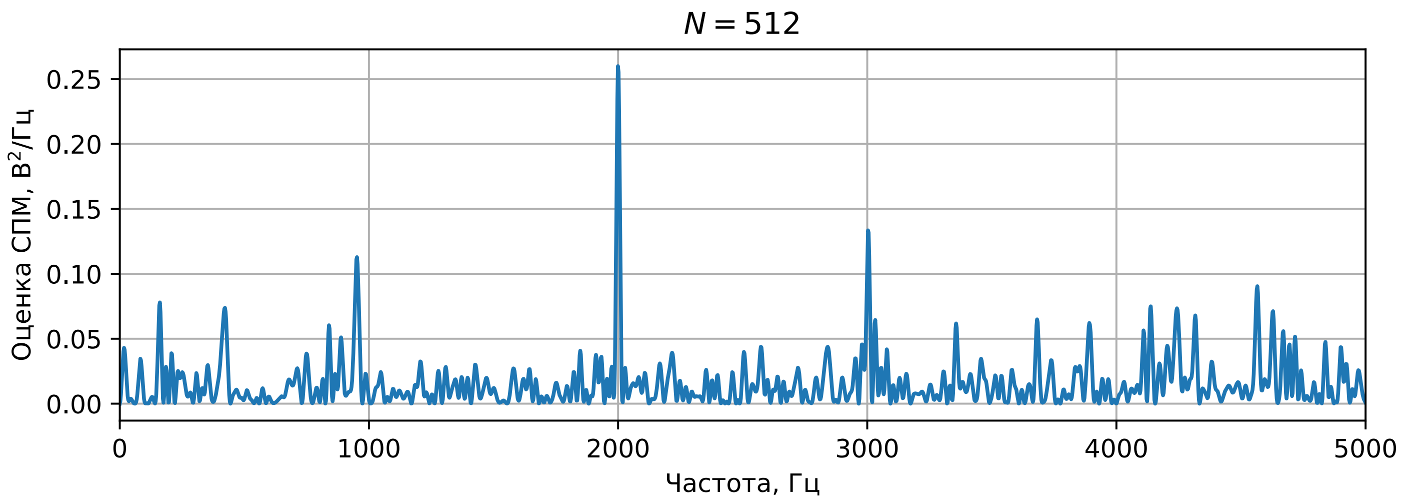
Лекция 7 по курсу «Цифровая обработка сигналов»

20 марта 2023 г.

5.10. Непараметрические методы спектрального анализа случайных последовательностей.

- Оценка спектральной плотности мощности.
- Основные показатели качества оценок СПМ.
- Метод периодограмм Шустера.
- Выделение гармоник из шума в периодограмме.
- Метод периодограмм Бартлетта.
- Метод периодограмм Уэлча.
- Коррелограммный метод оценки СПМ.



5.10. Непараметрические методы спектрального анализа случайных последовательностей.

Оценка спектральной плотности мощности.

Как было показано в предыдущей лекции, спектральная плотность мощности (СПМ) случайного процесса с реализациями $x(t)$ задаётся выражением

$$G(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} M\left\{\left|\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi f t}dt\right|^2\right\}. \qquad (1)$$

Оператор математического ожидания M здесь соотвествует усреднению по ансамблю реализаций. Теорема Винера-Хинчина позволяет определить СПМ как преобразование Фурье корреляционной функции $R(\tau)$ случайного процесса:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau, \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) задают два эквивалентных определения спектральной плотности мощности.

Для дискретного случайного процесса с реализациями $x[k]$ СПМ определяется аналогичным образом:

$$G(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)\Delta t} M\left\{\left|\Delta t\, X(f)\right|^2\right\},$$

$$G(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta t}{2N+1} M\left\{\left|X(f)\right|^2\right\}, \qquad (3)$$

где $X(f) = \sum_{k=-N}^{N} x[k]\exp\left(-j2\pi f\Delta t k\right)$. По теореме Винера-Хинчина для дискретного случайного процесса:

$$G(f) = \Delta t \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m]\, e^{-j2\pi f m\Delta t}, \qquad (4)$$

где $R_x[m] = r_{xx}[m] = M\left\{x[k+m]x^*[k]\right\}$ – автокорреляционная функция (автокорреляционная последовательность). Множитель Δt в (3) и в (4) нужен для учета связи[1] между спектрами аналогового и дискретизованного сигналов.

---

[1] Выборки $x[k]$ необходимо умножить на Δt, если мы хотим получить связь между спектром аналогового $X_a(f)$ и дискретизованного сигнала $X_d(f)$ в виде $X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_д)$.

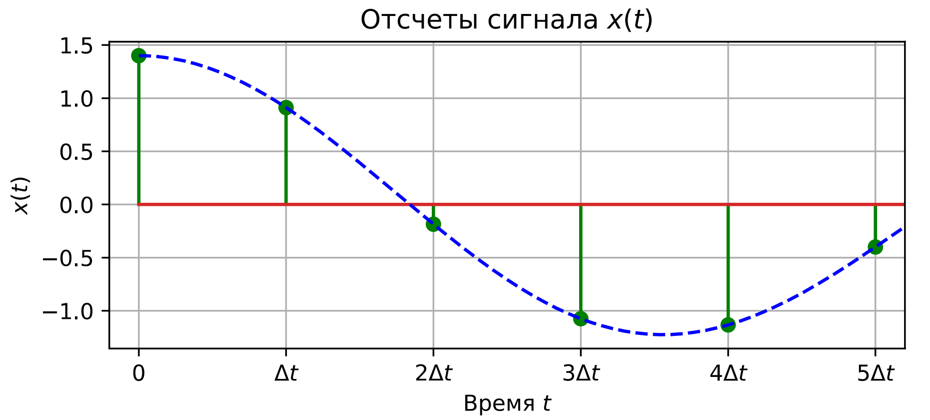
Оценка спектральной плотности мощности

Обычно размерность спектральной плотности мощности $G(f)$ — это Вт/Гц. Если $x(t)$ — напряжение, действующее на сопротивлении 1 Ом, то размерность будет соответствовать $\text{В}^2/\text{Гц}$.

На практике используются оценки СПМ $\hat{G}(f)$, построенные по одной из реализаций для конечного T или N. В случае непрерывного случайного процесса оценку будем производить по набору из N выборок реализации $x(t)$:

$$x[k] = x(k\Delta t),\ k = 0, 1, \dots N-1. \qquad (5)$$

В случае дискретного случайного процесса будем производить оценку по значениям $x[k],\ k = 0, 1, \dots N-1$.



Взятие выборок реализации $x(t)$ случайного процесса.

Непараметрические методы спектрального анализа используют для вычисления оценки СПМ только указанный набор $x[k]$.

Прямые методы оценки СПМ (периодограммные методы) случайных последовательностей основаны на вычислении квадрата модуля ДПФ отдельных участков последовательности данных с использованием соответствующего статистического усреднения.

Косвенные методы оценки СПМ основаны на предварительной оценке автокорреляционной последовательности (АКП) с последующим применением теоремы Винера-Хинчина в дискретном варианте. Оценка СПМ получается вычислением ДПФ от АКП. Эти методы называются корреляционными.

