}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$$

Uji rasio

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4/2^{n+1}}{n^4/2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^4} \frac{2^n}{2^n \cdot 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{2n^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{2n^4} = 1/2$$

P < 1 Sehingga deret tersebut konvergen mutlak

3. Diketahui $x = 6s^2$; $y = -2s^3$ dengan s ≠ 0. Carilah $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$

Jawaban:

$$\frac{dy}{ds} = -6s^2 \qquad \frac{dx}{ds} = 12s$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{-6s^2}{12s} = -\frac{1}{2}s$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{-1/2}{12s} = -\frac{1}{24s}$$

4. Tentukan deret berikut ini apakah konvergen atau divergen?

$$1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \cdots$$

Jawaban:

Pertama kita buat dulu persamaan deretnya

$$1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}}{(2n)!}$$

Uji konvergen menggunakan uji rasio mutlak

$$P = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2(n+1)}/(2(n+1))!}{2^{2n}/(2n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2(n+1)}}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+2}}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(2n+2)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\cdot 2^2}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{4n^2+6n+2} = 0$$

P < 1 Sehingga deret tersebut konvergen

5. Berikut ini adalah persamaan sebuah konik yang telah ditransformasikan (dirotasi), tentukan jenis konik tersebut!
$$4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 + 10\sqrt{3}x + 10y = 5$$

Jawaban:

Ingat Kembali bentuk

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{4-2}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Maka nilai 2θ adalah $\frac{\pi}{3}$ $atau$ $60°$. Nilai $\theta = \frac{\pi}{6} atau$ $30°$

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta = u\frac{\sqrt{3}}{2} - v\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}u - v}{2}$$
$$y = u\sin\theta + v\cos\theta = u\frac{1}{2} + v\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{u + \sqrt{3}v}{2}$$

Kita subtitusikan nilai x dan y ke persamaan awal

$$4\left(\frac{\sqrt{3}u - v}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}u - v}{2}\right)\left(\frac{u + \sqrt{3}v}{2}\right) + 2\left(\frac{u + \sqrt{3}v}{2}\right)^2$$
$$+ 10\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}u - v}{2}\right) + 10\left(\frac{u + \sqrt{3}v}{2}\right) = 5$$

Persamaan disederhanakan menjadi

$$5u^2 + v^2 + 20u = 5$$

Persamaan dibuat menjadi kuadrat sempurna dengan menambahkan 20 ke ruas kiri dan kanan

$$5u^2 + 20u + 20 + v^2 = 5 + 20$$

$$5(u^2 + 4u + 4) + v^2 = 25$$

$$5(u + 2)^2 + v^2 = 25$$

Kedua sisi dibagi dengan 25

$$\frac{5(u+2)^2}{25} + \frac{v^2}{25} = \frac{25}{25}$$

$$\frac{1(u+2)^2}{5} + \frac{v^2}{25} = 1$$

Didapatkanlah persamaan elipsnya

6. Gunakan Taylor Polynomial untuk menentukan aproksimasi nilai berikut di orde ke 5 berbasis dengan nilai 1!

$$\int_{0,8}^{1,2} \ln x \, dx$$

Jawaban:

Berdasarkan deret taylor

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, -1 < x \leq 1$$

Maka deret taylor untuk $\ln x$ bisa dibuat dengan cara mensubtitusi $(x-1)$ kesemua x pada deret taylor $\ln(x+1)$ yaitu menjadi

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$$

$$\int_{0,8}^{1,2} \ln x \, dx = \int_{0,8}^{1,2} \left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} \right) dx$$

$$\int_{0,8}^{1,2} \ln x \, dx = \left[\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} - \frac{(x-1)^5}{20} + \frac{(x-1)^6}{30} \right]_{0,8}^{1,2}$$

$$\int_{0,8}^{1,2} \ln x \, dx = -0,00269867$$

CONTOH SOAL DAN JAWABAN UAS

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = 7cos^{-1}\sqrt{2x}$

Jawaban:

Harus diingat bentuk

$$\frac{d}{dx}(Cos^{-1}u) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Setelah itu hanya perlu subtitusi ke bentuk diatas.

Dalam soal ini $u = \sqrt{2x}$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

Sehingga

$$\frac{d}{dx}\left(7cos^{-1}\sqrt{2x}\right) = 7\left(-\frac{\frac{1}{\sqrt{2x}}}{\sqrt{1-\sqrt{2x}^2}}\right)$$

$$= 7\left(-\frac{1}{\sqrt{2x}\sqrt{1-2x)}}\right) = -\frac{7}{\sqrt{2x-4x^2}}$$

Jawabannya sudah didapatkan tapi kurang tepat karena sejatinya bentuk akar tidak boleh jadi penyebut. Jadi dirasionalkan menjadi

$$-\frac{7}{\sqrt{2x-4x^2}} = \frac{7\sqrt{2x-4x^2}}{2x-4x^2}$$

2. Buktikan bahwa $sec(tan^{-1}x) = \sqrt{1+x^2}$

Jawaban:

Untuk menjawab soal pembuktian, kita perlu mengutak atik salah satu ruas, diubah menjadi sama dengan ruas sebelahnya. Ruas yang diutakatik boleh ruas kiri ataupun kanan, yang penting salah satu aja (tidak boleh kedua ruas di ubah). Pada kasus ini lebih mudah dibuktikan dengan merubah ruas kiri

Pertama kita gunakan Identitas trigonometri

$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$ atau $\sec\theta = \sqrt{1 + tan^2\theta}$

$$\sec(tan^{-1}x) = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\sqrt{1 + tan^2(tan^{-1}x)} = \sqrt{1 + x^2}$$

Ingat Kembali bahwa $tan(tan^{-1}\,x) = x$

$$\sqrt{1 + tan^2(tan^{-1}x)} = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + x^2}$$

Terbukti $\sec(tan^{-1}x) = \sqrt{1 + x^2}$

3. Carilah titik kritis maksimum dan minimum dari fungsi
$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Jawaban:

Pertama buat turunan parsial terhadap x dan y

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$f_y(x, y) = 6xy - 12$$

Ingat Kembali pengertian Titik kritis, yaitu Ketika $f_x = f_y = 0$

Untuk $f_x = 0$ maka

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 = 15$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

Untuk $f_y = 0$ maka

$$f_y(x, y) = 6xy - 12$$

$$6xy = 12$$

$$xy = 2$$

Dari $x^2 + y^2 = 5$ dan $xy = 2$ kita cari nilai semua kemungkinan (x, y) dengan cara membuat kuadrat sempurna

$$x^2 + y^2 = 5 \ldots\ldots..(i)$$

$$xy = 2 \ldots\ldots\ldots..(ii)$$

Kita buat $(i) + 2(ii)$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 9$$

$$(x + y)^2 = 9$$

$$x + y = \pm 3$$

Kita buat $(i) - 2(ii)$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1$$

$$(x - y)^2 = 1$$

$$x - y = \pm 1$$

Dari $x + y = \pm 3$ dan $x - y = \pm 1$ maka nilai (x, y) yang memenuhi ada 4, yaitu $(-2, -1); (2,1); (1,2); (-1, -2)$

Selanjutnya kita identifikasi masing-masing titik kritis apakah titik maksimum atau minimum dengan uji turunan kedua. Ingat Kembali rumus

$$D = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - \left(f_{xy}(x, y)\right)^2$$

