



CAFFÈ BELTRAMI



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Caffè Beltrami presenta...

# Armando Maria Monforte

---



Armando Maria Monforte è un dottorando del XXXIX ciclo presso il Dipartimento di Matematica dell' Università di Pavia. I suoi interessi si concentrano sull'analisi numerica, in particolare sui metodi TDG per l'equazione di Helmholtz.



CAFFÈ BELTRAMI



CAFFÈ BELTRAMI



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

# Multiple scattering: aspetti generali e curiosità

Equazione di Helmholtz

Multiple scattering

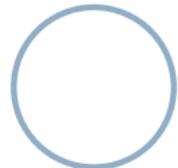
Il metodo della T-matrix

La gabbia di Faraday



CAFFÈ BELTRAMI

# Equazione di Helmholtz



## Perché l'equazione di Helmholtz?

Sia  $U = U(\mathbf{x}, t)$  un campo scalare. Supponiamo che  $U$  soddisfi l'**equazione delle onde**

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0.$$

Consideriamo il caso particolare di una soluzione **armonica in tempo**

$$U(\mathbf{x}, t) = \Re\{u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\} = \Re\{u(\mathbf{x})\} \cos \omega t + \Im\{u(\mathbf{x})\} \sin \omega t,$$

per una certa **frequenza angolare**  $\omega > 0$ . Si ottiene il seguente fatto fondamentale

Se  $U(\mathbf{x}, t)$  è una soluzione delle onde armonica in tempo, allora  $u(\mathbf{x})$  è soluzione dell'**equazione di Helmholtz**

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

con **numero d'onda**  $k := \omega/c > 0$ .



## Onde piane

Dato  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ , un'**onda piana** che si propaga lungo la direzione  $\mathbf{d}$  ha espressione

$$u(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}} = \cos(k\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}) + i \sin(k\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}).$$

**Figura:** Parte reale di un'onda piana con direzione  $\mathbf{d} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

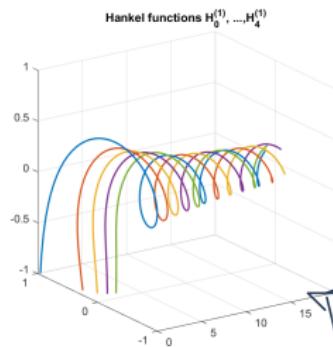
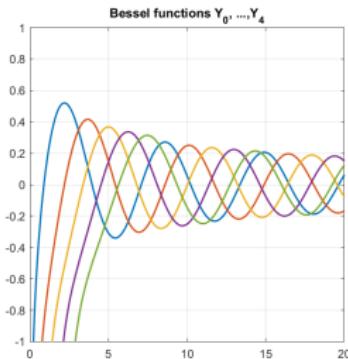
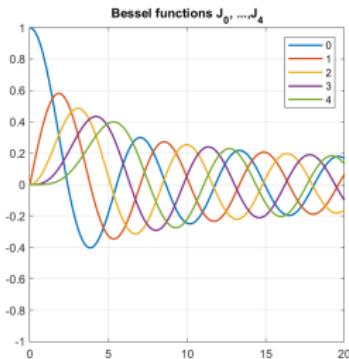


CAFFÈ BELTRAMI

## Funzioni di Bessel e di Hankel

Le **funzioni di Bessel** si ottengono cercando soluzioni di Helmholtz separabili nelle coordinate polari. Esistono due tipi di funzioni di Bessel,  $J_\ell(r)$  e  $Y_\ell(r)$ , per  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Di interesse sono anche le **funzioni di Hankel**

$$H_\ell^{(1)}(r) := J_\ell(r) + iY_\ell(r), \quad H_\ell^{(2)}(r) := J_\ell(r) - iY_\ell(r).$$



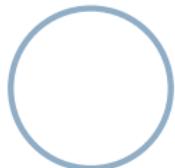
## Onde circolari

Le funzioni della forma  $J_\ell(kr)e^{i\ell\theta}$  e  $Y_\ell(kr)e^{i\ell\theta}$  sono soluzioni dell'equazione di Helmholtz e sono dette **onde circolari** o funzioni di **Fourier-Bessel**. Un caso speciale sono le funzioni di **Fourier-Hankel**  $H_\ell^{(1)}(kr)e^{i\ell\theta}$  e  $H_\ell^{(2)}(kr)e^{i\ell\theta}$ .