Основные показатели качества оценок СПМ

Основные показатели качества оценок СПМ [1]

1) Смещение β оценки $\hat{\alpha}$ некоторого параметра α определяется как

$$\beta = \alpha - M\{\hat{\alpha}\} \qquad (6)$$

Для эргодического случайного процесса смещение β оценки спектральной плотности мощности равно

$$\beta = G(f) - M\{\hat{G}(f)\} = M\{G(f) - \hat{G}(f)\}. \qquad (7)$$

2) Оценка СПМ называется несмещенной, если

$$\beta = M\{G(f) - \hat{G}(f)\} = 0. \qquad (8)$$

3) Оценка СПМ называется асимптотически несмещенной, если

$$\lim_{N\to\infty} M\{G(f) - \hat{G}(f)\} = 0, \qquad (9)$$

где N — длина выборочной последовательности, по которой производится оценка $\hat{G}(f)$.

4) Оценка некоторого параметра случайного процесса α называется состоятельной, если при усреднении по ансамблю с возрастанием числа реализаций математическое ожидание квадрата отклонения истинного значения СПМ от его оценки $\hat{\alpha}$ стремится к нулю:

$$M\left\{(\alpha - \hat{\alpha})^2\right\} = D\{\hat{\alpha}\} + \beta^2 \to 0 \qquad (10)$$

Покажем, что первое равенство в формуле (10) выполнено.

$$D\{\hat{\alpha}\} + \beta^2 = M\left\{\hat{\alpha}^2\right\} - M^2\{\hat{\alpha}\} + \alpha^2 - 2\alpha M\{\hat{\alpha}\} + M^2\{\hat{\alpha}\} =$$

$$= \alpha^2 - 2\alpha M\{\hat{\alpha}\} + M\left\{\hat{\alpha}^2\right\} = M\left\{(\alpha - \hat{\alpha})^2\right\}.$$

5) Для эргодического случайного процесса оценку СПМ называют состоятельной, если с увеличением длины N выборочной последовательности, по которой производится оценка, математическое ожидание квадрата отклонения $G(f)$ от $\hat{G}(f)$ стремится к нулю:

$$\lim_{N\to\infty} M\left\{\left(G(f) - \hat{G}(f)\right)^2\right\} = \lim_{N\to\infty}\left(D\{\hat{G}(f)\} + \beta^2\right) = 0. \qquad (11)$$

Из формулы (11) видно, что смещенная оценка является несостоятельной; у состоятельной оценки дисперсия должна стремиться к нулю с ростом N.

Метод периодограмм Шустера

Метод периодограмм в немодифицированном виде (метод периодограмм Шустера) основан на вычислении оценки $\hat{G}(f)$ спектральной плотности мощности случайного процесса по конечному числу отсчетов некоторой реализации $x[k],\ k=0,1,\ldots,N-1$. В соответствии с формулой (3) получаем оценку СПМ

$$\hat{G}(f)=\frac{\Delta t}{N}\left|\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{-j2\pi f k\Delta t}\right|^{2}. \qquad (12)$$

Сравнивая с формулой ДПФ $X[n]$ последовательности этих отсчетов, можно записать ($N_{\text{FFT}}\geq N$)

$$\hat{G}(n\Delta f)=\frac{\Delta t}{N}\left|X[n]\right|^{2},\ \Delta f=\frac{f_{\text{д}}}{N_{\text{FFT}}}, \qquad (13)$$

где

$$X[n]=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N_{\text{FFT}}}nk\right).$$

Формула (13) позволяет использовать БПФ для вычисления периодограммы, что позволяет определять оценку СПМ равномерно расположенных точках оси частот с помощью вычислительно эффективного алгоритма.

Оценка $\hat{G}(f)$, определённая формулой (12), является асимптотически несмещенной. При этом она не является состоятельной. Среднее значение периодограммы

$$M\left\{\hat{G}(f)\right\}=\frac{\Delta t}{U}\int_{-f_{\text{д}}/2}^{f_{\text{д}}/2}\left|W(\tilde{f})\right|^{2}G(f-\tilde{f})d\tilde{f}, \qquad (14)$$

где

$$U=\sum_{k=0}^{N-1}w^{2}[k]=N,$$

$$W(f)=\exp\left(-j\pi f(N-1)\Delta t\right)\frac{\sin\left(\pi f N\Delta t\right)}{\sin\left(\pi f\Delta t\right)}.$$

Метод периодограмм Шустера

Пример. Предположим, что требуется оценить СПМ случайного процесса

$$x_{\text{сл}}[k] = a_1 \sin(2\pi f_1 k\Delta t + \phi_1) + a_2 \sin(2\pi f_2 k\Delta t + \phi_2) + e[k]$$

где $a_1 = 5$, $a_2 = 4$, $e[k]$ — дискретный белый шум с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 9$, $f_1 = 2\,\text{кГц}$, $f_2 = 3\,\text{кГц}$, $f_{\text{д}} = 1/\Delta t = 10\,\text{кГц}$.

Периодограммы, построенные по первым $N = 2048$ и по первым $N = 512$ отсчетам одной из реализаций, изображены на рис. 5.10.1.