Dimana

- $f(x,y)$ nilai maksimum lokal jika $D > 0$ dan $f_{xx}(x,y) < 0$
- $f(x,y)$ nilai minimum lokal jika $D > 0$ dan $f_{xx}(x,y) > 0$
- $f(x,y)$ adalah titik pelana jika $D < 0$
- Jika $D = 0$ tidak dapat ditarik kesimpulan

$$f_{xx}(x,y) = 6x$$

$$f_{yy}(x,y) = 6x$$

$$f_{xy}(x,y) = 6y$$

Sehingga Rumus D pada soal ini menjadi

$$D = 36x^2 - 36y^2$$

Lalu kita hitung nilai D untuk tiap $(-2,-1); (2,1); (1,2); (-1,-2)$

titik	f_{xx}	D	keterangan
(-2,-1)	-12	108	Maksimum lokal
(2,1)	12	108	Minimum local
(1,2)	6	-108	Titik Pelana
(-1, -2)	-6	-108	Titik Pelana

4. Selesaikan Integral Parsial dari $\int \sqrt{x} \ln x \ dx$

Jawaban:

Soal ini dapat diselesaikan dengan bentuk integral parsial berikut

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

Jika $u = \ln x$ dan $v = \sqrt{x}$

Maka $u' = \frac{1}{x}$ dan $v = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$

Nilai-nilai tersebut disubtitusikan menjadi

$$\int uv' = uv - \int u'v = (\ln x)\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right) - \int \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right) dx$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}\ln x}{3} - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}\, dx$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}\ln x}{3} - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)}{9} + C$$

5. Selesaikan Integral lipat dari $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2} \rho^2 \sin\emptyset \, d\rho \, d\emptyset \, d\theta$

Jawaban:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2} \rho^2 \sin\emptyset \, d\rho \, d\emptyset \, d\theta$$

Dalam mengerjakan soal integral lipat, tidak usah diambil pusing. Karena sebenarnya integral lipat sama mudahnya dengan integral biasa. Tahap pertama adalah temukan urutan intgral mana yang dikerjakan terlebih dahulu.

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \underbrace{\int_1^2 \rho^2 \sin \emptyset \, d\rho}_{\text{pertama}} \, d\emptyset}_{\text{kedua}} \, d\theta}_{\text{ketiga}}$$

Integral pertama

$$\int_1^2 \rho^2 \sin \emptyset \;\, d\rho = \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \emptyset\right]_{\rho=1}^{\rho=2} = \frac{7}{3} \sin \emptyset$$

Integral kedua

$$\int_1^2 \frac{7}{3} \sin \emptyset \, d\emptyset = \left[-\frac{7}{3} \cos \emptyset\right]_{\emptyset=0}^{\emptyset=\pi} = \frac{14}{3}$$

Integral ketiga

$$\int_0^{2\pi} \frac{14}{3} d\theta = \left[\frac{14}{3} \theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{28}{3} \pi \;\approx 29{,}3$$

Tetapi dalam penulisan jawaban di buku ujian jangan seperti ini. Penulisan jawaban untuk integral lipat yang ideal untul soal ini adalah sebagai berikut

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_1^{2}\rho^2 \sin\phi \, d\rho\right] d\phi \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\sin\phi\right]_{\rho=1}^{\rho=2} d\phi \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{7}{3}\sin\phi \, d\phi\right] d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{7}{3}\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{14}{3} d\theta = \frac{28\pi}{3} \approx 29.32$$

6. Selesaikan integral lipat dari $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_4^{\sqrt{25-r^2}} r \; dz \, dr \, d\theta$

Jawaban:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_4^{\sqrt{25-r^2}} r \; dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\left[\int_4^{\sqrt{25-r^2}} r \; dz\right] dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{3}[rz]_{z=4}^{z=\sqrt{25-r^2}} \; dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\left[r\sqrt{25-r^2} - 4r\right] dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 r\sqrt{25 - r^2} - 4r\,dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(25 - r^2)^{\frac{3}{2}} - 2r^2 \right]_{r=0}^{r=3} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{7}{3}\; d\theta = \left[\frac{7}{3}\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{14\pi}{3} \approx 14{,}7$$

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL

BAB 1

Soal UAS 2023

1. Diberikan barisan berikut

$$-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{9}{8}, \frac{13}{16}, -\frac{17}{32}, \ldots.$$

a) Tentukanlah formula eksplisit dari barisan tersebut

Jawab:

- Untuk bagian pembilang
  1, 5, 9, 13, 17 = dimana setiap angka memiliki beda nilai 4 atau dengan kata lain selalu bertambah 4

$$K_1 = 1 + 4 = 5;$$
$$K_2 = 5 + 4 = (1 + 4) + 4; \ldots..$$
$$K_n = \big((1 + a) + a\big) + a \ldots.$$

  Sehingga didapat $a_n = 1 + 4n$

- Untuk bagian penyebut
  2, 4, 8, 16, 32, … = dapat dilihat bahwa penyebut naik untuk setiap 2^n

b) Jelaskanlah konvergensi dari barisan tersebut! Jika konvergen, tentukanlah konvergen ke nilai berapa

Jawab:

digunakan limit tak hingga untuk membuktikan apakah a_n konvergen atau divergen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1 + 4n}{2^n}$$

Gunakan $\frac{1+4n}{2^n}$ untuk dilakukan pendekatan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 4n}{2^n} = \frac{\infty}{\infty}$$

Gunakan dalil L'Hôpital, sehingga menjadi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2^n \ln 2} = 0$$

Didapat bahwa a_n konvergen ke nilai 0

2. Diberikan barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = \frac{cos^{2019}(2n)}{n}$
   a) Tentukan apakah barisan $\{a_n\}$ monoton naik, monoton turun, atau bukan keduanya

$$a_n = \frac{cos^{2019}(2n)}{n}$$

Jawab:

- Jika $cos^{2019}(2n) \geq 0,$ maka:

$$\frac{cos^{2019}(2n)}{n} \geq 0$$

- Jika $cos^{2019}(2n) < 0,$ maka:

$$\frac{cos^{2019}(2n)}{n} < 0$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\{a_n\}$ berisolasi disekitaran 0. Sehingga $\{a_n\}$ tidak monoton naik dan tidak monoton turun

   b) Tentukan apakah barisan $\{a_n\}$ konvergen atau divergen. Jika divergen tentukanlah $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Jika divergen, berikanlah alasannya

Jawab:

Akan digunakan teorema apit untuk membuktikan konvergen atau divergen

$$-1 \leq \cos(2n) \leq 1$$

$$-1^{2019} \leq cos^{2019}(2n) \leq 1^{2019}$$

$$-\frac{1}{n}^{2019} \leq \frac{cos^{2019}(2n)}{n} \leq \frac{1}{n}^{2019}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}^{2019} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{cos^{2019}(2n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}^{2019}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{cos^{2019}(2n)}{n} \leq 0$$

Berdasarkan teorema apit , barisan $\{\lim_{n\to\infty} \frac{cos^{2019}(2n)}{n}\}$ konvergen ke 0

3. Tunjukan bahwa barisan $\{b_n\}$ dimana $b_n = \frac{n^2}{2^n}$ konvergen. Gunakan teorema barisan monoton

Jawab:

Beberapa suku pertama dari barisan tersebut adalah

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{9}{16}, \frac{49}{128}, \ldots..$$

Terlihat bahwa $b_n > 0$ dan untuk n ≥ 3 berlaku $b_n \geq b_{n+1}$ (akan dibuktikan), sehingga $\{b_n\}$ merupakan barisan tidak naik dengan batas bawah 0.