**Figura:** Parte reale di un'onda centrata  $\mathbf{x}_0 = (-1, 1)$



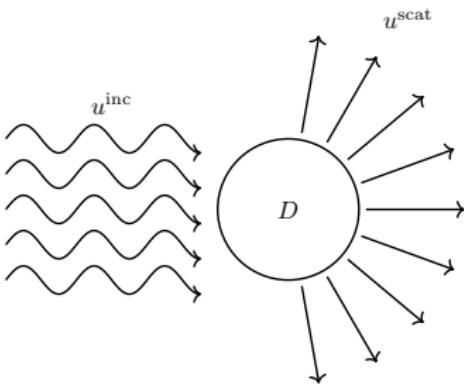
# Multiple scattering



## Onde contro gli ostacoli

Consideriamo un'onda che colpisce un ostacolo impenetrabile  $D \subset \mathbb{R}^2$ ; possiamo imporre diverse condizioni su  $\partial D$ :

- ─ Se l'ostacolo è **sound-soft**, imponiamo una condizione di Dirichlet:  $u = 0$ ;
- ─ Se l'ostacolo è **sound-hard**, imponiamo una condizione di Neumann:  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ;
- ─ Possiamo imporre anche una condizione di **impedenza**:  $\frac{\partial u}{\partial n} - ik u = 0$ .



Generalmente si differenziano l'**onda incidente**  $u^{\text{inc}}$  e l'**onda riflessa**  $u^{\text{scat}}$  e si scrive

$$u = u^{\text{tot}} = u^{\text{inc}} + u^{\text{scat}}.$$


Data un'onda incidente  $u^{\text{inc}}$  e un ostacolo  $D \subset \mathbb{R}^2$ , voglio trovare  $u = u^{\text{inc}} + u^{\text{scat}}$  che soddisfi l'equazione di Helmholtz in  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  e una condizione al bordo su  $\partial D$ . Per trovare un'unica soluzione  $u$ , dobbiamo anche imporre una condizione all'infinito

### Sommerfeld Radiation Condition

Diciamo che  $u$  soddisfa la **condizione di radiazione di Sommerfeld (SRC)** se

$$\left| \frac{\partial u^{\text{scat}}}{\partial r} - ik u^{\text{scat}} \right| = o(r^{-1/2}), \quad r \rightarrow \infty$$

uniformemente in tutte le direzioni.

Si ottiene il seguente problema

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus D, \\ u = 0 \left( \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \right) & \text{su } \partial D, \\ \text{SRC} & r \rightarrow \infty. \end{cases}$$



Dal punto di vista fisico la condizione di radiazione equivale a chiedere che l'onda scatterata **si allontani** dall'ostacolo all'infinito.

Guardando le funzioni di Bessel e Hankel, osserviamo che per  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} J_\ell(r) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos(r - \phi_\ell), & Y_\ell(r) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin(r - \phi_\ell), \\ H_\ell^{(1)}(r) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(r-\phi_\ell)}, & H_\ell^{(2)}(r) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-i(r-\phi_\ell)}, \end{aligned}$$

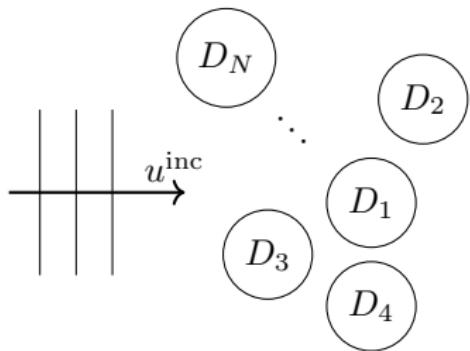
dove  $\phi_\ell := \frac{\ell\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ .

Quindi, se vogliamo considerare delle onde "**uscenti**", selezioneremo le  $H_\ell^{(1)}(r)$ .



# Multiple Scattering Problem

Dato  $N \in \mathbb{N}$ , consideriamo il problema di un'onda che si riflette contro  $N$  ostacoli sound-soft  $D_j \subset \mathbb{R}^2$ , con  $j = 1, \dots, N$ , e chiamiamo  $D := D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N$ .



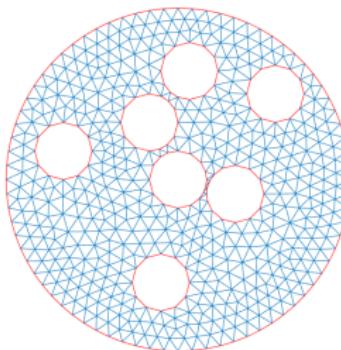
Vogliamo risolvere

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus D, \\ u = 0 & \text{su } \partial D, \\ \text{SRC} & r \rightarrow \infty. \end{cases}$$



CAFFÈ BELTRAMI

Dato che ho un numero limitato di ostacoli,  $\exists R > 0$  tale che  $D \subset B_R(0)$ , quindi posso risolvere il problema su un insieme finito e utilizzare tecniche classiche come per esempio gli elementi finiti.



### Problema

Questo approccio risulta molto **costoso** e **inefficiente**.

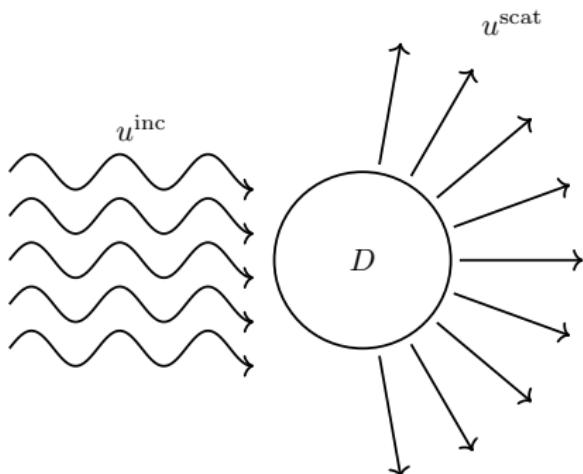


CAFFÈ BELTRAMI

# Il metodo della T-matrix



Ci concentriamo sul problema di scattering su un unico ostacolo sound-soft **circolare** di raggio  $R > 0$ . Data un'onda incidente  $u^{\text{inc}}$ , vogliamo trovare la soluzione  $u = u^{\text{tot}}$  del problema di scattering.



Espandiamo in termini delle funzioni di Bessel e di Hankel:

$$u^{\text{inc}}(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n J_n(kr) e^{in\theta},$$

$$u^{\text{scat}}(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta},$$

dove i coefficienti  $a_n$  sono calcolati a partire da  $u^{\text{inc}}$ , che è nota, mentre i coefficienti  $b_n$  sono incogniti. L'espansione di  $u^{\text{scat}}$  ci permette di soddisfare automaticamente la condizione di radiazione.



CAFFÈ BELTRAMI

Applicando la condizione al bordo, ovvero che

$$u^{\text{tot}}(r, \theta) = u^{\text{inc}}(r, \theta) + u^{\text{scat}}(r, \theta) = 0,$$

si ottiene la seguente equazione

$$b_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} T_{n,m} a_m.$$

I coefficienti  $T_{m,n}$  costruiscono una matrice (infinita) che viene chiamata **T-matrix**, e che stabilisce la relazione tra i coefficienti dell'onda incidente  $a_n$  e quelli dell'onda riflessa  $b_n$ .