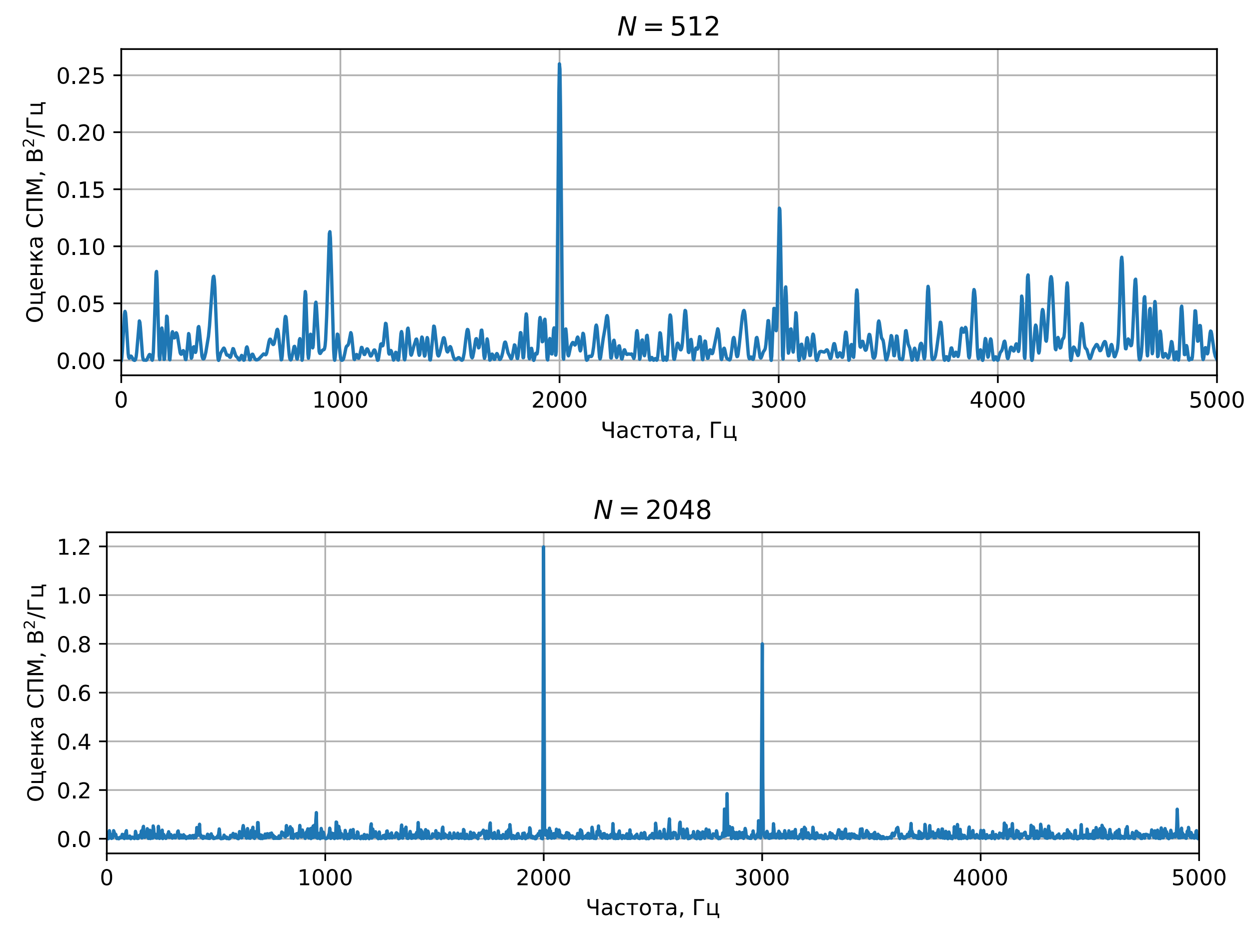


Рис. 5.10.1. Пример периодограммы.

Выделение гармонических компонент из шума в периодограмме

Выделение гармонических компонент из шума в периодограмме

1) Определим среднее значение периодограммы для гауссовского шума $\varepsilon[k]$ со среднеквадратичным отклонением σ. Его истинная СПМ $G(f)=\sigma^2\Delta t$.

$$U=\sum_{k=0}^{N-1} w^2[k]=\int_{-1/2}^{1/2}\left|W(\nu)\right|^2 d\nu \qquad (15)$$

$$\int_{-f_д/2}^{f_д/2}\left|W(f)\right|^2 df=\frac{1}{\Delta t}\int_{-1/2}^{1/2}\left|W(\nu)\right|^2 d\nu=\frac{U}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=0}^{N-1} w^2[k] \qquad (16)$$

В случае прямоугольного окна $U=N$.

Математическое ожидание оценки СПМ по (14)

$$M\left\{\hat{G}(n\Delta f)\right\}=\frac{\Delta t}{U}\int_{-f_д/2}^{f_д/2}\left|W(\tilde{f})\right|^2 G(f-\tilde{f})d\tilde{f}=$$

$$=\frac{\Delta t}{U}\left(\sigma^2\,\Delta t\right)\int_{-f_д/2}^{f_д/2}\left|W(f)\right|^2 df=\frac{\Delta t}{U}\left(\sigma^2\,\Delta t\right)\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{-1/2}^{1/2}\left|W(\nu)\right|^2 d\nu\right)=\sigma^2\,\Delta t$$

$$M\left\{\hat{G}(n\Delta f)\right\}=\sigma^2\,\Delta t \qquad (17)$$

2) Теперь посмотрим оценку для косинусоиды:

$$x_{сл}[k]=A\cos(2\pi\nu_0 k+\Phi),$$

где A — заданная амплитуда, $\nu_0=\dfrac{f_0}{f_д}$ — заданная относительная частота, Φ — случайная величина с равномерным распределением на отрезке $[0,2\pi]$

Ее автокорреляционная функция

$$r_{xx}[m]=M\left\{A^2\cos(2\pi\nu_0 k+\Phi)\cos(2\pi\nu_0(k+m)+\Phi)\right\}=$$

$$=\frac{A^2}{2}M\left\{\cos(2\pi\nu_0 k)+\cos(2\pi\nu_0(2k+m)+2\Phi)\right\}=\frac{A^2}{2}\cos(2\pi\nu_0 k)$$

По теореме Виннера-Хинчина истинная СПМ будет

в нормированных частотах:

$$G(\nu)=\Delta t\frac{A^2}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\cos(2\pi\nu_0 k)\exp\left(-j2\pi\nu k\right)=$$

$$=\Delta t\frac{A^2}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu-\nu_0-m\right)+\delta\left(\nu+\nu_0-m\right),$$

для частот в герцах:

Выделение гармонических компонент из шума в периодограмме

$$G(f)=\Delta t\frac{A^2}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\cos(2\pi f_0 k\Delta t)\exp\left(-j2\pi fk\Delta t\right)=$$

$$=\Delta t\frac{A^2}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{f}{f_д}-\frac{f_0}{f_д}-m\right)+\delta\left(\frac{f}{f_д}+\frac{f_0}{f_д}-m\right)=$$

$$=\frac{A^2}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-f_0-mf_д\right)+\delta\left(f+f_0-mf_д\right)$$

Используя (14) и фильтрующее свойство дельта-функции, для математического ожидания оценки СПМ получаем

$$M\left\{\hat{G}(n\Delta f)\right\}=\Delta t\frac{A^2}{4U}\left(\left|W(f-f_0)\right|^2+\left|W(f+f_0)\right|^2\right). \quad (18)$$

3) Рассмотрим случайный сигнал

$$y_{сл}[k]=A\cos(2\pi\nu_0 k+\Phi)+\varepsilon[k].$$

на частоте f_0 математическое ожидание его периодограммы:

$$M\left\{\hat{G}(f_0)\right\}=\Delta t\frac{A^2}{4U}|W(0)|^2+\sigma^2\,\Delta t.$$

Для прямоугольного окна $W(0)=N=U$, где N — длина окна. Тогда на частоте f_0

$$M\left\{\hat{G}(f_0)\right\}=\Delta t\left(\frac{A^2}{4}N+\sigma^2\right). \quad (19)$$

Пример. На рис. 5.10.2 изображена периодограмма, построенная по одной из реализаций такого процесса для случая $N=64$ и $N=4096$, дисперсия шума $\sigma^2=25^2$, $A=5$, $f_0=2$ кГц, $f_д=1/\Delta t=10$ кГц.

В случае $N=64$ выполняется $\frac{A^2}{4}N<\sigma^2$. На фоне шума спектральная компонента сигнала не видна.

В случае $N=4096$ выполняется $\frac{A^2}{4}N>>\sigma^2$. На фоне шума отчетливо видна спектральная компонента в виде узкого максимума.