Jadi, berdasarkan teorema barisan monoton, barisan $\{b_n\}$ konvergen

Bukti bahwa barisan $\{b_n\}$ tidak naik untuk n ≥ 3:

$$b_n \geq b_{n+1}$$

$$\leftrightarrow \frac{n^2}{2^n} \geq \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$$

$$\leftrightarrow 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$\leftrightarrow n^2 - 2n \geq 1$$

$$\leftrightarrow n(n-2) \geq 1$$

Persamaan $n(n-2) \geq 1$ terpenuhi jika n ≥ 3, sehingga benar bahwa $b_n \geq b_{n+1}$ untuk n ≥ 3

4. Dari fungsi $f(x) = \ln(1+x)$ tentukanlah

   a) Deret Mclaurin

   <u>Jawab</u>:

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f''''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Pada saat x = 0, maka diperoleh

$$f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = 1$$

$$f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$$

$$f''''(0) = -\frac{6}{(1+0)^4} = -6$$

Jadi deret mclaurin dari fungsi f(x) adalah

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{(-6)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

b) Deret Taylor pada $x = 1$

Jawab:

Dengan menggunakan turunan fungsi pada point sebelumnya, maka pada saat x = 1, diperoleh

$$f(1) = \ln(1+1) = \ln 2$$

$$f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(1) = \frac{2}{(1+1)^3} = \frac{1}{4}$$

$$f''''(1) = -\frac{6}{(1+1)^4} = -\frac{3}{8}$$

Jadi deret taylor dari fungsi f(x) pada saat x = 1 adalah

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots + \frac{f^n(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$f(x) = \ln 2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1!}(x-1) + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{2!}(x-1)^2 + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{3!}(x-1)^3 + \frac{\left(-\frac{3}{8}\right)}{4!}(x-1)^4 + \cdots$$

$$f(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3 - \frac{1}{64}(x-1)^4 + \cdots$$

5. Tentukan solusi persamaan differensial $y'' = xy' + y = 0$

Jawab:

- Persamaan differensial ini termasuk persamaan differensial dengan koefisien variable, tetapi bukan termasuk persamaan Cauchy-Euler
- Dengan menggunakan deret pangkat, misalkan solusi yang ingin dicari berupa deret:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

- Nilai:

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ dan $y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$

- Substitusikan ke persamaan differensial, diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

- Perhatikan tabel berikut

Pangkat x	Koefisien
x^0	$2(1)c_2 + c_0 = 0$ atau $c_2 = -\frac{1}{2}c_0$
x^1	$3(2)c_3 + c_1 + c_1 = 0$ atau $c_3 = -\frac{1}{3}c_1$
x^2	$4(3)c_4 + 2c_2 + c_2 = 0$ atau $c_4 = -\frac{1}{4}c_2$
x^3	$5(4)c_5 + 3c_3 + c_3 = 0$ atau $c_5 = -\frac{1}{5}c_3$
x^4	$6(5)c_6 + 4c_4 + c_4 = 0$ atau $c_6 = -\frac{1}{6}c_4$
$\vdots$	$\vdots$
x^n	$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)c_n = 0$ atau $c_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)}c_n$

- Kita bedakan koefisien $c_n$untuk kasus $n = 2k - 2$ genap dan $n = 2k - 1$ ganjil
- Untuk $n = 2k - 2$, diperoleh perpangkatan dalam x^{2k-2}, dan:

$$c_{2k} = -\frac{1}{2}c_{2k-2}$$

- Sehingga:

$$c_{2k} = \left[-\frac{1}{2}\right]\left[-\frac{1}{2k-2}\right]\dots\left[-\frac{1}{6}\right]\left[-\frac{1}{4}\right]c_0$$

$$= -\frac{(-1)^k}{(2)(4)(6)\dots(2k)}c_0$$

- Untuk $n = 2k - 1$, diperoleh perpangkatan dalam x^{2k-1}, dan:

$$c_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}c_{2k-1}$$

- Sehingga:

$$c_{2k+1} = \left[-\frac{1}{2k+1}\right]\left[-\frac{1}{2k-1}\right]\dots\left[-\frac{1}{5}\right]\left[-\frac{1}{3}\right]c_1$$

$$= -\frac{(-1)^k}{(3)(5)\dots(2k+1)}c_1$$

- Diperoleh solusi umum:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\, x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}\, x^{2k+1}$$

$$= c_0 \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{(-1)^k}{(2)(4)(6)\dots(2k)}$$
$$+ c_1 \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{(-1)^k}{(3)(5)\dots(2k+1)}$$

Sebagai solusi dari persamaan differensial $y'' = xy' + y = 0$

6. Selesaikan persamaan differensial $y' - y = 0$
Jawab:
- Asumsikan:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Adalah persamaan solusi untuk persamaan differensial $y' - y = 0$. Maka turunannya adalah:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n\, x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

Substitusikan persamaan asumsi dan persamaan turunannya ke dalam persamaan differensial yang awal:

$$y' - y = (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) = 0$$

Kumpulkan x yang berpangkat sama, lalu samakan jumlah koefisien masing-masing x sama dengan 0

$$(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots = 0$$

$(a_1 - a_0) = 0$, maka didapat $a_1 = a_0$

$(2a_2 - a_1) = 0$, maka didapat $2a_2 = a_1 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} \rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2!}$

$(3a_3 - a_2) = 0$, maka didapat $3a_3 = a_2 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} \rightarrow a_3 = \frac{a_0}{3!}$

Substitusikan nilai a_0, a_1, a_2, a_3 ke persamaan asumsi, maka akan diperoleh:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$= a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2} x^2 + \frac{a_0}{6} x^3 + \cdots$$

$$y = a_0(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = a_0(e^x)$$

Jadi, diperoleh solusi umum dari persamaan differensial tersebut adalah $y = a_0(e^x)$

BAB 2

1. Diberikan dua kurva yang berturut-turut mempunyai persamaan parameter:
$x = e^{\sqrt{t}}; y = t - ln\, t^2$ dan $x = t + t\ln t; y = ae^t$, dengan $0.5 \leq t \leq 4$.
tentukanlah nilai a agar kedua garis singgung dari masing-masing kurva tersebut saling tegak lurus di $t = 1$
Jawab:
Garis singgung $C_1 \rightarrow\ x = e^{\sqrt{t}}; y = t - ln\, t^2$
Akan dicari $\frac{dy}{dt}$ & $\frac{dx}{dt}$ dari garis singgung C_1:

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{2}{t}; \frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{2\sqrt{t}}$$

Garis singgung $C_2 \rightarrow\ x = t + t\ln t; y = ae^t$
Akan dicari $\frac{dy}{dt}$ & $\frac{dx}{dt}$ dari garis singgung C_2:

$$\frac{dx}{dt} = 2 + \ln t\,; \frac{dy}{dt} = ae^t$$

Selanjutnya akan dicari gradien garis singgung untuk C_1 dan C_2:

- Untuk C_1

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{2}{t}}{\frac{e^t}{2\sqrt{t}}}$$

Saat $t = 1$, maka:

$$m_1 = \frac{1 - \frac{2}{(1)}}{\frac{e^{(1)}}{2\sqrt{(1)}}} = \frac{-1}{\frac{e}{2}} = \frac{-2}{e}$$

- Untuk C_2

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{ae^t}{2 + \ln(t)}$$

Saat $t = 1$, maka:

$$m_2 = \frac{ae^{(1)}}{2 + \ln(1)} = \frac{ae}{2}$$

Setelah mendapatkan m_1 & m_2, maka selanjutnya akan dicari nilai a:

$$m_1 . m_2 = -1$$

$$\left(\frac{-2}{e}\right).\left(\frac{ae}{2}\right) = -1$$

$$-a = -1$$

$$a = 1$$

2. Posisi sebuah titik pada saat t dinyatakan sebagai $x = \frac{1}{2}t^2$; $y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{\frac{3}{2}}$. Tentukan jarak yang ditempuh oleh titik tersebut dari $t = 0$ sampai $t = 4$

