KULIAH 4

Pokok Bahasan : **DERET TAK BERHINGGA (*INFINITE SERIES*)**

Sub Bahasan :
- Deret Taylor
- Uji Konvergensi Deret Taylor

PUSTAKA RUJUKAN

1. Mary L. Boas, 1983. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. 2nd Edition. John Wiley & Sons
2. Hans J. Wospakrik, 1993. Dasar-Dasar Matematika Untuk Fisika. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta
3. Roswati Mudjiarto dan Frans J. Krips, 1995, Matematika Fisika 1, Penerbit ITB, Bandung

Tujuan Pembelajaran, mahasiswa mampu

- menjelaskan Deret Taylor dan Deret Maclaurine
- menjabarkan Deret Maclaurine suatu fungsi tertentu
- menjabarkan Deret Taylor suatu fungsi tertentu
- melakukan uji konvergensi deret Taylor dan deret Maclaurine

DERET TAYLOR

Sebuah fungsi *f*(*x*) dapat diuraikan menjadi deret pangkat. Tinjaulah fungsi *f*(*x*) = sin *x*. Maka sin *x* dapat dituliskan dalam bentuk deret pangkat yaitu :

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

Dlam hal ini, yang menjadi masalah adalah menentukan nilai konstanta-konstanta a_0, a_1, a_2 dan seterusnya. Untuk mencari nilai konstanta-konstanta tersebut, dapat dilakukan penghampiran di sekitar x = 0, maka :

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$x = 0 \rightarrow \sin 0 = a_0 + 0 \rightarrow 0 = a_0 \rightarrow a_0 = 0$$

Turunan pertama dari sin *x* :

$$\cos x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$
$$x = 0 \rightarrow \cos 0 = a_1 + 0$$
$$1 = a_1 \rightarrow a_1 = 1$$

Turunan kedua dari sin *x* :

$$-\sin x = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots$$
$$x = 0 \rightarrow -\sin 0 = 2a_2 + 0$$
$$0 = 2a_2 \rightarrow a_2 = 0$$

Turunan ketiga dari sin *x*:

$$-\cos x = 6a_3 + 24a_4 x + \cdots$$
$$x = 0 \rightarrow -\cos 0 = 6a_3 + 0$$
$$-1 = 6a_3 \rightarrow a_3 = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh :

$$a_4 = 0$$
$$a_5 = \frac{1}{5!}$$
$$a_6 = 0$$
$$a_7 = -\frac{1}{7!}$$
$$\vdots$$
dst

Sehingga akan diperoleh :

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots} \tag{1.9}$$

Dengan cara yang sama diperoleh deret pangkat untuk cos *x* :

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots} \tag{1.10}$$

Sekarang permasalahannya adalah bagaimana bentuk umum deret fungsi *f*(*x*). Untuk itu *f*(*x*) dapat diuraikan di sekitar *x* = a. Bentuk deret pangkatnya dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f(x) = {} & a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 \\ & + a_5(x-a)^5 + \cdots + a_n(x-a)^n \end{aligned} \tag{1.11}$$

Turunan *f*(*x*)

$$\begin{aligned} f^1(x) = {} & a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 \\ & + 5a_5(x-a)^4 + \cdots + n\,a_n(x-a)^{n-1} \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} f^2(x) = {} & 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + 4\cdot 5a_5(x-a)^3 \\ & + \cdots + (n-1)(n)\,a_n(x-a)^{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) = {} & 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2 \\ & + \cdots + (n-2)(n-1)(n)\,a_n(x-a)^{n-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4(x) = {} & 2\cdot 3\cdot 4a_4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2 \\ & + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1)(n)\,a_n(x-a)^{n-4} \end{aligned}$$

$\vdots$

$f^n(x) = 1 \cdot 2 \cdots (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)(n) = n!$

Jika dimasukkan nilai *x* = *a*, artinya penghampiran di sekitar *x* = *a*, maka :

$$f(a) = a_0 \rightarrow a_0 = \frac{f(a)}{1} = \frac{f(a)}{0!}$$

$$f^1(a) = a_1 \rightarrow a_1 = \frac{f^1(a)}{1} = \frac{f^1(a)}{1!}$$

$$f^2(a) = 2a_2 \rightarrow a_2 = \frac{f^2(a)}{2} = \frac{f^2(a)}{2!}$$

$$f^3(a) = 2 \cdot 3a_3 \rightarrow a_3 = \frac{f^3(a)}{2 \cdot 3} = \frac{f^3(a)}{3!}$$

$$f^4(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 \rightarrow a_4 = \frac{f^3(a)}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{f^4(a)}{4!}$$