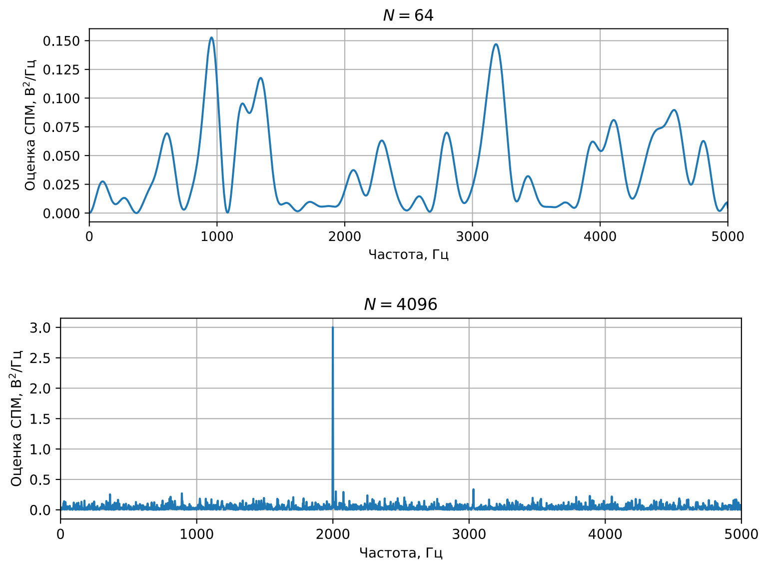


Рис. 5.10.2. Пример периодограммы.

Метод периодограмм Бартлетта

Метод периодограмм Бартлетта

- Будучи случайной, периодограмма (12) нуждается в статистическом усреднении.
- Процедура усреднения значительно упрощается, если процессы обладают свойством эргодичности. Это свойство означает, что почти каждый член ансамбля ведет себя в статистическом смысле так же, как и весь ансамбль.
- Таким образом, можно проанализировать статистические характеристики процесса путем усреднения по времени вдоль *одной реализации*. Условие эргодичности случайного процесса включает в себя и условие стационарности.

В методе Бартлетта производится усреднение по множеству периодограмм, получаемых по неперекрывающимся сегментам исходной последовательности $x[k]$.

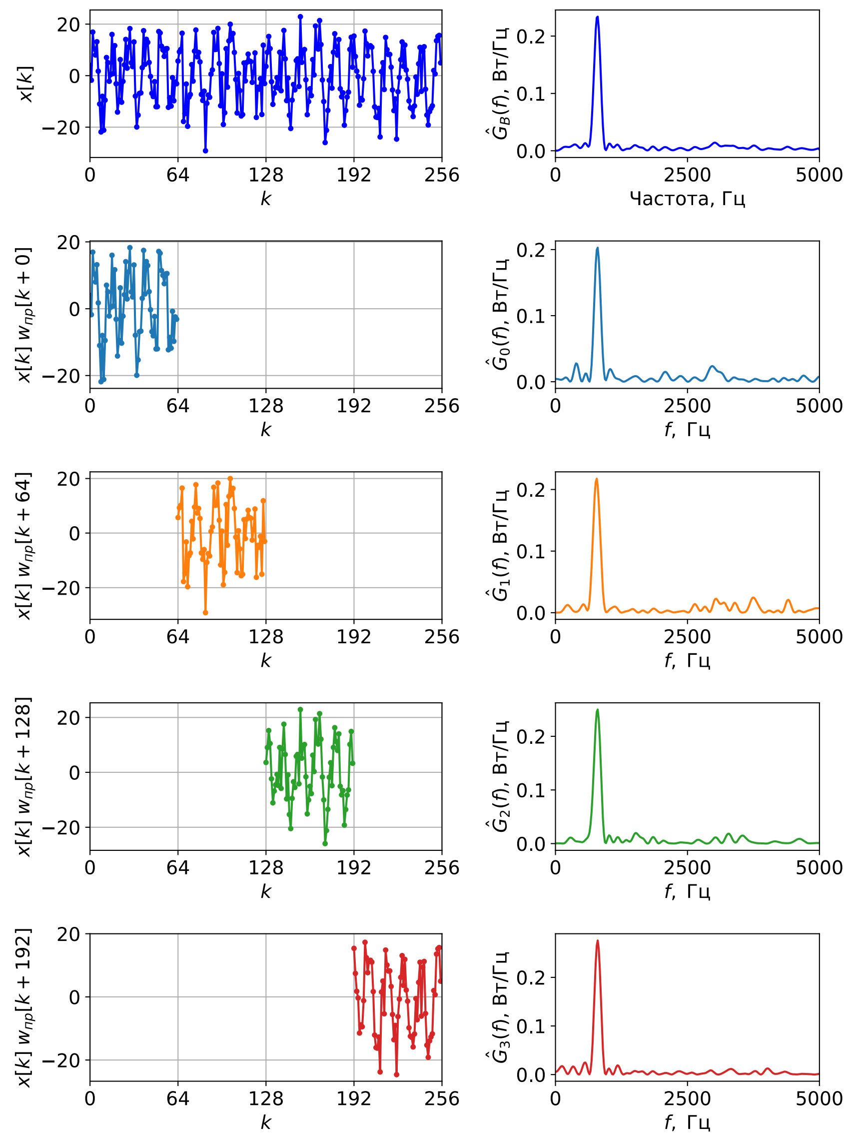


Рис. 5.10.3. Секционирование входной последовательности в методе Бартлетта. $D = 64,\ N = 256,\ P = 4.$

Метод периодограмм Бартлетта

Пусть заданы шаг дискретизации Δt анализируемого процесса и число отсчетов N действительной последовательности $x[k]$. Разделим последовательность $x[k]$ на P неперекрывающихся сегментов по D отсчетов в каждом (рис. 5.10.3), т. е. $N = P \cdot D$. Сегмент с индексом p, $p = 0, 1, \ldots, P-1$, задается формулой:

$$x^{(p)}[k] = x[pD + k] \qquad (20)$$

Для каждого сегмента $x^{(p)}[k]$ вычисляется периодограмма:

$$\hat{G}_p(f) = \frac{\Delta t}{D} \left| \sum_{k=0}^{D-1} x^{(p)}[k] e^{-j2\pi f k \Delta t} \right|^2 . \qquad (21)$$

Вычисления по формуле (21) производятся на некоторой сетке частот, для чего может быть использован алгоритм БПФ. Далее на этой сетке частот производится расчет усредненной оценки СПМ:

$$\hat{G}_B(f) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \hat{G}_p(f) \qquad (22)$$