Jawab:

$$\frac{dx}{dt} = t; \ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\right)(6t + 9)^{\frac{1}{2}}.6 = (6t + 9)^{\frac{1}{2}}$$

Misal jarak yang ditempuh dinotasikan dengan L

$$L = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$L = \int_{t=0}^{t=4} \sqrt{t^2 + (6t + 9)^2} dt$$

$$L = \int_{t=0}^{t=4} \sqrt{t^2 + 6t + 9} dt$$

$$L = \int_{t=0}^{t=4} \sqrt{(t+3)^2}dt$$

$$L = \int_{t=0}^{t=4} t + 3\ dt$$

$$L = \frac{1}{2}t^2 + 3t\Big|_0^4$$

$$L = \frac{1}{2}(4)^2 + 3(4)$$

$$L = 20$$

3. Hitung panjang busur kurva $24xy = x^4 + 48$ dari $x = 2$ hingga $x = 4$

   Jawab:

$$24xy = x^4 + 48$$

$$y = \frac{x^4 + 48}{24x}$$

$$y = \frac{x^3}{24} + \frac{2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{8} - \frac{2}{x^2}$$

   Panjang busur:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{8} - \frac{2}{x^2}\right)^2}\ dx$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{x^4}{64} - \frac{1}{2} + \frac{4}{x^4}}\, dx$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{\frac{x^4}{64} + \frac{1}{2} + \frac{4}{x^4}}\, dx$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{\left(\frac{x^2}{8} + \frac{2}{x^2}\right)^2}\, dx$$

$$L = \int_2^4 \frac{x^2}{8} + \frac{2}{x^2}\, dx$$

$$L = \frac{x^3}{24} - \frac{2}{x}\Big|_2^4$$

$$L = \left(\frac{(4)^3}{24} - \frac{2}{4}\right) - \left(\frac{(2)^3}{24} - \frac{2}{2}\right)$$

$$L = \frac{13}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right) \rightarrow \frac{17}{6}$$

4. Diberikan grafik mawar berdaun tiga $r = 2\sin 3\theta$
   a) Selidikilah kesimetrian grafik tersebut terhadap semua kemungkinan pengujian

   <u>Jawab:</u>

   - Kemungkinan pada sumbu$-x$

     Karena pada sumbu$-x$, maka (r, θ) akan diganti menjadi $(r, -\theta)$ atau $(-r, \pi - \theta)$

     $$r = 2\sin 3\theta$$

     - (r, θ) diganti menjadi $(r, -\theta)$

       $$r = 2\sin 3(-\theta)$$
       $$r = 2\sin(-3\theta)$$
       $$r = -2\sin 3\theta$$

     - (r, θ) diganti menjadi $(-r, \pi - \theta)$

       $$-r = 2\sin 3(\pi - \theta)$$

$$-r = 2\sin(3\pi - 3\theta)$$
$$-r = 2\sin 3\theta$$
$$r = -2\sin 3\theta$$

Tidak didapat kesimpulan apapun dari sumbu$-x$

- Kemungkinan pada sumbu$-y$
  Karena pada sumbu$-y$, maka (r, θ) akan diganti menjadi $(-r, -\theta)$ atau $(r, \pi - \theta)$
  - (r, θ) diganti menjadi $(-r, -\theta)$
    $$-r = 2\sin 3(-\theta)$$
    $$-r = 2\sin(-3\theta)$$
    $$-r = -2\sin 3\theta$$
    $$r = 2\sin 3\theta$$
    Didapat grafik simetri terhadap sumbu$-y$

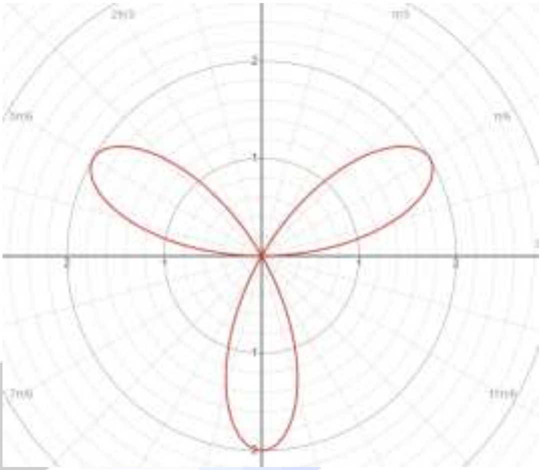
- Kemungkinan pada titik asal
  Karena pada titik asal, maka (r, θ) akan diganti menjadi $(-r, \theta)$ atau $(r, \pi + \theta)$
  - (r, θ) diganti menjadi $(-r, \theta)$
    $$-r = 2\sin 3\theta$$
    $$r = -2\sin 3\theta$$
  - (r, θ) diganti menjadi $(r, \pi + \theta)$
    $$r = 2\sin 3(\pi + \theta)$$
    $$r = 2\sin(3\pi + 3\theta)$$
    $$r = -2\sin 3\theta$$

Tidak memberikan kesimpulan apapun

b) Gambarlah grafik tersebut

Jawab:

r	θ
0	0
$\frac{\pi}{6}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	0
$\frac{\pi}{2}$	-2
$\frac{2\pi}{3}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	2
π	0



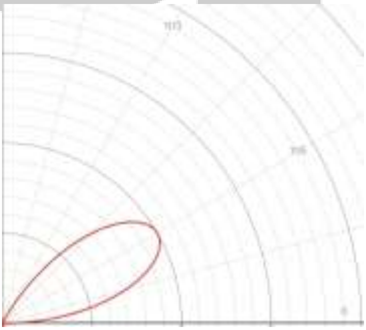
c) Hitunglah luas daerah pada salah satu daun mawar tersebut

Jawab:

Luas seluruh daun mawar:

$$L = \int_{0}^{\pi} (2\sin 3\theta)^2 \ d\theta$$

Luas salah satu daun mawar:



$$L = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \, d\theta$$

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\sin 3\theta)^2 \ d\theta \to L = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2 3\theta \ d\theta \to L$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta \ d\theta$$

$$L = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6\theta\right) \ d\theta \to L = 2\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{12}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \to L$$
$$= 2.\left(\frac{\pi}{6} - 12\sin 2\pi - 0\right)$$

$L = 2.\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{3}$ satuan luas

5. Suatu kurva C didefinisikan dengan persamaan parametrik $x = t^2; y = t^3 - 3t$
   a) Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$
   Jawab:

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3; \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t^2 - \frac{1}{t}\right)$$

   b) Carilah titik C dimana garis singgung horizontal atau vertikal
   Jawab:
   C mempunyai garis singgung horizontal ketika $\frac{dy}{dx} = 0, \frac{dy}{dx} = 0$ ketika:

$$3t^2 - 3 = 0 \to t = \pm 1, t \neq 0$$

- Untuk $t = 1$
  $x = 1^2 = 1;\ \ y = 1^3 - 3(1^2) = -2$. Didapat titik (1,-2)

- Untuk $t = -1$

$x = (-1)^2 = 1; y = (-1)^3 - 3(-1) = 2$. Didapat titik (1,2)

C mempunyai garis singgung vertikal ketika $\frac{dx}{dt} = 0$. $\frac{dx}{dt} = 0$ ketika $t = 0$, maka:

- $t = 0 \rightarrow x = (0)^2;\ y = (0)^3 - 3(0) = 0$, didapat titik (0,0)

c) Tentukan kapan kurva tersebut cekung keatas atau kebawah
Jawab:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\left(t^2 - \frac{1}{t}\right)\right)}{2t} = \frac{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2+1)}{4t^3}$$