$\vdots$

$$f^n(a) = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-3)(n-2)(n-1)(n)}_{n!} a_3 \rightarrow a_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Jadi dapat dituliskan :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(a) + f^1(a)(x-a) + f^2(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^3(a)\frac{(x-a)^3}{3!} \\ + f^4(a)\frac{(x-a)^4}{4!} + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \end{aligned}} \quad (1.13)$$

Persamaan (1.13) disebut sebagai deret Taylor. Apabila *a* = 0, maka persamaan (1.13) menjadi :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(0) + xf^1(0) + \frac{x^2}{2!}f^2(0) + \frac{x^3}{3!}f^3(0) \\ + \frac{x^4}{4!}f^4(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) \end{aligned}} \quad (1.14)$$

Dengan memakai persamaan (1.14) dapat dicari bentuk deret dari beberapa fungsi :

☐ Bentuk Logaritma :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

dengan daerah konvergensi : -1 < x ≤ 1.

☐ Bentuk Binomial :

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

dengan daerah konvergensi : -1 < x < 1.

☐ Bentuk Eksponensial :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$ dengan daerah konvergensi :

-∞ < x < ∞.

Selanjutnya dapat dipakai bentuk-bentuk deret di atas dalam beberapa aplikasi aljabar fungsi/polinomial, misalnya :

➢ **Perkalian**

a. $$(x+1)\sin x = (x+1)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right)$$

$$= x + x^2 - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{5!} \cdots$$

b. $$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4} \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x}{6!} \cdots\right)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} \cdots$$

- **Pembagian suatu deret oleh polinomial**

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\cdots\right)$$
$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\cdots$$

- **Penjabaran bentuk binomial dari sebuah fungsi**

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 \cdots$$

- **Metoda Kombinasi**

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = arc\ tg\ t\Big|_0^x = arc\ tg\ x$$

$$(1+t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \int (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots)\, dt$$
$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\cdots$$

Jadi : $\text{arc tg}\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\cdots$

Beberapa contoh perkalian deret.

1. Tentukanlah nilai $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \text{tg}\ x$ untuk x = 0,0015.

Jawab :

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - tg\ x = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \cdots\right)$$
$$- \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} \ \cdots\right)$$
$$= \frac{x^5}{15} + \frac{4x^7}{45} \ \Big|_{x=0.0015} = 5{,}06x10^{-16} \text{(ambil beberapa suku)}$$

2. Tentukan nilai $\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{x}\sin x^2\right)$ untuk x =0,1.

Jawab :

$$\frac{1}{x}\sin x^2 = \frac{1}{x}\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} \cdots\right)$$
$$= \left(x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} \cdots\right)$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} \cdots\right) = \left(-\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x}{3!} + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot x^5}{5!} \cdots\right)$$

= -2 + 0,00025 = -1,99975.

3. Tentukan jumlah deret $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Jawab :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$

Dari bentuk fungsi $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

Jika diambil nilai x = 1, maka :

$$\ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Jadi $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

4. Tentukan nilai $\int_0^1 \sin x^2 \, dx$

Jawab :

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} \cdots \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} \frac{x^7}{3!} + \frac{1}{11} \frac{x^{11}}{5!} \cdots \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{10 \cdot 5!}$$

= 0,31025

5. Dengan menggunakan deret Taylor, tunjukkan bahwa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Jawab :

Dengan deret Taylor di sekitar x = 0, dapat dituliskan :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f^2(0) + \frac{x^3}{3!} f^3(0) + \cdots}{g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2!} g^2(0) + \frac{x^3}{3!} g^3(0) + \cdots}$$

Jika *f*(0) = 0 dan *g*(0) = 0, maka

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f^2(0) + \frac{x^3}{3!} + f^3(0) + \cdots}{xg'(0) + \frac{x^2}{2!} g^2(0) + \frac{x^3}{2!} g^3(0) + \cdots} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

atau :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(g)}$$