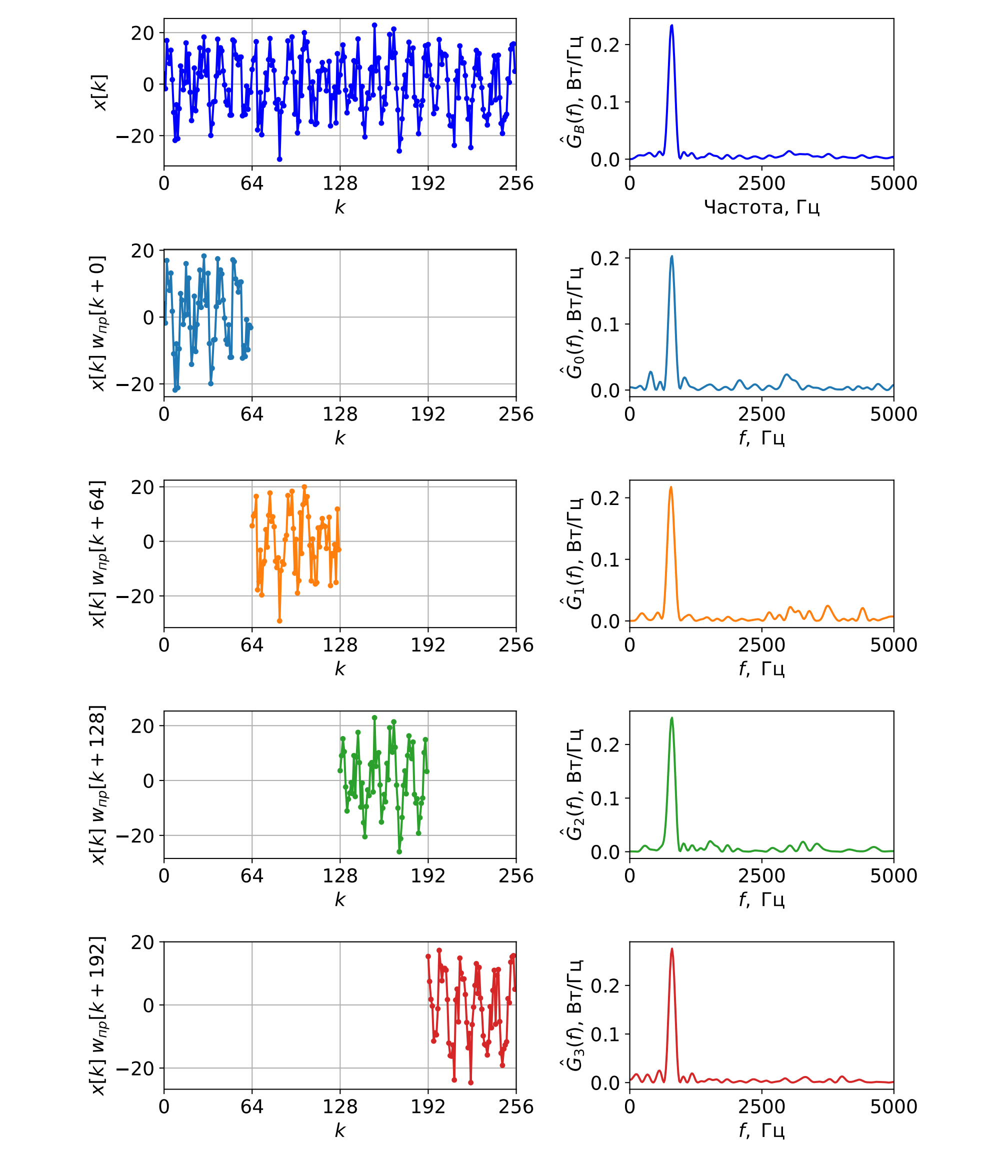


Рис. 5.10.3. Секционирование входной последовательности в методе Бартлетта. $D = 64,\ N = 256,\ P = 4.$

Метод периодограмм Бартлетта

Математическое ожидание оценки по методу Бартлетта

$$M\left\{\hat{G}_B(f)\right\} = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1} M\left\{\hat{G}_p(f)\right\} = M\left\{\hat{G}(f)\right\} \qquad (23)$$

где $M\left\{\hat{G}(f)\right\}$ определено ранее в формуле (14).

Величина дисперсии усредненной периодограммы обратно пропорциональна числу сегментов P (см. [2]):

$$D\left\{\hat{G}_B(f)\right\} \propto \frac{1}{P} G^2(f) \qquad (24)$$

При этом уменьшение дисперсии с увеличением P происходит в том случае, когда периодограммы сегментов статистически независимы. Однако при неизменном числе выборок N в таком случае уменьшается длина сегмента D, а значит и расширяется главный лепесток оконной функции.

Оценка СПМ (22) будет асимптотически несмещенной и при этом состоятельной за счет усреднения по периодограммам сегментов.

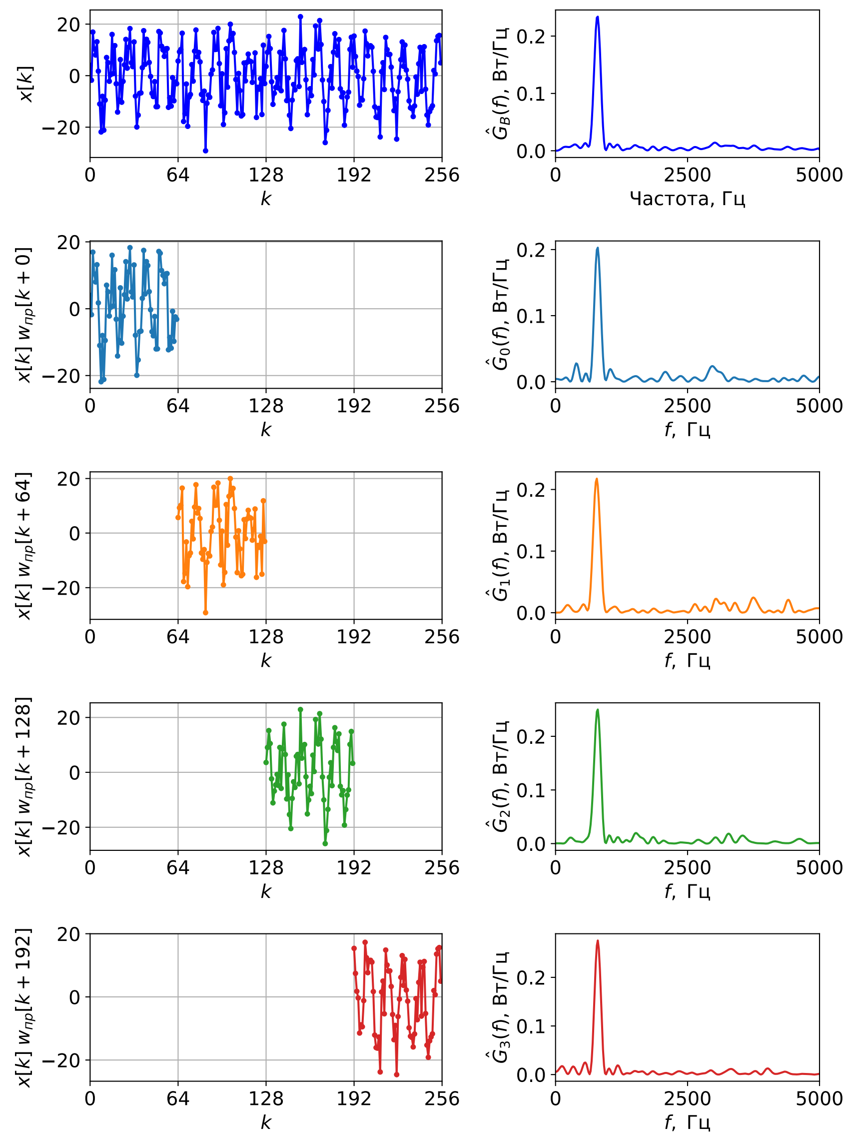


Рис. 5.10.3. Секционирование входной последовательности в методе Бартлетта. $D = 64,\ N = 256,\ P = 4.$

Метод периодограмм Уэлча

Модификацией метода Бартлетта является метод Уэлча, при котором используются оконные функции и перекрывающиеся сегменты.