Kurva cekung keatas apabila $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$,yaitu ketika $t > 0$

Kurva cekung kebawah apabila $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, yaitu ketika $t < 0$

6. Hitung luas permukaan yang terbentuk jika kurva $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t; y = \cos t$ dengan $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ diputar mengelilingi sumbu$-x$
Jawab:

$$\frac{dx}{dt} = \sec t - \cos \mathrm{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin t$$

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\pi \cos t \sqrt{(\sec t - \cos \mathrm{t})^2 + (-\sin t)^2} dt$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\pi \cos t \sqrt{\sec^2 t + 2\sec t \,.\cos \mathrm{t} + \cos^2 \mathrm{t} + \sin^2 t}\, dt$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\pi \cos t \sqrt{1 + \sec^2 t - 2\frac{1}{\cos \mathrm{t}}.\cos \mathrm{t}\, dt} \rightarrow S$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\pi \cos t \sqrt{1 + \sec^2 t - 2}\, dt$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\pi \cos t \sqrt{\sec^2 t - 1}\, dt \rightarrow S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\pi \cos t \sqrt{tan^2\ t}\, dt \rightarrow S$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\pi \cos t \tan t\ \ dt$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\pi \cos t \frac{\sin t}{\cos t}\ dt \rightarrow S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\pi \sin t\ \ dt \rightarrow S = \ -2\pi \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\rightarrow S = -2\pi.\frac{1}{2} - (-2\pi.1)$$

$$S = \ \pi$$

BAB 3

Soal UTS 2023

1. Diberikan fungsi f sebagai berikut

$$f(x,y) = \frac{8x^3 + y^3}{2x + y}$$

a) Tentukan daerah terbesar dimana fungsi f kontinu. Jelaskan bagaimana agar fungsi f kontinu di seluruh bidang xy

Jawab:

Fungsi f merupakan fungsi rasional sehingga fungsi f akan diskontinu pada saat penyebut bernilai 0, atau ketika

$$2x + y = 0 \to y = -2x$$

Karena fungsi f tidak terdefinisi di garis $y = -2x$ sehingga tidak memenuhi syarat kekontinuan sebuah fungsi, maka akan di definisikan fungsi f di garis $y = -2x$ agar fungsi kontinu

$$f(x,y) = f(x,-2x) = \lim_{(x,y)\to(x,-2x)} f(x,y)$$

$$\leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x,-2x)} \frac{8x^3 + y^3}{2x + y}$$

$$\leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x,-2x)} \frac{(2x + y)(4x^2 + y^2 - 2xy)}{2x + y}$$

$$\leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x,-2x)} 4x^2 + y^2 - 2xy$$

$$\leftrightarrow 4x^2 + y^2 - 2xy$$

$$= 12x^2$$

Agar fungsi f kontinu di sepanjang bidang xy, didefinisikan kembali, $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{8x^3 + y^3}{2x + y}, untuk\ y \neq -2x \\ 12x^2, untuk\ y = -2x \end{cases}$$

b) Tentukan persamaan parametrik garis singgung pada kurva perpotongan permukaan $f(x,y)$ dengan bidang $y = 1$ di titik $(0,1,1)$

Jawab:

Akan dicari terlebih dahulu nilai dari f_x sebagai slope daro garis singgung fungsi f

$$f_x(x,y) = \frac{24x^2(2x+y) - (8x^3 + y^3).2}{(2x+y)^2}$$

$$f_x(0,1) = \frac{24(0)^2\big(2(0) + (1)\big) - (8(0)^3 + (1)^3).2}{(2(0)+(1))^2} = -2$$

Sehingga didapat slope dari garis singgung fungsi f di (0,1,1) adalah nilai dari $f_x(0,1)$ yaitu -2. Garis singgung memiliki vector arah (1, 0, -2), dan karena melalui (0,1,1) maka persamaan parametriknya adalah

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + vektor\ arah.(t)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}(t), dengan\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Diberikan fungsi f yang merupakan fungsi dua peubah bernilai real dengan

$$f(x,y) = x^2y + xy^3 - 2y$$

a) Carilah persamaan parameter dari garis singgung terhadap permukaan $z = f(x,y)$ di titik (0,1,-2) yang proyeksinya pada bidang-xy adalah sejajar garis $x = 0$

Jawab:

$$f_x(x,y) = 2x + y^3$$

$$f_x(0,1) = 2(0) + (1)^3$$

$$f_x(0,1) = 1$$

Persamaan garis singgung:

$$\vec{r} = (x_0, y_0, z_0) + t(1,0, f_x(0,1))$$

$$\vec{r} = (x_0, y_0, z_0) + t(1,0,1)$$

Sehingga persamaan parametriknya adalah:

$$x = 0 + t.1 = t; y = 1 + t.0 = 1; z = -2 + t.1 = -2 + t$$

b) Jika $x = r^2 t + \ln t$ dan $y = t^3 + \sin(r^2 t)$, maka tentukanlah $\frac{\partial f}{\partial t}$ saat r = 0 dan t = 1

Jawab:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

Akan dicari turunan dari fungsi-fungsinya

$$f(x, y) = x^2 y + xy^3 - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3xy^2 - 2$$

$$x = r^2 t + \ln t$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = r^2 + \frac{1}{t}$$

$$y = t^3 + \sin(r^2 t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 3t^2 + \cos(r^2 t).r^2$$

Sehingga menjadi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (2xy + y^3)(r^2 + \frac{1}{t}) + (x^2 + 3xy^2 - 2)(3t^2 + \cos(r^2t).r^2)$$

Ketika r = 0 dan t = 1, maka:

$$= (2xy + y^3)(1) + (x^2 + 3xy^2 - 2)(3(1) + \cos(0).0)$$

$$= (2xy + y^3) + 3(x^2 + 3xy^2 - 2)$$

$$= y^3 + 3x^2 + 9xy^2 + 2xy - 6$$

Untuk mendapatkan x dan y, akan digunakanan:

$$x = r^2t + \ln t$$

$$x = (0)^2(1) + \ln(1) = 0$$

$$y = t^3 + \sin(r^2t)$$

$$y = (1)^3 + \sin\left((0)^2(1)\right) = 1$$

Substitusikan nilai x dan y ke persamaan $\frac{\partial f}{\partial t}$ sebelumnya yang sudah didapat

$$= 1^3 + 3(0)^2 + 9(0)(1)^2 + 2(1)(0) - 6$$

$$= -5$$

3. Tentukan semua titik pada bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$dimana bidang singgung pada titik tersebut sejajar dengan bidang $2x + y - 3z = 2$

Jawab:

Misal $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) = 1$

$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, merupakan vector normal di bidang singgung terhadap permukaan $F(x, y, z) = 1$ di titik $P(x, y, z)$

Misal $W = 2x + y - 3z = 2$. Vector normal dari bidang W adalah **n** = (2,1,-3)
Karena bidang singgung sejajar dengan bidang W maka:

$$\nabla F(x, y, z) = k\boldsymbol{n}$$

$$(2x, 2y, 2z) = k(2,1,-3)$$

Didapatkan $x = k;\ y = \frac{1}{2}k;\ z = -\frac{3}{2}k$
Karena titik $P(x, y, z) = P(k, \frac{1}{2}k, -\frac{3}{2}k)$ berada pada permukaan $F(x, y, z) = 1$, maka

