

می خواهیم نشان دهیم که ماتریس  $A_k$  بهترین تخمین برای  $A$  در فرم فروبینیوس می باشد. نشان می دهیم که برای هر ماتریس  $B$  با رنک حداکثر  $k$  رابطه زیر برقرار است

$$\|A - A_k\|_F \leq \|A - B\|_F$$

اثبات برگرفته از [این لینک](#)

**Theorem 4.7** *For any matrix  $B$  of rank at most  $k$*

$$\|A - A_k\|_F \leq \|A - B\|_F$$

**Proof:** Let  $B$  minimize  $\|A - B\|_F^2$  among all rank  $k$  or less matrices. Let  $V$  be the space spanned by the rows of  $B$ . The dimension of  $V$  is at most  $k$ . Since  $B$  minimizes  $\|A - B\|_F^2$ , it must be that each row of  $B$  is the projection of the corresponding row of  $A$  onto  $V$ , otherwise replacing the row of  $B$  with the projection of the corresponding row of  $A$  onto  $V$  does not change  $V$  and hence the rank of  $B$  but would reduce  $\|A - B\|_F^2$ . Since each row of  $B$  is the projection of the corresponding row of  $A$ , it follows that  $\|A - B\|_F^2$  is the sum of squared distances of rows of  $A$  to  $V$ . Since  $A_k$  minimizes the sum of squared distance of rows of  $A$  to any  $k$ -dimensional subspace, it follows that  $\|A - A_k\|_F \leq \|A - B\|_F$ . ■