Fisika Matematika I

Mukhtar Effendi
Sugito

Pertemuan 01

Pengantar (Perkenalan dan Orientasi)
Silabus (Deret, Bilangan Kompleks)
Kontrak Belajar (Jadwal, Nilai, dll)

Pertemuan 02

Deret Tak Hingga (Infinite series)

Pengertian: ...

Deret takhingga adalah pernyataan penjumlahan bilangan yang takhingga banyaknya berbentuk :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots.$$

dengan suku ke-n, a_n, sebuah fungsi dari bilangan bulat n,

$$a_n = f(n) \qquad \mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Infinite Series

- Tuliskan bentuk umum suku ke-n deret berikut :

$$(1)\quad 1+16+81+\ldots..+a_n+\ldots.$$

$$(2)\quad \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\ldots..+a_n+\ldots.$$

$$(3)\quad 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\ldots..+a_n+\ldots.$$

Infinite Series

- Tuliskan bentuk umum suku ke-n deret berikut :

$$(1)\quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + a_n + ...$$

$$(2)\quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + ... + a_n + ...$$

$$(3)\quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + a_n + ...$$

Infinite Series

- Bentuk umum suku ke-n deret di atas adalah :

$$(1)\quad a_n = n^4$$

$$(2)\quad a_n = \frac{n}{3^n}$$

$$(3)\quad a_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- Deret (1) dan (2) dinamakan **Deret Bilangan**, dan deret (3) adalah **Deret Variabel**.

Penulisan dan Notasi Deret

- Penulisan Deret Takhingga pada umumnya diringkas dengan Notasi jumlah, yaitu :

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

(dibaca "Sigma *n* = 1 sampai dengan takhingga")

diikuti dengan bentuk umum suku a_n.

Secara Umum Deret Takhingga dtuliskan sebagai :

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Infinite Series

- Tuliskan dalam bentuk Notasi Jumlah deret berikut :

$$(1)\quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots.. + a_n + \ldots. = \sum_{n=1}^{\infty} n^4$$

$$(2)\quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots.. + a_n + \ldots. = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^4}$$

$$(3)\quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.. + a_n + \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$$

KONERGENSI DAN DIVERGENSI DERET

- Untuk **Deret Takhingga** masalah utamanya adalah *jumlahnya berhingga* atau *tidak*, bukan jumlah nilai dari deret tersebut, karena kadang tidak mudah untuk memperoleh jumlah nilai dari deret itu.
- Jumlah suku-suku **Deret Takhingga** adalah :

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$.....$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

KONERGENSI DAN DIVERGENSI DERET

- Besaran S_n dinamakan Jumlah per bagian Deret Takhingga.
- Himpunan S_n, yang diurutkan dinamakan Barisan Takhingga (*Infinite Sequence*).

$$\left\{ \quad S_1, S_2, S_3, \ldots.., S_n, \ldots. \quad \right\}$$

- Penulisan secara ringkas Barisan dalam bentuk :

$$\left\{ S_n \right\}_{n=1}^{\infty}$$

- S_n adalah suku ke-n Barisan dan mempunyai bentuk umum $S_n = f\,(n)$

Ada deret hingga dan deret tak-hingga

Ada deret positif dan deret negatif

Ada deret bilangan dan deret variabel

Ada deret konvergen dan deret divergen

Ada deret konvergen dan deret divergen

Uji konvergensi deret

Uji awal (Preleminary test)

1. Bila $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, maka deret bersifat divergen.
2. Bila $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, maka deret belum tentu apakah konvergen atau divergen. Jadi harus diuji dengan test lain (akan di bahas selanjutnya).

Ujilah deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 - 2n + 4}$, konvergen atau divergen ?

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 - 2n + 4} = \frac{2}{3} > 0$$

Maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 - 2n + 4}$ adalah divergen.

Ujilah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergen atau divergen?

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \rightarrow$ belum pasti, (dengan uji lanjut ternyata divergen)

Ujilah deret $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen atau divergen ?

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \rightarrow$ belum pasti (dengan uji lanjut ternyata konvergen).

Uji Lanjut:

- ✓ Uji Perbandingan
- ✓ Uji Integral
- ✓ Uji ratio
- ✓ Uji perbandingan khusus

Uji Perbandingan

dibandingkan dengan deret konvergen
atau
dibandingkan dengan deret divergen

Uji Perbandingan dibandingkan dengan deret konvergen

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

- ✓ Jika $|a_n| \leq k_n$, maka deret Σa_n adalah konvergen.
- ✓ Jika $|a_n| > k_n$ maka deret Σa_n belum dapat dipastikan apakah konvergen atau divergen, jadi perlu uji yang lain.

Uji Perbandingan dibandingkan dengan deret divergen

$$\sum d_n = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots$$

- ✓ Jika $|a_n| \geq d_n$ maka deret Σa_n adalah divergen.
- ✓ Jika $|a_n| < d_n$ maka deret Σa_n belum dapat dipastikan apakah divergen atau konvergen, perlu uji yang lain.

Dapat dilihat dalam uji ini bahwa jika ditemukan $|a_n| > k_n$ ataupun $|a_n| < d_n$ maka deret Σa_n tidak dapat disimpulkan.

Diketahui bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ adalah deret yang konvergen. Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergen atau divergen ?

$$\Sigma k_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2183} + \frac{1}{6549} +$$

$$\Sigma a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \cdots$$

$$\Sigma k_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2183} + \frac{1}{6549} +$$

$$\Sigma a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \cdots$$

Terlihat bahwa mulai dari suku ke-7, $|a_n| < k_n$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ adalah deret konvergen.

Gunakan uji awal untuk menyelidiki konvergensi deret-deret berikut :

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3^2+10n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!+1}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+3^n}$$