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$k^2 + \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}k\right)^2 = 1$$

$$\frac{14}{4}k^2 = 1$$

$$k = \pm\frac{2}{14}\sqrt{14}$$

Untuk $k = \frac{2}{14}\sqrt{14}$

$$x = k = \frac{2}{14}\sqrt{14}$$

$$y = \frac{1}{2}k = \frac{1}{14}\sqrt{14}$$

$$z = -\frac{3}{2}k = -\frac{3}{14}\sqrt{14}$$

Untuk $k = -\frac{2}{14}\sqrt{14}$

$$x = k = -\frac{2}{14}\sqrt{14}$$

$$y = \frac{1}{2}k = -\frac{1}{14}\sqrt{14}$$

$$z = -\frac{3}{2}k = \frac{3}{14}\sqrt{14}$$

Jadi titik pada bola yang bidang singgung pada titik tersebut sejajar dengan bidang $2x + y - 3z = 2$ adalah $\left(\frac{2}{14}\sqrt{14}, \frac{1}{14}\sqrt{14}, -\frac{3}{14}\sqrt{14}\right)$ dan $(-\frac{2}{14}\sqrt{14}, -\frac{1}{14}\sqrt{14}, \frac{3}{14}\sqrt{14})$

4. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$ pada daerah $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$

Jawab:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4y;$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 - 4x;$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2;$$

$$f_{yy}(x, y) = 12y^2;$$

$$f_{xy}(x, y) = -4$$

Maksimum atau minimum pada daerah interior D

$$\nabla F(x, y) = \bar{0}$$

$$< 4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x > = < 0,0 >$$

Maka:

$$4x^3 - 4y = 0 \rightarrow y = x^3$$

$$4y^3 - 4x = 0 \ \rightarrow x = y^3$$

Didapat:

$$x = x^9$$

$$x - x^9 = 0$$

$$x(1 - x^8) = 0$$

Sehingga didapat nilai-nilai untuk x dan y

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$
$$x = 1 \rightarrow y = 1$$
$$x = -1 \rightarrow y = -1$$

Titik stasioner (0,0),(1,1),(-1,-1)
Uji turunan parsial kedua

$$D = f_{xx}.f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = (12x^2)(12y^2) - 16 = 144x^2y^2 - 16$$

- Untuk (0,0) → $D(0,0) = -16 < 0$, dan sehingga titik (0,0) adalah titik pelana/ saddle
- Untuk (1,1) → $D(1,1) = 144 - 16 > 0$ dan $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, sehingga $f(1,1) = 1^4 + 1^4 - 4.1.1 + 2 = 0$ adalah nilai minimum lokal
- Untuk (-1,-1) tidak memenuhi karena (-1,-1) $\notin D$

Selanjutnya akan dicari nilai maksimum dan minimum pada batas D

- Pada garis x = 0

  $$g_1(y) = f(0,y) = y^4 + 2$$
  $$g_1' = 4y^3 = 0$$

  Titik kritis $y = 0$ & $y = 2$

  $$g_1(0) = (0)^4 + 2 = 2$$
  $$g_1(2) = (2)^4 + 2 = 18$$

- Pada garis y = 0

  $$g_2(x) = f(x,0) = x^4 + 2$$
  $$g_2' = 4x^3 = 0$$

  Titik kritis $x = 0$ & $x = 3$

  $$g_2(0) = (0)^4 + 2 = 2$$
  $$g_2(3) = (3)^4 + 2 = 83$$

- Pada garis x = 3

  $$g_3(y) = f(3,y) = y^4 - 12y + 83$$
  $$g_3' = 4y^3 - 12 \rightarrow y = \sqrt[3]{3}$$

Titik kritis $y = 0, y = 2, y = \sqrt[3]{3}$

$$g_3(0) = (0)^4 - 12(0) + 83 = 83$$
$$g_3(2) = (2)^4 - 12(2) + 83 = 75$$
$$g_3\left(\sqrt[3]{3}\right) = (\sqrt[3]{3})^4 - 12(\sqrt[3]{3}) + 83 \approx 70$$

- Pada garis y = 2

$$g_4(x) = f(x, 2) = x^4 - 8x + 18$$
$$g_3' = 4x^3 - 12 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Titik kritis $x = 0, x = 3, x = \sqrt[3]{2}$

$$g_4(0) = (0)^4 - 8(0) + 18 = 18$$
$$g_4(3) = (3)^4 - 8(3) + 18 = 75$$
$$g_4\left(\sqrt[3]{2}\right) = (\sqrt[3]{2})^4 - 8(\sqrt[3]{2}) + 18 \approx 9.5$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

a. Maksimum global f pada D ada pada titik $(3,0)$ yang menghasilkan $f(3,0) = 83$
b. Minimum global f pada D ada pada titik $(1,1)$ yang menghasilkan $f(1,1) = 0$

5. Tentukan titik pada permukaan $y^2 = 9 + xz$ yang mempunyai jarak terdekat dengan asal.

Jawab:

Misalkan $P(x, y, z)$ adalah titik pada permukaan $y^2 = 9 + xz$
Jarak titik P pada titik asal adalah

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2}$$
$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Selanjutnya akan diminimumkan d. atau dengan kata lain sama saja dengan meminimumkan d^2

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$d^2 = x^2 + 9 + xz + z^2$$

Misalkan $f(x, z) = x^2 + 9 + xz + z^2$, maka:

$$f_x = 2x + z;$$
$$f_{xx} = 2;$$
$$f_z = 2z + x;$$
$$f_{zz} = 2;$$
$$f_{xz} = 1$$

Akan dicari titik kritisnya:

$$\nabla F(x, y) = \bar{0}$$
$$(2\mathrm{x} + \mathrm{z}, 2\mathrm{z} + \mathrm{x}) = (0,0)$$

Didapat $2\mathrm{x} + \mathrm{z} = 0$ & $2\mathrm{z} + \mathrm{x} = 0$ sehingga $\mathrm{x} = \mathrm{z} = 0$, jadi titik kritisnya adalah (0,0)

Akan dilakukan uji turunan parsial kedua

$$D = f_{xx}(0,0).\, f_{yy}(0,0) - \left(f_{xy}(0,0)\right)^2 = 2.2 - 1 = 3 > 0$$
$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0$$

Sehingga
$f(0,0) = 9$ adalah minimum lokal, saat $x = z = 0$, maka $y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$

Sehingga jarak terdekat titik P dengan titik asal adalah $d = \sqrt{9} = 3$ dan titik pada permukaan $y^2 = 9 + xz$ yang mempunyai jarak terdekat dengan titik asal adalah $(0,3,0)$ & $(0,-3,0)$

6. Diketahui sebuah piringan mempunyai bentuk permukaan yang dapat dinyatakan sebagai $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$. Misalkan piringan tersebut dipanaskan dan suhu pada suatu titik (x, y) dinyatakan dalam $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$.
Tentukan titik-titik pada piringan tersebut yang mempunyai suhu terpanas dan suhu terdingin.
Jawab:
Masalah ini disebut sebagai masalah maksimum dan minimum fungsi pada himpunan tutup dan terbatas

Misalkan $S = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$

- Untuk bagian dalam S

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$$
$$T_x = 2x - 1 = 0 \ \rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$T_y = 4y = 0 \ \rightarrow y = 0$$

Didapat titik kritis $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, titik ini berada di dalam lingkaran

- Untuk bagian pada perbatasan S

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$$

Gunakan metode pengali lagrange untuk 1 kendala:

$$\nabla T = \nabla \lambda g$$
$$(2\mathrm{x} - 1{,}4\mathrm{y}) = \lambda(2\mathrm{x}, 2\mathrm{y})$$