Per un ostacolo circolare, grazie all'ortogonalità delle  $e^{in\theta}$ , si ha che

$$T_{n,m} = -\delta_{n,m} \frac{J_n(kR)}{H_n^{(1)}(kR)}.$$



Se il mio ostacolo non è una sfera, calcolare la T-matrix richiede un'approssimazione numerica. Ci sono vari metodi per calcolarla:

- ☕ Utilizzare la forma integrale dell'equazione di Helmholtz;
- ☕ Risolvere l'equazione di Helmholtz per diversi campi incidenti (es., armoniche sferiche o onde piane), discretizzando la soluzione con un metodo appropriato (FEM, BEM, ecc.);
- ☕ Null Field Method o Extended Boundary Condition Method - EBCM.



- ☕ Determino i coefficienti  $a_n$  dell'espansione dell'onda incidente;
- ☕ Utilizzo la T-matrix per calcolare i coefficienti  $b_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} T_{n,m} a_m$ ;
- ☕ Ricostruisco  $u^{\text{scat}}(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}$ ;
- ☕ Scrivo il campo totale come  $u^{\text{tot}} = u^{\text{inc}} + u^{\text{scat}}$ .

Il vantaggio della T-matrix è che dipende solo dalla **geometria dell'ostacolo** e non dall'onda incidente, quindi può essere utilizzata per studiare lo scattering di una varietà di onde incidenti.



## Esempio: onda piana incidente

Se  $u^{\text{inc}}(x) = e^{ikx} = e^{ik\cos\theta}$ , espandendo in armoniche circolari

$$u^{\text{inc}}(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n J_n(kr) e^{in\theta},$$

quindi otteniamo i coefficienti  $a_n = i^n$ .

Possiamo ricostruire il campo scatterato come

$$u^{\text{scat}}(r, \theta) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} i^n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}.$$



## Il caso di più ostacoli

Consideriamo  $N$  ostacoli  $D_j$ , ciascuno con una sua T-matrix  $\mathbf{T}_j$ .

Per l'ostacolo  $D_j$ , il campo incidente totale è dato dalla somma tra  $\mathbf{u}^{\text{inc}}$  e il campo scatterato dagli altri ostacoli. Possiamo scrivere

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^{\text{inc}} + \sum_{l \neq j} \mathcal{U}_{j,l} \mathbf{b}_l = \mathbf{a}_j^{\text{inc}} + \sum_{l \neq j} \mathcal{U}_{j,l} \mathbf{T}_l \mathbf{a}_l,$$

dove  $\mathbf{a}_j^{\text{inc}}$  è il vettore dei coefficienti di  $\mathbf{u}^{\text{inc}}$  sull'ostacolo  $j$  e  $\mathcal{U}_{j,l}$  è una matrice di traslazione. Si ottiene il seguente sistema a blocchi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathcal{U}_{1,2}^T \mathbf{T}_2 & \cdots & -\mathcal{U}_{1,N-1}^T \mathbf{T}_{N-1} & -\mathcal{U}_{1,N}^T \mathbf{T}_N \\ -\mathcal{U}_{2,1}^T \mathbf{T}_1 & \mathbf{I} & -\mathcal{U}_{2,3}^T \mathbf{T}_3 & \cdots & -\mathcal{U}_{2,N}^T \mathbf{T}_N \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\mathcal{U}_{N,1}^T \mathbf{T}_1 & \cdots & \cdots & -\mathcal{U}_{N,N-1}^T \mathbf{T}_{N-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_N \end{bmatrix}$$



- ☕ Siccome  $\mathbf{T}$  è una matrice infinita, dovrò approssimarla con una matrice finita. L'ordine di approssimazione dipende dal numero d'onda e dalle dimensioni degli ostacoli;
- ☕ Posso calcolare la T-matrix di diversi ostacoli in contemporanea, riducendo i tempi computazionali;
- ☕ Una volta costruite le T-matrix, posso risolvere il problema per qualsiasi onda incidente, senza dovermi costruire ogni volta tutto;
- ☕ Per calcolare effettivamente la T-matrix esistono dei software come TMATROM su MATLAB o MultipleScattering su Julia.