Перед вычислением периодограммы каждого сегмента этот сегмент умножается на оконную функцию $w[k]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, D-1$.

Цель применения окна ослабить эффекты из-за боковых лепестков и уменьшить смещение оценки. Однако при этом незначительно ухудшается разрешение (по сравнению с прямоугольным окном).

Цель перекрытия сегментов – увеличить число усредняемых сегментов P при заданной длине N записи данных. Тем самым уменьшается дисперсия оценки СПМ.

Пусть заданы шаг дискретизации Δt анализируемого процесса и число отсчетов N действительной последовательности $x[k]$.

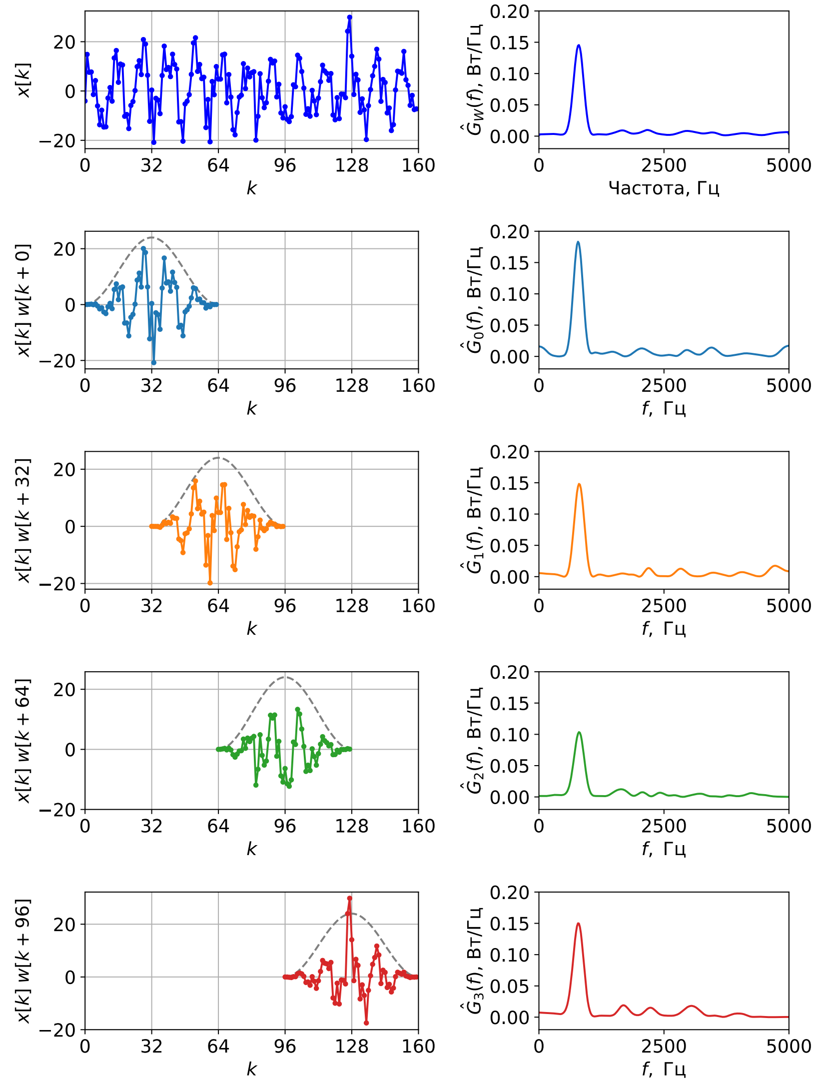


Рис. 5.10.4. Секционирование входной последовательности в методе Уэлча. $D = 64$, $S = 32$, $N = 160$, $P = 4$.

Метод периодограмм Уэлча

Разделим последовательность $x[k]$ на P перекрывающихся сегментов по D отсчетов в каждом, следующих с шагом S ($S \le D$) (рис. 5.10.4). Сегмент с индексом p, $p = 0, 1, \ldots, P-1$, задается формулой:

$$x^{(p)}[k] = x[pS + k] \quad (25)$$

Число P соответствует целой части числа $(N - D)/S + 1$. Для каждого сегмента вычисляется оценка

$$\hat{G}_p(f) = \frac{\Delta t}{U} \left| \sum_{k=0}^{D-1} w[k] x^{(p)}[k] e^{-j 2\pi f k \Delta t} \right|^2 . \quad (26)$$

где

$$U = \sum_{k=0}^{D-1} w^2[k] = \int_{-1/2}^{1/2} |W(\nu)|^2 d\nu \quad (27)$$

Множитель U необходим для того, чтобы оценка была несмещенной. Далее для выбранной сетки частот производится усреднение:

$$\hat{G}_W(f) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \hat{G}_p(f) \quad (28)$$

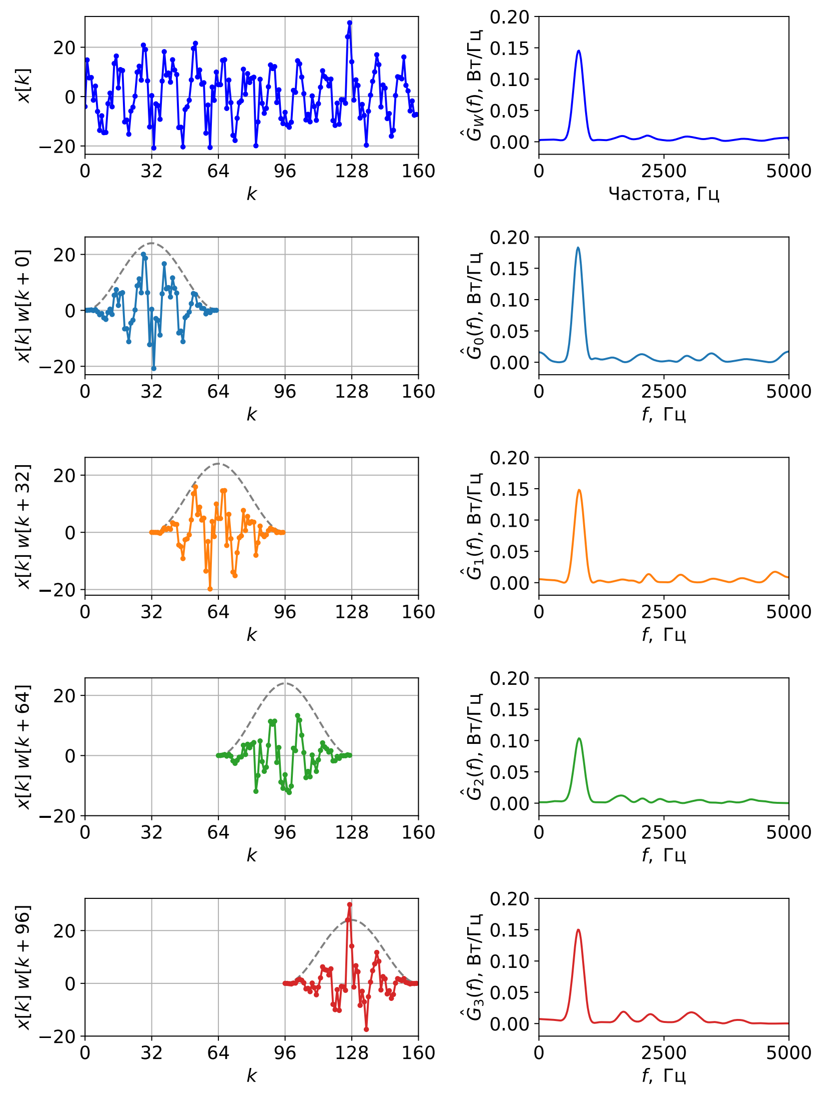


Рис. 5.10.4. Секционирование входной последовательности в методе Уэлча. $D = 64$, $S = 32$, $N = 160$, $P = 4$.