Maka didapatkan persamaan,

$$2x - 1 = 2\lambda x$$
$$4y = 2\lambda y$$

Dari persamaan $4y = 2\lambda y$ didapat $y = 0$ atau $\lambda = 2$

Jika $y = 0$ maka pada persamaan kendala didapat $x \pm 1$

Jika $\lambda = 2$ lalu disubstitusi pada $2x - 1 = 2\lambda x$ maka didapat $x = \left(-\frac{1}{2}\right)$; lalu substitusikan nilai x ke persamaan kendala hingga didapat $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Sehingga didapat titik-titik
$(1{,}0), (-1{,}0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$

Untuk $(1{,}0)$, maka $T(1{,}0) = 0$
Untuk $(-1{,}0)$, maka $T(-1{,}0) = 2$
Untuk $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, maka $T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$
Untuk $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, maka $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{9}{4}$
Untuk $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, maka $T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{9}{4}$

Jadi titik pada piringan yang mempunyai suhu terpanas adalah titik $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ dan $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, sedangkan titik dengan suhu terdingin adalah titik $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

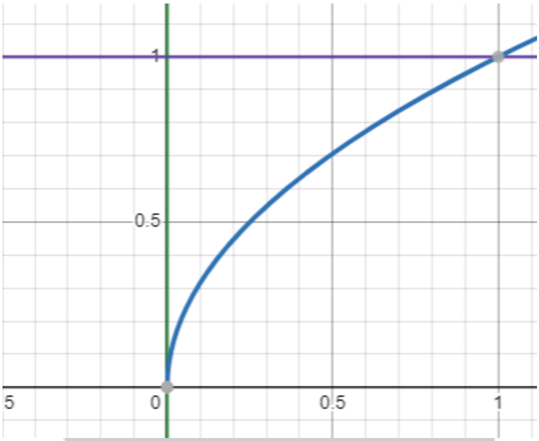
BAB 4

1. Soal Kuis 2022

Diberikan permukaan $z = xe^{\frac{x}{y^2}}$. Misalkan S adalah daerah di kuadran 1 pada bidang$-xy$ yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}; x = 0; dan\ y = 1$

a) Sketsakan daerah S dan nyatakan S sebagai himpunan sederhana$-y$ dan himpunan sederhana$-x$

Jawab:



Dimana garis biru adalah milik $y = \sqrt{x}$, garis hijau adalah milik $x = 0$, dan garis ungu adalah milik $y = 1$

Himpunan sederhana$-x$:

$$S = \{(x, y)|0 \le x \le y^2, 0 \le y \le 1\}$$

Himpunan sederhana$-y$:

$$S = \left\{(x, y)\middle|0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1\right\}$$

b) Hitunglah volume benda pejal yang terletak dibawah permukaan $z = xe^{\frac{x}{y^2}}$ dan diatas daerah S

Jawab:

Akan digunakan daerah S milik x sederhana sebagai batas integral

$$V = \int_0^1 \int_0^{y^2} xe^{\frac{x}{y^2}}\, dxdy$$

Akan digunakan integral parsial untuk mencari $\int_0^{y^2} xe^{\frac{x}{y^2}}\, dx$ terlebih dahulu

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = xe^{\frac{x}{y^2}} \rightarrow v = y^2 e^{\frac{x}{y^2}}$$

$$\int xe^{\frac{x}{y^2}} = x.\, y^2 e^{\frac{x}{y^2}} - \int y^2 e^{\frac{x}{y^2}}\, dx$$

$$= x.\, y^2 e^{\frac{x}{y^2}} - y^4 e^{\frac{x}{y^2}} + C$$

Sehingga:

$$\int_0^{y^2} xe^{\frac{x}{y^2}}\, dx = x.\, y^2 e^{\frac{x}{y^2}} - y^4 e^{\frac{x}{y^2}} \Big|_0^{y^2} = (y^4 e - y^4 e) - (0 - y^4)$$

$$= y^4$$

Jadi diperoleh:

$$V = \int_0^1 \int_0^{y^2} xe^{\frac{x}{y^2}}\, dxdy$$

$$V = \int_0^1 y^4\, dy$$

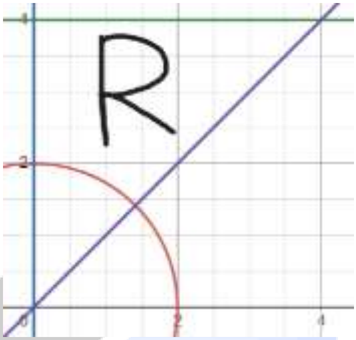
$$V = \frac{1}{5} y^5 \Big|_0^1$$

$$V = \frac{1}{5}$$

2. Soal UAS 2021

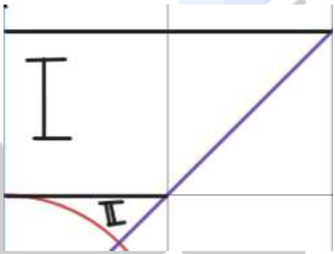
Suatu daerah R di kuadran pertama dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4; x = 0; y = 4$ & $y = x$. Tanpa menghitung, tuliskan bentuk integral lengkap dengan batasnya dari

Sketsa grafik $x^2 + y^2 = 4; x = 0; y = 4$ & $y = x$



a) $\iint_R f(x,y)\,dxdy$

Jawab:



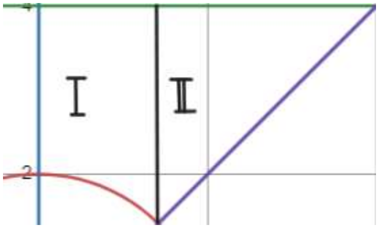
Karena yang diminta dalam bentuk dxdy, maka haruslah batas y adalah konstanta

Pada daerah **I**, dibatasi oleh $x = 0; x = y; y = 2; y = 4$
Pada daerah **II**, dibatasi oleh $x = y$; $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4 - y^2}; y = 2; y = \sqrt{2}$
Sehingga bentuk integralnya adalah

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_{y=2}^{y=4} \int_{x=0}^{x=y} f(x,y)dxdy + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{\sqrt{4-y^2}}^{y} f(x,y)dxdy$$

b) $\iint_R f(x,y)\,dydx$

Jawab:



Karena yang diminta dalam bentuk dydx, maka haruslah batas x adalah konstanta

Pada daerah I, dibatasi oleh $x = 0; x = \sqrt{2}; y = \sqrt{4 - y^2}; y = 4$

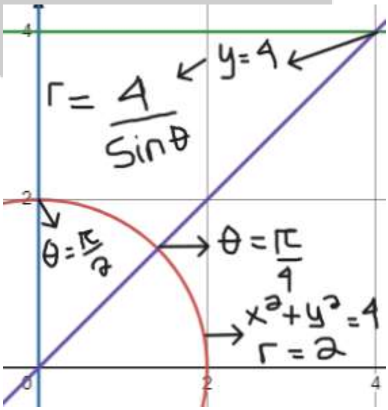
Pada daerah II, dibatasi oleh $x = \sqrt{2}; x = 4; y = x; y = 4$

Sehingga bentuk integralnya adalah

$$\iint_R f(x,y)\,dydx = \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}} \int_{y=\sqrt{4-y^2}}^{y=4} f(x,y)dydx + \int_{\sqrt{2}}^{4}\int_{x}^{4} f(x,y)dydx$$

c) $\iint_R f(r,\theta) r\,drd\theta$

Jawab:



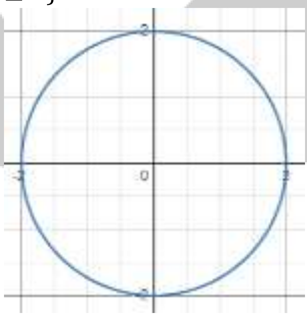
Karena yang diminta dalam bentuk koordinat polar, maka ada beberapa bagian yang perlu di trasformasikan terlebih dahulu seperti pada gambar. Sehingga bentuk integralnya adalah:

$$\iint_R f(r,\theta)r\, dydx = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=2}^{r=\frac{4}{sin\theta}} f(r,\theta)r\, drd\theta$$