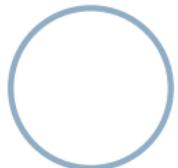
## Esempio: random scattering

Consideriamo  $N = 70$  ostacoli circolari di raggio 0.1 generati casualmente sul rettangolo  $[0, 5] \times [-5, 5]$  e un'onda piana incidente con direzione  $\mathbf{d} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ . I risultati sono stati ottenuti con il pacchetto MultipleScattering di Julia.

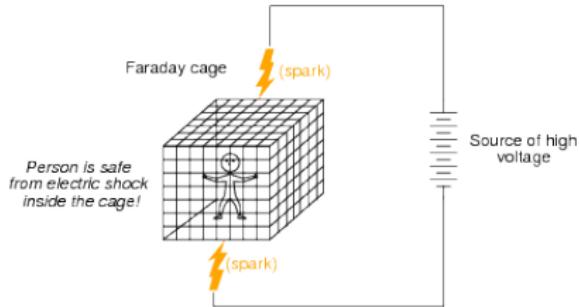


CAFFÈ BELTRAMI

# La gabbia di Faraday



# Che cos'è la gabbia di Faraday?



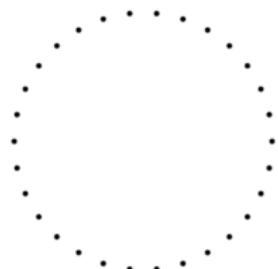
La **gabbia di Faraday** è un dispositivo che blocca i campi elettrici esterni, proteggendo il suo interno da interferenze elettrostatiche.

La gabbia è costituita da un involucro conduttore, che può essere realizzato con materiali come rame, alluminio o acciaio, e può avere una struttura piena o reticolata (ad esempio una rete metallica).



Il caso 2D può essere visto come una sezione trasversale di quello 3D. In questo caso  $u$  rappresenta la componente del campo elettrico esterna al piano e soddisfa l'equazione di Helmholtz  $\Delta u + k^2 u = 0$ .

Ogni punto nero è la sezione di un filo infinito, e la condizione al contorno è  $u = 0$  su tutti i dischi.



Possiamo trattare lo studio della gabbia di Faraday come un problema di **multiple scattering**.



Consideriamo una circonferenza di raggio  $R = 1$   
e una gabbia composta da  $N = 30$  cerchietti  
equidistanti di raggio  $r = 0.02$ .

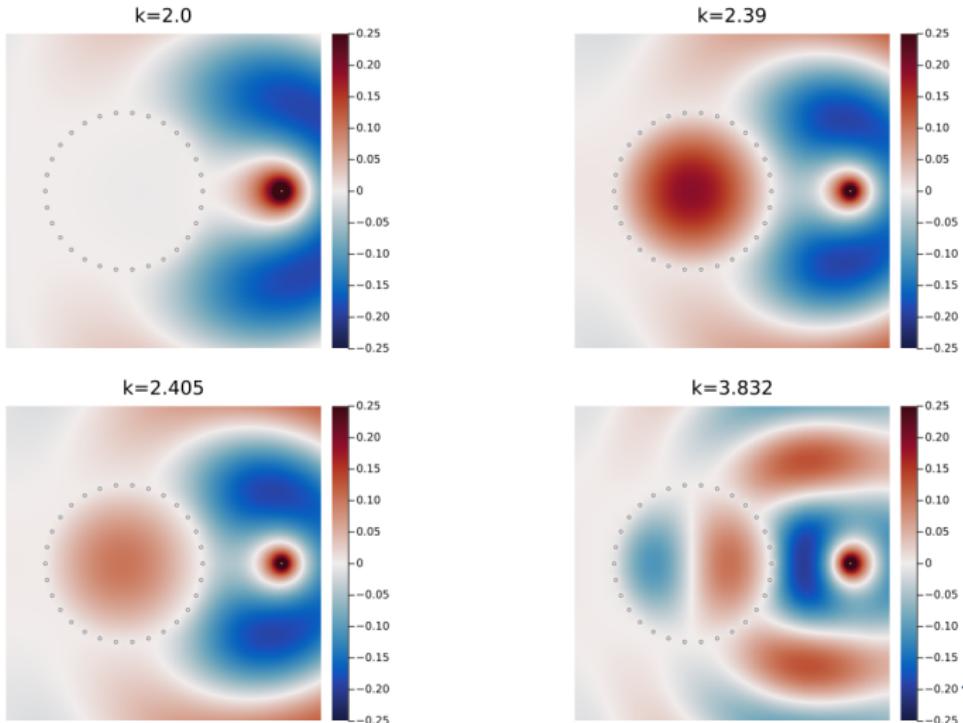
Scegliamo come onda incidente un'onda circolare