Метод периодограмм Уэлча

Математическое ожидание оценки

$$M\left\{\hat{G}_W(f)\right\}=\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}M\left\{\hat{G}_p(f)\right\}=\frac{\Delta t}{U}\int_{-f_д/2}^{f_д/2}\left|W(\tilde{f})\right|^2 G(f-\tilde{f})d\tilde{f}. \qquad (29)$$

$$W(f)=\sum_{k=0}^{N-1}w[k]e^{-j2\pi fk\Delta t}.$$

Дисперсия периодограммы Уэлча[2]

$$D\left\{\hat{G}_W(f)\right\}\propto\frac{1}{P}G^2(f). \qquad (30)$$

За счет перекрытия число сегментов P, как правило, больше, чем периодограмме Бартлетта для того же количества выборок. На практике часто используется перекрытие на 50%. Оптимальная степень перекрытия зависит от используемой весовой функции. Оценка СПМ (28) по методу Уэлча, как и оценка в методе Бартлетта, будет асимптотически несмещенной и при этом состоятельной.

Отметим, что на практике эффективно вычислять оценку СПМ по методу Уэлча на некоторой сетке частот, используя БПФ:

$$\hat{G}_W(n\Delta f)=\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{G}_p(n\Delta f),$$

$$\hat{G}_p(n\Delta f)=\frac{\Delta t}{U}\left|Y[n]\right|^2,\ \Delta f=\frac{f_д}{N_{\mathrm{FFT}}},$$

где $Y[n]$ — ДПФ последовательности $w[k]x^{(p)}[k]$, $k=0,1,\ldots,D-1$, которое можно вычислить по алгоритму быстрого преобразования Фурье. N_{FFT} эффективно взять из степеней двух.

---

[2] Оценка строится в предположении статистической независимости сегментов. При этом перекрытие сегментов может вносить некоторую зависимость.

Коррелограммный метод оценки СПМ

Коррелограммный метод оценки СПМ

Коррелограммный метод оценки СПМ основан на теореме Винера-Хинчина в дискретном варианте, которая заключается в том, что истинная спектральная плотность мощности (СПМ) и автокорреляционная функция дискретного случайного процесса связаны дискретным во времени преобразованием Фурье (ДВПФ).

$$G(f)=\Delta t\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_x[m]\exp(-j2\pi mf\Delta t). \qquad (31)$$

Для стационарного случайного процесса автокорреляционная функция (АКФ) (последовательность) $R_x[m]=M\{x[k]x[k+m]\}$. Это функция от временного сдвига $m\in Z$.

Пример. Белый шум является дельта-коррелированным. Для его дискретного варианта

$$R_x[m]=M\{x[k]x[k+m]\}=\mathbf{1}[m]\sigma^2,$$

где σ — стандартное отклонение, σ^2 — дисперсия. Его спектральная плотность мощности (истинная) по формуле (31)

$$G(f)=\Delta t\,\sigma^2.$$

Коррелограммный метод оценки СПМ

Оценка по методу Блэкмана-Тьюки $\hat{G}_{BT}(f)$ по выборке длиной в N отчетов определяется по формуле:

$$\hat{G}_{BT}(f) = \Delta t \sum_{m=-(N_1-1)}^{N_1-1} \hat{R}_x[m] w[m] \exp(-j2\pi m f \Delta t), \qquad (32)$$

где

- N_1 — ограничение на максимальный сдвиг в АКФ, $N_1 = \lceil N/10 \rceil$ (округление до ближайшего целого в сторону увеличения),
- $w[k]$ — симметричная относительно нуля оконная функция длины $2N_1 - 1$,
- $\hat{R}_x[m]$ — оценка автокорреляционной функции (коррелограмма) длиной в $2N_1 - 1$ отчетов, четная функция ($\hat{R}_x[m] = \hat{R}_x[-m]$). Используется смещенная либо несмещенная оценка АКФ.

Смещенная оценка АКФ вычисляется по формуле

$$\breve{R}_x[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-|m|-1} x[k] x[k+m], -(N_1-1) \le m \le N_1 - 1. \qquad (33)$$

Несмещенная оценка АКФ вычисляется по формуле ($(N-|m|)$ — максимальное число ненулевых слагаемых в сумме)

$$\hat{R}_x[m] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{k=0}^{N-|m|-1} x[k] x[k+m], -(N_1-1) \le m \le N_1 - 1. \qquad (34)$$

Несмещенность оценки АКФ означает, что $M\{\hat{R}_x(m)\} = R_x[m]$.

Связь между смещенной и несмещенной оценкой:

$$\breve{R}_x[m] = \frac{N-|m|}{N} \hat{R}_x[m]. \qquad (35)$$

При $N >> N_1 > |m|$ смещение невелико: $\breve{R}_x[m] \approx \hat{R}_x[m]$. Для того, чтобы оценка СПМ была неотрицательной, следует использовать смещенную оценку АКФ с окном, ДВПФ которого не принимает отрицательных значений (например, окно Бартлетта). Отрицательные значения оценки СПМ противоречат физическому смыслу. Оценка $\hat{G}_{BT}(f)$ (32) за счет симметрии $\hat{R}_x[m] = \hat{R}_x[-m]$ может быть представлена в виде

$$\hat{G}_{BT}(f) = \Delta t \left(2 \sum_{m=0}^{N_1-1} \left(\hat{R}_x[m]\, w[m] \cos(2\pi m f \Delta t) \right) - \hat{R}_x[0] \right) \qquad (36)$$

Коррелограммный метод оценки СПМ

Для дискретной сетки частот $f_n = f_{\text{д}} \dfrac{n}{N}$ сумма в этом выражении представляет ничто иное, как действительную часть коэффициентов ДПФ:

$$\hat{G}_{BT}(f_n) = \Delta t \left(2 \sum_{m=0}^{N_1-1} \left(\hat{R}_x[m] w[m] \cos \frac{2\pi mn}{N_{\text{FFT}}} \right) - \hat{R}_x[0] \right) \quad (37)$$

Пример. Предположим, что требуется оценить СПМ случайного процесса

$$x_{\text{сл}}[k] = a_1 \sin(2\pi f_1 k \Delta t + \phi_1) + e[k]$$

где $a_1 = 5$, $e[k]$ — дискретный белый шум с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 64$, $f_1 = 2\,\text{кГц}$, $f_{\text{д}} = 1/\Delta t = 10\,\text{кГц}$. На рисунке 5.10.5 показаны результаты оценки СПМ методом Блэкмана-Тьюки с $N_1 = 1024$, $N_1 = 103$ для двух видов окон со смещенной оценкой АКФ. Видно, что оценка с прямоугольным окном принимает в том числе отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу СПМ.