3. Soal Kuis 2022
   Gunakanlah integral lipat dua untuk menghitung volume benda pejal yang dibatasi oleh permukaan $z = 8 - x^2 - y^2$ dan $z = 3x^2 + 3y^2 - 8$ dan sketsakanlah daerah integrasinya terlebih dahulu
   Jawab:
   akan dicari proyeksi dari permukaan pada bidang-xy

$$8 - x^2 - y^2 = 3x^2 + 3y^2 - 8$$
$$4x^2 + 4y^2 = 16$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

Sehingga daerah integrase pada bidang-xy didefinisikan oleh $S = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 4\}$



Selanjutnya akan dicari volume benda pejalnya

$$V = \iint_S (8 - x^2 - y^2) - (3x^2 + 3y^2 - 8)dA$$

$$= \iint_S 16 - 4x^2 - 4y^2 dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (16 - 4r^2) r \, dr d\theta$$

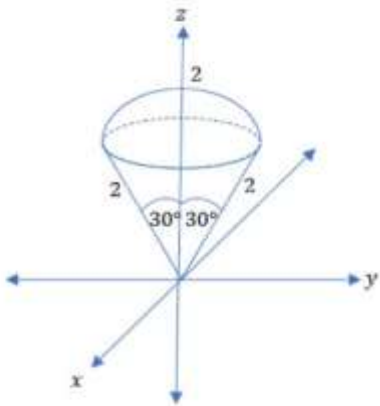
$$= \int_0^{2\pi} 8r^2 - r^4 \Big|_0^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 16 \; d\theta$$

$$= 16\theta|_0^{2\pi}$$

$$= 32\pi$$

4. Sketsa benda pejal S yang terbentuk karena sebuah kerucut bersudut puncak $60°$ dipotong oleh bola berjari-jari 2, dan ujung krucut berimpit dengan pusat bola, hitunglah volume benda pejal S tersebut!
   Jawab:
   Sketsa gambar:



Bentuk umum integral lipat tiga:

$$\iiint_P f(\rho, \theta, \emptyset) \; \rho^2 sin\emptyset \; d\rho d\theta d\emptyset$$

Karena $r = 2$, maka $\rho = 0$ & $\rho = 2$

Karena sudut $60°$ terbagi menjadi 2, maka $\emptyset = 0$ & $\emptyset = \frac{\pi}{6}$ $\theta = 0$ & $\theta = 2\pi$, sehingga bentuk integrasinya adalah

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \rho^2 sin\emptyset \; d\rho d\theta d\emptyset$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\pi} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^2 sin\emptyset \; d\theta d\emptyset$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} sin\emptyset \; d\theta d\emptyset$$

$$V = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta|_0^{2\pi} sin\emptyset \; d\emptyset$$

$$V = \frac{16\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} sin\emptyset \; d\emptyset$$

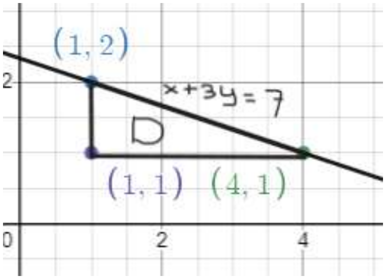
$$V = -\frac{16\pi}{3} cos\emptyset|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$V = -\frac{16\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)$$

$$V = \frac{16\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

5. Tentukan volume benda pejal yang berada dibawah permukaan $z = xy$ dan diatas segitiga dengan titik sudut (1,1), (4,1), (1,2)

Jawab:



Gambar tersebut adalah sketsa daerah D, berikut adalah integrasinya

$$V = \iint_D xy\, dA$$

$$\int_1^4 \int_1^{\frac{7-x}{3}} xy\, dydx$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2} xy^2 \Big|_1^{\frac{7-x}{3}} dx$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2} x \left[\left(\frac{7-x}{3} \right)^2 - 1 \right] dx$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2} x \left[\frac{1}{9} (7-x)^2 - 1 \right] dx$$

$$= \frac{1}{18} \int_1^4 x[49 - 14x + x^2 - 9] dx$$

$$= \frac{1}{18} \int_1^4 40x - 14x^2 + x^3\, dx$$

$$= \frac{1}{18} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{14x^3}{3} + 20x^2 \Big|_1^4 \right]$$

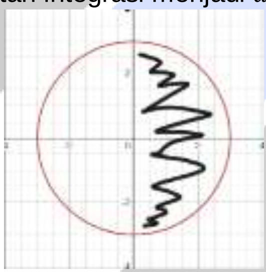
$$= \frac{1}{18}\left(\frac{256}{3} - \frac{187}{2}\right)$$

$$= \frac{31}{8}$$

6. Tentukan hasil dari $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2)dydx$ dengan cara mengubah urutan integrasinya dan dengan mengubah ke koordinat polar

Jawab:

- Mengubah urutan integrasi menjadi $dxdy$



Karena pada batas y sebelumnya berbentuk variable yaitu $y = \sqrt{9 - x^2}$, maka ditransfomasikan menjadi $x = 0$ & $x = \sqrt{9 - y^2}$, dan untuk batas y menjadi $y = -3$ & $y = 3$, sehingga bentuk integral menjadi

$$= \int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-y^2}} (x^3 + xy^2)dxdy$$

$$= \int_{-3}^{3} \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 \Big|_0^{\sqrt{9-y^2}} dy$$

$$= \int_{-3}^{3} \frac{1}{4}(9 - y^2)(9 - y^2) + \frac{1}{2}(9 - y^2)y^2 \, dy$$

$$= \int_{-3}^{3} \frac{y^4}{4} - \frac{18y^2}{4} + \frac{81}{4} + \frac{9y^2}{2} - \frac{y^4}{2}\, dy$$

$$= \int_{-3}^{3} \frac{81}{4} - \frac{y^4}{4}\, dy$$

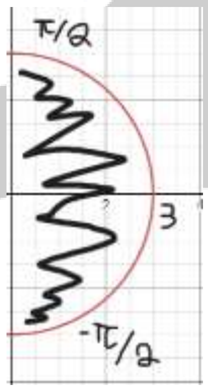
$$= \frac{81}{4} y - \frac{y^5}{20}\Bigg|_{-3}^{3}$$

$$= \left(\frac{81}{4}(3) - \frac{(3)^5}{20}\right) - \left(\frac{81}{4}(-3) - \frac{(-3)^5}{20}\right)$$

$$= \left(\frac{243}{5}\right) - \left(-\frac{243}{5}\right)$$

$$= \frac{485}{5}$$

- Dengan koordinat polar



Fungsi $(x^3 + xy^2)$ akan disederhanakan dengan menggunakan komponen koordinat polar menjadi:

$$(x^3 + xy^2) = x(x^2 + y^2) = xr^2$$

Dimana x akan diubah menjadi $\mathrm{r}\cos\theta$. Lalu batas untuk $r = 0$ & $r = 3$ dan batas untuk $\theta = -\frac{\pi}{2}$ & $\theta = \frac{\pi}{2}$ sehingga bentuk integral menjadi:

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 rcos\theta . r^2 . r \; drd\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 r^4 cos\theta \; drd\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5} r^4 cos\theta \Big|_0^3 \; d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{243}{5} cos\theta \; d\theta$$

$$= \frac{243}{5} sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{486}{5}$$