$$u^{\text{inc}} = H_0^{(1)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$$

centrata in  $\mathbf{x}_0 = (2, 0)$ .



# Soluzione al variare di k



Per alcuni valori di  $k$  la gabbia fallisce e anzi amplifica l'ampiezza dell'onda: questo è il fenomeno della **risonanza**.

La risonanza si verifica quando scegliamo un numero d'onda tale che  $k^2$  sia **autovalore del Laplaciano** sul cerchio.

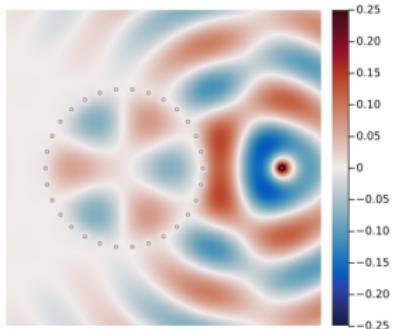
Le onde si riflettono continuamente all'interno della gabbia e interferiscono, generando modi stazionari.

Per il cerchio di raggio 1, questi valori di  $k$  corrispondono agli zeri delle funzioni di Bessel  $J_\ell$ .



## Esempio: risonanza per lo zero di $J_3$

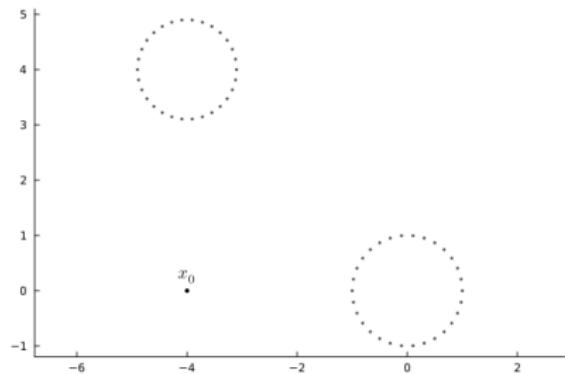
Scegliamo  $k^*$  tale che  $J_3(k^*) = 0$ ; si trova numericamente che  $k^* = 6.3801618959$ . Risolvendo il problema per questo specifico numero d'onda, siamo in grado di ricreare la risonanza all'interno della gabbia di Faraday.



CAFFÈ BELTRAMI

## Un esempio interessante

Consideriamo due gabbie composte da  $N = 30$  cerchietti equidistanti di raggio  $r = 0.02$  disposte come in figura. La gabbia centrata nell'origine ha raggio  $R_1 = 1$ , mentre l'altra ha raggio  $R_2 = 0.9$ . Consideriamo un'onda piana incidente centrata in  $x_0$ . Cosa succede se scegliamo  $k$  in modo da avere risonanza nella prima gabbia?



CAFFÈ BELTRAMI

Figura: Risultati per  $k = 2.39$  e  $k = 3.832$ .



CAFFÈ BELTRAMI



P. A. Martin

Multiple scattering; Interaction of time-harmonic waves with N obstacles  
Encyclopedia of Mathematics and its application(1995).



A. L. Gower et al.

Reflection from a multi-species material and its transmitted effective wavenumber  
Proc. R. Soc. A.474 (2018).



D. P. Hewett and I. J. Hewitt

Homogenized boundary conditions and resonance effects in Faraday cages  
Proc. R. Soc. A.472 (2016).



L. N. Trefethen

Surprises of the Faraday cage  
SIAM News 49 (2016).



CAFFÈ BELTRAMI

Grazie per  
l'attenzione!