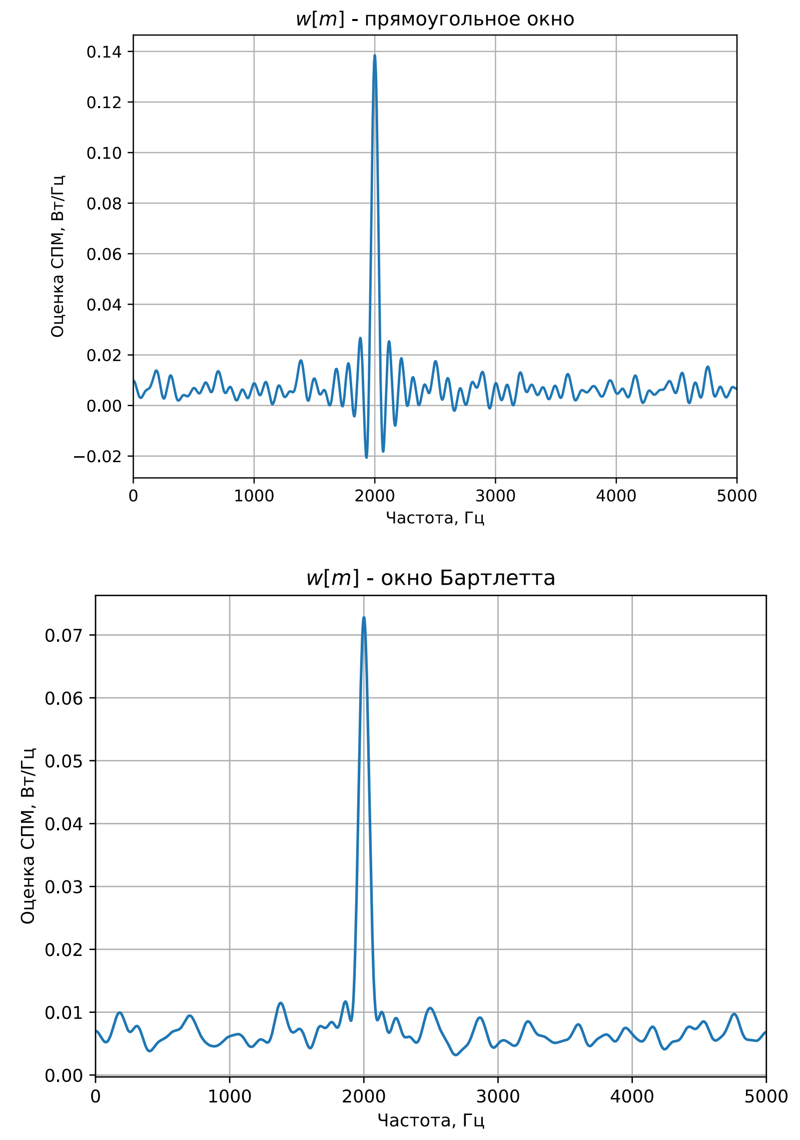


Рис. 5.10.5. Результаты оценки СПМ по методу Блэкмана-Тьюки.

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения с лекции 20 марта 2023 г.

№1. Непрерывный стационарный случайный процесс обладает узкополосной плотностью мощности $G(f)$, равной нулю при $|f| \geq 10$ кГц. На интервале в 10 с реализация этого случайного процесса подвергается дискретизации с частотой 20 кГц, после чего спектральная плотность мощности оценивается методом усредненных периодограмм (методом Бартлетта). При вычислении периодограмм используется разбиение последовательности на сегменты и вычисление ДПФ на каждом сегменте:

$$\hat{G}_p(n\Delta f) = \frac{\Delta t}{D}\left|X_p[n]\right|^2,$$

где

$$X_p[n] = \sum_{k=0}^{D-1} x_p(k\Delta t) e^{-j\frac{2\pi}{N_{\text{FFT}}}nk}, \; n = 0,1,\dots, N_{\text{FFT}} - 1.$$

$$x_p(k\Delta t) = x\big((pD+k)\Delta t\big), \;\; p = 0,\; 1,\; 2,\; \dots,\; P-1.$$

Длина сегментов сигнала совпадает с размерностью ДПФ и равна D.

а) Чему равна длина N последовательности, по которой производится оценка?

б) При каком наименьшем значении D расстояние между частотами, в которых вычисляется спектральная оценка, не превышает 10 Гц?

в) Какое число неперекрывающихся сегментов P используется при анализе в предположении, что их длина соответствует результату предыдущего пункта?

г) Нам хотелось бы уменьшить дисперсию оценки в 2 раза, сохранив расстояние между отсчетами ДПФ по оси частот. Сформулируйте метод достижения поставленной цели.

Список литературы

[1] Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале Matlab. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 560 с.

[2] Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

[3] Stoica P., Moses R. L. Spectral Analysis of Signals. : Pearson Prentice Hall, 2005.

Задачи с лекции

Информация о контрольной работе №3

27 марта 2023 г. в часы лекции (9:00-10:25) в 115 КПМ будет письменная контрольная работа №3 по материалам лекций блока 3 "Основы цифрового спектрального анализа" (лекции с 6 февраля по 20 марта 2023 г.). Рекомендуется также повторить лекции 12 и 19 сентября 2022 г. (ДВПФ и ДПФ).

Примерное содержание варианта контрольной работы.

Задача №1.	ДВПФ, ДПФ. Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал. Особенности цифрового спектрального анализа методом ДПФ.
Задача №2.	Окна в спектральном анализе. Спектральная плотность мощности. Теорема Винера-Хинчина. Непараметрические методы спектрального анализа случайных последовательностей.
Задача №3.	Алгоритмы вычисления ДПФ: - матричная форма ДПФ - алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) - алгоритм Герцеля

Перечень контрольных вопросов по блоку 3 «Основы цифрового спектрального анализа» для подготовки к экзамену.

1. Перечислите основные особенности цифрового спектрального анализа методом ДПФ.
2. В чем заключаются эффекты растекания спектральных компонент («leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна?
3. Как влияет на результат спектрального анализа эффект наложения спектров?
4. Приведите примеры оконных функций для спектрального анализа.
5. Сформулируйте условие гарантированного различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды при ДВПФ-анализе.
6. Какое влияние оказывают боковые лепестки оконной функции в спектральном анализе методом ДПФ?
7. В чем состоит преимущество алгоритмов быстрого преобразования Фурье?
8. Приведите определение спектральной плотности мощности (СПМ) для случая а) процесса с непрерывным временем; б) дискретного случайного процесса. В чем заключается теорема Винера-Хинчина для этих случаев?
9. В чем отличие случайного процесса от его реализации?
10. Приведите алгоритм вычисления оценки СПМ по методу периодограмм (немодифицированных) с использованием БПФ.
11. В чем отличие немодифицированного метода периодограмм от методов Бартлетта и Уэлча?